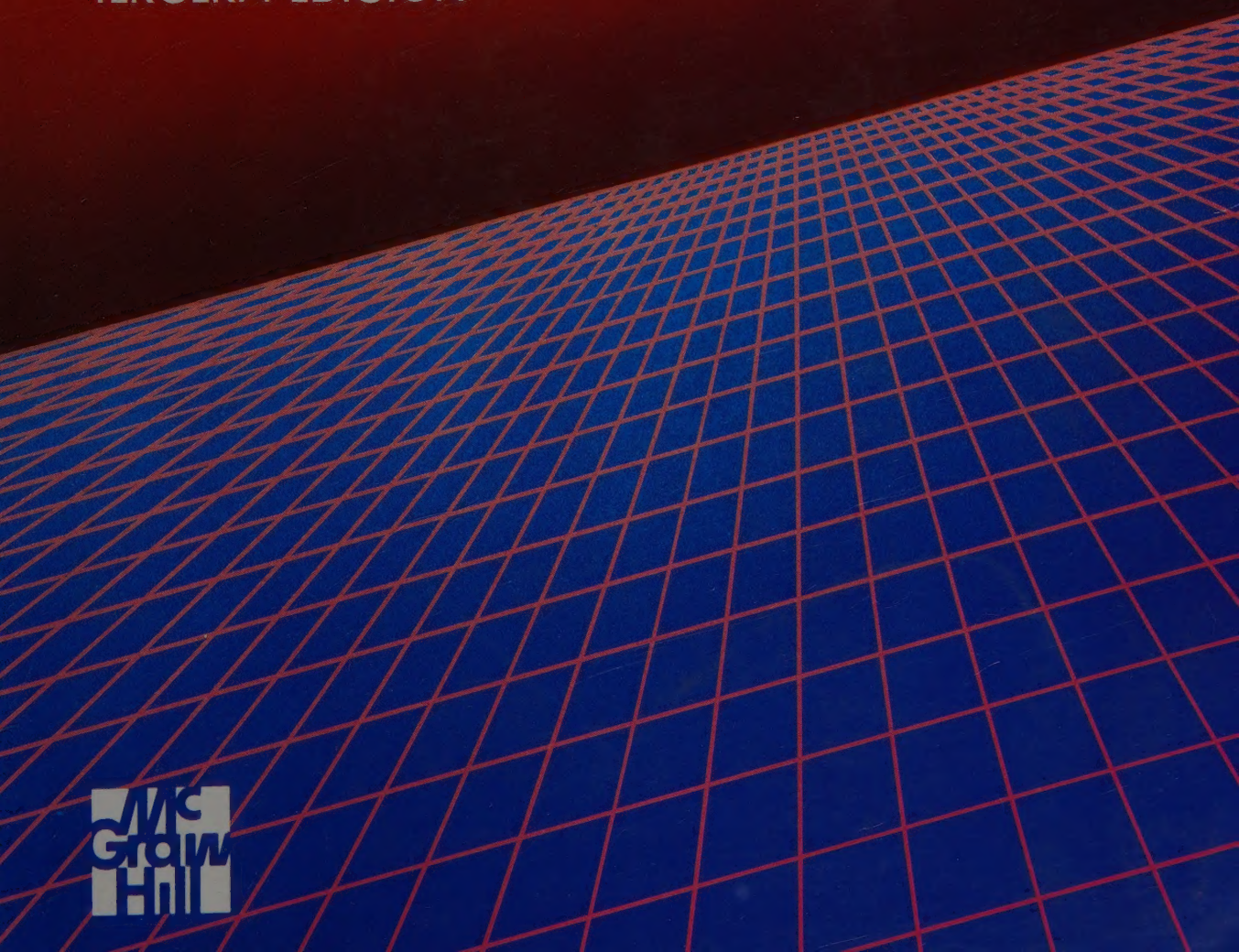
FRANK S. BUDNICK

MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES

TERCERA EDICIÓN



Mc Graw Hill

MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES

3a. ED. (SEGUNDA EN ESPAÑOL)

FRANK S. BUDNICK

University of Rhode Island

Traducción:
Efrén Alaurre Miguel
Traductor técnico

Revisión Técnica:
Alfredo Díaz Mata
Licenciado en Administración, FCA, UNAM
Coordinador de Matemáticas
Facultad de Contaduría y Administración, UNAM

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SYDNEY • TOKIO • TORONTO

MATEMÁTICAS
APLICADAS PARA
ADMINISTRACIÓN,
ECONOMÍA Y
CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES

3a. ED. (SEGUNDA EN ESPAÑOL)

FRANK S. BUDNICK

University of Rhode Island

Traducción:
Efrén Alatorre Miguel
Traductor técnico

Revisión Técnica:
Alfredo Díaz Mata
Licenciado en Administración, FCA, UNAM
Coordinador de Matemáticas
Facultad de Contaduría y Administración, UNAM

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMIÁ Y CIENCIAS SOCIALES

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1990, respecto a la segunda edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MÉXICO, S. A. DE C. V.
Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 968-422-563-6
ISBN 968-451-106-X primera edición

Traducido de la tercera edición en inglés de
APPLIED MATHEMATICS FOR BUSINESS, ECONOMICS AND THE SOCIAL SCIENCES
Copyright © MCMLXXXVIII, by McGraw-Hill, Inc. U. S. A.
ISBN 0-07-008876-4

1502346789 P.C.-90 09876543201

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Mayo del 2001 en
LITOARTE
San Andrés Atoto No. 21 A
Col. Ind. San Andrés Atoto
Nuacalpan Edo. De Méx. 53519

Se tiraron 3000 ejemplares

SEMBLANZA DEL AUTOR

Frank S. Budnick obtuvo su licenciatura de ingeniero industrial en Rutgers, The State University of New Jersey. Y recibió su maestría y doctorado en la University of Maryland. En la actualidad es profesor de tiempo completo en la University of Rhode Island, donde enseña desde 1971. Ha trabajado en la industria privada y también en el gobierno federal. Efectuó investigaciones, financiadas por el gobierno federal, en la esfera de la justicia criminal y en la transferencia de tecnología entre universidades y la industria. Es coautor de la obra *Principles of Operations Research for Management*, 2a. ed., publicada por Richard D. Irwin, Inc. Ha escrito además *Finite Mathematics with Applications*, un libro editado por McGraw-Hill.

A TODOS MIS AMIGOS

CONTENIDO

PREFACIO xvii

CAPÍTULO 1 FUNCIONES MATEMÁTICAS 1

1.1 Funciones 1
Definición de función / Naturaleza y notación de las funciones / Consideraciones de dominio y rango / Dominio y rango restringidos / Funciones multivariadas

1.2 Tipos de funciones 12
Funciones constantes / Funciones lineales / Funciones cuadráticas / Funciones cúbicas / Funciones polinomiales / Funciones racionales / Funciones exponenciales / Funciones logarítmicas / Combinaciones de funciones / Funciones compuestas / Funciones implícitas

1.3 Representación gráfica de las funciones 25
Sistema de coordenadas rectangulares / Graficación de funciones en dos dimensiones / Prueba de la línea vertical

CAPÍTULO 2 ECUACIONES LINEALES 39

2.1 Características de las ecuaciones lineales 40
Forma general / Representación mediante ecuaciones lineales / Generalización para ecuaciones lineales de *n* variables

2.2 Características gráficas 47
Graficación de ecuaciones con dos variables / Intersecciones / La ecuación $x = k$ / La ecuación $y = k$ / Pendiente

2.3 Forma de pendiente-intersección 57
Desde otro punto de vista / Interpretación de la pendiente y la intersección con el eje y

2.4 Determinación de la ecuación de una línea recta 61
Pendiente e intersección / Pendiente y un punto / Dos puntos

2.5 Ecuaciones lineales con dos o más variables 67
Sistemas de coordenadas tridimensionales / Ecuaciones con tres variables / Ecuaciones con más de tres variables

2.6 Otras aplicaciones 74

MINICASO ANÁLISIS DE ECUACIONES LINEALES POR COMPUTADORA 83

CAPÍTULO 3 FUNCIONES LINEALES: APLICACIONES **85**

3.1 Funciones lineales 85
Forma y suposiciones generales / Funciones lineales de costo / Funciones lineales de ingresos / Funciones lineales de utilidades

3.2 Otros ejemplos de funciones lineales 94

3.3 Modelos del punto de equilibrio 102
Suposiciones / Análisis del punto de equilibrio

MINICASO DECISIÓN DE CAMBIO DE AUTOMÓVIL 118

CAPÍTULO 4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES **121**

4.1 Introducción 122
Sistemas de ecuaciones / Conjuntos solución

4.2 Sistemas de ecuaciones con dos variables 123
Análisis gráfico / Soluciones gráficas / El procedimiento por eliminación / Sistemas ($m \times 2$)

4.3 Método de eliminación de Gauss 132
Idea general / El método

4.4 Sistemas de tres variables 140
Análisis gráfico / Procedimiento de eliminación de Gauss para los sistemas (3 × 3) / Menos de tres ecuaciones / Sistemas de n variables

4.5 Aplicaciones selectas 147
Definición de las funciones matemáticas / Problema de la mezcla de productos / Modelo de mezclado / Modelo de cartera

APÉNDICE PROCEDIMIENTO DE ELIMINACIÓN PARA SISTEMAS (3 × 3) 161

CAPÍTULO 5 ÁLGEBRA DE MATRICES 165

5.1 Introducción a las matrices 165
¿Qué es una matriz? / Finalidad del estudio del álgebra de matrices

5.2 Tipos especiales de matrices 168
Vectores / Matrices cuadradas / Transpuesta de una matriz

5.3 Operaciones con matrices 171
Adición y sustracción de matrices / Multiplicación escalar / El producto interno / Multiplicación de matrices / Representación de una ecuación / Representación de los sistemas de ecuaciones

5.4 La determinante 182
Determinante de una matriz (1 × 1) / Determinante de una matriz (2 × 2) / Determinante de una matriz (3 × 3) / El método de cofactores / Propiedades de las determinantes

5.5 La inversa de una matriz 192
Determinante de la inversa / Obtención de la inversa por medio de cofactores (opcional) / La inversa y los sistemas de ecuaciones

5.6 Algunas aplicaciones 201

CAPÍTULO 6 PROGRAMACIÓN LINEAL: UNA INTRODUCCIÓN 223

6.1 Programación lineal 224
Introducción / Una aplicación / Restricciones estructurales y restricciones de no negatividad

6.2 Algunas aplicaciones de la programación lineal 226
Modelos de dieta balanceada / Modelos de transporte / Modelos de la elaboración de presupuesto de capital / Modelos de mezclado

6.3 Soluciones gráficas 238
Gráficas de desigualdades lineales / Sistemas de desigualdades lineales / Área de soluciones factibles / Incorporación de la función objetiva / Soluciones de punto en la esquina / Otras soluciones óptimas / Ausencia de solución factible / Soluciones no acotadas

6.4 Métodos de solución por computadora 254
Requisitos del método símplex / Soluciones factibles básicas y el método símplex / Un ejemplo de un paquete de programación lineal / Precios ficticios / Análisis de sensibilidad

MINICASO CONCESIÓN DE CONTRATOS 282

CAPÍTULO 7 EL MÉTODO SÍMPLEX **285**

7.1 El procedimiento símplex 286
Panorama general del procedimiento símplex / Solución por enumeración / Álgebra del método símplex / Incorporación de la función objetivo / Resumen del método símplex / Problemas de maximización con las restricciones mixtas / Problemas de minimización

7.2 Fenómenos especiales 304
Otras soluciones óptimas / Ausencia de solución factible / Soluciones no acotadas / Tablas condensadas

7.3 El problema dual 310
Formulación del problema dual / Soluciones al problema primario y dual / Epílogo

CAPÍTULO 8 OTRAS APLICACIONES Y EXTENSIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL **319**

8.1 El modelo de transporte 320
Forma y suposiciones generales / Métodos de solución / Métodos de solución por computadora

8.2 El modelo de asignación 338
Forma y suposiciones generales / Métodos de solución

8.3 Programación en enteros 341
Forma y suposiciones generales / Formulación de los problemas / Métodos de solución

8.4 Programación de metas 356
Forma y suposiciones generales / Métodos de solución

MINICASO UBICACIÓN DEL EQUIPO PARA INCENDIOS 370

CAPÍTULO 9 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PROBABILIDAD 373

9.1 Introducción a los conjuntos y operaciones con conjuntos 360
Conjuntos / Conjuntos especiales / Representación mediante diagramas de Venn / Operaciones con conjuntos

9.2 Permutaciones y combinaciones 383
Permutaciones / Combinaciones

9.3 Conceptos básicos de la probabilidad 392
Experimentos, resultados y eventos / Probabilidades / Algunas reglas más de probabilidad

9.4 Estados de independencia y dependencia estadísticas 407
Independencia estadística / Dependencia estadística

MINICASO EL PROBLEMA DEL CUMPLEAÑOS 426

CAPÍTULO 10 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD 429

10.1 Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad 430
Variables aleatorias / Distribuciones de frecuencia / Distribuciones de probabilidad / Histogramas

10.2 La media y la desviación estándar 439
La media / Media de una distribución discreta de probabilidad / La desviación estándar

10.3 Distribución binomial de probabilidad 449
El proceso de Bernoulli / Distribución binomial / La media y la desviación estándar de la distribución binomial

10.4 Distribución normal de probabilidad 456
Distribución normal de probabilidad

CAPÍTULO 11 ALGUNAS APLICACIONES DE LA PROBABILIDAD 475

11.1 Procesos de Markov 475
Procesos de Markov / Predicción de estados futuros / Estados de equilibrio / Matrices de transición regular

11.2 Teoría de decisiones 491
Introducción a la teoría de decisiones / Toma de decisiones en condiciones de certidumbre / Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre / Toma de decisiones en condiciones de riesgo

11.3 Teoría de juegos: toma de decisiones con un oponente activo 503
Juegos de suma cero entre dos personas / Estrategias mixtas / Otras consideraciones

MINICASO A CAMBIO DE MARCA 518
MINICASO B BANCA DE INVERSIÓN 519

CAPÍTULO 12 FUNCIONES NO LINEALES 521

12.1 Cuándo son inapropiadas las funciones lineales 522

12.2 Funciones cuadráticas y sus características 526
Forma matemática / Representación gráfica / Ideas especiales en el trazado de funciones cuadráticas / Determinación de la ecuación de funciones cuadráticas

12.3 Funciones cuadráticas: aplicaciones 535

12.4 Otras funciones no lineales 543
Funciones polinomiales / Funciones racionales

MINICASO ANÁLISIS NO LINEAL DEL EQUILIBRIO Y DE LAS UTILIDADES 552

CAPÍTULO 13 DIFERENCIACIÓN 553

13.1 Límites y continuidad 554
Límites de las funciones / Algunas propiedades de los límites / Límites e infinito / Continuidad

13.2 Tasa promedio de cambio 571
Tasa promedio de cambio y pendiente

13.3 La derivada 578
Tasa instantánea de cambio / Aproximación del límite a la obtención de la derivada / Revisión de tasa instantánea del cambio

13.4 Diferenciación 590
Reglas de diferenciación / Revisión de la tasa instantánea de cambio

13.5 Derivadas de orden superior 598
Segunda derivada / Tercera derivada y derivadas de orden superior

13.6 Diferenciación de formas funcionales especiales (opcional) 601
Regla de la cadena / Otras derivadas

CAPÍTULO 14 OPTIMIZACIÓN: METODOLOGÍA Y APLICACIONES 615

14.1 Derivadas: interpretaciones adicionales 616
Primera derivada / Segunda derivada / Concavidad y puntos de inflexión / Concavidad desde otra perspectiva

14.2 Identificación de valores máximos y mínimos 626
Extremos relativos / Puntos críticos / Prueba de la primera derivada / Prueba de la segunda derivada / Cuando falla la prueba de la segunda derivada / Prueba de la derivada de orden superior (opcional)

14.3 Consideraciones de dominio restringido 641
Cuándo el dominio es restringido

14.4 Trazado de curvas 644
Puntos de datos clave

14.5 Aplicaciones a los ingresos, costos y utilidades 650
Aplicaciones a los ingresos / Aplicaciones a los costos / Aplicaciones a las utilidades / Aproximación marginal a la maximización de utilidades / Análisis de las utilidades marginales

14.6 Otras aplicaciones 671

MINICASO MODELO DE LA CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO (CED) 692

CAPÍTULO 15 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS **695**

15.1 Características de las funciones exponenciales 696
Características de las funciones exponenciales / Funciones exponenciales de base e / Conversión a las funciones de base e

15.2 Aplicaciones de las funciones exponenciales 704

15.3 Derivadas y sus aplicación 714
Derivadas de funciones exponenciales

15.4 Funciones logarítmicas y sus derivadas 719
Logaritmos / Propiedades de los logaritmos / Solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales / Funciones logarítmicas / Derivadas de funciones logarítmicas

15.5 Aplicaciones de las funciones logarítmicas 729

MINICASO ¿HORA DE LA MUERTE? 740

CAPÍTULO 16 OPTIMIZACIÓN: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES **743**

16.1 Representación gráfica de funciones bivariadas 744
Representación gráfica / Trazado de funciones bivariadas

16.2 Derivadas parciales 748
Derivadas de funciones bivariadas / Interpretación de las derivadas parciales / Derivadas de segundo orden

16.3 Optimización de funciones bivariadas 761
Puntos críticos / Cómo distinguir los puntos críticos

16.4 Aplicaciones de optimización bivariada 775

16.5 Optimización de n variables (opcional) 787
Condición necesaria de los extremos relativos / Condiciones suficientes

16.6 Optimización sujeta a restricciones (opcional) 792
El método de multiplicador de Langrange (restricción de igualdad) / Condición suficiente / Caso de restricción de una sola igualdad con n variables / Interpretación de

MINICASO MODELO DE INVENTARIO DE PEDIDOS ATRASADOS 805

CAPÍTULO 17 CÁLCULO INTEGRAL: UNA INTRODUCCIÓN 807

17.1 Antiderivadas 808
Concepto de antiderivada / Funciones de ingresos y costos

17.2 Reglas de integración 813
Integración / Reglas de integración

17.3 Reglas adicionales de integración 818

17.4 Ecuaciones diferenciales 824
Clasificación de las ecuaciones diferenciales / Solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias / Extensiones de las ecuaciones diferenciales

17.5 Otras técnicas de integración (opcional) 831
Integración por partes / Integración por fracciones parciales

CAPÍTULO 18 CÁLCULO INTEGRAL: APLICACIONES 847

18.1 Integral definida 847
La integral definida / Evaluación de las integrales definidas / Propiedades de las integrales definidas

18.2 Integrales definidas y áreas 857
Áreas entre una función y el eje x / Obtención del área entre curvas

18.3 Métodos de aproximación 869
Regla del rectángulo / Regla del trapecio / Regla de Simpson

18.4 Aplicaciones del cálculo integral 877

18.5 Cálculo integral y probabilidad (opcional) 891

MINICASO EL DILEMA DEL SEGURO SOCIAL: UN PROBLEMA DE SOLVENCIA 900

CAPÍTULO 19 MATEMÁTICAS FINANCIERAS 903

19.1 El interés y su cálculo 904
Interés simple / Interés compuesto

19.2 Cálculos de un solo pago 908
Interés compuesto / Valor presente / Otras aplicaciones de la fórmula de COMPOUND-AMOUNT / Tasas efectivas de interés

19.3 Las anualidades y su valor futuro 919
Suma de una anualidad / Determinación del importe de una anualidad

19.4 Las anualidades y su valor presente 925
Valor presente de una anualidad / Determinación del importe de la anualidad / Hipotecas

19.5 Análisis de costo-beneficio 934
Flujo de efectivo con descuento / Extensiones de los análisis de flujo de efectivo con descuento

MINICASO LA CORPORACIÓN ZYX 947

APÉNDICE UN REPASO DE ÁLGEBRA (OPCIONAL)

A.1 Sistema de números reales A2
Números reales / Valor absoluto

A.2 Polinomios A4
Exponentes positivos enteros / Expresiones polinomiales / Adición y sustracción de polinomios / Multiplicación de polinomios / División de polinomios

A.3 Factorización A10
Factores de monomios / Polinomios cuadráticos / Otras formas especiales

A.4 Fracciones A14
Adición y sustracción de fracciones / Multiplicación y división

A.5 Exponentes y radicales A18
Exponentes fraccionarios / Radicales

A.6 Ecuaciones A21
Las ecuaciones y sus propiedades / Solución de ecuaciones de primer grado / Solución de ecuaciones de segundo grado / Solución de desigualdades

Respuestas a algunos ejercicios de seguimiento y pruebas de capítulo A29

ÍNDICE I1

PREFACIO

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son parte integral de la formación académica de los estudiantes de administración, economía y ciencias sociales. Se observa un deseo creciente de mejorar el nivel de las técnicas cuantitativas que poseen los que se gradúan en esta clase de programas. El objetivo no es hacer de ellos especialistas en matemáticas, sino lograr que se sientan cómodos en un ambiente donde cada vez se hace más uso del análisis cuantitativo y de la computadora. Los estudiantes empiezan a descubrir que es preciso integrar las matemáticas, el análisis estadístico y la computadora tanto en los cursos optativos como en los cursos obligatorios de los programas. Y además las organizaciones van volviéndose usuarios más eficaces de las técnicas cuantitativas y de la computadora. Los encargados de la toma de decisiones estarán mejor preparados para trabajar en este tipo de ambiente si se familiarizan con las clases más cumunes de los análisis cuantitativos y con la tecnología de la computadora. Ese dominio les ayudará a ser mejores "críticos" y "usuarios" de estas herramientas y, según se supone, perfeccionarán su habilidad en la toma de decisiones.

ORGANIZACIÓN DEL LIBRO

Éste es un libro de matemáticas aplicadas para estudiantes de administración, economía y ciencias sociales. Ofrece una exposición muy completa de algunos temas de las matemáticas finitas y del cálculo. Es una obra adecuada para los estudiantes de ciencias sociales, si bien está destinada principalmente a los que estudian administración y economía. El libro, diseñado ante todo para un curso de dos bimestres, puede adaptarse fácilmente a un curso de un bimestre. Puede usarse también en escuelas de dos años y en las de cuatro años, así como en el nivel básico de los programas para graduados entre cuyos requisitos figuren las matemáticas. A esa categoría suelen pertenecer los programas escolares de administración y de economía.

La figura adjunta muestra algunas de las formas *sugeridas* de utilizar esta obra.

Entre las características del libro se encuentran las siguientes:

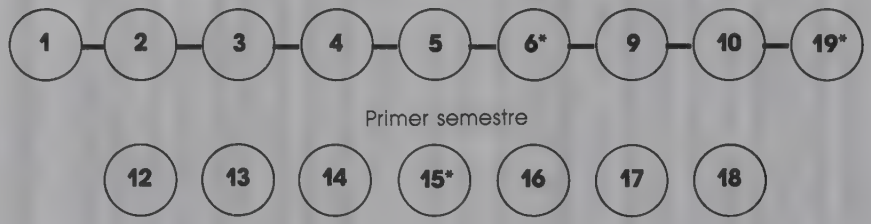
1 Un nivel de presentación que desarrolla y refuerza los temas con mucho cuidado.

2 Un estilo que favorece la intuición de los estudiantes y proporciona mucho reforzamiento visual (más de 300 figuras).

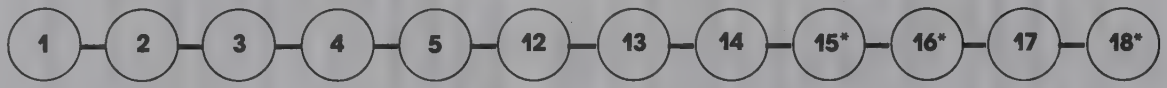
3 Una orientación aplicada que motiva a los alumnos y le imprime una orientación práctica al estudio de las matemáticas.

4 Un enfoque que primero desarrolla el concepto matemático y luego lo refuerza con aplicaciones.

A Combinación de matemáticas finitas/cálculo para dos semestres



B Combinación de matemáticas finitas/cálculo para un semestre



C El cálculo como materia principal en un semestre

D Las matemáticas finitas como material principal en un semestre

*Capítulo opcional

Algunas estructuras recomendadas para el curso

5 Un enfoque que reduce al mínimo el empleo de pruebas matemáticas rigurosas. Algunas pruebas selectas se incluyen al final de ciertos capítulos para los que se interesen en ellas.

6 Ayudas especiales cuya finalidad es llenar las lagunas que muestran todos los alumnos que inician este tipo de cursos: insuficientes conocimientos de álgebra. Entre las ayudas se cuenta un repaso opcional de los principios básicos del álgebra que viene al final del apéndice. A lo largo del libro se recurre asimismo a "Recordatorios de álgebra" con objeto de ayudar al lector a recordar las reglas o conceptos fundamentales. El recordatorio es casi siempre una reformulación de una regla o concepto con referencia a la sección correspondiente del apéndice donde viene el repaso de álgebra.

7 Notas para el estudiante que proporcionan ideas especiales respecto a un concepto o aplicación matemático.

8 "Puntos para reflexión y discusión" que permiten al lector hacer una pausa y reconsiderar un concepto o ejemplo desde un ángulo distinto. Su finalidad es reforzar y ampliar los conocimientos del alumno.

9 Trece minicasos de final de capítulo, que contienen aplicaciones interesantes y de mayor dificultad.

10 Una mayor orientación al empleo de la computadora como herramienta para realizar los análisis matemáticos.

11 Muchas otras ayudas didácticas: más de 450 ejemplos resueltos, multitud de ejercicios (casi 3500), pruebas de capítulo, objetivos de capítulo, lista de términos y conceptos básicos y listas sucintas de fórmulas importantes.

12 Un manual del instructor, que contiene las respuestas a todos los ejercicios y pruebas, sugerencias para otras estructuras del curso, ejemplos representativos de nuevas aplicaciones y un banco de preguntas para preparar problemas y exámenes.

El libro incluye gran número de aplicaciones diversas. Con ello se pretende que los profesores abarquen en estos capítulos el número de aplicaciones que juzguen adecuadas para sus alumnos.

Se considera que algunos ejercicios presentan mayor dificultad que otros. A ellos se les antepone el asterisco (*).

RESUMEN DE LAS INNOVACIONES Y CAMBIOS DE LA TERCERA EDICIÓN

Al preparar esta revisión hice una encuesta entre los profesores que usaron la segunda edición y entre los que decidieron no adoptarla. Fueron de suma utilidad los comentarios recogidos en la encuesta. Con el rediseño del libro algunos contenidos se eliminaron o redujeron, otros se ampliaron y además se reorganizaron algunos temas. Confío en que el libro satisfaga mejor las necesidades de quienes lo sigan utilizando; deseo que el profesor que lo adopta por primera vez y sus alumnos estén contentos con él.

A continuación se da un resumen de las innovaciones más importantes:

- Los casi 3500 ejercicios de esta edición representan un incremento de 50% aproximadamente.

- Se conserva el *repaso de álgebra*, pero ahora se coloca al final del texto en forma de apéndice. La explicación de la teoría de conjuntos tiene ahora menos espacio y viene al inico del capítulo 9 (Introducción a la teoría de probabilidad).
- En las dos primeras ediciones, se dedicó un capítulo a cada uno de los siguientes temas: *aplicaciones de las funciones lineales*, *sistemas de ecuaciones lineales y métodos de optimización con una sola variable*. Con ello se pretendía presentar los conceptos matemáticos en un capítulo y reforzarlos con aplicaciones en otro. En esta edición, las aplicaciones fueron incorporadas en los capítulos donde se incluye el concepto matemático: funciones lineales (capítulo 3), sistemas de ecuaciones lineales (capítulo 4) y optimización (capítulo 14).
- En la parte sobre sistemas de ecuaciones lineales (capítulo 4), se trata con mayor amplitud la *eliminación de Gauss*. Además, un conjunto de ejercicios de final de capítulo contiene sistemas que han de resolverse por medio de un paquete de programas de computadora.
- La mayor parte del material dedicado al *álgebra matricial* tiene pocas modificaciones. Un nuevo ejemplo ilustra el uso de las *propiedades de los determinantes* para simplificar el cálculo del determinante de una matriz. El tema de *cambio de marca* se incluye ahora en la sección del capítulo 11 referente a los proceso de Markov. Un nuevo conjunto de ejercicios requiere el uso de la computadora para realizar los cálculos de matrices.
- El capítulo 8 es nuevo y contiene más material acerca de la programación lineal. Se incluye una explicación de las suposiciones, características distintivas y aplicaciones del *modelo de transporte*, el *modelo de asignación*, la *programación en enteros* y la *programación de metas*. También se dan ejemplos de paquetes de software (programas) para resolver los modelos de transporte y asignación, lo mismo que listas comentadas de los programas de computadoras con que se cuenta para cada tipo de modelo.
- Los capítulos 9 y 10 son una ampliación del capítulo dedicado a la *teoría de probabilidad*, la cual formaba parte de la segunda edición. El capítulo 9 ofrece una breve introducción a la teoría de conjuntos y viene después una exposición más completa de la probabilidad, incluyéndose en ella ejemplos y ejercicios. En el capítulo 10 se da una exposición más amplia de las *variables aleatorias* y de las *distribuciones de probabilidad*, en especial la descripción de las *distribuciones de frecuencias* y los *histogramas*, la *media* y la *desviación estándar* de las distribuciones.
- El capítulo 11 es un nuevo capítulo que se centra en las *aplicaciones de la teoría de probabilidad*. Como se pretende que sea un capítulo opcional, se habla en él de los *procesos de Markov*, la *teoría de decisiones* y la *teoría de juegos*.
- Como se señaló antes, el tema de la optimización basada en el cálculo (capítulo 14) ahora incorpora aplicaciones al final del capítulo.
- Una nueva sección del capítulo 18 (Cálculo integral: aplicaciones expone los *métodos de la aproximación numérica*. Entre los métodos descritos en la sección 18.3 se encuentran la *regla del rectángulo*, la *regla del trapezoide* y la *regla de Simpson*.
- Algunas aplicaciones con comentarios presentan a veces pruebas de la utilización de los resultados del análisis matemático.

RECONOCIMIENTOS

Deseo expresar mi sincera gratitud a cuantos han colaborado en forma directa o indirecta en la realización de este proyecto. Quiero agradecer a Helen B. Chun, del Community College of Allegheny County; a Benjamin Eichorn, del Rider College; a Gary Grimes, del Mount Hood Community College; a Victor McGee, del Dartmouth College; a Michael Mogavero, de la Alfred University, y a Dean Morrow, del Robert Morris College. Un reconocimiento muy especial al doctor Willard Connor del Robert Morris College por el excelente trabajo de revisión de esta edición.

Deseo agradecer a los empleados de McGraw-Hill con quienes trabajé directamente, entre ellos Sam Costanzo y Ed Hanson. También agradezco a Rafael Hernández por su trabajo en el diseño del libro.

Un reconocimiento muy especial a Kam Fui Lau por el meticuloso trabajo en el Manual del instructor. Agradezco a Deborah Ferrette su ayuda en varias etapas de la preparación del manuscrito y del manual del instructor. En especial expreso mi gratitud a mis alumnos que sirvieron de "conejillos de Indias" para depurar los nuevos ejercicios, a Mary Jane Gesmondi por su ayuda en la elaboración de los conjuntos solución, a Elizabeth Flaherty, Sandra Quinn y Kathy Bowser por sus valiosas sugerencias.

Agradezco el apoyo, el aliento y amor que me han dado mi madre (Mary H. Budnick) y mi difunto padre (Willard L. Budnick).

Por último, mi más sincera gratitud a Jane, Chris, Scott y Kerry cuya paciencia, afecto y comprensión he puesto a dura prueba al preparar esta obra.

Frank S. Budnick

MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES

CAPÍTULO

1 FUNCIONES MATEMÁTICAS

1.1 FUNCIONES
1.2 TIPOS DE FUNCIONES
1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Permitir al lector entender la naturaleza y notacion de las funciones matemáticas
- Ofrecer ejemplos de la aplicación de las funciones matemáticas
- Dar un breve panorama general de los tipos más importantes de las funciones y de sus características
- Explicar la representación gráfica de las funciones y los métodos para hacer las representaciones

La aplicación de las matemáticas se basa en la capacidad de encontrar una representación matemática adecuada de un fenómeno del mundo real. A esta representación se le da a veces el nombre de ***modelo matemático***. Un modelo es adecuado si logra incorporar los atributos o cualidades del fenómeno que son importantes para el diseñador. Del mismo modo que un avión a escala muestra semejanza física con un aeroplano verdadero, también un modelo matemático de la función de demanda representa las interrelaciones significativas entre (digamos) el precio de un producto y la cantidad de su demanda.

1.1 FUNCIONES

En los modelos matemáticos, las relaciones significativas suelen representarse por medio de ***funciones matemáticas*** o, más simplemente, ***funciones***. Las fun-

ciones constituyen parte esencial de lo que se explicará en el libro. Y en este capítulo se ofrecerá una introducción a un tema tan importante.

Definición de funciones

La función es, en esencia, un dispositivo de entrada-salida. Se proporciona una entrada a una regla matemática que la transforma (manipula) en una salida específica (Fig. 1.1). Pongamos por ejemplo la ecuación $y = x^2 - 2x + 1$. Si *se introducen* determinados valores de x, la ecuación produce como salida los valores correspondientes de y. Así,

$$\begin{aligned} &\text{Si } x = 1 \quad && y = (1)^2 - 2(1) + 1 = 0 \\ &\text{Si } x = -5 \quad && y = (-5)^2 - 2(-5) + 1 = 36 \\ &\text{Si } x = 10 \quad && y = (10)^2 - 2(10) + 1 = 81 \end{aligned}$$

La ecuación da la *regla* que permite transformar un valor de x en un valor correspondiente de y. La regla de *esta* ecuación podría expresarse con palabras en los siguientes términos: ''Se toma el valor de entrada y se eleva al cuadrado, se resta el doble del valor de entrada y se suma 1''. Nótese que, para cualquier valor de entrada, se determina un único valor de salida.

DEFINICIÓN: FUNCIÓN
La ***función*** es una regla matemática que asigna a cada valor de entrada ***un y sólo un*** valor de salida.

DEFINICIÓN: DOMINIO/RANGO
El ***dominio*** de una función es el conjunto de todos los posibles valores de entrada.
El ***rango*** de una función es el conjunto de todos los posibles valores de salida.

Mapeo es el nombre que suele darse a la asignación de los valores de salida a los correspondientes valores de entrada. La notación

$$f: x \rightarrow y$$

representa el mapeo del conjunto de los valores de entrada x en el conjunto de los valores de salida y, aplicando la regla de mapeo f.

La figura 1.2 muestra algunos puntos importantes en relación con las funciones. El mapeo indicado en la figura 1.2*a* se ajusta a la definición de función. A cada valor indicado en el dominio corresponde un valor único en el rango (recorrido) de la función. De manera análoga, lo mismo sucede con el mapeo de la figura 1.2*b*. El hecho de que dos valores distintos del dominio ''se transformen'' en el mismo valor del rango no viola la definición. Sin embargo, el mapeo de la figura 1.2*c*. no representa una función, puesto que un valor del dominio produce dos valores diferentes en el rango.

Naturaleza y notación de las funciones

Las funciones, en la acepción que se les da aquí, sugieren que el valor de una cosa depende del valor de *una o más* de ellas. En el mundo que nos rodea existe

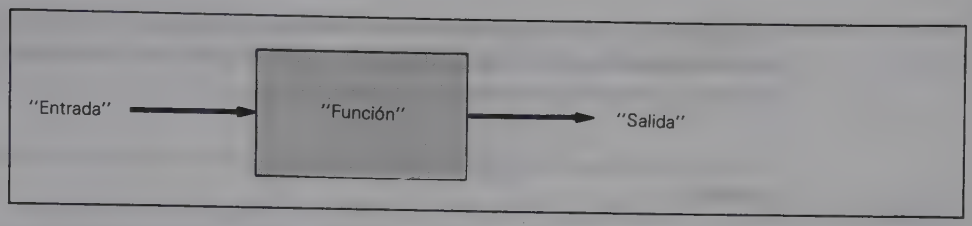


FIGURA 1.1 Representación de una función como entrada-salida.

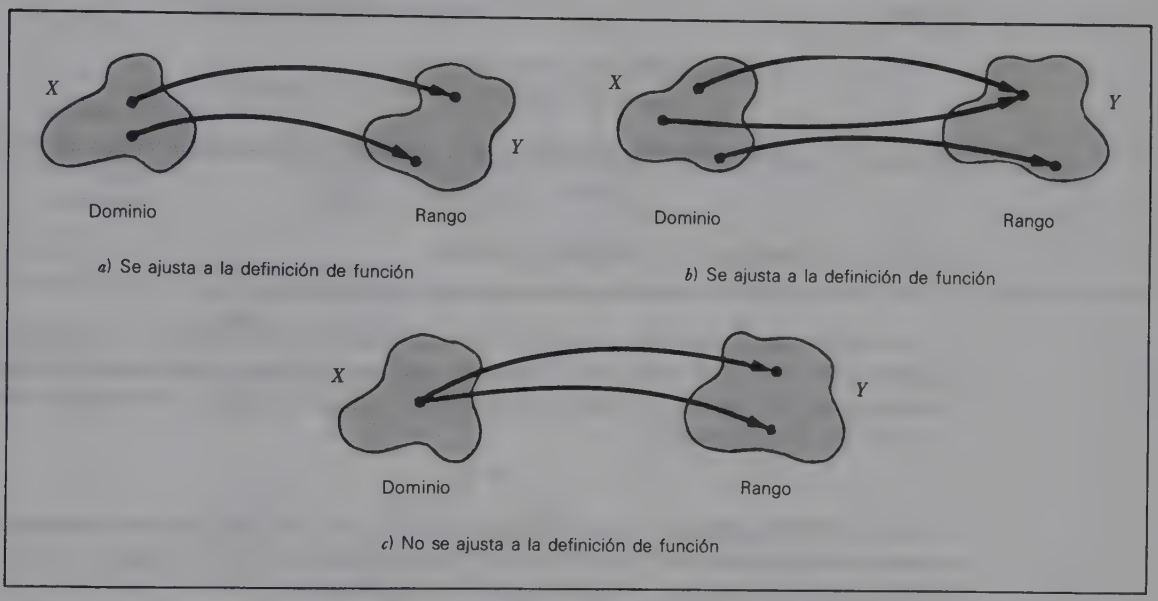


FIGURA 1.2 Mapeos muestra.

un número incontable de relaciones funcionales. La cantidad de personas que acuden a una playa dependerá de la temperatura y del día de la semana, la cantidad vendida de un producto dependerá de su precio y de los precios de las marcas de la competencia, las calificaciones dependerán del tiempo que dedique el alumno al estudio, las tarifas de los impuestos urbanos dependerán del nivel de gastos municipales y el largo del cabello de una persona dependerá del tiempo transcurrido desde el último corte.

El lenguaje de las matemáticas tiene una manera sucinta de describir la relación funcional existente entre las variables. La ecuación

$$y = f(x)$$

funcional entre las variables x y y. Una traducción verbal de la ecuación anterior es "*y es igual a f de x*" o bien "*y es una función de x*". *Esta ecuación no debe interpretarse así*: "*y es igual a f por x*". Cuando se dice que y es *una función de* x, se afirma que el valor de la variable y *depende del* valor de la variable x y está determinado exclusivamente por él; x es la variable de entrada y y la variable de salida. Los papeles respectivos de las dos variables hacen que la variable x

reciba el nombre de ***variable independiente*** y que a la variable y se le llame ***variable dependiente***. A y se le llama a veces el ***valor*** de la función. "f" es el ***nombre*** de la función o regla de mapeo.

EJEMPLO 1

Suponga el lector que ha aceptado un empleo como vendedor. El patrón le ha dicho que su sueldo dependerá del número de unidades que venda a la semana. Si se establece que

y = sueldo semanal en dólares
x = número de unidades vendidas a la semana

la dependencia establecida por su patrón puede representarse por medio de la ecuación

$$y = f(x)$$

donde f es el nombre de la función de sueldo.

Aunque por lo regular y representa la variable dependiente, x la variable independiente y f elnombre de la función, pueden utilizarse otras letras cualesquiera para indicar las variables dependiente e independiente y el nombre de la función. La ecuación

$$u = g(v)$$

es una forma legítima de expresar que el valor de una variable dependiente u está determinado por una variable independiente v. Y el nombre de la función, o la regla, que relaciona las dos variables es g.

Supóngase que el patrón del ejemplo anterior ha dado al lector una ecuación para determinar su sueldo semanal, a saber:

$$y = f(x) = 3x + 25 \qquad \textbf{(1.1)}$$

La regla específica que determina y es

$$f(x) = 3x + 25$$

dado cualquier valor para x, la sustitución de ese valor en f producirá el valor correspondiente de y. Por ejemplo, si se quiere calcular el sueldo semanal después de vender 100 unidades, la sustitución de $x = 100$ en la ecuación (1.1) da

$$\begin{aligned} y &= 3(100) + 25 \\ &= \$325 \end{aligned}$$

Para la función $y = f(x)$, el valor de y que corresponde al valor de entrada $x = b$ se denota por medio de $f(b)$.

En la ecuación (1.1), el sueldo asociado a la venta de 75 unidades puede denotarse por $f(75)$. Para evaluar $f(75)$, basta sustituir el valor $x = 75$ en la ecuación (1.1) dondequiera que aparezca la letra x, o sea

$$f(75) = 3(75) + 25$$
$$= \$250$$

De manera semejante, el valor de y correspondiente a $x = 0$ se denota por $f(0)$ y se calcula como $f(0) = 3(0) + 25 = \$25$.

La figura 1.3 es un diagrama de la función de sueldo y muestra la naturaleza de entrada-salida.

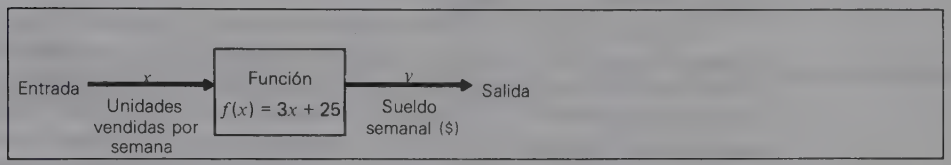


FIGURA 1.3 Función de sueldo semanal.

EJEMPLO 2

Dada la relación funcional

$$z = h(t)$$
$$= t^2 + t - 10$$

(*a*) $h(0) = (0)^2 + (0) - 10 = -10$

(*b*) $h(-5) = (-5)^2 + (-5) - 10 = 25 - 5 - 10 = 10$

(*c*) $h(u + v) = (u + v)^2 + (u + v) - 10$
$= u^2 + 2uv + v^2 + u + v - 10 = u^2 + u + 2uv + v + v^2 - 10$

Nótese en *c* que el valor de entrada de t es la suma $u + v$. Para evaluar $h(u + v)$ el procedimiento es exactamente el mismo que se aplica en las partes *a* y *b*. Siempre que t aparece en la función, se sustituye la cantidad $u + v$.

EJEMPLO 3

El departamento de policía de una ciudad pequeña estudia la compra de un carro de patrulla más. Los analistas de la policía estiman que el costo del carro (subcompacto pero de gran potencia), completamente equipado, es de 18 000 dólares. Han estimado también un costo promedio de operaciones de 0.40 dólares por milla. *a*) Determínese la función matemática que represente el costo total C de la obtención y operación del carro de patrulla, en términos del número de millas x que recorra. *b*) ¿Cuál es el costo proyectado si el carro recorre 50 000 millas en su vida útil? *c*) ¿Si recorre 100 000 millas?

SOLUCIÓN

a) En este ejemplo, se pretende determinar la función que relacione el costo total C con las millas recorridas x. He aquí la primera pregunta: ¿cuál variable depende de

la otra? Si se relee el problema y se reflexiona un poco sobre las dos variables, el lector llegará a la conclusión de que el costo total C es la variable dependiente, es decir,

$$C = f(x)$$

En este punto, estará en posibilidad de escribir la función de costo como

$$C = f(x) = 0.40x + 18\,000$$

Para quienes no pueden escribir la función de costo en forma mental o en el papel, se determinará el valor de la variable dependiente, dando valores arbitrarios a la variable independiente. Examínense los valores respectivos de las variables y véase si empieza a aparecer un patrón. De ser así, *organícese el modelo mental* (o, más simplemente, escríbase la función).

A continuación se ensaya este procedimiento. ¿Cuál sería el costo total si el carro de patrulla recorriera 0 millas (suponiendo que haya sido adquirido)? El modelo mental deberá contestar "18 000 dólares". ¿Cuál sería el costo total si recorriera 10 000 millas? 22 000 dólares. ¿Y cuál sería si recorriera 20 000 millas? 26 000 dólares. Si el lector no ha tenido dificultades para conseguir estas respuestas, ya deberá tener un modelo mental de costo. Ahora es el momento de expresarlo en forma matemática. El costo total de la obtención y operación de la patrulla de la policía es la suma de los dos costos componentes: el costo de compra y el costo de operación. El tipo de cálculo que el lector debería estar haciendo al responder a las preguntas es: multiplicar el número de millas por 0.40 dólares y sumar el resultado a los 18 000 dólares del costo de compra. Es decir,

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= \text{costo total de operación} + \text{costo de compra} \\ &= (\text{costo de operación por milla})(\text{número de millas}) + \text{costo de compra} \end{aligned}$$

o bien $C = 0.40x + 18\,000$

b) Si el carro de patrulla recorre 50 000 millas, se estima que los costos totales son iguales a

$$\begin{aligned} C &= f(50\,000) \\ &= 0.40(50\,000) + 18\,000 \\ &= \$38\,000 \end{aligned}$$

c) De manera semejante, en un recorrido de 10 000 millas

$$\begin{aligned} C &= f(100\,000) \\ &= 0.40(100\,000) + 18\,000 \\ &= \$58\,000 \end{aligned}$$

Consideraciones de dominio y rango

El dominio de una función se definió antes como el conjunto de todos los posibles valores de entrada. Nos concentraremos en las funciones de valores reales, por lo cual el dominio se compone de todos los valores reales de la variable independiente para los cuales la variable dependiente se define y es real. Cuando se quiere determinar el dominio, suele ser más fácil identificar todos los valores que *no* están incluidos en el dominio (esto es, se encuentran las excepcio-

nes). Si se conoce el dominio, el rango (recorrido) de una función es el conjunto correspondiente de valores de la variable dependiente. Algunas veces es más difícil definir el rango que el dominio. Por ahora no nos ocuparemos de ese proceso. El rango lo explicaremos con mayor detalle al examinar la representación gráfica de las funciones más adelante en el capítulo.

EJEMPLO 4

En la función

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

x puede ser sustituida por cualquier valor real, resultando un valor correspondiente y único de y. Si D se define como el dominio de f,

$$D = \{x \mid x \text{ es real}\}$$

EJEMPLO 5

La función

$$\begin{aligned} u &= f(v) \\ &= \frac{1}{v^2 - 4} \end{aligned}$$

tiene la forma de un cociente. Los valores de v que resulten en el denominador y que sean iguales a 0 quedarán excluidos del dominio. El denominador es igual a 0 cuando $v^2 - 4 = 0$ o cuando v adopta un valor de $+2$ o -2. El dominio de la función incluye todos los números reales *menos* $+2$ y -2, o sea $D = \{v \mid v \text{ es real y } v \neq \pm 2\}$.

EJEMPLO 6

En la función

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= \sqrt{x - 5} \end{aligned}$$

x puede asumir cualquier valor para el cual la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada sea positiva o cero. Para determinar esos valores,

$$x - 5 \geq 0$$

cuando

$$x \geq 5$$

Así pues, el dominio de la función incluye todos los números reales que sean mayores o iguales a 5, esto es, $D = \{x \mid x \text{ es real y } x \geq 5\}$.

Dominio y rango restringidos

Antes se expusieron los conceptos de dominio y rango (recorrido) en un sentido puramente matemático. En la práctica, puede haber condiciones de la aplicación que restrinjan aún más el dominio y rango de una función. Volviendo

otra vez al ejemplo de carro de patrulla, el dominio matemático de la función de costo $C = 0.40x + 18\,000$ incluye cualquier valor real de x. No obstante, dentro del contexto de la aplicación habría que establecer la restricción de que x no adopte valores negativos (no existen millas negativas recorridas). Además, si el departamento tiene la política de que ninguna patrulla recorrerá más de 150 000 millas, entones x quedará restringida a valores no mayores que 150 000. Y, por tanto, el ***dominio restringido*** de la función en esta aplicación es

$$0 \leq x \leq 150\,000$$

El ***rango restringido*** de esta función de costo, a la luz de las restricciones de x, será

$$\$18\,000 \leq C \leq \$78\,000$$

suponiendo que se adquiera el carro de patrulla. ¿Qué efecto tendría en el rango restringido el hecho de que un valor de $x = 0$ implicara una decisión de no adquirir la patrulla?

En los problemas, sucede muchas veces que las variables independientes están restringidas a *valores enteros*. En la función de sueldo

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= 3x + 25 \end{aligned}$$

presentada antes, es probable que el número de unidades vendidas a la semana, x, quede restringido a enteros o unidades enteras. En consecuencia, el dominio de $f(x)$ podría definirse así:

$$D = \{x \mid x \text{ es un entero} \quad \text{y} \quad 0 \leq x \leq u\}$$

El límite inferior es cero, excluyendo así la posibilidad de ventas negativas, y u es el límite superior de las ventas, lo cual refleja consideraciones como el potencial máximo de ventas dentro del distrito del vendedor.

Nótese que, en esta función, la restricción de enteros en el dominio de f produce lógicamente un rango de valores enteros. También puede establecerse que el rango tenga un límite mínimo de 25 y un límite máximo igual a $3u + 25$, o sea

$$R = \{25, 28, 31, 34, \ldots, 3u + 25\}$$

Funciones multivariadas

En muchas funciones matemáticas, el valor de una variable dependiente depende de más de una variable independiente. Se da el nombre de ***funciones multivariadas*** a las que contienen más de una variable independiente. En la mayor parte de las aplicaciones del mundo real, las funciones multivariadas son las más adecuadas. Por ejemplo, afirmar que las utilidades dependen sólo del número de unidades vendidas es una simplificación de la situación. Casi siempre muchas variables interactúan y, de ese modo, determinan las utilidades de una empresa.

Una clase de funciones multivariadas es la de las ***funciones bivariadas***. Éstas (a diferencia de las ***funciones univariadas***) tienen dos variables independientes. La notación

$$z = f(x, y)$$

indica que la variable dependiente z depende de los valores de las dos variables independientes x y y. He aquí un ejemplo de una función bivariada:

$$z = f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 5$$

La notación para evaluar las funciones multivariadas se parece mucho a la de las funciones de una variable independiente. Si queremos evaluar $f(x, y)$ cuando $x = 0$ y $y = 0$, esto se denota mediante $f(0, 0)$. En la función precedente

$$\begin{aligned} f(0,0) &= (0)^2 - 2(0)(0) + (0)^2 - 5 \\ &= -5 \\ f(-10,5) &= (-10)^2 - 2(-10)(5) + 5^2 - 5 \\ &= 100 + 100 + 25 - 5 \\ &= 220 \\ f(u,v) &= u^2 - 2uv + v^2 - 5 \end{aligned}$$

A medida que crece el número de variables independientes, puede volverse engorrosa la convención de utilizar una letra diferente para representar cada variable independiente. Por ello, una forma cómoda de representar funciones multivariadas es servirse de ***variables con subíndice***. Una forma general de denotar una función donde el valor de una variable dependiente y depende del valor de n variables independientes es el siguiente:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

El ***subíndice*** es el índice positivo entero situado a la derecha de cada x y debajo de ella. El índice simplemente numera las variables independientes y nos permite distinguirlas. Con frecuencia se empleará la notación con subíndices en este libro.

EJEMPLO 7

En la función

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2x_4 - 25 \\ f(-2,0,1,4) &= (-2)^2 - 2(-2)(0) + (1)^2(4) - 25 \\ &= 4 - 0 + 4 - 25 \\ &= -17 \end{aligned}$$

En la parte restante del capítulo, las funciones que se expliquen contendrán una variable independiente. Más adelante en el libro volveremos a ocuparnos de funciones con más de una variable independiente.

Ejercicios de seguimiento de la sección 1.1

En los ejercicios 1 a 16 determine a) $f(10)$, b) $f(-2)$, c) $f(3)$ y d) $f(a + b)$.

1 $f(x) = 10x - 5$
2 $f(x) = -5x + 6$
3 $f(x) = 3x/2 - 1$
4 $f(x) = mx + b$
5 $f(x) = -3x^2 + 10x + 1$
6 $f(x) = 4x^2 - x + 5$
7 $f(x) = 16 - x^2$
8 $f(x) = rx^2 + sx + t$
9 $f(x) = 25$
10 $f(x) = -100$
11 $f(x) = x^3$
12 $f(x) = -t^3 + 2t^2$
13 $f(x) = \sqrt{x^2}$
14 $f(x) = x^4$
15 $f(x) = rx^3 + sx^2 + tx + u$
16 $f(x) = c$

En los ejercicios 17 a 36 determine el dominio de la función.

17 $f(x) = 24$
18 $f(x) = -c$
19 $f(x) = 16 - x^2$
20 $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
21 $f(x) = \sqrt{x - 4}$
22 $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
23 $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
24 $f(x) = 1/(x - 5)$
25 $f(x) = 10/(4 - x)$
26 $f(x) = 3/(x^2 - 2x + 1)$
27 $f(x) = 12/(x^2 + 3x - 10)$
28 $f(x) = 1/(x^2 - 10x + 1)$
29 $f(x) = (3x - 10)/(x^3 + x^2 - 6x)$
30 $f(x) = 5x^2/(16 - x^2)$
31 $f(x) = \sqrt{2x - 50}/(x^2 + 2x - 15)$
32 $f(x) = (x - 3)/(x^3 - 27)$
33 $f(x) = \sqrt{x - 9}/(x^3 - 4x)$
34 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}/(x^3 + x^2 - 6x)$
35 $h(v) = \sqrt{20 - \dfrac{v}{2}} \Big/ (v^4 - 16)$
36 $g(u) = \sqrt{u/(u - 5)}$

37 La función $C(x) = 25x + 80\,000$ expresa el costo total $C(x)$ (en dólares) de fabricar x unidades de un producto. Si el número máximo de unidades que pueden producirse es igual a 20 000, establezca el dominio y rango restringidos de esta función de costo.

38 La función $q = f(p) = 250\,000 - 25p$ es la *función de demanda* que expresa en dólares la cantidad de la demanda de un producto q en función del precio cobrado por el producto p. Determine el dominio y rango restringidos de esta función.

39 La función $q = f(p) = 180\,000 - 40p$ es la función de demanda que expresa en dólares la cantidad de la demanda de un producto q en función del precio cobrado por el producto p. Determine el dominio y rango restringidos de esta función.

40 Una compañía de seguros cuenta con un método simplificado para determinar la prima anual de una póliza de un seguro de vida. Se cobra un cargo anual de \$10 por todas las pólizas más 1.50 dólares por cada mil dólares del importe de la póliza. Por ejemplo, una póliza de 20 000 dólares costará \$10 por el cargo fijo más \$30, cantidad que corresponde al valor nominal de la póliza. Si p es la prima anual en dólares y x denota el valor nominal de la póliza (expresado en miles de dólares), determine la función que puede emplearse para calcular las primas anuales.

41 En el ejercicio anterior, suponga que la póliza más pequeña que se da es de \$10 000 y la más grande de \$500 000. Determine el dominio y el rango restringidos de la función encontrada en el ejercicio 40.

42 La compañía eléctrica de la localidad se vale del siguiente método para calcular las facturas mensuales de una categoría de clientes. Para cada cliente se determina un cargo mensual de \$5 por concepto de servicio. Además, la compañía cobra 0.60 dólares por kilowatt-hora. Si c es el cargo mensual en dólares y k indica el número de kilowatts-horas usados durante un mes, (a) determine la función que expresa el cargo mensual de un cliente en función de un número de kilowatts-horas y (b) con esta función calcule la cuenta mensual de un cliente que utiliza 725 kilowatts-horas.

43 En relación con el ejercicio 42, suponga que el método de calcular la factura de los consumidores se aplica a clientes que usan entre 200 y 1500 kilowatts-horas por mes. Determine el dominio y rango restringidos de la función en ese ejercicio.

44 Una agencia de renta de automóviles los alquila a razón de 10 dólares al día, más \$0.20 por milla recorrida. Si y es el costo en dólares de alquilar un automóvil por un día y si x indica el número de millas recorridas en un día,

a) Determine la función $y = f(x)$ que expresa el costo diario de la renta de un automóvil.

b) ¿Cuál es $f(250)$? ¿Qué representa $f(250)$?

c) Comente el dominio restringido de esta función.

45 Al fabricar un producto, una empresa incurre en costos de dos tipos. Tiene costos fijos anuales por 200 000 dólares sin importar el número de unidades producidas. Además, cada unidad producida le cuesta \$8. Si C es el costo anual total en dólares y si x denota el número de unidades producidas durante un año.

a) Determine la función $C = f(x)$ que exprese el costo anual.

b) ¿Qué es $f(200\ 000)$? ¿Qué representa $f(200\ 000)$?

c) Establezca el dominio y rango restringidos de la función si la capacidad máxima de producción es de 300 000 unidades al año.

46 En $f(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2$, determine (a) $f(0, 0)$, (b) $f(-1, 1)$, y (c) $f(5, 10)$.

47 En $g(u, v) = 2u^2 + 5uv - 4v^3$, determine (a) $g(0, 0)$, (b) $g(-5, 4)$, (c) $g(5, 10)$, y (d) $g(x, y)$.

48 En $v(h, g) = h^2/2 - 3hg + g^2 - 100$, determine (a) $v(0, 0)$, (b) $v(4, 2)$, y (c) $v(-2, -5)$.

49 En $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 3x_3)^2$, determine (a) $f(1, 1, 1)$, (b) $f(2, 5, -1)$, y (c) $f(2, 0, -1)$.

50 En $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 3x_1^2x_2 - 4x_2x_3 - 10$, determine (a) $f(0, 2, -3)$, (b) $f(-2, 1, 5)$, y (c) $f(3, 0, -5)$.

51 En $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1x_2 - 5x_2x_4 - x_1x_3x_4$, determine (a) $f(0, 1, 0, 1)$, (b) $f(2, 1, 2, -3)$.

52 En $f(a, b, c, d) = 3ab - a^2bd + 3c^2d$, determine (a) $f(1, 2, 3, 4)$, (b) $f(2, 0, 1, 5)$.

53 En $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - 2x_3x_4$, determine (a) $f(1, 10, 4, -5)$, (b) $f(2, 2, 2, 2,)$, y (c) $f(a, b, c, d)$.

54 Una compañía estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos destinados a la publicidad por radio y televisión. La función específica es

$$z = f(x, y) = 50\ 000x + 40\ 000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$$

donde z es el número de unidades vendidas al año, x indica los gastos de publicidad por televisión y y denota los gastos de publicidad por radio (ambas cantidades en miles de dólares).

a) Determine las ventas anuales esperadas si se destinan \$40 000 a la publicidad por televisión y \$20 000 a la publicidad por radio.

b) ¿Cuáles son las ventas esperadas si se gastan \$50 000 y 100 000 en uno y otro medio publicitario, respectivamente?

55 Modelo de fijación de precios Un fabricante vende dos productos relacionados, cuya demanda se caracteriza por las dos siguientes funciones de demanda:

$$q_1 = f_1(p_1, p_2) = 150 - 2p_1 - p_2$$
$$q_2 = f_2(p_1, p_2) = 200 - p_1 - 3p_2$$

donde p_j es el precio en (dólares) del producto j y q_j indica la demanda (en miles de unidades) del producto j.

a) ¿Cuántas unidades se espera vender de cada producto si \$10/unidad es el precio que se cobra por el producto 1 y \$20/unidad es el precio del producto 2?

b) ¿Cuántas unidades se espera vender si los precios son de \$50 y \$30, respectivamente?

c) Examine las dos funciones de demanda y determine si los dos productos son *productos complementarios* o que *compiten entre sí.*

1.2 TIPOS DE FUNCIONES

Las funciones pueden clasificarse atendiendo a sus características estructurales. A continuación se explican algunas de las funciones más comunes. Una exposición más completa del tema se encontrará en los capítulos 3, 12, 15 y 16.

Funciones constantes

Una ***función constante*** tiene la forma general

$$\boxed{y = f(x) = a_0} \tag{1.2}$$

donde a_0 es real. Por ejemplo, la función

$$y = f(x) = 20$$

es una función constante. Cualquiera que sea el valor de x, el rango tiene un solo valor de 20. Es decir,

$$f(-10) = 20$$
$$f(1{,}000) = 20$$
$$f(a + b) = 20$$

Como se aprecia en la figura 1.4, a cada valor del dominio corresponde el mismo valor del rango en el caso de las funciones constantes.

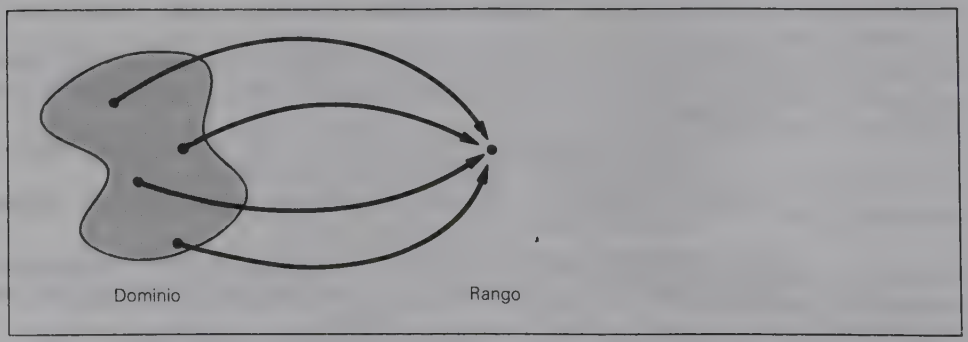


FIGURA 1.4 Mapeo de una función constante.

EJEMPLO 8 (INGRESO MARGINAL)

Un concepto importante en economía es el de ***ingreso marginal***. El ingreso marginal es el *ingreso adicional obtenido con la venta de una unidad más de un producto o servicio*. Si cada unidad de un producto se vende al mismo precio, el ingreso marginal siempre es igual

al precio. Por ejemplo, si un producto se vende a 7.50 dólares por unidad, la función de ingreso marginal (IM) puede expresarse como la *función constante*

$$\text{IM} = f(x) = 7.5$$

donde *IM es igual al ingreso marginal* y *x es igual al número de unidades vendidas del producto.*

Funciones lineales

Una ***función lineal*** tiene la forma general

$$\boxed{y = f(x) = a_1x + a_0} \tag{1.3}$$

donde a_0 y a_1 son reales. La función

$$y = f(x) = -2x + 15$$

es una función lineal con $a_1 = -2$ y $a_0 = 15$.

EJEMPLO 9 (COSTO TOTAL)

Los contadores y economistas a menudo definen el ***costo total*** (dinero que sale de una organización) a partir de dos componentes: ***costo total variable*** y ***costo total fijo***. Esos dos componentes han de sumarse para determinar el ***costo total***. Así, el costo de obtener y operar el carro de patrulla en el ejemplo 3 es un caso de una función *lineal* del costo total. La función de costo

$$C(x) = 0.40x + 18{,}000$$

representa los costos totales variables mediante el término $0.40x$ y los costos fijos mediante el término 18 000. Compárese la estructura de la función de costo con la ecuación (1.3) para confirmar que se trata realmente de un ejemplo de función lineal.

En el capítulo 3 se examinará más a fondo esta clase tan importante de función.

Funciones cuadráticas

Una ***función cuadrática*** tiene la forma general

$$\boxed{y = a_2x^2 + a_1x + a_0} \tag{1.4}$$

donde a_2, a_1 y a_0 son reales y $a_2 \neq 0$. La función

$$y = f(x) = 3x^2 - 20x + 100$$

es una función cuadrática y en ella $a_2 = 3$, $a_1 = -20$ y $a_0 = 100$.
La función

$$y = f(x) = -\frac{x^2}{2}$$

es una función cuadrática con $a_0 = a_1 = 0$ y $a_2 = -\frac{1}{2}$. Esta clase de función se estudiará con detalle en el capítulo 12.

NOTA
Al generalizar estas tres primeras clases de funciones (constantes, lineales y cuadráticas), se usaron los coeficientes con subíndices a_0, a_1 y a_2. Podrían haberse empleado las literales a, b y c (o cualquier otro conjunto de literales). Sin embargo, la notación con subíndices se prefirió para identificar el número de literales diferentes que se necesitaban. Hay además una relación entre un subíndice y el exponente de cada término: el subíndice corresponde al exponente. (La constante a_0 puede reescribirse como a_0x^0 cuando $x \neq 0$. ¿No es así?)

EJEMPLO 10 (FUNCIÓN DE DEMANDA)

La ***función de demanda*** es una relación matemática que expresa la forma en que la cantidad de la demanda de un producto varía según el precio en que se venda. La función de demanda de un producto determinado es

$$q_d = f(p)$$

o bien

$$q_d = p^2 - 70p + 1\,225$$

donde q_d es el número de unidades demandadas y p es el precio en dólares. Nótese que la función de demanda tiene forma *cuadrática*. En relación con la ecuación (1.4), $a_2 = 1$, $a_1 = -70$ y $a_0 = 1225$. De acuerdo con esta función, la cantidad de la demanda a un precio de \$10 se espera que sea igual a

$$\begin{aligned} f(10) &= (10)^2 - 70(10) + 1\,225 \\ &= 100 - 700 + 1\,225 \\ &= 625 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Y a un precio de \$30,

$$\begin{aligned} f(30) &= (30)^2 - 70(30) + 1\,225 \\ &= 900 - 2{,}100 + 1\,225 \\ &= 25 \text{ unidades} \end{aligned}$$

EJERCICIO
¿Qué precio tendrá que cobrarse para eliminar toda la demanda del producto?*

Funciones cúbicas

Una ***función cúbica*** tiene la forma general

$$\boxed{y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0} \qquad \textbf{(1.5)}$$

donde a_3, a_2, a_1 y a_0 son reales y $a_3 \neq 0$. La función

$$y = f(x) = x^3 - 40x^2 + 25x - 1\,000$$

es una función cúbica con $a_3 = 1$, $a_2 = -40$, $a_1 = 25$ y $a_0 = -1000$.

*\$35.

EJEMPLO 11 (CONTROL DE EPIDEMIAS)

Una epidemia está propagándose a través de un estado de un país. Los oficiales de salubridad estiman que el número de personas que la contraerán es una función del tiempo transcurrido desde que se descubrió la epidemia. En concreto, la función es

$$n = f(t) = 300t^3 - 20t^2$$

donde n es el número de personas enfermas y $0 < t \leq 30$, medidos en días contados a partir de la detección de la epidemia. ¿Cuántas personas se espera que la contraigan al cabo de 10 días?

SOLUCIÓN

El número que, según las previsiones, se habrá contagiado después de 10 días es

$$\begin{aligned} f(10) &= 300(10)^3 - 20(10)^2 \\ &= 300\,000 - 2\,000 \\ &= 298\,000 \end{aligned}$$

EJERCICIO
¿Cuántas personas se espera que hayan contraído la enfermedad al cabo de 30 días?*

Funciones polinomiales

Cada una de las funciones anteriores constituye un ejemplo de una función polinomial. Una ***función polinomial de n grados*** tiene la forma general

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \textbf{(1.6)}$$

donde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 son reales y $a_n \neq 0$. El exponente de cada x debe ser un *entero no negativo* y el grado del polinomio es la potencia (exponente) más alta en la función. La función

$$y = f(x) = x^5$$

es una función polinomial de quinto grado con $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ 0 y $a_5 = 1$.

El lector deberá observar que las funciones constantes, lineales, cuadráticas y cúbicas son funciones polinomiales de grado 0, 1, 2 y 3, respectivamente.

Funciones racionales

¿Qué sucede cuando una función polinomial se divide entre otra? Una ***función racional*** tiene la forma general

$$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad \textbf{(1.7)}$$

*8 082 000.

donde g y h son funciones polinomiales. Las funciones racionales se llaman así por su estructura de razón. La función

$$y = f(x) = \frac{2x}{5x^3 - 2x + 10}$$

es un ejemplo de una función racional donde $g(x) = 2x$ y $h(x) = 5x^3 - 2x + 10$.

EJEMPLO 12 (REHABILITACIÓN)

Los fisioterapeutas descubren a menudo que el proceso de rehabilitación se caracteriza por un efecto de rendimientos decrecientes. Es decir, la recuperación de la funcionalidad suele aumentar con la duración del programa de terapia, pero a la larga se advierte un menor mejoramiento en relación con las actividades posteriores del programa. Para una incapacidad en particular, los terapeutas han ideado una función matemática que describe el costo C de un programa de este tipo en función del porcentaje de la funcionalidad recobrada, x. Se trata de una función *racional* cuya forma se da a continuación:

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= \frac{5x}{120 - x} \qquad 0 \le x \le 100 \end{aligned}$$

donde C se mide en miles de dólares. Por ejemplo, el costo de la terapia para obtener una recuperación de 30% se estima en

$$\begin{aligned} f(30) &= \frac{5(30)}{120 - 30} \\ &= \frac{150}{90} \\ &= 1.667 \qquad \text{(miles de dólares)} \end{aligned}$$

EJERCICIO
Determine el costo de la terapia para conseguir una recuperación de 10%, 60% y 100%.*

Funciones exponenciales

La ***función exponencial*** es aquella en que la variable independiente aparece en el exponente. Si la función exponencial tiene la forma $y = f(x)$, x aparecerá como exponente o como parte de un exponente. Hay distintas clases de ese tipo de función, cada una con sus características estructurales específicas. En seguida se dan ejemplos de funciones exponenciales:

$$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = f(x) = 5e^x \quad \text{donde } e = 2.71828\ldots$$

*$454; $5 000; $25 000.

Las funciones exponenciales tienen muchas aplicaciones muy importantes en la administración y en la economía.

En matemáticas, la letra *e* tiene un significado especial. Sirve para representar un número irracional aproximadamente igual a 2.71828. Y este número resulta ser una *base* muy usada de las funciones exponenciales, entre ellas las de crecimiento y deterioro (envejecimiento), lo mismo que del interés de capitalización continua. En el capítulo 5 se explicará esto más a fondo. El siguiente ejemplo ilustra una función exponencial que es "base $= e$".

EJEMPLO 13 (DEPRECIACIÓN)

Cuando las organizaciones adquieren equipo, vehículos, edificios y otras clases de "bienes de capital", los contadores acostumbran asignar el costo del objeto a lo largo del periodo en que se usa. En el caso de un camión que cueste $10 000 y cuya vida útil sea de 5 años, asignarán 2000 dólares por año como costo de su posesión. Se da el nombre de *depreciación* al costo asignado a un periodo determinado. Los contadores llevan asimismo registros de los principales activos y su valor actual o "en libros". El valor en libros representa la diferencia entre el precio de compra del activo y la cantidad de depreciación asignada, o sea

$$\text{Valor en libros} = \text{costo de compra} - \text{depreciación}$$

El valor en libros de un equipo industrial se representa mediante la función exponencial

$$V = 300\,000(2.5)^{-0.1t}$$

donde V es el valor en libros expresado en dólares y t representa el número de años transcurridos desde la adquisición del equipo. El valor del equipo al cabo de 5 años es

$$\begin{aligned} V = f(5) &= 300\,000(2.5)^{-0.1(5)} \\ &= 300\,000(2.5)^{-0.5} \\ &= 300\,000\frac{1}{(2.5)^{0.5}} \\ &= 300\,000\frac{1}{\sqrt{2.5}} \\ &= 300\,000/1.58 \\ &= \$189\,873.42 \end{aligned}$$

EJERCICIO

¿Cuál era el valor del equipo cuando se compró? ¿Y cuál era al cabo de 10 años? ¿De 20 años?*

*$300 000; $120 000; $48 000.

Funciones logarítmicas

Una ***función logarítmica*** expresa el valor de la variable dependiente en términos del logaritmo de una función de la variable independiente. A continuación se dan ejemplos de este tipo de funciones:

$$y = f(x) = \log_{10} x$$
$$y = f(x) = 5 \log_e x$$

Como en el caso de las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas tienen muchas aplicaciones muy importantes en la administración y en la economía.

EJEMPLO 14 (RETENCIÓN)

Se efectuó un experimento para determinar los efectos que el tiempo transcurrido ejerce sobre la memoria de una persona. A los sujetos se les pidió observar una fotografía que contenía muchos objetos diferentes. Después de estudiarla, se les dijo que recordasen el mayor número posible de objetos. En distintos intervalos después de la sesión, se les pediría que recordasen el mayor número posible. A partir de este experimento se desarrolló la siguiente función logarítmica.

$$\bar{R} = f(t) = 84 - 25 \log_e t \qquad t \geq 1$$

donde $\bar{R}$ representa el porcentaje promedio de retención en función del t transcurrido después de estudiar la fotografía (medido en horas).

EJERCICIO
¿Cuál fue el porcentaje promedio de retención dos horas después de estudiar la fotografía*

En el capítulo 15 volveremos a ocuparnos de esta clase de funciones.

Combinaciones de funciones

Además de las formas funcionales mencionadas hasta ahora, las funciones pueden combinarse algebraicamente para constituir una función resultante. Si

$$f(x) = 3x - 5 \qquad g(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad h(x) = 2^x \quad \text{y} \quad j(x) = \log_e x$$

estas funciones pueden combinarse en las siguientes formas para constituir otras nuevas:

1 $p(x) = f(x) + g(x) = (3x - 5) + (x^2 - 2x + 1) = x^2 + x - 4$
2 $q(x) = h(x) - j(x) = 2^x - \log_e x$
3 $r(x) = f(x)h(x) = (3x - 5)(2^x) = 3x(2^x) - 5(2^x)$
4 $s(x) = h(x)/j(x) = 2^x/\log_e x$

**59%.

Funciones compuestas

Además de combinar funciones algebraicamente para constituir otras nuevas, las funciones componentes pueden relacionarse de otro modo. Una ***función compuesta*** existe cuando puede considerarse que una función depende de otra.

Si $y = g(u)$ y si $u = h(x)$, la función compuesta $y = f(x) + g(h(x))$ se crea al sustituir $h(x)$ en la función (u) cada vez que aparezca u. *Y para definir* $f(x) = g(h(x))$ *se define,* x *tiene que estar en dominio de* h y $h(x)$ *ha de encontrarse en el dominio de* g. En otras palabras, el valor de entrada x debe tener en cuenta un valor de salida única y definible u y el valor resultante u, cuando la entrada de $g(u)$ debe producir una salida única y definible y. La figura 1.5 muestra esquemáticamente la naturaleza de las funciones compuestas.

Para dar ejemplo de esas funciones, supóngase que la función

$$y = g(x) = 2x + 50$$

indica que el salario semanal de un vendedor está determinado por el número de unidades x vendidas cada semana. Supóngase que, según los resultados de un análisis, la cantidad vendida semanalmente por un vendedor depende del precio del producto. Esta función h está dada por la regla

$$x = h(p) = 150 - 2.5p$$

donde p es el precio, expresado en dólares.

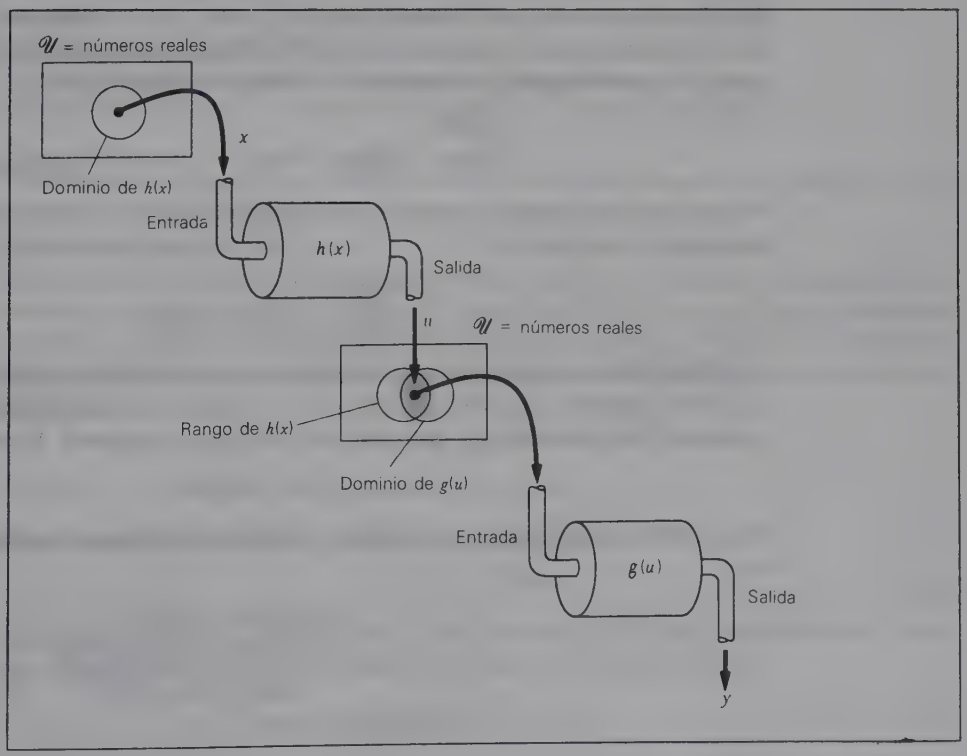


FIGURA 1.5 Naturaleza de las funciones compuestas.

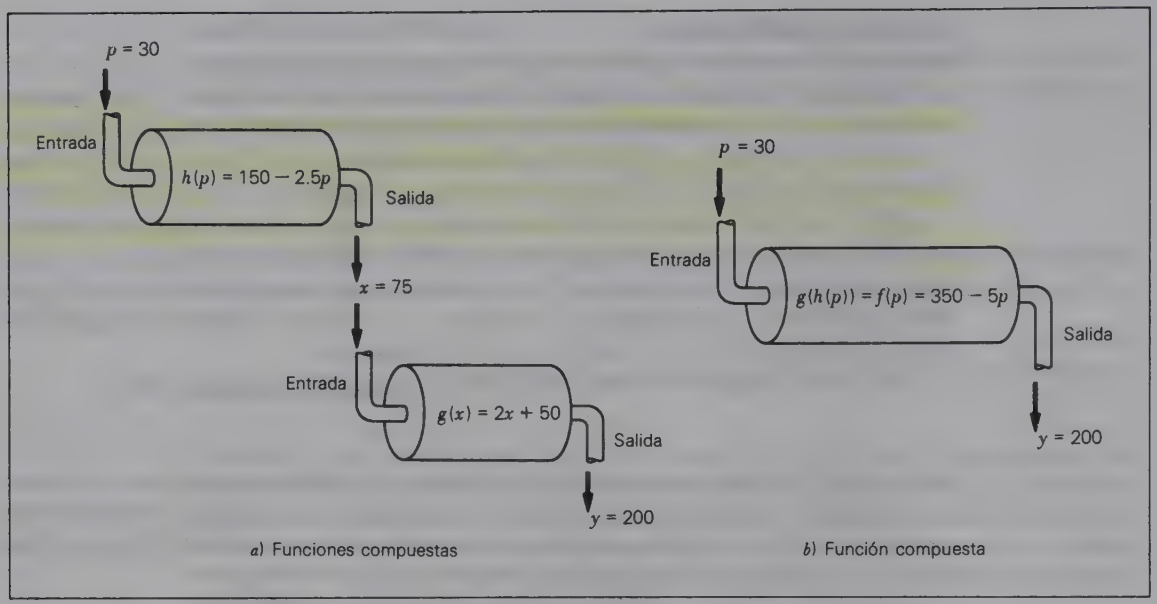


FIGURA 1.6

Así pues, para calcular el sueldo inicial de un vendedor, la *entrada* inicial es el precio de venta durante una semana dada. Éste determinará la *salida* de $h(p)$, o sea el número de unidades que se espera vender. Dicha salida se convierte en una entrada que se sustituye en $g(x)$ para calcular el sueldo semanal. Las relaciones anteriores se observan en la figura 1.6*a*. Supóngase, por ejemplo, que el precio en cierta semana sea de 30 dólares. El número de unidades que, según las previsiones, se venderán durante la semana es

$$\begin{aligned} x &= h(30) \\ &= 150 - 2.5(30) = 150 - 75 = 75 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Puesto que se conoce el número de unidades que se espera vender, el sueldo semanal se calcula así:

$$\begin{aligned} y &= g(75) \\ &= 2(75) + 50 = \$200 \end{aligned}$$

El sueldo semanal depende del número de unidades vendidas semanalmente y éste depende a su vez del precio por unidad, el sueldo semanal puede expresarse directamente en función del precio por unidad. Es decir,

$$y = f(p) = g(h(p))$$

Para definir esta función, se sustituye $h(p)$ en $g(x)$ siempre que aparezca x. Esto es,

$$\begin{aligned} y &= g(150 - 2.5p) \\ &= 2(150 - 2.5p) + 50 \\ &= 300 - 5p + 50 \\ y = f(p) &= 350 - 5p \end{aligned}$$

La función $f(p)$ es una función compuesta, pues se formó combinando $g(x)$ y $h(p)$. Podemos calcular el sueldo semanal esperado directamente de $f(p)$, si se conoce el precio de venta en una semana determinada, como se advierte en la figura 1.6*b*. En un precio de \$30,

$$\begin{aligned} y &= f(30) \\ &= 350 - 5(30) = 350 - 150 = \$200 \end{aligned}$$

que es el mismo valor que se obtuvo antes.

EJEMPLO 15

Si $y = g(u) = u^2 - 2u + 10$ y $u = h(x) = x + 1$, la función compuesta $y = f(x) = g(h(x))$ se obtiene sustituyendo $h(x)$ en $g(u)$ cada vez que aparezca u.

$$\begin{aligned} y = f(x) &= g(h(x)) \\ &= g(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 10 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 10 \\ &= x^2 + 9 \end{aligned}$$

EJEMPLO 16

If $y = g(u) = 2u^3$ y $y = h(x) = x^2 - 2x + 5$, determine (*a*) $g(h(x))$, (*b*) $g(h(2))$, y (*c*) $g(h(-3))$

SOLUCIÓN

(*a*) $y = g(h(x)) = 2(x^2 - 2x + 5)^3$
(*b*) $g(h(2)) = 2[(2)^2 - 2(2) + 5]^3 = 2(5)^3 = 2(125) = 250$
(*c*) $g(h(-3)) = 2[(-3)^2 - 2(-3) + 5]^3 = 2(20)^3 = 2(8\,000) = 16\,000$

Funciones implícitas

En el presente capítulo se ha dicho que las funciones indican una dependencia entre dos o más variables. Para una función de la forma $x = f(x)$, puede decir se que y es una ***función explícita*** de la variable independiente x. La notación funcional sugiere la naturaleza de la dependencia. Un ejemplo de ello es la función

$$y = f(x)$$

o bien

$$y = 5x + 100$$

Pero si esta ecuación se rearregla para producir

$$y - 5x - 100 = 0 \tag{1.8}$$

se denota una relación ente x y y, pero no es explícito que y dependa de x. Puede considerarse que la ecuación (1.8) tiene la forma general

$$f(x, y) = 0 \tag{1.9}$$

La ***función implícita*** se define como una relación funcional contenida en una ecuación de la forma (1.9). La ecuación (1.8) podría sugerir que y es una función implícita de x o que x es una función implícita de y. En una aplicación dada, el conocimiento de la naturaleza de la aplicación hará más evidente cuál variable debe considerarse como la variable dependiente.

Algunas funciones implícitas pueden reescribirse en una forma explícita. Por ejemplo, la función implícita

$$2xy + 3y - 100 = 0$$

puede reescribirse así

$$y(2x + 3) = 100$$

o bien

$$y = f(x) = 100/(2x + 3)$$

En otros casos, no es posible expresar en forma explícita la función implícita. La función

$$x^3 - xy - 3y^3 = 0$$

no puede escribirse en ninguna de las dos formas explícitas

$$y = f(x) \quad or \quad x = g(y)$$

EJEMPLO 17

Los economistas y también los consumidores reconocen que suele existir una relación entre el precio que se cobra por ciertos artículos y la cantidad de la demanda. La relación de dos variables casi siempre es una ***relación inversa***; es decir, cuanto más alto sea el precio unitario, menor será la demanda del producto (por supuesto, se dan excepciones que dependen de factores como el tipo de producto, el ingreso del consumidor y otros).

Considérese la relación

$$3p + 6q - 500 = 0 \tag{1.10}$$

donde p = precio unitario (en dólares)
q = cantidad de la demanda en unidades

Según la perspectiva del lector, la ecuación (1.10) puede indicar que el precio p es una función implícita de la cantidad de la demanda q o que esta última es una función implícita del precio. Las formas explícitas de estas funciones pueden derivarse fácilmente de la ecuación (1.10) como sigue:

$$p = f(q) = \frac{500 - 6q}{3} \tag{1.11}$$

y

$$q = h(p) = \frac{500 - 3p}{6} \tag{1.12}$$

Cuando una función implícita $f(x, y) = 0$ produce dos funciones explícitas de la forma

$$y = f(x)$$

y

$$x = g(y)$$

se dice que $f(x)$ y $g(y)$ son ***funciones inversas***. Nótese que x es la variable independiente de la función f, pero que x es la variable dependiente de la función g. Las funciones inversas de esta forma poseen la propiedad de que cada valor de x produce un único valor de y y cada valor de y produce un solo valor de x. Utilizando la notación de las funciones inversas puede afirmarse que la función f tiene una inversa, $x = f^{-1}(y)$, que se lee "x es una función inversa de y" (recuérdese que f^{-1} *no significa* $1/f$ en este caso). De manera análoga puede decirse que la función g tiene una inversa $y = g^{-1}(x)$. En el ejemplo 17, $f(q)$ y $h(p)$ son funciones inversas.

de la sección 1.2 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios, clasifique cada función por su tipo (constante, lineal, cuadrática, cúbica, polinomial, racional, exponencial, logarítmica).

1 $f(x) = 24$
2 $f(x) = 3x/2 - 50$
3 $f(x) = 45 - 2.5x$
4 $f(x) = x^2$
5 $f(x) = x^2/3 - 2.5x + 125$
6 $f(x) = x^3/5 + 16$
7 $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 76$
8 $f(x) = e^{2x}$
9 $f(x) = (0.75)^{x^2}$
10 $u(v) = \log_{10} v$
11 $g(h) = (4 - h)/h^2$
12 $h(t) = \log_2 t^2$
13 $u(h) = \log_2 (h^2 - 5h + 1)$
14 $g(h) = (2)^{25}$
15 $v(h) = 25/(3)^{10}$
16 $f(t) = 2^{5t-2}$
17 $f(n) = 5n/(1 - n^2)$
18 $f(s) = s^{24} - s + 1$
19 $f(u) = (u^3 - 5u)/(1 - u^2 + 5u^3)$
20 $f(t) = \sqrt{35}^t$

21 Si se conoce la forma general de una función constante formulada por la ecuación (1.2), determine el dominio de estas funciones.

22 Si se conoce la forma general de una función polinomial expresada por la ecuación (1.6), determine el dominio de tales funciones.

23 Si se conoce la forma general de una función racional formulada por la ecuación (1.7), determine el dominio de esas funciones.

24 La utilidad total de plantar x_j acres en la granja j se expresa en la función

$$P(x_1, x_2, x_3) = 400x_1 + 550x_2 + 450x_3 - 525\,000$$

a) ¿Cuál es la utilidad total si en la granja 1 se plantan 200 acres, en la granja 2 se plantan 1250 y en la granja 3 se plantan 150?
b) ¿Cuál es la utilidad total si en las tres granjas se plantan, respectivamente, 500, 300 y 700 acres?
c) Identifique una combinación de plantaciones que produzcan una utilidad de cero.

25 El valor en libros de un camión se expresa en la función

$$V = f(t) = 10\,000 - 2\,000t$$

donde V es el valor en libros en dólares y t es la edad del camión expresada en años.
a) ¿Qué clase de función es ésta?
b) ¿Cuál es el valor en libros al cabo de 3 años?
c) ¿Cuándo será igual a 0 el valor en libros?

26 Un departamento de policía ha averiguado que el número de crímenes o delitos graves que ocurren por semana es una función del número de oficiales asignados a la vigilancia preventiva. En concreto la función matemática es

$$c = f(p) = 1\,250 - 2.5p$$

donde c es el número de crímenes por semana y p indica el número de oficiales asignados a la vigilancia preventiva.

a) ¿Qué clase de función es ésta?
b) ¿Cuál es el número esperado de crímenes si 250 oficiales son asignados a la vigilancia preventiva?
c) ¿Cuántos oficiales habría que asignar si se quisiera reducir a 500 el nivel semanal de crímenes?
d) ¿Cuántos oficiales habría que asignar para reducir a 0 el nivel semanal de crímenes?

27 El ingreso total por la venta de un producto particular depende del precio por unidad. En concreto, la función de ingreso es

$$R = f(p) = 1\,500p - 50p^2$$

donde R es el ingreso total en dólares y p indica el precio, también en dólares.

a) ¿Qué clase de función es ésta?
b) ¿Cuál es el ingreso total esperado si el precio es de $10?
c) ¿Qué precio o precios darán un ingreso total de cero?

28 Funciones de la oferta Una función de oferta indica el número de unidades de un artículo que los proveedores están dispuestos a colocar en el mercado en función del precio que los consumidores estén dispuestos a pagar. La siguiente es una función de este tipo:

$$q_s = 0.5p^2 - 200$$

donde q_s es el número de unidades de la oferta (expresadas en miles) y p indica el precio de venta.

a) ¿Qué clase de función es ésta?
b) ¿Qué cantidad debería ofrecerse si el precio de mercado es de $30? ¿Y si es de $50?
c) ¿Qué precio haría que al mercado se llevaran 0 unidades?

29 Si $y = g(u) = 5u + 5$ y $u = h(x) = x - 6$, determine (*a*) $g(h(x))$, (*b*) $g(h(3))$, (*c*) $g(h(0))$.

30 Si $y = g(u) = u^2 - 2u + 1$ y $u = h(x) + 8$, determine (*a*) $g(h(x))$, (*b*) $g(h(-2))$, (*c*) $g(h(1))$.

31 Si $y = g(u) = u^3 - 2u$ y $u = h(x) = x^2$, determine (*a*) $g(h(x))$, (*b*) $g(h(0))$, (*c*) $g(h(2))$.

32 Si $c = h(s) = s^2 + 6s - 5$ y $s = f(t) = 20$, determine (*a*) $h(f(t))$, (*b*) $h(f(3))$,

33 Si se tiene la función implícita $3x - 4y + 18 = 0$, determine (en caso que sea posible) las funciones explícitas $y = f(x)$ y $x = g(y)$.

34 Dada la función implícita $3xy^2 + 9y = 0$, determine (de ser posible) las funciones explícitas $y = f(x)$ y $x = g(y)$.

35 Si se tiene la función implícita $25x^2y - xy^2 - 20 = 20$, determine (en caso de ser posible) las funciones explícitas $y = f(x)$ y $x = g(y)$.

36 En la función implícita $x^2y - 40 = 0$, determine (de ser posible) las funciones explícitas $y = f(x)$ y $x = g(y)$.

37 Considere la relación $8p + 20q - 25\,000 = 0$, donde p es el precio de un producto en dólares y q indica la cantidad de la demanda en unidades. Determine las correspondientes funciones explícitas de la demanda $q = f(p)$ y $p = h(q)$.

38 Las funciones de oferta dan información sobre la cantidad de un producto que los proveedores están dispuestos a colocar en el mercado y el precio que el mercado está dispuesto a pagar por él. Considérese la relación $-20p + 8q + 2000 = 0$, donde p es el precio que el mercado está dispuesto a pagar por una unidad de un producto

(expresado en dólares) y q indica la cantidad (en unidades) que el proveedor está dispuesto a llevar al mercado al precio p. Determine las correspondientes funciones explícitas de la oferta $q = f(p)$ y $p = h(q)$.

1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

A lo largo del libro se empleará en lo posible el modelo visual para reforzar la compresión de los conceptos matemáticos. Ese modelo casi siempre será una representación gráfica. En esta sección se explicará la representación gráfica de las funciones con dos variables.

Sistema de coordenadas rectangulares

Imagínese un plano sobre el cual se trazan una línea horizontal y una línea vertical como en la figura 1.7. Las dos son ***rectas numéricas***, y se intersecan en sus respectivos puntos cero. La línea horizontal recibe el nombre de ***eje horizontal***. Como se advierte en la figura 1.7, se acostumbra llamarla ***eje x***. La línea vertical es el ***eje vertical*** y en esta figura se denominará ***eje y***. A los dos ejes en conjunto se les da el nombre de ***ejes coordenados***. Nótese que el eje horizontal está marcado con valores positivos a la derecha del eje vertical y con valores negativos a la izquierda. De manera parecida, el eje vertical está marcado con valores positivos arriba del eje horizontal y con valores negativos debajo de él.

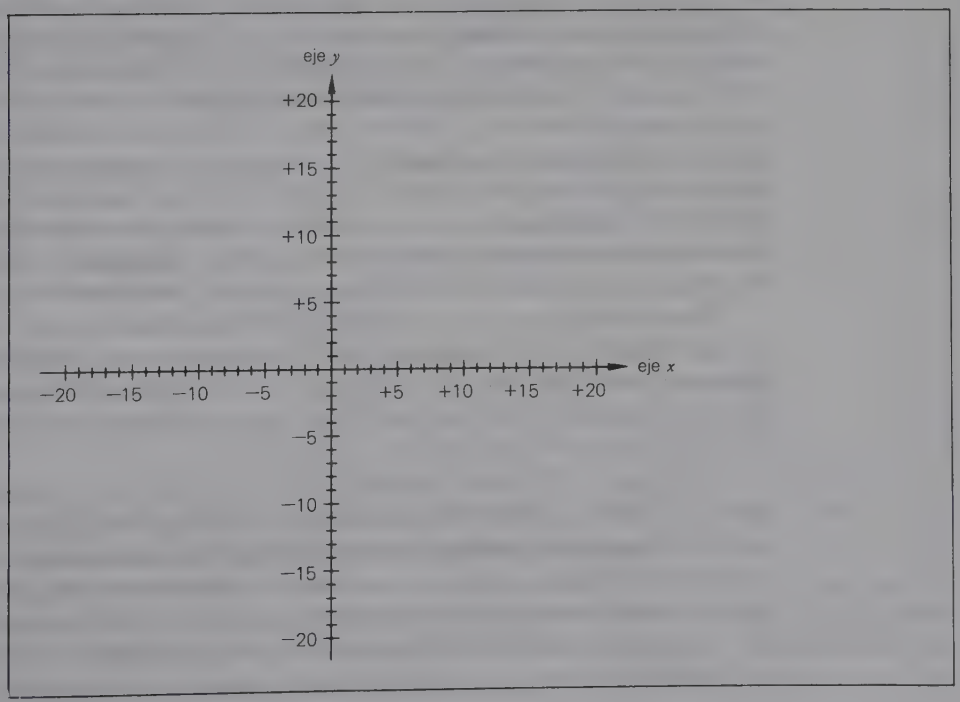


FIGURA 1.7 Plano cartesiano.

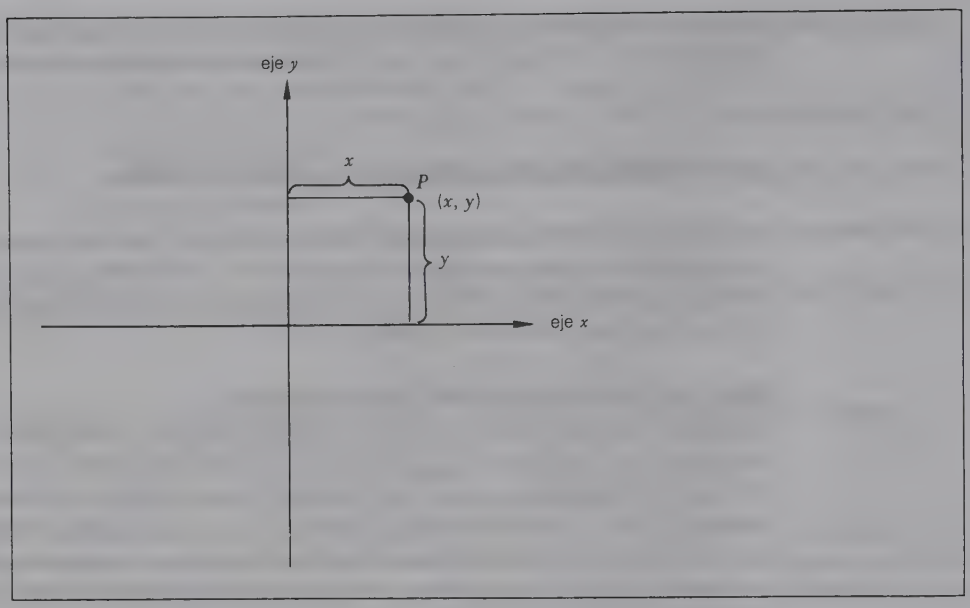


FIGURA 1.8
Sistema de coordenadas rectangulares.

En el plano que contiene los ejes coordenados se conoce con el nombre de ***plano de coordenadas*** o ***plano cartesiano***. El plano de cordenadas puede considerarse formado por un número infinito de puntos, cada uno especificado por su ubicación en relación con los dos ejes. La localización de cada punto p se define por el ***par ordenado*** de valores (x, y). Al primer miembro del par ordenado se le llama ***abscisa*** o, más comúnmente, ***coordenada x***. Como se aprecia en la figura 1.8, la abscisa es la ***distancia dirigida*** a lo largo de una línea horizontal trazada desde el eje vertical hasta P. El segundo miembro del par ordenado es la ***ordenada*** o ***coordenada y***. La ordenada representa la distancia dirigida a lo largo de una línea vertical trazada desde el eje horizontal hasta P. En conjunto las ***coordenadas*** (x, y) especifica la ubicación o dirección de un punto P en un plano de coordenadas. El sistema de coordenadas en un plano de coordenadas recibe el nombre de ***sistema cartesiano, rectangular*** o de ***coordenadas***.

Para localizar un punto P que tenga las coordenadas (a, b), se traza primero una línea vertical imaginaria por el eje horizontal a. Después se dibuja una línea horizontal imaginaria a través del eje vertical en b. El punto P se encuentra en la intersección de esas dos líneas, como se observa en la figura 1.9. Nótese para P que $a < 0$ y $b < 0$.

La figura 1.10 es una representación gráfica de varios puntos muestra. El punto de intersección de los dos ejes tiene coordenadas (0,0) y se denomina ***origen***. El lector también deberá convencerse de que la *coordenada x de un punto cualquiera sobre el eje y es 0* y *de que la coordenada y de cualquier punto del eje x es 0*. Por último, adviértase que los ejes dividen el plano de coordenadas en ***cuadrantes***. Se indican las condiciones de signo para las coordenadas de puntos situados en cada cuadrante.

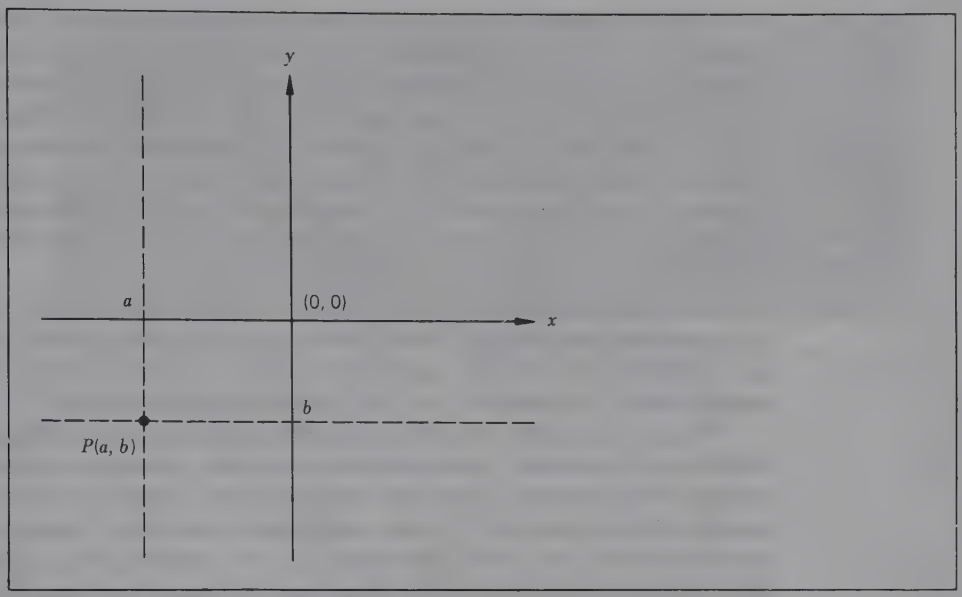


FIGURA 1.9
Localización del punto 0 con coordenadas (a, b).

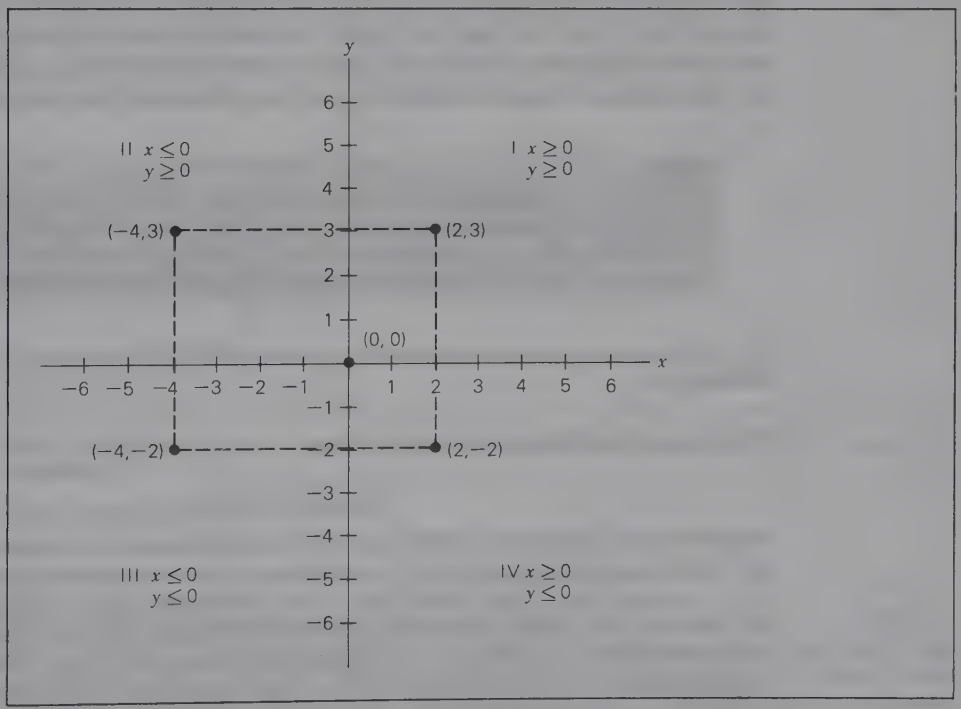


FIGURA 1.10
Puntos muestra en los cuatro cuadrantes.

Graficación de funciones en dos dimensiones

Las funciones de una o dos variables independientes pueden representarse en forma gráfica. Ésta aporta una dimensión más al conocimiento de las funciones matemáticas. El lector apreciará con el tiempo la mayor comprensión y penetración que proporcionan las gráficas.

La representación gráfica requiere una dimension para cada variable independiente contenida en una función y una para el valor funcional o variable dependiente. Así, las funciones de una variable independiente se grafican en dos dimensiones o ***2 espacios***. Las funciones de dos variables independientes pueden graficarse en tres dimensiones, o ***3 espacios***. Sin embargo, resulta mucho más difícil graficar en tres dimensiones que en dos. Cuando una función contiene más de tres variables, se pierde la representación gráfica. A menos que el lector tenga un sexto sentido extraordinario, no podrá conceptualizar o graficar en cuatro o más dimensiones.

Las funciones que contienen dos variables se grafican en un conjunto de ejes coordenados rectangulares. Por lo regular se selecciona el eje vertical para que represente la variable dependiente de la función; el eje horizontal suele escogerse para representar con él la variable independiente.

Para graficar una función matemática, basta *asignar* distintos valores del dominio a la variable independiente y *calcular* el valor correspondiente de la variable dependiente. Cada par ordenado de valores de las dos variables representa los valores de x y y que satisfacen la función. También especifica las coordenadas de un punto individual que se encuentra en la gráfica de la función. Para *trazar* la función, se determina un *número suficiente de pares ordenados* de valores que satisfagan la función; se localizan sus coordenadas en relación con un par de ejes. *Se unen esos puntos por medio de una curva suave para determinar un trazado de la gráfica de la función.* (Si bien este método será suficiente por ahora, más adelante se aprenderán formas más eficientes de trazar las funciones.)

NOTA
La forma más ordenada de generar un par de puntos que satisfagan una función consiste en preparar una tabla con un renglón o columna que contengan ciertos valores de la variable independiente y otro que incluya los valores calculados de la variable dependiente.

EJEMPLO 18

Para trazar la gráfica de la función ***lineal***

$$y = f(x) = 2x - 4$$

el primer paso consiste en seleccionar de modo arbitrario los valores de x y calcular los valores correspondientes de y. Un conjunto de valores muestra aparece en la tabla 1.1. A continuación, si los valores de x y y se consideran como coordenadas, los puntos asociados a cada par de coordenadas deberán localizarse como en la figura 1.11. Una vez graficados los puntos, se unen mediante una curva suave que, en este caso, resulta sospechosamente recta. Si se desea saber cómo aparece la función para los valores de x menores que -4 o mayores que $+4$, habrá que calcular los valores de y para determinados valores de x dentro de esas regiones del dominio.

TABLA 1.1

x	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
Se dijo antes que la gráfica de una función ayuda a llegar a conclusiones sobre el rango (recorrido) de ella. Por observación, el lector deberá concluir que el dominio de $f(x) = 2x - 4$ es el conjunto de los números reales. Del conjunto de los puntos de datos muestra en la figura 1.11 se deduce que y puede hacerse tan grande como se quiera, con sólo escoger un valor suficientemente grande para x. Y al parecer puede hacer y tan grande como se desee si se selecciona un valor negativo de x lo bastante grande. Por tanto, puede concluirse que *el rango de f(x)* es el conjunto de los números reales.

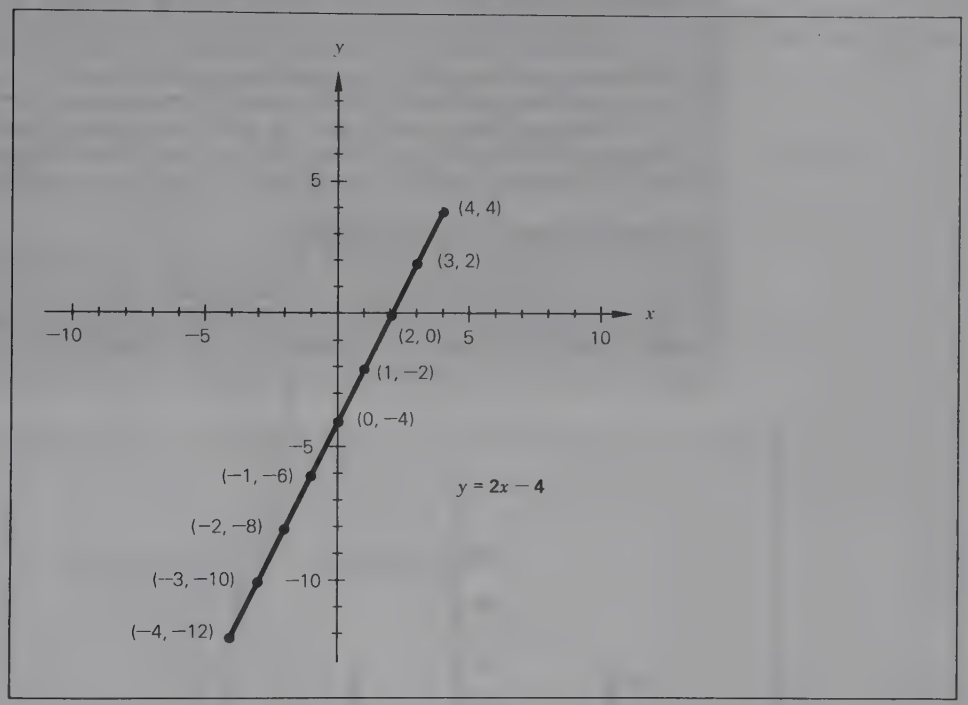


FIGURA 1.11
Graficación de $f(x) = 2x - 4$.

EJEMPLO 19

Para trazar la ***función cuadrática***

$$u = f(v)$$
$$= 10v^2 + 20v - 100$$

los pares de valores muestrales de u y v se calculan como se muestra en la tabla 1.2. Esos puntos se trazan en la gráfica de la figura 1.12 y se han unido para proporcionar un bosquejo de la función. Nótese que el eje horizontal se rotula con la variable independiente v y el eje vertical con la variable dependiente u. En contraste con la función lineal del ejemplo anterior, es obvio que esta función cuadrática no puede representarse con una línea recta.

TABLA 1.2

v	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
u	140	50	−20	−70	−100	−110	−100	−70	−20	50	140

NOTA
Conviene señalar unos cuantos puntos en relación con la graficación de las funciones. Primero, siempre es útil determinar el conjunto de puntos muestrales que se quieren graficar antes de graduar los ejes. Al hacerlo, se determina el intervalo de valores que van a graficarse para las dos variables. Una vez determinados esos intervalos, puede escogerse la escala apropiada que utilizará en cada eje. Un segundo punto es que no es necesario que los dos ejes estén graduados de la misma manera. Las unidades de un eje pueden representar millones y las del otro pueden representar unidades individuales. De manera análoga, los intervalos con que se gradúa cada eje no necesariamente deben tener el mismo ancho. Examínese la graduación de la figura 1.12. Si el lector pasa por alto esta posibilidad, su gráfica puede rebasar los límites del papel. (Durante sus clases el autor de este libro ha encontrado situaciones donde las gráficas requerían puntos debajo del piso o por encima del techo.) Finalmente, la unidad de medición aplicada a una variable no tiene que ser la misma que la que se aplica a la otra. La función de costo en el caso del carro de patrulla mostraría el costo *en dólares* sobre un eje y en el otro las millas recorridas.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Cuál sería el efecto en la forma de la gráfica del último ejemplo, si el eje vertical se graduara de la misma manera que el eje horizontal? ¿Y cuál sería si el eje horizontal se graduara de la misma manera que el eje vertical? En la figura 1.12 determínese el rango de $f(v)$.

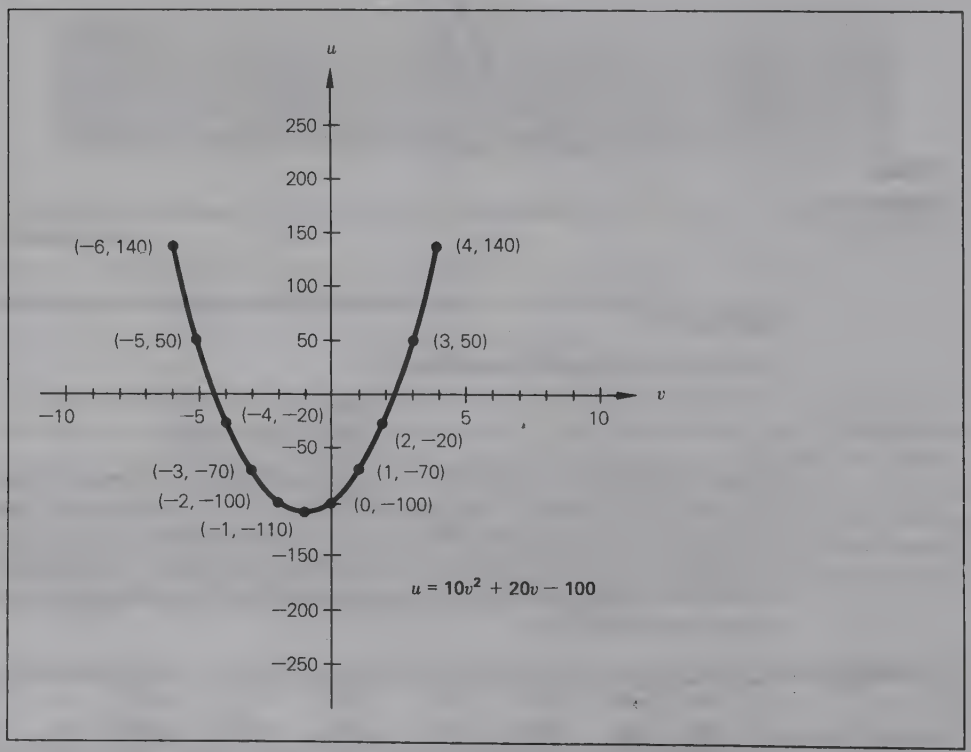


FIGURA 1.12
Gratificación de $f(v) = 10v^2 + 20v - 100$.

EJEMPLO 20

Para trazar la gráfica de la *función cúbica*

$$y = f(x) = x^3$$

los puntos muestra se calculan como se advierte en la tabla 1.3.

TABLA 1.3

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	0	1	8	27	−1	−8	−27

Esos puntos se trazan en la gráfica, dando por resultado el trazado de f en la figura 1.13.

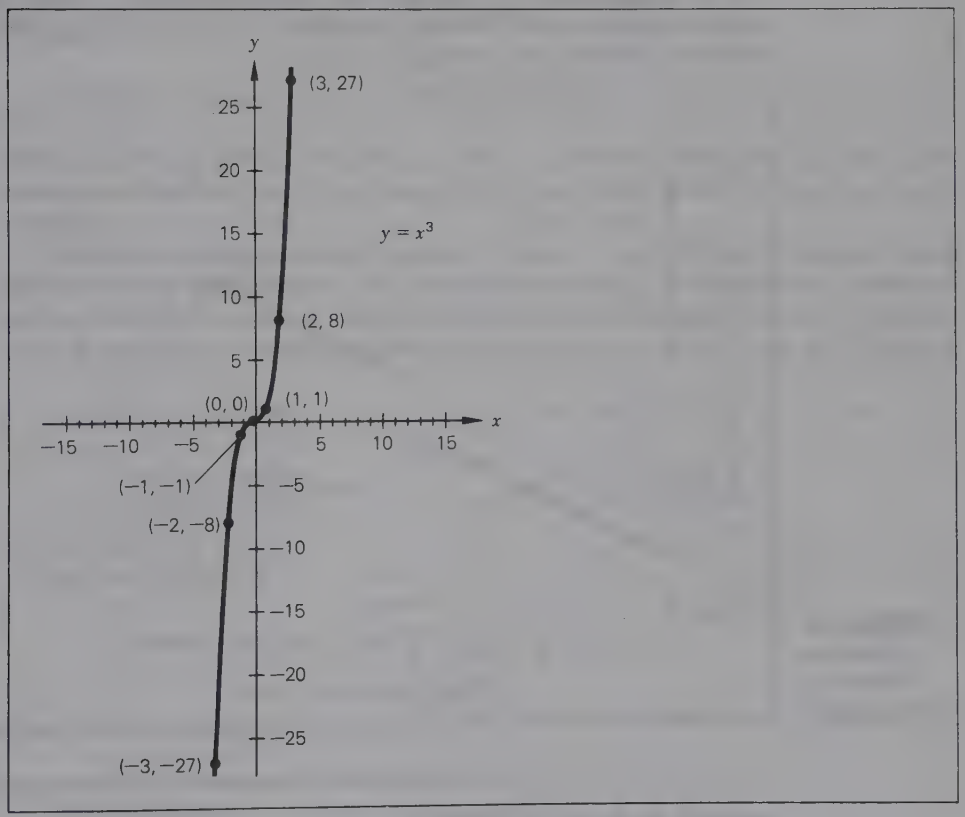


FIGURA 1.13 Graficación de $f(x) = x^3$.

EJEMPLO 21

En algunos casos, la relación funcional existente entre variables se describe con más de una ecuación. Para dar un ejemplo de ello, supóngase que y es el sueldo semanal (en dólares) de un vendedor y que x indica el número de unidades de un producto ven-

dido durante la semana. Si el sueldo semanal depende del número de unidades vendidas, supóngase que se aplica la siguiente función

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x + 50 & \text{donde } 0 \leq x < 40 \\ 2.25x + 75 & \text{donde } x \geq 40 \end{cases}$$

Si el número de unidades vendidas durante una semana es menor que 40, el vendedor recibirá un sueldo base de 50 dólares y una comisión de \$2 por unidad vendida. Si el número de unidades vendidas en una semana es 40 o más, un bono de \$25 aumenta a \$75 la parte base del sueldo. Además, la comisión en *todas* las unidades se incrementa \$2.25 por unidad.

La figura 1.14 muestra la gráfica de la función. Nótese que la gráfica se sirve exclusivamente del cuadrante I, donde x y y son no negativos. El dibujo de la función se hace en dos "partes" lineales. Cada parte de la gráfica es válida para determinada porción del dominio de la función. El círculo abierto (○) al final del primer segmento sirve para indicar que el punto *no* forma parte de la gráfica. Corresponde a la interrupción de la función en $x = 40$. El punto correspondiente a $x = 40$ es el primero del segundo segmento de la función, denotándose con un círculo negro (●). Haga la gráfica de esta función para verificar su forma.

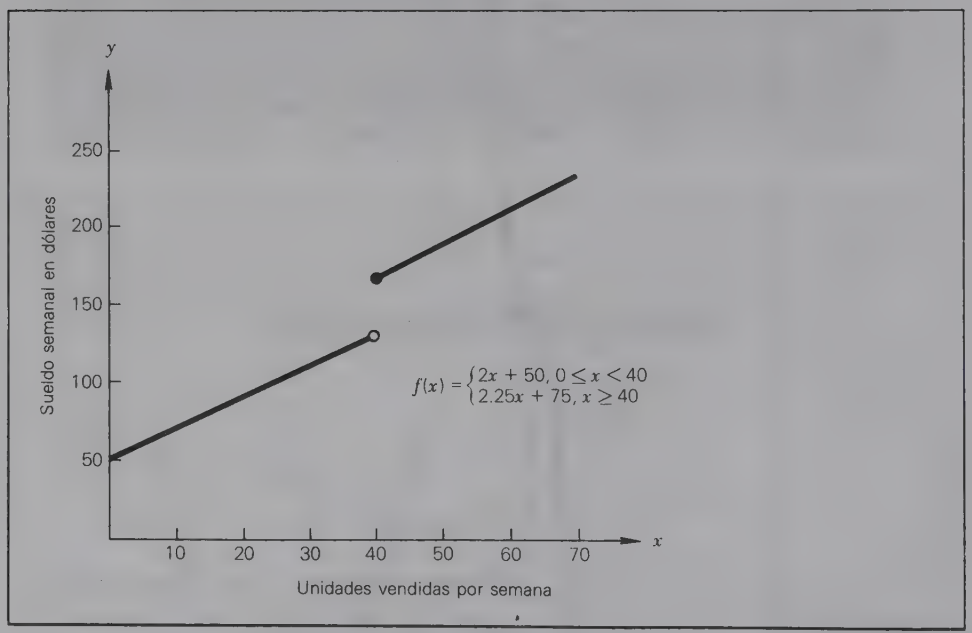


FIGURA 1.14 Función lineal en fragmentos.

Prueba de la línea vertical

Por la definición de función, a cada elemento del dominio debe corresponder un y sólo un elemento en el rango (recorrido). Gracias a esta propiedad se puede hacer una simple comprobación gráfica para determinar si una gráfica representa una función matemática. Si se traza una línea vertical por cualquier valor del dominio, intersecará la gráfica de la función en un punto solamente. En cambio, si una línea vertical interseca una curva en más de un punto, la

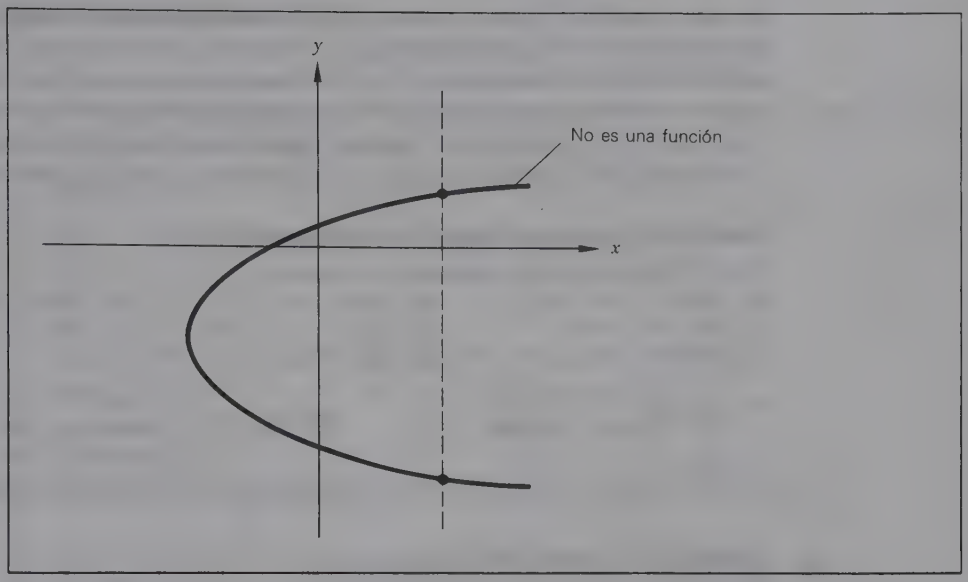


FIGURA 1.15
Prueba gráfica de las funciones.

curva no será la gráfica de una función. La curva en la figura 1.15 no representa una función, ya que la línea vertical punteada interseca la curva en dos puntos.

En la presente sección se explicó el tema de la representación gráfica de las funciones matemáticas. El procedimiento aquí explicado debe llamarse método de "fuerza bruta" por ser necesario determinar un número "adecuado" de puntos a fin de hacerse una idea razonable de la forma de la gráfica

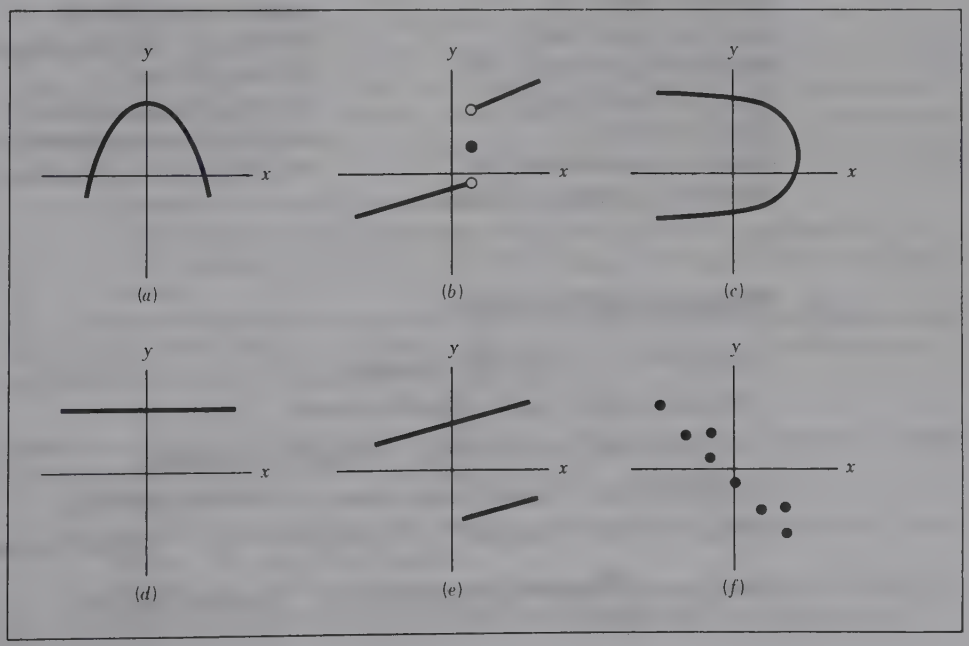


FIGURA 1.16

de una función. ¡Pero el método da buenos resultados! Con la experiencia logrará precisarse cuántos puntos son suficientes. A lo largo del libro se seguirán adquiriendo conocimientos sobre las funciones matemáticas. El lector no tardará en reconocer las diferencias estructurales entre las funciones lineales y varias funciones no lineales, y con ese conocimiento se lograrán mayor facilidad y velocidad en la obtención de un equivalente visual o gráfico.

Ejercicios de seguimiento de la sección 1.3

Trace la gráfica de las siguientes funciones.

1 $f(x) = x - 5$ **2** $f(x) = -4$ **3** $f(x) = -3x$
4 $f(x) = x^2 - 4$ **5** $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **6** $f(x) = x^3 - 5$
7 $f(x) = x^3 + 5$ **8** $f(x) = -x^3$

9 $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{donde } x \geq 0 \\ -x + 3 & \text{donde } x < 0 \end{cases}$ **10** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{donde } 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 & \text{donde } x < 0 \\ 5 & \text{donde } x > 4 \end{cases}$

11 En la figura 1.16, identifique las gráficas que representan funciones.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

abcisa (coordenada x) 26
dominio 2
dominio restringido 8
función 2
funciones bivariadas 9
función compuesta 19
función constante 12
función cuadrática 13
función cúbica 14
función explícita 21
función exponencial 16
función implícita 22
función lineal 13
función logarítmica 18
funciones multivariadas 8
función polinomial 15
función racional 15
funciones univariadas 9
mapeo 2
ordenada (coordenada y) 26
origen 26
plano cartesiano o de coordenadas 26
rango (recorrido) 2
rectas numéricas 25
sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares) 26
variable dependiente 4
variable independiente 4
variables con subíndice 9

■ FÓRMULAS IMPORTANTES

$y = f(x) = a_0$ **Función constante** (1.2)

$y = f(x) = a_1x + a_0$ **Función lineal** (1.3)

$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ **Función cuadrática** (1.4)

$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ **Función cubica** (1.5)

$y = f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ **Función polinomial** (1.6)

$y = f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ para g, h polinomios **Función racional** (1.7)

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los siguientes ejercicios se relacionan con la sección 1.1. En los ejercicios 1 a 10 determine *a*) $f(1)$, *b*) $f(-2)$ y *c*) $f(a - b)$.

1 $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$

2 $f(x) = 15x^2 - 2x + 10$

3 $f(u) = u^3 - 2u^2 + 8u - 30$

4 $f(t) = \sqrt{3}$

5 $f(x) = x^2/(1 - x)$

6 $f(s) = s^4 - 3s^2$

7 $g(h) = h/(1 - h)$

8 $u(v) = v^2 - 2v + 1$

9 $f(x) = 1/\sqrt{2}$

10 $h(t) = (2)^t$

En los ejercicios 11 a 20 determine el dominio de la función.

11 $f(x) = \sqrt{x + 16}/(x^2 + x - 12)$

12 $f(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$

13 $f(x) = \sqrt{(x - 2)/(x^2 - 16)}$

14 $f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$

15 $f(x) = (2)^{2x}$

16 $f(x) = e^{x^2}$, donde $e = 2.718\ldots$

17 $g(u) = \sqrt{10 - \frac{u}{4}}\Big/(u^2 - 64)$

18 $h(t) = (2)^t/\sqrt{t^2 - 7t - 12}$

19 $f(v) = \sqrt{v^2 - 9}/(v^3 - 4v)$

20 $r(s) = \sqrt{25 - s}/(3)^s$

21 Si $f(a,b) = 3a^2 - 2ab + 5b^2$, determine *a*) $f(-2,3)$, *b*) $f(x + y, x - y)$.

22 Cuando $f(a,b,c,d) = a^3 - 2abc + cd^2 - 5$, determine *a*) $f(-1,2,0.1)$, *b*) $f(0,0,0,0)$.

23 Si $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 - 10$, determine *a*) $f(0,1,-3)$, *b*) $f(10,-10,10)$.

24 En $h(x,y,z) = x^2yz^3$, determine *a*) $h(2,-3,1)$, *b*) $h(a + b,a,b)$.

Los siguientes ejercicios se relacionan con la sección 1-2.

25 Una estación radiofónica local adquirió el derecho exclusivo de promover un concierto en el auditorio cívico de la ciudad,con cupo para 20 000 personas. Su comisión es de 5000 dólares más \$1.50 por cada boleto que venda para el concierto.

a) Determine la función $C = f(n)$, donde C es la comisión que se paga a la estación radiofónica, expresada en dólares, y n indica el número de boletos vendidos.

b) Determine el dominio y rangos restringidos de esta función.

26 Se ha contratado a un vendedor para vender tres productos. Se le paga por comisión, ganando \$2.50, \$3.00 y \$2.00 por unidad, respectivamente, en los productos 1, 2 y 3. Además el vendedor recibe un sueldo base de \$40 a la semana. x_j es el número de unidades vendidas por semana del producto j para $j = 1, 2, 3$ y s indica el sueldo semanal en dólares.

a) Determine la función de sueldo $s = f(x_1, x_2\ x_3)$.

b) Si las ventas semanales máximas de los tres productos se estiman en 20, 35 y 25 unidades, determine el dominio y rango restringidos de la función de sueldo.

27 Una universidad piensa que las inscripciones van a disminuir a medida que la población estudiantil empiece a decrecer. Estima que el número de solicitudes para el próximo año se comportará conforme a la función

$$a = f(t) = 3\,600 - 250t$$

donde a = número de solicitudes de admisión a la universidad y t denota el tiempo (en años) medido a partir del año actual ($t = 0$).

a) ¿De qué clase de función es un ejemplo esta función?

b) ¿Cuál es el número esperado de solicitudes dentro de 5 años contados a partir de hoy? ¿Al cabo de 10 años?

c) ¿Piensa que esta función es un predictor preciso para cualquier momento futuro? ¿Qué clases de factores influirán en el dominio restringido de t?

28 Control de armas Ante la creciente criminalidad, se estima que el número de pistolas en circulación ha ido aumentando. El FBI utiliza la función

$$n = f(t) = 25.5 + 0.025t$$

donde n es el número estimado de pistolas en circulación (en millones) y t representa el tiempo medido en años a partir del presente año ($t = 0$).

a) ¿De qué clase de funciones es un ejemplo esta función?
b) ¿Cuál es el número estimado de pistolas que habrá dentro de 20 años?
c) ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el número de pistolas llegue a 26.5 millones?

29 El costo total de fabricar x unidades de un producto se estima mediante la función de costo

$$C = f(x) = 50x + 0.1x^2 + 150$$

donde C es el costo total medido en dólares.

a) ¿De qué clase de funciones es un ejemplo esta función?
b) ¿Cuál es el costo de producir 25 000 unidades?
c) ¿Cuál es el costo de producir 0 unidades? ¿Qué término podría usarse para describir este costo?

30 Un detallista ha determinado que el costo anual C de comprar, poseer y dar mantenimiento a uno de sus productos se ajuste a la función

$$C = f(q) = \frac{20\,000}{q} + 0.5q + 50\,000$$

donde q es el tamaño (en unidades) de cada orden hecha a los proveedores.

a) ¿Cuál es el costo anual si el tamaño de la orden es de 1000 unidades? ¿Y si es de 2000 unidades?
b) Vea si puede determinar el dominio restringido de esta función. (*Sugerencia*: no obtendrá un número real del límite superior; por ello es mejor que explique los factores que afectarán a ese valor.)

En los ejercicios 31 a 42, clasifique cada función por tipo.

31 $g(u) = u^2/5$
32 $f(x) = \log_{10} 100$
33 $f(x) = (3x^2 - 5)/(x^3 - 4x + 5)$
34 $f(x) = (10)^x$
35 $f(t) = t^4 - t^3 - t^2 + t$
36 $g(h) = \sqrt[3]{h^9}$
37 $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x - 10)/5$
38 $f(x) = 4/(x^3 - 2x + 8)$
39 $h(r) = (2.5)r^0$
40 $g(h) = (h^3 - 2h^2 + h)/h$
41 $f(u) = (u + 7)^2$
42 $f(x) = (x - 1)^3$

43 Si $y = g(u) = u^3 - 5u$ y $u = h(x) = x^2 - 4$, determine (*a*) $g(h(x))$, (*b*) $g(h(2))$.
44 Si $y = g(u) = u - 5$ y $u = h(x) = x^2 - 3x + 6$, determine (*a*) $g(h(x))$, (*b*) $g(h(-2))$.
***45** Si $y = f(r) = r^2$ y $r = g(s) = s^2 - 4$ y $s = h(x) = x - 3$, determine las funciones compuestas (*a*) $g(h(x))$, (*b*) $f(g(h(x)))$.
46 En la función implícita $10x - 5y + 25 = 0$, determine (en caso de ser posible) las funciones explícitas $y = f(x)$ y $x = g(y)$.
47 En la función implícita $4x^2y - 5y^3 + xy - 5x + 100 = 0$, determine (de ser posible) las funciones explícitas $y = f(x)$ y $x = g(y)$.

Los siguientes ejercicios se relacionan con la sección 1.3. Trace la gráfica de las siguientes funciones.

48 $f(x) = 6$
49 $f(x) = 10 - 2x$
50 $f(x) = -x^2 + 10$
51 $f(x) = x^4$
52 $f(x) = x^5$
53 $f(x) = \begin{cases} |x| \text{ cuando } -2 < x \leq 2 \\ x \text{ cuando } x \leq -2 \text{ or } x > 2 \end{cases}$

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 En la función $f(x) = x^2 - 2x + 9$, determine $f(-3)$ y $f(a + b)$.

2 Determine el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x + 2}/(x^3 - 2x^2 - 3x)$$

3 Defina lo que se entiende por *dominio* y *rango* de una función.

4 En la función $y = f(x) = 4x^2 - 3x + 1$, reescriba esta función en la forma implícita.

5 Si $y = g(u) = u^2/(1 - 2u)$ y $u = h(x) = x + 5$, determine las funciones compuestas *a*) $g(h(x))$, *b*) $g(h(-2))$.

6 Clasifique cada una de las siguientes funciones por tipo.

(*a*) $f(x) = x^6$ (*b*) $f(x) = (25)^{1/2}$

7 Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ cuando } x \geq 0 \\ -x \text{ cuando } x < 0 \end{cases}$$

CAPÍTULO

2 ECUACIONES LINEALES

2.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS ECUACIONES LINEALES
2.2 CARACTERÍSTICAS GRÁFICAS
2.3 FORMA DE PENDIENTE-INTERSECCIÓN
2.4 DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA LÍNEA RECTA
2.5 ECUACIONES LINEALES CON MÁS DE DOS VARIABLES
2.6 OTRAS APLICACIONES
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: ANÁLISIS DE ECUACIONES LINEALES POR COMPUTADORA

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ofrecer un conocimiento cabal de las características algebraicas y gráficas de las ecuaciones lineales
- Proporcionar las herramientas que permiten determinar la ecuación que representa una relación lineal
- Dar ejemplos de varias aplicaciones de las ecuaciones lineales

En este libro uno de los temas fundamentales es el de las matemáticas lineales. Éste es el primero de seis capítulos que se centran en las matemáticas lineales y en sus aplicaciones. Las matemáticas lineales son importantes por diversas razones:

1 Muchos de los fenómenos del mundo real que se quieren representar en forma matemática son lineales o bien pueden aproximarse razonablemente

por medio de relaciones lineales. De ahí las muchas aplicaciones que tienen las matemáticas lineales.

2 El análisis de las relaciones lineales es, en general, más fácil que el de las relaciones no lineales.

3 Algunos métodos empleados en las matemáticas no lineales se parecen o son extensiones de los utilizados en las matemáticas lineales. En consecuencia, un requisito del estudio de las matemáticas no lineales es conocer bien las matemáticas lineales.

2.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS ECUACIONES LINEALES

Forma general

ECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES
Una ecuación lineal con dos variables x y y tiene la forma ordinaria

$$ax + by = c \qquad (2.1)$$

donde a, b y c son números reales y a y b no pueden ser iguales a cero.

Nótese que las ecuaciones lineales son de *primer grado*. Cada variable de la ecuación está elevada (implícitamente) a la primera potencia. La presencia de términos que tuvieran exponentes diferentes de 1 (por ejemplo, x^2) excluirá la posibilidad de considerar lineal a una ecuación. Y lo mismo sucedería si contuviera términos con un producto de dos variables ($2xy$, por ejemplo).

A continuación se dan ejemplos de ecuaciones lineales de dos variables:

	Parámetros de la ecuación (2.1)		
	a	b	c
$2x + 5y = -5$	2	5	-5
$-x + \frac{1}{2}y = 0$	-1	$\frac{1}{2}$	0
$x/3 = 25$	$\frac{1}{3}$	0	25
(*Nota:* $x/3 = \frac{1}{3}x$)			
$2s - 4t = -\frac{1}{2}$	2	-4	$-\frac{1}{2}$

(*Nota:* los nombres de las variables pueden ser diferentes de x y y.)

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones *no* lineales. ¿Puede explicar el lector por qué?

$$2x + 3xy - 4y = 10$$
$$x + y^2 = 6$$
$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = -10$$

Cuando se intenta identificar la forma de una ecuación (lineal o no lineal), se dice que una ecuación es lineal si *puede* escribirse en la forma expresada en la ecuación (2.1). Una ojeada a la ecuación

$$2x = \frac{5x - 2y}{4} + 10$$

podría llevar a la conclusión falsa de que no es lineal. Sin embargo, si ambos miembros de la ecuación se multiplican por 4 y si todas las variables se pasan al miembro de la izquierda, se obtiene $3x + 2y = 40$, expresión que está dada en la forma de la ecuación (2.1).

ECUACIÓN LINEAL CON *n* VARIABLES
Una ecuación lineal con n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tiene la forma general

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (2.2)$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales y no todas las $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son iguales a cero.

Las siguientes expresiones son ejemplos de ecuación lineal:

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$$
$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 2x_6 = -80$$
$$5x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 - 3x_7 + 10x_8 - 12x_9 + x_{10} = 1250$$

En este libro se dedicará mucho espacio al análisis de las ecuaciones matemáticas con dos variables. Además del hecho de que la aritmética es un poco más fácil, otra razón por la cual se centra la atención en el caso de dos variables es que puede trazarse la gráfica de estas funciones para contar con un cuadro visual de referencia. La ecuación (2.2) generaliza la definición de ecuación lineal a aquellos casos en que se utilizan más de dos variables.

Representación mediante ecuaciones lineales

En el caso de una ecuación lineal de la forma $ax + by = c$, el ***conjunto solución*** de la ecuación es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisfaga la ecuación. Utilizando la **notación de conjuntos**, el conjunto solución S puede especificarse como

$$\boxed{S = \{(x, y) \mid ax + by = c\}} \qquad (2.3)$$

En forma verbal, esta ecuación establece que el conjunto solución S está formado por elementos (x, y) tales que $ax + by = c$. Para cualquier ecuación lineal, S es un conjunto infinito; es decir, *existe un número infinito de pares de valores* (x, y) *que satisfacen cualquier ecuación lineal de dos variables.*

Para determinar cualquier par de valores que satisfagan una ecuación lineal, supóngase cualquier valor para una de las variables, sustitúyase este valor en la ecuación y resuélvase para el valor correspondiente de la otra variable. Este método supone que ambas variables están incluidas en la ecuación (esto es, $a \neq$ y $b \neq 0$).

EJEMPLO 1

Se da la ecuación

$$2x + 4y = 16$$

a) Determínese el par de valores que satisfacen la ecuación cuando $x = -2$.
b) Determínese el par de valores que satisfacen la ecuación cuando $y = 0$.

SOLUCIÓN

a) Sustituyendo $x = -2$ en la ecuación, se obtiene

$$2(-2) + 4y = 16$$
$$4y = 20$$

y

$$y = 5$$

Cuando $x = -2$, el par de valores que satisfacen la ecuación es $x = -2$ y $y = 5$, o sea $(-2, 5)$

b) Al sustituir $y = 0$ en la ecuación se obtiene

$$2x + 4(0) = 16$$
$$2x = 16$$

y

$$x = 8$$

Cuando $y = 0$, el par de valores que satisfacen la ecuación es $(8, 0)$.

EJEMPLO 2

Mezcla de productos Una compañía fabrica dos productos diferentes. Para la semana entrante dispone de 120 horas de trabajo destinadas a la elaboración de ambos productos. Puede asignar horas de trabajo a la fabricación de ambos productos. Además, como los dos tipos de producción aportan buenas ganancias, a la dirección le interesa utilizar las 120 horas durante la semana. Cada unidad del producto A requiere 3 horas de trabajo para su elaboración, y cada unidad del producto B requiere 2.5 horas.

a) Defínase una ecuación que establezca que las horas totales de trabajo dedicadas a la producción de x unidades del producto A y y unidades del producto B son 120.
b) ¿Cuántas unidades del producto A pueden fabricarse si se elaboran 30 unidades del producto B?
c) Si la gerencia decide producir sólo un artículo, ¿cuál será la cantidad máxima que puede fabricarse del producto A? ¿Y cuál será la cantidad máxima del producto B?

SOLUCIÓN

a) Pueden definirse las variables como sigue:

x = número de unidades fabricadas del producto A y = número de unidades fabricadas del producto B

La ecuación deseada tiene la siguiente estructura.

Horas totales usadas en la fabricación de los productos A y B = 120	(2.4)

Lo que se necesita es, pues, la expresión del miembro izquierdo de la ecuación.

NOTA
Es posible que el lector tenga un modelo mental del miembro izquierdo de esta ecuación: basta reconocer su forma y expresarla. Ponga a prueba el modelo preguntándose, ¿cuántas horas usaría si fabricara 1 unidad de cada producto, si fabricase 2 unidades de cada uno, 10 unidades del producto *A* y 20 del producto *B*? Si logra contestar estas preguntas, estará sirviéndose de un modelo mental. Relea las definiciones de *x* y *y*, formulando después el modelo que le permite contestar estas preguntas.

A medida que el lector resuelva la estructura del miembro izquierdo de la ecuación (2.4), la ecuación final podría desarrollarse como sigue:

$$\text{Total de horas usadas en la fabricación del producto } A + \text{Total de horas usadas en la fabricación del producto } B = 120 \qquad (2.5)$$

Las horas totales necesarias para elaborar uno u otro producto son iguales a las que se requieren por unidad producida multiplicadas por el número de unidades producidas. Por tanto, la ecuación (2.5) se reduce a

$$3x + 2.5y = 120 \qquad (2.6)$$

¿Es ésta la respuesta a que llegó el lector?
b) Si se fabrican 30 unidades del producto *B*, entonces $y = 30$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(30) &= 120 \\ 3x &= 45 \\ x &= 15 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Un par de valores que satisfacen la ecuación (2.6) es (15, 30). En otras palabras, *una combinación* de los dos productos que utilizará totalmente las 120 horas es 15 unidades del producto *A* y 30 unidades del producto *B*.
c) Si la dirección de la empresa decide fabricar únicamente el producto *A*, no se elaboran unidades del producto *B*, o sea $y = 0$. Si $y = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(0) &= 120 \\ 3x &= 120 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Por tanto, 40 es el número máximo de unidades del producto *A* que pueden fabricarse usando las 120 horas de que se dispone.

Si la dirección decide fabricar sólo el producto *B*, $x = 0$ y

$$3(0) + 2.5y = 120$$

o bien

$$y = 48 \text{ unidades}$$

EJEMPLO 3

En páginas anteriores se dijo que existe un número infinito de pares de valores (x, y) que satisfacen cualquier ecuación lineal. En el ejemplo 2, ¿hay determinados miembros de S que pudieran no ser verdaderos en relación con lo que representa la ecuación?

SOLUCIÓN

En el ejemplo 2, x y y representan el número de unidades elaboradas de los dos productos. Puesto que es imposible tener una producción *negativa*, carecen de sentido los valores negativos de x y y. Hay valores negativos que satisfacen la ecuación (2.5). Por ejemplo, si $y = 60$, entonces

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(60) &= 12 \\ 3x &= -30 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Además de esto, es posible obtener valores decimales o fraccionarios para x y y. Por ejemplo, si $y = 40$,

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(40) &= 120 \\ 3x &= 20 \\ x &= 6\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Si se tienen todos los pares de valores *no negativos* de x y y que satisfacen la ecuación (2.6), tal vez los valores no enteros carezcan de sentido por la naturaleza de los productos.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
Dense ejemplos de tipos de productos en que sólo los valores enteros serían razonables. Dése un ejemplo de un producto para el cual los valores no enteros son razonables.

Generalización para ecuaciones lineales de *n* variables

Dada una ecuación lineal de n variables, como se define en la ecuación (2.2), el conjunto solución S puede definirse así:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b\} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Como en el caso de dos variables, en el conjunto solución existe un número infinito de elementos. Un elemento de S se representa por medio de un grupo de valores $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, uno por cada una de las n variables de la ecuación. Una forma de identificar elementos específicos de S consiste en suponer valores para $n - 1$ de las variables, sustituirlos en la ecuación y resolver para obtener el valor de la variable restante.

EJEMPLO 4

En la ecuación

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 16$$

a) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 0$?
b) Determine todos los miembros del conjunto solución que tienen valores 0 para tres de las cuatro variables.

SOLUCIÓN

a) Al sustituir los valores dados de x_1, x_2 y x_3 en la ecuación, se obtiene

$$2(2) + 3(-1) - (0) + x_4 = 16$$

o

$$x_4 = 15$$

El elemento correspondiente del conjunto solución es $(2, -1, 0, 15)$.
b) Si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, entonces

$$2(0) + 3(0) - (0) + x_4 = 16$$

o

$$x_4 = 16$$

Si $x_1 = x_2 = x_4 = 0$,

$$2(0) + 3(0) - x_3 + 0 = 16$$

o bien

$$x_3 = -16$$

Si $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, entonces

$$2(0) + 3x_2 - 0 + 0 = 16$$

o

$$3x_2 = 16$$

y

$$x_2 = \tfrac{16}{3}$$

Si $x_2 = x_3 = x_4 = 0$,

$$2x_1 + 3(0) - 0 + 0 = 16$$

o

$$2x_1 = 16$$

y

$$x_1 = 8$$

Por tanto, los elementos del conjunto solución que tienen tres de las cuatro variables iguales a 0 serán $(0, 0, 0, 16)$, $(0, 0, -16, 0)$, $(0, 16/3, 0, 0)$ y $(8, 0, 0, 0)$.

Ejercicios de seguimiento de la sección 2.1

Determine cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales.

1 $4y - 11x = 0$
2 $3y = 4x^2 - x/2$
3 $3y = 1$
4 $\sqrt{2}x + y/2 = 10$
5 $3y^2 = x + 10$
6 $25 + x = \sqrt{5}$
7 $x = 2$
8 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$
9 $(x + y)/3 - y/2 = 5x - y$
10 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)/2 = x_6$
11 $x_1 + (3x_2 - x_3 + 5x_4)/2 = 0$
12 $(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 = 20$
13 $(x_1 + x_2 + x_3)^{1/2} = 10$
14 $2x_1 - x_4 + 16 = x_2 - 6x_3$
15 $x + y - 4 = 2x + 6y + 6$
16 $40x_1 = 180$

En los ejercicios 17 a 24, utilice la notación de conjuntos para especificar la pertenencia al conjunto solución S.

17 $3x + 7y = 42$
18 $4a - 5b = -10$
19 $x + y + z = 50$
20 $2x - 3y + z = 75$
21 $x_1 - 3x_2 + x_3 = 120$
22 $-4x_1 + 3x_2 - x_3 = 36$
23 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 500$
24 $a + 2b + 3c + 4d = 200$

25 Considere la ecuación $15x = 75$ como una ecuación de dos variables que tiene la forma de ecuación (2.1).

a) Defina a, b y c.
b) ¿Qué par de valores satisface la ecuación cuando $y = 10$?
c) ¿Qué par de valores satisface la ecuación cuando $x = 20$?
d) ¿Puede generalizar una afirmación sobre la naturaleza de los valores de x y y que pertenecen al conjunto solución de esta ecuación?

26 Vuelva a resolver el ejemplo 2, si el producto A requiere 2 horas por unidad y el producto B requiere 4 horas por unidad.

27 En la ecuación $4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$,

a) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_1 = 5$ y $x_3 = 4$?
b) Defina los elementos del conjunto solución en los cuales los valores de las dos variables sean iguales a 0.

28 Si se tiene la ecuación $2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 32$,

a) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_1 = 10$, $x_3 = 4$ y $x_4 = -2$?
b) Determine todos los elementos del conjunto solución para los cuales los valores de las tres variables sean iguales a 0.

29 La ecuación $x_4 = 10$ es una de un grupo de ecuaciones que contienen cuatro variables x_1, x_2, x_3 y x_4.

a) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 10$?
b) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_4 = 10$?
c) Determine todos los elementos del conjunto solución para los cuales los valores de tres variables son cero.

30 Una compañía fabrica dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 4 horas de trabajo y cada unidad de B requiere 6 horas. La capacidad diaria de producción es de 120 horas de trabajo.

a) Si x unidades del producto A y y unidades del producto B se fabrican cada día y si se usan todas las horas de trabajo, determine la ecuación lineal apropiada que exprese esa relación.
b) ¿Cuántas unidades de A pueden fabricarse cada día si diariamente se fabrican 16 unidades de B?
c) ¿Cuántas unidades de A pueden elaborarse a la *semana* si diariamente se fabrican 12 unidades de B? (Suponga una semana laboral de 5 días.)

31 Planeación nutricional Un dietista está estudiando la conveniencia de servir tres tipos de alimento en una comida. Le interesa sobre todo la cantidad de una vitamina contenida en la comida. Una onza del alimento 1 rinde 8 miligramos de la vitamina; una onza del alimento 2 suministra 6 miligramos; y una onza del alimento 3 rinde 16 miligramos. La *ración diaria mínima* de la vitamina es de 96 miligramos.

a) Si x_j es el número de onzas del tipo de alimento j servido en la comida, determine la ecuación apropiada que garantice que la comida cumple exactamente con la ración diaria mínima.
b) Si sólo uno de los tres tipos de alimentos debe incluirse en la comida, ¿cuánto tendría que servirse (en cada uno de los tres casos posibles) a fin de satisfacer la ración diaria mínima?

32 Transporte aéreo de emergencia La Cruz Roja quiere enviar por avión alimentos y medicamentos a un país de América del Sur que ha sufrido un temblor. Se estudia la posibilidad de enviar cuatro tipos de suministros, cada uno de los cuales se enviará en contenedores o cajas. Una caja de un artículo pesa 150, 100, 80 y 200 libras, respectivamente, para los cuatro artículos. El avión que se usará tiene una capacidad de peso de 60 000 libras y x_j es el número de contenedores enviados del artículo j.

a) Determine la ecuación adecuada que asegure que el avión esté cargado a toda su capacidad.

b) Si se decide dedicar este avión para transportar un artículo solamente, ¿cuántas cajas podrían embarcarse de cada suministro?

33 El transporte aéreo de nuevo En el ejercicio anterior, cada caja o contenedor de un suministro o artículo requiere un volumen particular de espacio. Suponga que las cajas de cuatro artículos requieren 20, 40, 12 y 24 pies cúbicos, respectivamente. Si la capacidad volumétrica del avión es de 6000 pies cúbicos,

a) Determine la ecuación que asegure que la capacidad volumétrica del avión se utiliza totalmente.

b) Si se decide dedicar este avión a un solo suministro, ¿cuántas cajas de cada uno podrían embarcarse si la capacidad volumétrica es la única consideración?

c) Empleando la información del ejercicio 32, ¿cuál es el número máximo de cajas que podrían embarcarse de cada artículo si se tuvieran en cuenta tanto el volumen como el peso?

34 Contratación de personal Una empresa consultora de programas de computadora (software) ha recibido un gran contrato para desarrollar un nuevo sistema de reservaciones para una importante aerolínea. A fin de cumplir con él, hay que contratar a nuevos analistas programadores, analistas programadores de alto nivel e ingenieros de software. Cada puesto de analista programador costará 30 000 dólares por concepto de sueldo y beneficios o prestaciones. Cada puesto de programador analista de alto nivel costará $45 000 y cada puesto de ingeniero de software costará $60 000. La aerolínea cuenta con un presupuesto de $1.8 millones anuales para las nuevas contrataciones. Si x_j es el número de empleados contratados por categoría de puesto j (donde j = 1 corresponde a los analistas programadores, etc.),

a) Determine la ecuación que asegura que el total de las nuevas contrataciones absorberá exactamente el presupuesto.

b) Si se deseara gastar todo el presupuesto en un tipo de puesto, ¿a cuántas personas de cada tipo se contrataría?

c) Si para el contrato se necesitasen exactamente veinte analistas programadores, ¿cuál es el número máximo de analistas programadores de alto nivel que podrían ser contratados? ¿Y el número máximo de ingenieros de software?

2.2 CARACTERÍSTICAS GRÁFICAS

Graficación de ecuación con dos variables

Una ecuación lineal de dos variables tiene una gráfica que es una línea recta en dos dimensiones. Si se desea graficar este tipo de ecuaciones, basta (*1*) *Identificar las coordenadas de dos puntos cualesquiera que se encuentren en la línea, (2) unirlos con una recta y (3) alargar la recta en ambas direcciones cuanto se necesite o lo exijan los propósitos del momento.* Las coordenadas de los dos puntos se encuentran identificando dos miembros cualesquiera del conjunto solución. La representación

gráfica (o copia) de cada elemento del conjunto solución es un punto en un espacio bidimensional. La posición del punto se describe por medio de coordenadas (x, y), donde x y y son los valores respectivos de ambas variables. Por ejemplo, si los valores de $x = 1$ y $y = 3$ satisfacen una ecuación, la representación gráfica de este miembro del conjunto solución es un punto localizado en $(1, 3)$.

EJEMPLO 5

La gráfica de la ecuación

$$2x + 4y = 16$$

se obtiene identificando primero dos pares cualesquiera de valores para x y y que satisfagan la ecuación.

NOTA
Aparte del caso donde el miembro del lado derecho de la ecuación es cero, los puntos más fáciles de identificar en forma algebraica son aquellos que se obtienen al hacer una variable igual a 0 y resolviendo para calcular el valor de la otra. Es decir, hágase $x = 0$ y resuélvase para obtener el valor de y; después hágase $y = 0$ y resuélvase para calcular el valor de x. Obsérvese que los pares ordenados resultantes $(0,y)$ son puntos sobre los ejes y y x, respectivamente.

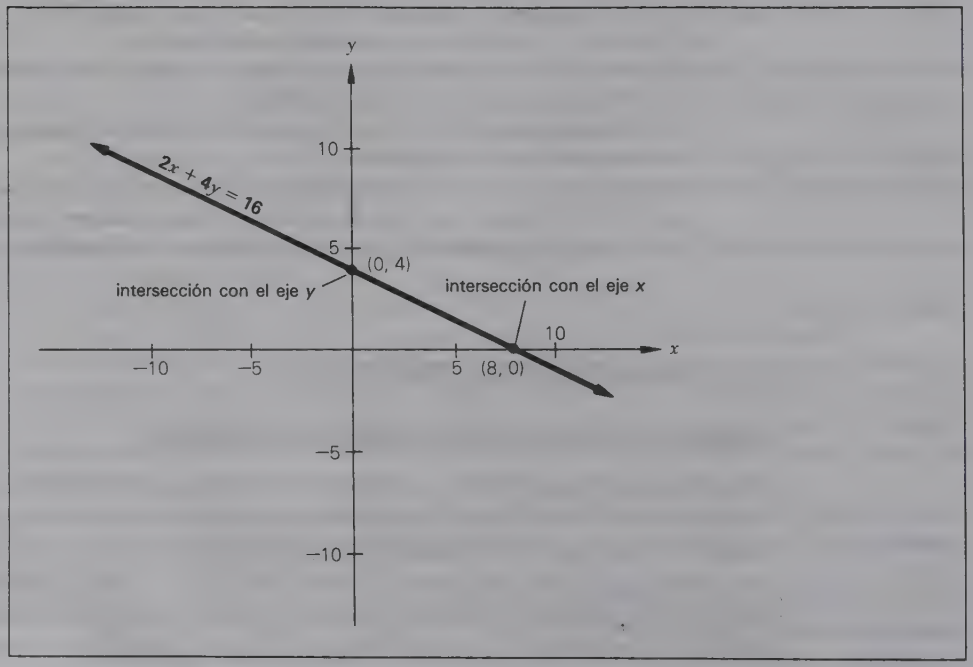


FIGURA 2.1
Gráfica de la ecuación lineal $2x + 4y = 16$.

Haciendo $x = 0$, el valor correspondiente de y es 4 y al hacer $y = 0$ se observa que $x = 8$. Así pues, (0, 4) y (8, 0) son dos miembros del conjunto solución y su representación gráfica se indica por medio de los dos puntos en la figura 2.1. Los dos puntos se han unido por medio de una línea recta y ésta se ha prolongado en ambas direcciones.

Así como (0, 4) y (8, 0) son miembros del conjunto solución para la ecuación $2x + 4y = 16$, también las coordenadas de cada punto sobre la recta representan a otros miembros del conjunto solución. ¿Cuántos puntos únicos hay sobre la recta? Existe un número infinito, lo cual es enteramente compatible con el enunciado anterior según el cual hay un número infinito de pares de valores para x y y que satisfacen alguna ecuación lineal. En resumen, si hay pares cualesquiera de valores (x, y) que satisfagan una ecuación, pueden identificarse, respectivamente, mediante las coordenadas de los puntos pertenecientes a la recta que representa la ecuación. En la figura 2.1, las coordenadas de cualquier punto *no* perteneciente a la recta no satisfarán la ecuación.

EJEMPLO 6

Grafíquese la ecuación lineal $4x - 7y = 0$.

SOLUCIÓN

Esta ecuación es un ejemplo del caso en que no se encontrarán dos puntos haciendo cada variable igual a 0 y resolviendo para obtener la otra. ¡Obsérvese lo que sucede! Si $x = 0$,

$$4(0) - 7y = 0 \quad \text{or} \quad y = 0$$

Si $y = 0$

$$4x - 7(0) = 0 \quad \text{or} \quad x = 0$$

Ambos casos han producido el mismo punto (0, 0). En consecuencia, se debe suponer otro valor para una de las variables. Si $x = 7$,

$$\begin{aligned} 4(7) - 7y &= 0 \\ -7y &= -28 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Dos miembros del conjunto solución son, pues, (0, 0) y (7.4). La figura 2.2 muestra la gráfica de la ecuación.

NOTA
La gráfica de cualquier ecuación lineal de dos variables, en la forma corriente de la ecuación $ax + by = 0$ es una línea recta que *pasa por el origen.*

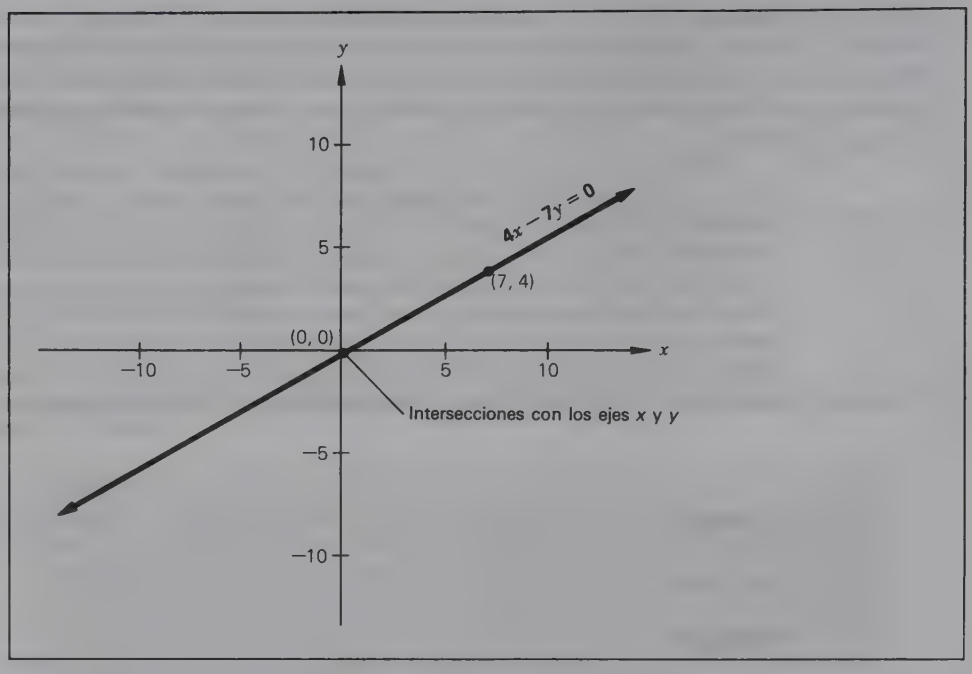


FIGURA 2.2
Gráfica de la ecuación lineal $4x - 7y = 0$.

Intersecciones con los ejes

Al describir la forma gráfica de las funciones matemáticas, existen dos características de interés: las ***intersecciones con el eje x*** y las ***intersecciones con el eje y***. Unas y otras pueden describirse tanto de modo gráfico como algebraico.

DEFINICIÓN: INTERSECCIÓN CON EL EJE *x*
Las intersecciones de una ecuación con el eje x son los puntos donde la gráfica de la ecuación lo cruza. En forma algebraica, la intersección con el eje y representa los valores de x cuando $x = 0$.

DEFINICIÓN: INTERSECCIÓN CON EL EJE *y*
La intersección de una ecuación con el eje y son los puntos donde la gráfica de la ecuación lo cruza. En forma algebraica, la intersección con el eje y representa los valores de y cuando $x = 0$.

Para una ecuación lineal de dos variables existe (salvo en dos casos especiales) una intersección con el eje x y una intersección con el eje y. En la figura 2.1, para la ecuación $2x + 4y = 16$, la intersección con el eje x es (8, 0) y la intersección con el eje y es (0, 4). En la figura 2.2 las intersecciones con los ejes x y y ocurren ambas en el mismo punto, el origen. La intersección con el eje x es (0, 0) y la intersección con el eje y también es (0, 0). Examínense atentamente las dos figuras y verifíquese que la intersección con el eje x represente el punto en que el valor de y es 0 y que la intersección con el eje y represente el punto en que el valor de x es 0.

La ecuación $x = k$

Una ecuación lineal de la forma $ax = c$ es un caso especial de la ecuación (2.1), donde $b = 0$ o, en forma más simple, no existe término en y. Al dividir los dos miembros entre a se obtiene la forma simplificada

$$x = c/a$$

Puesto que c y a son constantes, podemos suponer que $c/a = k$ y escribir la ecuación en la forma equivalente

$$\boxed{x = k} \tag{2.8}$$

donde k es un número real. Esta ecuación lineal es especial porque x es igual a k cualquiera que sea el valor de y. A la variable y puede asignársele cualquier valor a condición de que $x = k$. Ésa es la única condición que requiere la ecuación. De ahí que *la gráfica de cualquier ecuación de esta forma sea una línea vertical que cruza el eje x en* $x = k$. En la figura 2.3 se advierten dos ecuaciones de este tipo. *Nótese que para estas ecuaciones hay una intersección con el eje x* $(k, 0)$ *pero ninguna intersección con el eje y* (a menos que $k = 0$). ¿Qué sucede cuando $k = 0$?

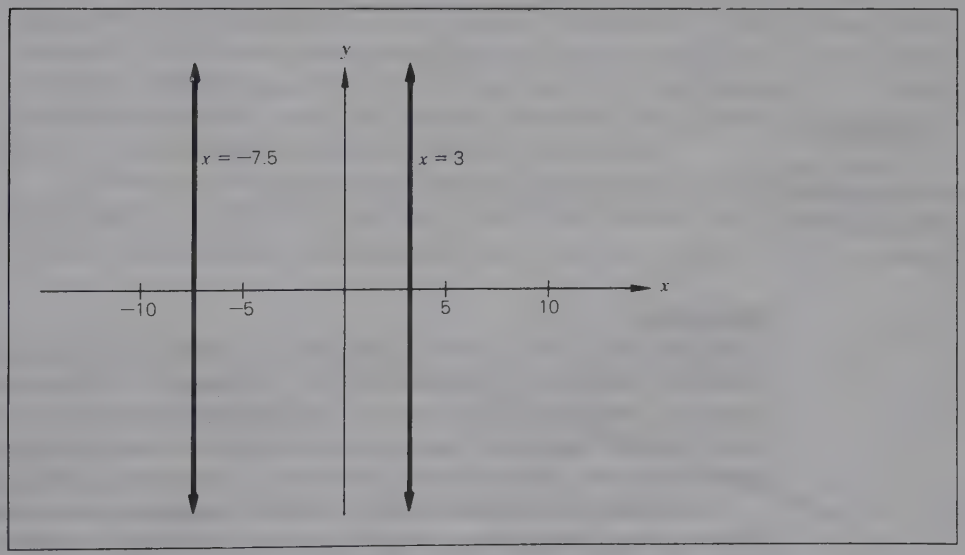


FIGURA 2.3
Gráfica de las ecuaciones muestra de la forma $x = k$.

La ecuación $y = k$

Una ecuación lineal de la forma $by = c$ es un caso especial de la ecuación (2.1) donde $a = 0$, es decir, donde no existe un término x. Después que ambos miembros de la ecuación se dividen entre b, la forma reducida general de este caso es

$$\boxed{y = k} \tag{2.9}$$

donde k es un número real. Esta ecuación sugiere que y es igual a k sin importar el valor de x. A la variable x puede asignársele cualquier valor mientras $y = k$. *La gráfica de cualquier ecuación de esta forma es una línea horizontal que cruza el eje y en* $y = k$. En la figura 2.4 se muestran dos de estas ecuaciones. *Nótese que las ecuaciones de esta forma no tienen intersecciones con el eje x* (a menos que $k = 0$). ¿Qué sucede cuando $k = 0$?

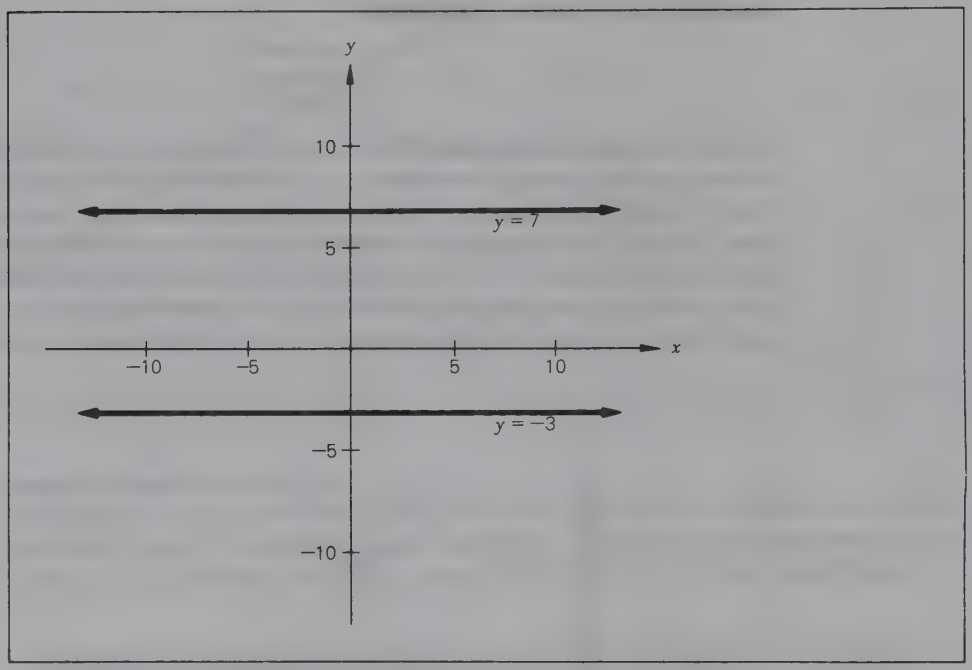


FIGURA 2.4 Gráfica de las ecuaciones muestra de la forma $y = k$.

Pendiente

Cualquier línea recta, con excepciones de las líneas verticales, puede caracterizarse por medio de su ***pendiente***. Por "pendiente" debe entenderse, básicamente, la *inclinación de una recta*, ya sea que ésta suba o baje a medida que el observador se mueve de izquierda a derecha a lo largo del eje x, y la *tasa con que la recta suba o baje* (en otras palabras, su grado de inclinación).

La pendiente de una línea puede ser ***positiva, negativa, cero o indefinida.*** **Una línea con una pendiente positiva sube de izquierda a derecha, o bien hacia arriba.** Para ella el valor de x aumenta al aumentar el de y (o bien y disminuye al disminuir x). **Una línea que tenga una pendiente negativa baja de izquierda a derecha o hacia abajo.** Para ella, el valor de y disminuye al aumentar el de x (o a la inversa). Esto significa que x y y se comportan de una manera **inversa**: al aumentar una la otra disminuye y viceversa. **Una línea que tenga una pendiente cero es horizontal**. Conforme x aumenta o disminuye, y permanece constante (el caso especial: k). **Las líneas verticales (de la forma $x = k$) tienen una pendiente indefinida**. Estas relaciones de pendiente se observan en la figura 2.5.

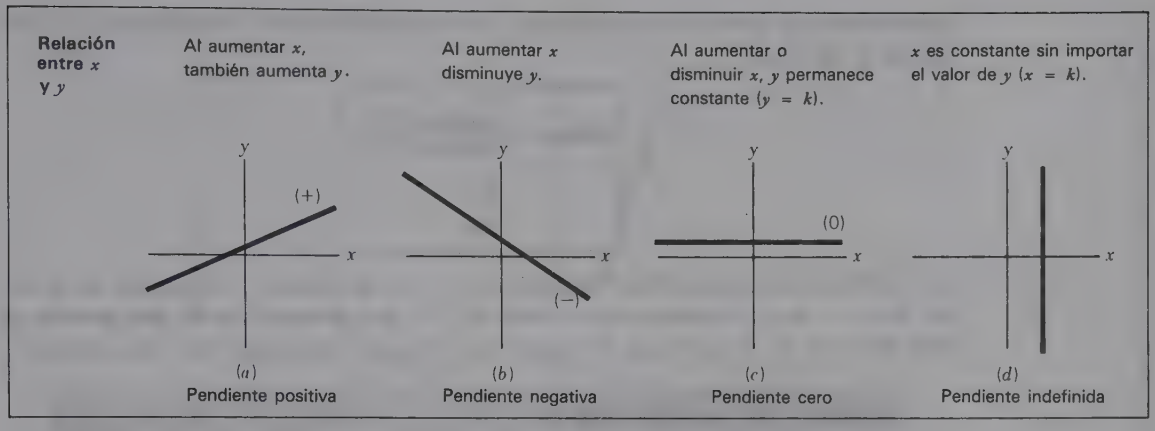


FIGURA 2.5
Pendiente de las condiciones de las rectas.

La pendiente de una línea se cuantifica por medio de un número real. El signo de la pendiente (número) indica si la línea está subiendo o descendiendo. La magnitud (valor absoluto) de la pendiente indica la inclinación relativa de la línea. *La pendiente indica la tasa a que cambia el valor de y* en relación con *los cambios del valor de x*. Cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más inclinado será el ángulo en que la recta se eleva o desciende. En la figura 2.6*a* las líneas *AB* y *CD* tienen pendientes positivas, pero la pendiente de *CD* es mayor que la de *AB*. De manera análoga, en la figura 2.6*b* las líneas *MN* y *OP* tienen pendientes negativas, pero *OP* posee la pendiente más grande por lo que respecta al valor absoluto; presenta mayor inclinación.

Si sobre una recta que no sea vertical hay dos puntos cualesquiera, es posible calcular la pendiente como una relación del cambio en el valor de *y*, mo-

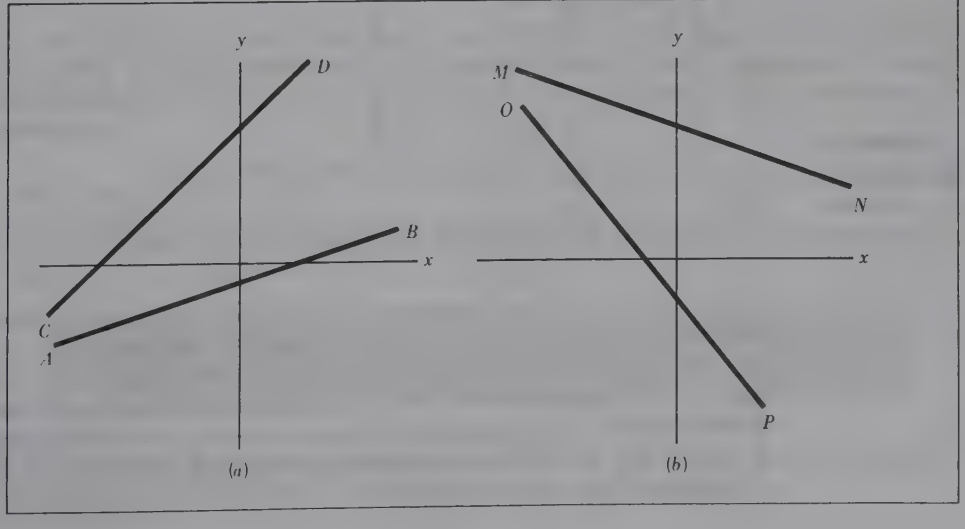


FIGURA 2.6
Comparación de la inclinación relativa.

viéndose de un punto a otro dividido entre el cambio correspondiente en el valor de x, es decir,

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

en donde Δ (delta) significa "cambio en". Así, Δy denota "el cambio en el valor de y" y Δx "el cambio en el valor de x". ***La fórmula de los dos puntos*** es una manera de determinar la pendiente de una recta que une dos puntos.

FÓRMULA DE LOS DOS PUNTOS
La pendiente m de la recta que une dos puntos con las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2.10)$$

donde $x_1 \neq x_2$

La figura 2.7 muestra el cálculo de Δx y Δy para el segmento de línea PQ.

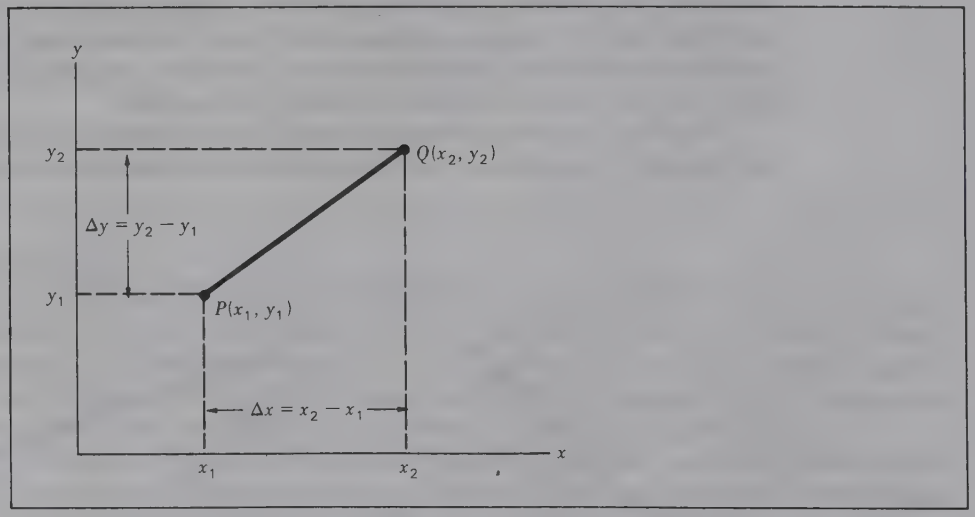


FIGURA 2.7
Medición de Δx y Δy.

EJEMPLO 7

Para calcular la pendiente de una línea que une los puntos situados en (2, 4) y (5, 12), se identificarán arbitrariamente un punto como (x_1, y_1) y el otro como (x_2, y_2). Dada la localización de ambos puntos en la figura 2.8, designaremos (5, 12) como (x_1, y_1) y (2, 4) como (x_2, y_2).

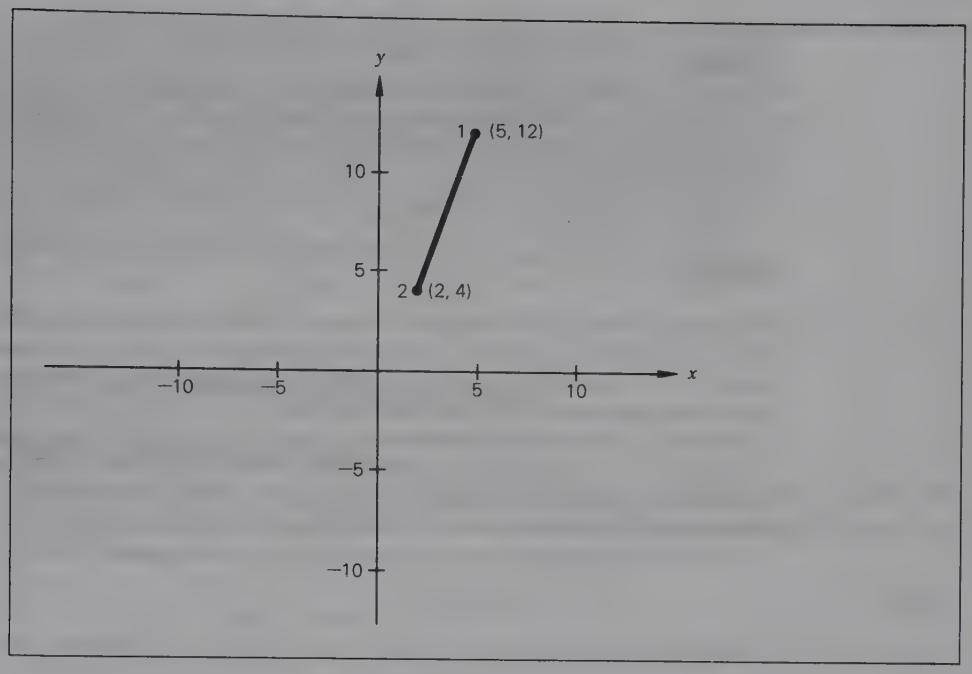


FIGURA 2.8

Al pasar de (5, 12) a (2, 4)

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 4 - 12 = -8$$

y

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 5 = -3$$

Por tanto,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$$

La pendiente es positiva, lo cual indica que el segmento de la línea sube de izquierda a derecha. El signo combinado con la magnitud denota que al desplazarse a lo largo del segmento de línea, y crece a una velocidad de 8 unidades por cada 3 unidades que aumente x.

Otra manera de interpretar la pendiente está dada por la siguiente definición.

DEFINICIÓN: PENDIENTE
La ***pendiente*** es el cambio de valor de y si x aumenta en 1 unidad.

Conforme a la definición anterior, el valor de $m = \frac{8}{3}$ indica que si x aumenta en 1 unidad, entonces y *se incrementará* en $\frac{8}{3}$ o $2\frac{2}{3}$ unidades.

NOTA
La pendiente es constante a lo largo de cualquier línea recta. Es decir, si se dice que una línea tiene una pendiente de −2, la pendiente del segmento de línea que une dos puntos cualesquiera en la línea siempre será igual a −2.

EJEMPLO 8

Ya hemos visto que la pendiente de una ecuación lineal que tenga la forma $y = k$ es 0. Para una línea horizontal, el valor de y siempre es igual, y el numerador de la fórmula de dos puntos, $y_2 - y_1$, invariablemente es igual a 0. También hemos examinado el otro caso especial de una ecuación lineal, $x = k$. Se verificó que cualquier ecuación lineal de esta forma aparecen en la gráfica como una línea vertical que cruza el eje x en $x = k$. *La pendiente de cualquier línea vertical es indefinida.* Esto puede comprobarse al tratar de utilizar la fórmula de los dos puntos a fin de determinar la pendiente de la línea para la ecuación $x = 5$. Si se escogen los dos puntos $(x_1, y_1) = (5, 0)$ y $(x_2, y_2) = (5, -1)$, sustituyendo en la ecuación (2.10) se obtiene

$$m = \frac{-1 - 0}{5 - 5}$$

$$= \frac{-1}{0}$$

que no está definida. Recuérdese que la ecuación (2.10) no está definida cuando $x_1 = x_2$.

Ejercicios de seguimiento de la sección 2.2

En los ejercicios 1 a 18 identifique las intersecciones con el eje x y con el eje y para la ecuación lineal dada.

1 $-3x - 4y = 24$
2 $8x - y = -16$
3 $-2x + 8y = 16$
4 $3x + 12 = -2y$
5 $15x = 120$
6 $-2y + 20 = 0$
7 $x - 4 = (x + y)/2$
8 $x + 4 = -(x - y)/3$
9 $4x - 8y = 0$
10 $8x - 6y = x + 3y$
11 $4x + 8y = 56$
12 $-2x + 3y = -18$
13 $5x + 3y - 10 = 3x - 3y + 10$
14 $4x - 6y = -36$
15 $mx + ny = p$
16 $mx = n$
17 $-ny = p$
18 $ax + by - c = dx + fy$

En los ejercicios 19 a 30, grafique la ecuación lineal dada.

19 $3x - 2y = -12$
20 $2x - y = 0$
21 $-x - y = -8$
22 $x - 2y = -10$
23 $5x - 2y = 0$
24 $2x = (x + y)/3$
25 $-x + y = 0$
26 $-3y = 21$
27 $-4y = 0$
28 $-5x = 0$
29 $4x - 6y = -36$
30 $-ny = p$

31 ¿Cuál es la ecuación del eje x? ¿Y la del eje y?

32 En el ejemplo 7, vuelva a calcular la pendiente si los puntos se designan como $(x_1, y_1) = (2, 4)$ y $(x_2, y_2) = (5, 12)$. ¿Es la respuesta la misma que se obtuvo antes?

En los ejercicios 33 a 50, calcule la pendiente del segmento de línea que une los dos puntos. Interprete el significado de la pendiente en cada caso.

33 $(2, -8)$ y $(5, 10)$
34 $(-3, 20)$ y $(-5, 18)$
35 $(6, 8)$ y $(10, -16)$
36 $(-2, -8)$ y $(-6, -20)$
37 $(8, 3)$ y $(-16, 3)$
38 $(-6, 20)$ y $(-6, 12)$
39 (a, b) y (c, d)
40 $(a, -b)$ y $(-a, b)$
41 $(0, 0)$ y (a, b)
42 $(c, -d)$ y $(0, 0)$
43 (a, b) y $(-a, -b)$
44 $(3, b)$ y $(-6, b)$
45 $(-10, -5)$ y $(-5, -10)$
46 $(m, -m)$ y $(-m, m)$
47 $(-10, 40)$ y $(-40, 130)$
48 $(c, 9)$ y $(c, 15)$
49 $(-3, -3)$ y $(3, 3)$
50 $(14, -6)$ y $(12, +4)$

2.3 FORMA DE PENDIENTE-INTERSECCIÓN

Desde otro punto de vista

En esta sección se explica otra forma de expresar las ecuaciones lineales. En la sección 2.1, la forma general de una ecuación lineal de dos variables se expresó como

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

Al resolver la ecuación (2.1) para la variable y, se obtiene

$$by = c - ax$$

o bien

$$\boxed{y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}} \tag{2.11}$$

En cualquier ecuación lineal los términos c/b y $-a/b$ en el miembro derecho de la ecuación (2.11) tiene importancia especial siempre que $b \neq 0$. El término c/b representa la coordenada y de la intersección con el eje y para la ecuación y $-a/b$ representa la pendiente de la ecuación. Esta información se obtiene de cualquier ecuación lineal de la forma de la ecuación (2.1), *si puede ser resuelta para y.*

La forma de la ecuación (2.11) se le da el nombre de ***forma de pendiente-intersección*** de una ecuación lineal. La ecuación (2.11) puede generalizarse en una forma más sencilla como

$$\boxed{y = mx + k} \tag{2.12}$$

donde *m representa la pendiente* de la *línea que representa* la ecuación y *k es la coordenada de la intersección con el eje y.* Podría producirse una ligera confusión temporal al pasar de la ecuación (2.11) a la ecuación (2.12), por lo cual el lector debe examinar atentamente la estructura del miembro derecho de la ecuación (2.12). Al resolver una ecuación lineal para y, *la pendiente es el coeficiente de x.* Y *la coordenada y de la intersección con el eje y es la constante aislada (incluido el signo) en el mismo miembro de la ecuación.*

Para dar un ejemplo de esta forma, la ecuación

$$5x + y = 10$$

puede reescribirse en la forma de pendiente-intersección como

$$y = -5x + 10$$

Así pues, la pendiente es -5 y la intersección con el eje y es igual a $(0, 10)$.

EJERCICIO
Seleccione dos puntos que satisfagan la ecuación original y por medio de la ecuación (2.10) verifique que la pendiente es -5.

EJEMPLO 9

La ecuación $y = 2x/3$ es una ecuación lineal que tiene una pendiente de $+\frac{2}{3}$ y una intersección con el eje y de $(0, 0)$. La ausencia de una constante aislada sugiere implícitamente que $k = 0$ en la ecuación (2.12).

EJEMPLO 10

El caso especial de una ecuación lineal $y = k$ se encuentra en la forma de pendiente-intersección. Para comprender esto, el lector ha de reconocer que esa ecuación puede escribirse en la forma $y = 0x + k$. La ausencia del término x en el miembro derecho indica implícitamente que $m = 0$, esto es, la pendiente de la línea que tiene esta forma es igual a cero. Esto se confirmó en la sección 2.2 cuando se expusieron las características gráficas de este caso. En dichas ecuaciones la intersección con el eje y es $(0, k)$.

EJEMPLO 11

En el caso espeical $x = k$, es imposible resolver para la forma de pendiente-intersección de la ecuación lineal. La variable y no es parte de la ecuación. La conclusión es que resulta imposible determinar la pendiente y la intersección con el eje y en el caso de ecuaciones que tengan esta forma. Vuelva a observar detenidamente la figura 2.3 para comprobar si la conclusión concuerda con lo dicho hasta aquí.

Interpretaciones de la pendiente y de la intersección con el eje *y*

En muchas aplicaciones de las ecuaciones lineales, la pendiente y la intersección con el eje y tienen interpretaciones significativas. Tómese, por ejemplo, la ecuación de sueldo

$$y = 3x + 25$$

donde y = *sueldo semanal (en dólares)*
y x = *número de unidades vendidas durante semana*

La ecuación de sueldo es lineal y está escrita en la forma de pendiente-intersección. En una gráfica, se representa con la línea de la figura 2.9 que tiene una pendiente de $+3$ y una intersección con el eje y igual a $(0, 25)$. Obsérvese que esta ecuación ha sido graficada sólo para valores no negativos de x y y. ¿Puede el lector decir por qué es apropiado eso?

Recuerde la definición de *pendiente*. Puesto que la pendiente representa el cambio de y relacionado con un incremento unitario de x, la pendiente de $+3$

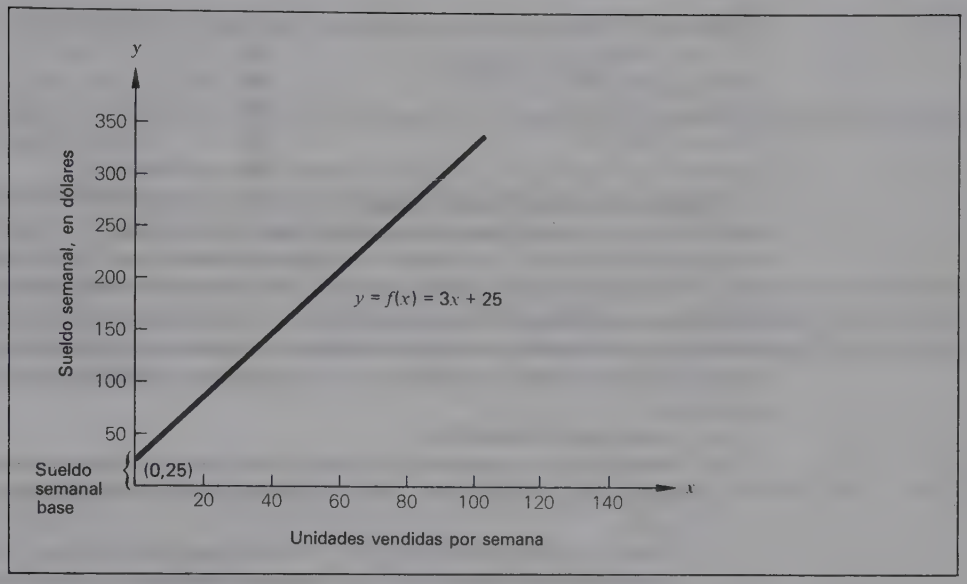


FIGURA 2.9
Función de sueldo.

significa que el sueldo semanal y aumenta en 3 dólares por cada unidad adicional que se venda. La coordenada y de la intersección con el eje y representa el valor de y cuando $x = 0$, o el del sueldo que se percibiría si no se vendiera ninguna unidad. Éste es el sueldo base por semana.

EJEMPLO 12

En el ejemplo 3 del capítulo 1, se desarrolló una función del costo total asociado a la compra y operación de un carro de patrulla. La ecuación de costo fue

$$C = 0.40x + 18\,000$$

donde C = *costo total en dólares*
x = *número de millas recorridas*

Esta ecuación es además la forma de pendiente-intersección con una pendiente de 0.40 y una intersección con el eje y de (0, 18 000). La pendiente indica que el costo total aumenta a una tasa de 0.40 dólares por cada milla adicional recorrida. La cantidad 18 000 implica un costo fijo de $18 000 en que se incurre sin importar si se conduce o no la patrulla. Aunque podrían hacerse conjeturas sobre lo que constituyen esos $18 000, es probable que correspondan principalmente al costo de compra del vehículo. ¿Puede el lector pensar en otros costos que no sean parte de esa cifra? ¿Y qué decir del costo de una póliza de mantenimiento durante la vida útil, comprada al fabricante o a un distribuidor local?

Ejercicios de seguimiento de la sección 2.3

En los ejercicios 1 a 16 reescriba cada ecuación en la forma de pendiente-intersección y determine la pendiente y la intersección con el eje y.

1 $2x - 4y = 24$
2 $-3x + 4y = 48$
3 $x - y = 10$
4 $2x - y = -8$

5 $(x + y)/2 = 5$
6 $(x - y)/3 = 2x$
7 $-2x - 4y = 0$
8 $3y - 15 = -2y$
9 $4x + 8y = 56$
10 $-2x + 3y = -18$
11 $8x - y = -16$
12 $-2y + 20 = 0$
13 $4x - 8y = 0$
14 $8x - 6y = x + 3y$
15 $mx + ny = p$
16 $mx = n$

17 Mujeres en la fuerza de trabajo Se prevé que en la década de 1990 crezca el número de mujeres en la fuerza de trabajo, pero no de modo tan impresionante como en la década de 1970. Un consultor en pronósticos se sirve de la ecuación lineal $n = 9.6 + 0.20t$ para predecir el número de mujeres entre 35 y 44 años de edad que estarán en la fuerza de trabajo. En esa cuestión, n es el número de mujeres (entre 35 y 44 años de edad) que estarán en la fuerza de trabajo (medida en millones) y t indica el tiempo medido en años *a partir de* 1981 ($t = 0$ corresponde a 1981). Si n se grafica sobre el eje vertical,

a) Grafique la ecuación.
b) Identifique la pendiente y la intersección en y (intersección en n, en este caso).
c) Interprete el significado de la pendiente y de la intersección en n en esta aplicación.
d) Prediga el número de mujeres de este grupo de edad que pertenecerán a la fuerza de trabajo en 1995. ¿Y cuántas serán en el año 2000?

18 La cámara de comercio de una ciudad de veraneo está tratando de determinar cuántos turistas la visitarán en la siguientes temporadas. Una empresa de investigación de mercados estimó que la cantidad de turistas puede predecirse mediante la ecuación $p = 80\,000 + 4000t$, donde p = número de turistas por año y t = años (contados *a partir de* la actual temporada). Así pues, $t = 0$ representa la actual temporada, $t = 1$ es la siguiente y así sucesivamente. Sea p la variable dependiente (graficada sobre el eje vertical).

a) Grafique la ecuación.
b) Identifique la pendiente y la intersección en y (la intersección en p, en este caso).
c) Interprete el significado de la pendiente y de la intersección en p en esta aplicación.

19 Sistema Internacional de Unidades $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$ es una ecuación que relaciona la temperatura en unidades Celsius con la temperatura medida en la escala Fahrenheit. Sea C = grados Celsius y F = grados Fahrenheit; suponga que la ecuación está graficada con C medida en el eje vertical.

a) Identifique la pendiente y la intersección en y.
b) Interprete el significado de la pendiente y de la intersección en y, a fin de hacer la conversión de la temperatura Fahrenheit a la temperatura Celsius.
c) Resuelva la ecuación para F, y vuelva a resolver las partes *a* y *b* si F se traza sobre el eje vertical.

20 Un departamento de policía estima que el número de crímenes o delitos graves que se perpetrarán cada semana depende de la cantidad de oficiales de policía asignados a la vigilancia preventiva. En concreto, la función es

$$c = 850 - 7.5p$$

donde c es el número de crímenes que se esperan por semana y p representa el número de oficiales asignados a la vigilancia preventiva.

a) Identifique las intersecciones con el eje x y y en esta ecuación (las intersecciones en p y en c).
b) Interprete el significado de las intersecciones.

21 El valor en libros de una máquina se expresa con la función

$$V = 25{,}000 - 1\,225t$$

donde V es el valor en libros (en dólares) y t representa la edad de la máquina expresada en años.

a) Identifique las intersecciones en t y en V.
b) Interprete el significado de las intersecciones.
c) Interprete el significado de la pendiente.
d) Grafique la función.

22 Puntuaciones de una prueba de aptitudes escolares (SAT) Una pequeña universidad ha observado una tendencia descendente en el promedio de las calificaciones obtenidas en esta prueba por los que solicitan su inscripción en ella. El análisis ha producido la ecuación

$$s = 540 - 3.75t,$$

donde s es la calificación promedio en la prueba SAT en determinado año y t es el tiempo medido en años desde 1985 ($t = 0$).

a) Identifique las intersecciones en t y en s.
b) Interprete el significado de las intersecciones.
c) Interprete el significado de la pendiente.
d) Grafique la ecuación.

2.4 DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA LÍNEA RECTA

Al aplicar las matemáticas, se inicia el análisis determinando las relaciones verdaderas o aproximadas entre las variables de interés. Se estudiará una y otra vez esta etapa preliminar del análisis a lo largo del libro. Se trata de una etapa sumamente importante, y el lector deberá estar familiarizado con ella y manejarla con soltura.

En la presente sección se mostrará al lector cómo determinar la ecuación para una relación lineal. La forma en que se determina la ecuación depende de la información disponible. En las siguientes secciones se abordan varias posibilidades.

Pendiente e intersección con el eje *y*

La situación más fácil es aquella en que se conoce la pendiente m y la intersección con el eje y $(0, k)$ de la línea que representa una ecuación. Si se desea determinar la ecuación lineal en este caso casi trivial, basta sustituir m y k en la forma de pendiente-intersección, ecuación (2.12). Si el lector quiere expresar la ecuación en la forma general de la ecuación (2.1), lo único que tiene que hacer es rearreglar los términos en la ecuación de pendiente-intersección.

EJEMPLO 13

Determine la ecuación de la línea recta que tiene una pendiente de -5 y una intersección en y de $(0, 15)$.

SOLUCIÓN

Al sustituir los valores de $m = -5$ y $k = 15$ en la ecuación (2.12) se obtiene

$$y = -5x + 15$$

Reexpresada en la forma de la ecuación (2.1), una forma equivalente de la ecuación anterior es

$$5x + y = 15$$

EJEMPLO 14

Determine la ecuación de una línea recta que tenga una pendiente de $+\frac{1}{2}$ y una intersección con el eje y en (0, 0).

SOLUCIÓN

Al sustituir $m = \frac{1}{2}$ y $k = 0$ en la ecuación (2.12) se obtiene

$$y = \tfrac{1}{2}x + 0$$

o bien

$$y = \tfrac{1}{2}x$$

Verifique que la ecuación pueda expresarse en la forma de la ecuación (2.1) como $\frac{1}{2}x - y = 0$ o bien como $x - 2y = 0$.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Es la ecuación $y - \frac{1}{2}x = 0$ una forma equivalente de la ecuación en este ejemplo? ¿Por qué? Grafique las dos para comprobar si son las mismas.

Pendiente y un punto

Otra posibilidad de una línea es que se conozca la pendiente y también un miembro del conjunto solución (es decir, las coordenadas de un punto sobre la línea). Si el lector considera la forma de pendiente-intersección con el eje y [ecuación (2.12)], cualquier miembro del conjunto solución satisfará la ecuación. En otras palabras, pueden definirse los valores de x y y que satisfagan una ecuación por medio del conjunto solución S, donde

$$\boxed{S = \{(x, y) \mid y = mx + k\}} \qquad \textbf{(2.13)}$$

Préstese mucha atención a lo siguiente. En la sección precedente se dijo que la pendiente y la intersección con el eje y de una ecuación permiten escribir directamente la forma de pendiente-intersección con el eje y. En esta sección se habla de conocer la pendiente y un punto, pero no la intersección con el eje y. Según la ecuación (2.13), cualquier punto que se encuentre sobre una línea debería satisfacer la ecuación de pendiente-intersección con el eje y. Puede resolverse para k si se sustituye la pendiente conocida m y las coordenadas del punto dado en la ecuación (2.12). En esta etapa hay que tener m, la pendiente y k, la coor-

denada y de la intersección con el eje y; la ecuación de la línea se obtendría fácilmente. Esto se ilustra a continuación con unos cuantos ejemplos.

EJEMPLO 15

Si la pendiente de una recta es -2 y un punto que se encuentra en ella es $(2, 8)$, podemos sustituir estos valores en la ecuación (2.12), obteniendo así

$$8 = (-2)(2) + k$$

o bien

$$12 = k$$

Conocer que $m = -2$ y $k = 12$ conduce directamente a la ecuación de pendiente-intersección con el eje y

$$y = -2x + 12$$

Y, como antes, esta ecuación puede reescribirse en la forma equivalente

$$2x + y = 12$$

NOTA
El lector seguramente se preguntará cuál forma de la ecuación lineal –ecuación (2.1) o ecuación (2.12)– es la correcta. La respuesta depende de lo que desee hacer con ella. Según el tipo de análisis que vaya a efectuarse, una de las dos formas será más apropiada.

EJEMPLO 16

Si la pendiente de una recta es cero y un punto que se halle sobre la línea es $(5, -30)$, la ecuación de la línea puede obtenerse sustituyendo primero la pendiente cero y las coordenadas $(5, -30)$ en la ecuación (2.12).

$$-30 = (0)(5) + k$$

o bien

$$-30 = k$$

Como sabemos que $m = 0$ y $k = -30$, la ecuación de pendiente-intersección con el eje y es

$$y = 0x + (-30)$$

o bien

$$y = -30$$

EJEMPLO 17

Si se tiene la ecuación lineal $3x - 6y = 24$.
a) ¿Cuál es la pendiente de la línea representada por la ecuación dada?
b) ¿Cuál es la pendiente de una línea paralela a la línea dada?
c) ¿Cuál es la pendiente de una línea perpendicular a la línea dada?
d) ¿Cuántas líneas diferentes son perpendiculares a esta línea?
e) Encuentre la ecuación de la línea que es perpendicular a la línea dada y que pasa por el punto $(2, 5)$.
⇵041

SOLUCIÓN

a) La ecuación dada puede reescribirse en la forma de pendiente-intersección con el eje y como

$$-6y = 24 - 3x$$

o bien

$$y = -4 + \tfrac{1}{2}x$$

En esta ecuación se advierte que la pendiente es igual a $+\frac{1}{2}$.

> Dos líneas son paralelas si tienen la misma pendiente.

b) Puesto que la pendiente de una línea dada es igual a $+\frac{1}{2}$, todas las líneas paralelas tendrán una pendiente de $+\frac{1}{2}$.

> Si una línea tiene una pendiente m_1 ($m_1 \neq 0$), la pendiente de cualquier línea perpendicular a la línea dada tiene una pendiente igual a la recíproca negativa de la línea dada, o sea $m_2 = -1/m_1$.

c) Ya que $m_1 = \frac{1}{2}$, la pendiente de cualquier línea $3x - 6y = 24$ es

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$= -2$$

d) Hay un conjunto infinito de líneas con $m = -2$, por lo cual un número infinito de líneas son perpendiculares a esta línea.
e) La línea que nos interesa ahora tiene una pendiente de -2 y un punto sobre la línea es (2, 5). La sustitución de estos tres valores en la ecuación (2.12) produce

$$5 = (-2)(2) + k$$

o bien

$$9 = k$$

Por tanto, la ecuación de la línea es

$$y = -2x + 9$$

o, de modo alternativo,

$$2x + y = 9$$

Dos puntos

He aquí un caso más probable: algunos puntos de datos que se hallan sobre la línea han sido reunidos y se quiere determinar la ecuación de la línea. Supóngase que al lector se le dan las coordenadas de dos puntos que se encuentran sobre una recta. Podemos determinar la pendiente de la línea aplicando la fórmula de los dos puntos [ecuación (2.10)]. En cuanto se conozca la pendiente, será posible determinar la intersección con el eje y empleando *uno* de los dos puntos de datos y procediendo luego como se hizo en la última sección.

EJEMPLO 18

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 2)$ y el origen, se sustituyen las coordenadas en la fórmula de los dos puntos, lo cual da

$$m = \frac{0 - 2}{0 - (-4)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo $m = -\frac{1}{2}$ y las coordenadas $(-4, 2)$ en la ecuación (2.12) se obtiene

$$2 = (-\tfrac{1}{2})(-4) + k$$
$$2 = 2 + k$$
$$0 = k$$

Así pues, la forma de pendiente-intersección con el eje y de la ecuación es

$$y = -\tfrac{1}{2}x$$

NOTA
En este último ejemplo el lector se habrá dado cuenta de que el origen es la intersección en y. ¿Cómo podría haber simplificado esto el análisis?

EJEMPLO 19

Depreciación Se espera que el valor de una máquina disminuya en una tasa lineal con el tiempo. La figura 2.10 contiene dos puntos de datos sobre la línea que representa el valor V de la máquina en función de su edad t, donde V se mide en dólares y t se

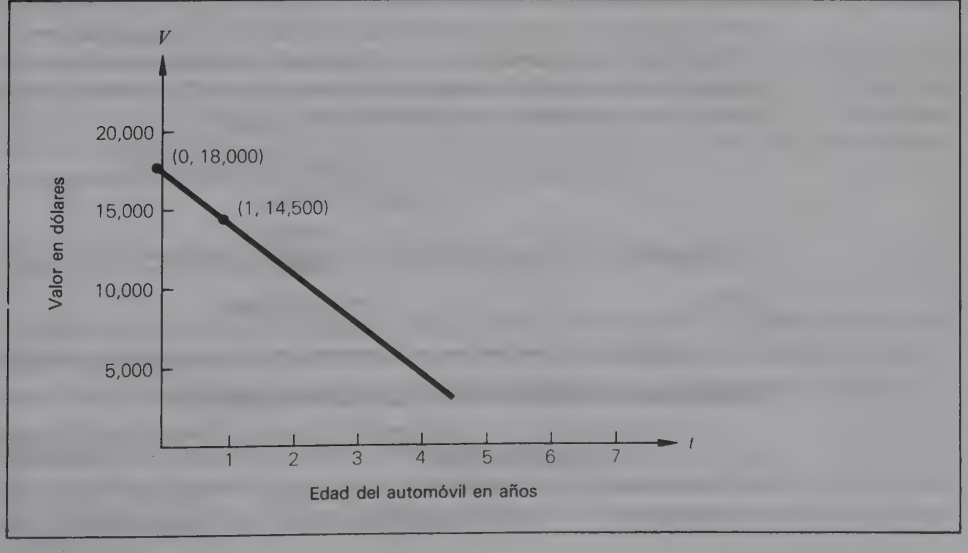


FIGURA 2.10 Valor de la máquina en función de su edad t.

mide en años contados desde el momento de la compra. Los dos puntos de datos indican que el valor de la máquina en $t = 0$ (tiempo de compra) es de 18 000 dólares y que su valor en un año será de $14 500.

Determine la ecuación de pendiente-intersección con el eje y que relaciona el valor V de la máquina con su edad t.

SOLUCIÓN

La pendiente puede calcularse por medio de la fórmula de los dos puntos, obteniéndose

$$m = \frac{14\,500 - 18\,000}{1 - 0}$$
$$= \frac{-3\,500}{1} = -3\,500$$

Al sustituir $m = -3500$ y (0, 18 000) en la ecuación (2.12), donde V y T reemplazan a y y x, respectivamente, se obtiene

$$18\,000 = (-3\,500)(0) + k$$

o bien

$$18\,000 = k$$

(Eso fue obvio en la figura 2.10, ¿no es así?) En consecuencia, la ecuación de pendiente-intersección con el eje y es

$$V = -3\,500t + 18\,000$$

EJEMPLO 20

a) En el último ejemplo, interprete el significado de la pendiente.
b) ¿En qué momento t se espera que el valor de la máquina sea cero?

SOLUCIÓN

a) La pendiente de -3500 implica que, con cada año más de posesión, el valor de la máquina disminuye 3500 dólares. (En contabilidad suele utilizarse el término *depreciación* para designar la tasa a la que un activo pierde valor con el tiempo.)
b) V será igual a cero cuando la línea cruce el eje t (equivalente a la intersección en x); en términos algebraicos se está buscando el valor de t cuando $V = 0$. Al hacer V igual a 0 en la ecuación desarrollada en el ejemplo 19 y resolviendo para t, se descubre que la máquina tendrá un valor de cero cuando

$$0 = -3\,500t + 18\,000$$
$$3\,500t = 18\,000$$
$$t = \frac{18\,000}{3\,500}$$

o bien

$$t = 5.142 \text{ años}$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 2.4

En los ejercicios 1 a 20 determine la forma de pendiente-intersección, caracterizada por los atributos indicados.

1 Pendiente = 2, intersección con el eje y = (0, 5)
2 Pendiente = -2.8, intersección con el eje y = (0, 6)

3 Pendiente = 1, intersección con el eje y = (0, −8)
4 Pendiente = −3, intersección con el eje y = (0, −10)
5 Pendiente = 2.5, intersección con el eje y = (0, 3)
6 Pendiente = 0, intersección con el eje y = (0, 0)
7 Pendiente indefinida, número infinito de intersecciones con el eje y
8 Pendiente = 5, (2, 4) se encuentra sobre la línea
9 Pendiente = −3, (0, 0) está sobre la línea
10 Pendiente = 2, (6, 0) se halla sobre la línea
11 Pendiente = $-\frac{1}{4}$, (−2, −5) se encuentra sobre la línea
12 Pendiente = a, (0, 0) está sobre la línea
13 Pendiente = $-a$, (2, 2) se halla sobre la línea
14 Pendiente indefinida, (8, −4) está sobre la línea
15 (−4, 4) y (−2, −8) se encuentran sobre la línea
16 (2, 1) y (4, 8) se hallan sobre la línea
17 (−1, 3) y (2, −9) están sobre la línea
18 (a, b) y (c, d) se encuentran sobre la línea
19 (a, 5) y (a, −3) se hallan sobre la línea
20 (3, b) y (7, b) están sobre la línea
21 Sin graficar, determine si los puntos (3, 8), (−1, 4) y (−4, 0) se encuentran todos sobre la misma recta. (*Sugerencia:* una forma de hacer esto es encontrar la ecuación de la línea que une dos de los puntos y sustituir en la ecuación las coordenadas del tercero para comprobar si la satisfacen.)
22 Obtenga la ecuación de la línea que pasa por (6, 4) y que además es paralela a la línea $x + y = 0$.
23 Encuentre la ecuación de la línea que es perpendicular a la línea $x + y = 0$ y que pasa por (6, 4).
24 En el ejercicio 18 de la sección 2.3, la cámara de comercio estaba tratando de pronosticar el número de turistas que visitarían la ciudad en los siguientes años. Algunos estudiantes de la universidad de la localidad examinaron el problema como parte de un proyecto de su clase. Estimaron en 80 000 turistas el volumen del año en curso, o sea un punto de datos de (0, 80 000). Proyectaron asimismo que el volumen del próximo año será de 87 500 turistas y que en el futuro el volumen seguirá creciendo a la misma tasa, conforme a una relación lineal. Determine la ecuación de pendiente-intersección con el eje y que relacione el número de turistas P con los años t tal como se calcularon a partir del año en curso.
25 Si F denota grados Fahrenheit y C grados Celsius, suponga que la relación entre esas dos escalas de temperatura está siendo graficada con F sobre el eje vertical. Dos puntos de datos sobre la línea que relaciona C y F son (5, 41) y (25, 77). Usando esos puntos, determine la ecuación de pendiente-intersección con el eje y que permita hacer la conversión de la escala Celsius a la escala Fahrenheit.

2.5 ECUACIONES LINEALES CON MÁS DE DOS VARIABLES

Cuando las ecuaciones lineales comprenden más de dos variables, las propiedades algebraicas se mantienen inalteradas en lo esencial; pero las características visuales o gráficas cambian considerablemente o se pierden del todo.

Sistemas de coordenadas tridimensionales

El espacio tridimensional puede describirse empleando un ***sistema de coordenadas tridimensionales***. En tres dimensiones se utilizan ejes coordenados que son

perpendiculares entre sí, intersecándose en sus puntos cero respectivos. En la figura 2.11 se observa un conjunto de ejes marcados con las variables x_1, x_2 y x_3. El punto de su intersección recibe el nombre de ***origen***. Y, empleando coordenadas de tres componentes (***trios ordenados***), (x_1, x_2, x_3), las coordenadas del origen son (0, 0, 0).

Obsérvese que, para graficar en tres dimensiones sobre el papel (dos dimensiones), se requiere cierta perspectiva que puede resultar difícil de captar al principio. Podría haberse dibujado la figura 2.11 de modo que el lector estuviera mirando exactamente la punta del eje x_2. En tal caso, no habría sentido de profundidad ni de localización respecto a dicho eje. Por consiguiente, rotan los ejes coordenados haciendo girar el eje x_3 en el sentido de las manecillas del reloj. Con esto se logra un sentido de profundidad cuando el eje x_2 se trace en un ángulo.

Del mismo modo que los ejes coordenados en dos dimensiones dividen el espacio bidimensional en cuadrantes, los ejes en tres dimensiones dividen en ***octantes*** el espacio tridimensional. Esto se aprecia en la figura 2.12. Nótense las características de signo en cada octante. Las coordenadas de tres componentes permiten especificar la ubicación o dirección de cualquier punto en tres dimensiones.

Como en el caso de coordenadas bidimensionales, cada componente de (x_1, x_2, x_3) especifica la localización de un punto respecto a cada eje. Examínese atentamente la figura 2.13. A fin de ayudarle al lector a entenderla, se dibujó un ***poliedro rectangular***. Junto con otros puntos, se tiene interés en conocer las localizaciones de los puntos en esquina del poliedro. Es evidente que G se halla en el origen, pues tiene coordenadas (0, 0, 0). El punto F se encuentra directamente sobre el eje x_2, cuatro unidades fuera. Sus coordenadas son (0, 4, 0). El punto A forma el ángulo superior izquierdo de un extremo ($ABGH$) del poliedro. Dado que H está sobre el eje x_1 y A se halla verticalmente encima de H, puede concluirse que la coordenada x_1 y A es -5 y que

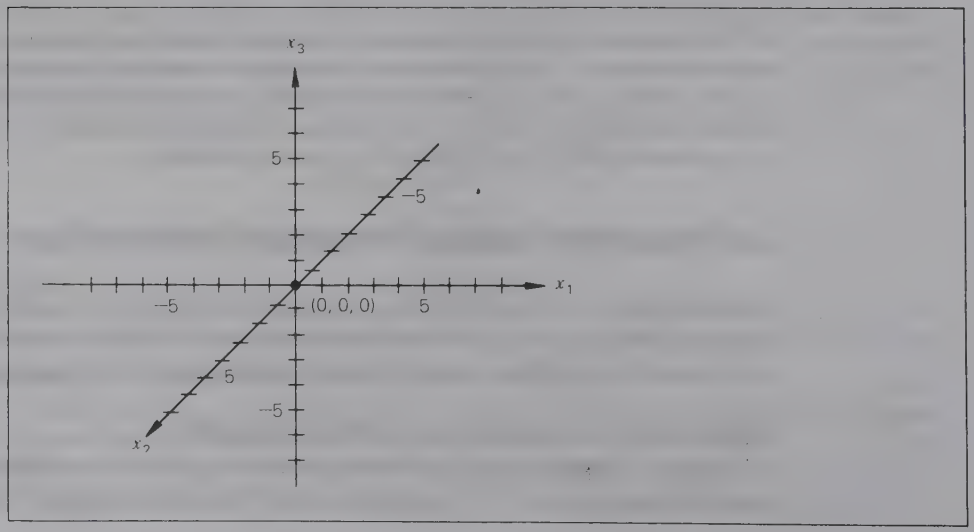


FIGURA 2.11
Sistema de ejes coordenados en tres dimensiones.

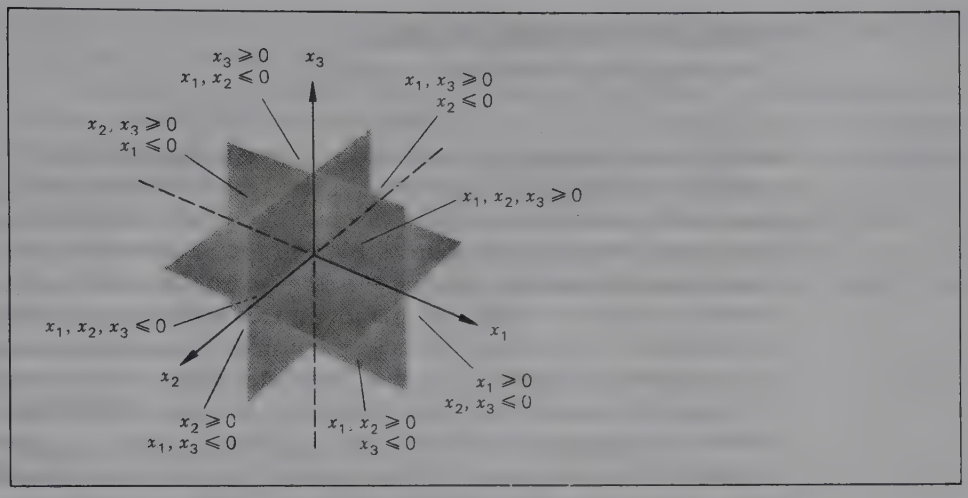


FIGURA 2.12 Octantes de espacio de tres dimensiones.

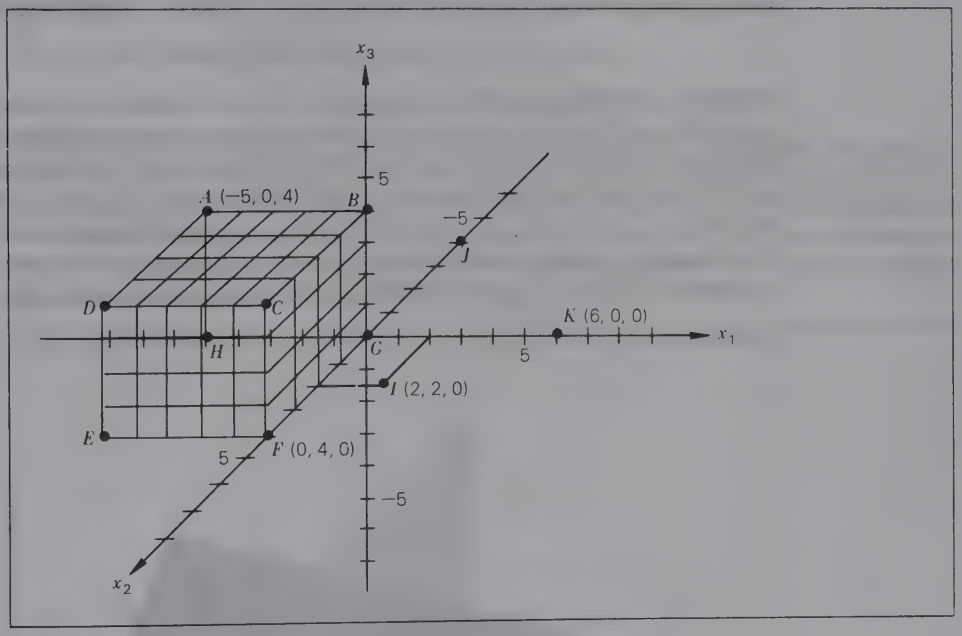


FIGURA 2.13 Localizaciones muestra en el espacio de tres dimensiones.

la coordenada x_2 de A es 0. Por último, los puntos A, B, C y D parecen estar todos a la misma *altura* (en relación con el eje x_3). Puesto que el punto B se encuentra sobre el eje x_3 a la altura de 4, se llega a la conclusión de que A tiene la misma coordenada x_3. Así pues, A se encuentra en $(-5, 0, 4)$. Verifique el lector si sus resultados concuerdan con las coordenadas de I y k. Ponga a prueba sus conocimientos y defina las coordenadas de los puntos B, C, D, E y J. *

*B (0, 0, 4), C (0, 4, 4), D (−5, 4, 4), E (−5, 4, 0), J (0, −4, 0).

Ecuaciones con tres variables

Las ecuaciones lineales de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

se representan en gráficas como ***planos*** en tres dimensiones. El número de variables en una ecuación determina la cantidad de dimensiones que se necesitan para representar gráficamente la ecuación. Tres variables requieren tres dimensiones. No es muy importante que el lector aprenda a graficar en tres dimensiones. Es más importante que 1) sepa que las gráficas de las ecuaciones lineales con tres variables son planos en tres dimensiones, 2) que conozca qué es un *plano* y 3) que tenga una idea general de cómo representarlo gráficamente. Un plano es, desde luego, una superficie plana como el techo, las paredes o el piso del cuarto donde usted está sentado o acostado en este momento. En vez de los dos puntos necesarios para graficar una línea, se necesitan tres puntos para definir un plano. Los tres puntos no han de ser ***colineales***, esto es, no deben encontrarse sobre la misma línea. Tómese, por ejemplo, la ecuación

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \qquad \textbf{(2.14)}$$

Si logran identificarse tres miembros del conjunto solución para esta ecuación, especificarán las coordenadas de los tres puntos que están sobre el plano. Tres miembros fáciles de identificar son las intersecciones. Se obtienen al hacer que dos de las tres variables sean 0 y resolviendo para la otra. Verifíquese que, cuando $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 4$ o (0, 0, 4) es un miembro del conjunto solución. De manera análoga, compruébese que (6, 0, 0) y (0, 3, 0) son miembros del conjunto solución y, por lo mismo, son puntos colocados sobre el plano que

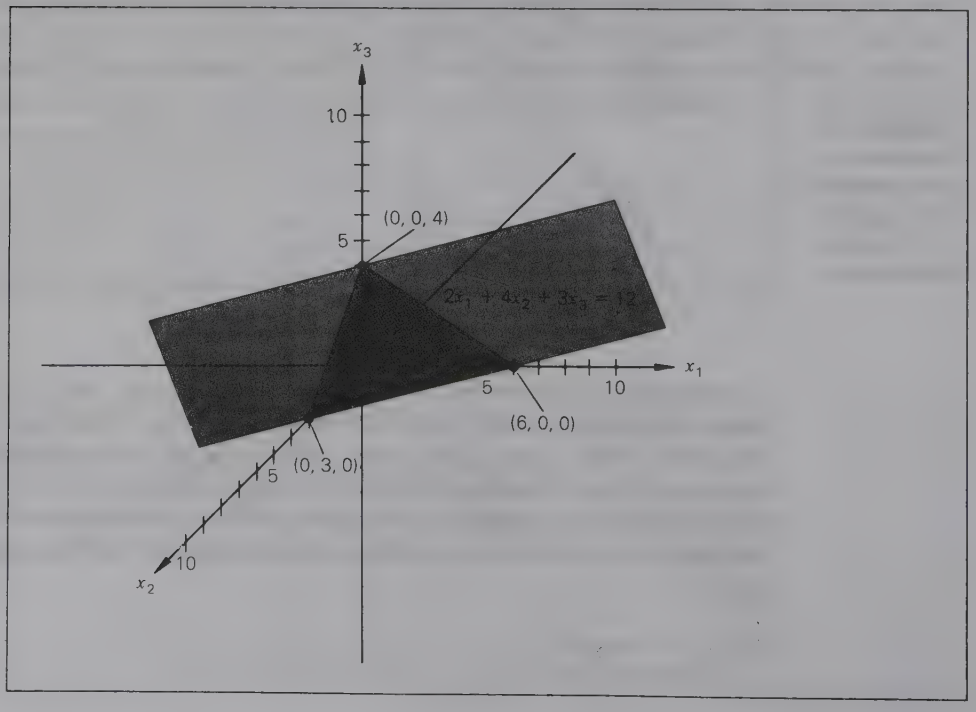


FIGURA 2.14 Gráfica de un plano que representa la ecuación lineal $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$.

representa la ecuación (2.14). La figura 2.14 muestra esos puntos y una parte del plano que los contiene.

Cuando se graficaron ecuaciones con dos variables, se identificaron dos puntos y se unieron con una recta. Sin embargo, se señaló que, con objeto de representar *todos* los miembros del conjunto solución, la línea debe prolongarse una distancia infinita en cada dirección. Lo mismo sucede con el conjunto solución en el caso de ecuaciones de tres variables. Para representar todos los miembros del conjunto solución para la ecuación $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$, el plano de la figura 2.14 ha de prolongarse una distancia infinita en todas direcciones.

EJEMPLO 21

Grafique la ecuación lineal $x_1 = 0$ en tres dimensiones.

SOLUCIÓN

En este problema se pide graficar el conjunto solución

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0\}$$

A fin de graficar la ecuación, otra vez se necesitan identificar tres puntos no colineales que la satisfagan. Se observa que, mientras $x_1 = 0$, x_2 y x_3 pueden ser *cualquier* valor. Por ejemplo, (0, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 4) satisfacen la ecuación. En la figura 2.15 se muestra la gráfica de la ecuación. El plano de la ecuación $x_1 = 0$ es un plano perpendicular al eje x_1 y pasa por $x_1 = 0$. Éste es el *plano* x_2x_3 (que incluye entre sus puntos todos los que se hallan sobre los ejes x_2 y x_3).

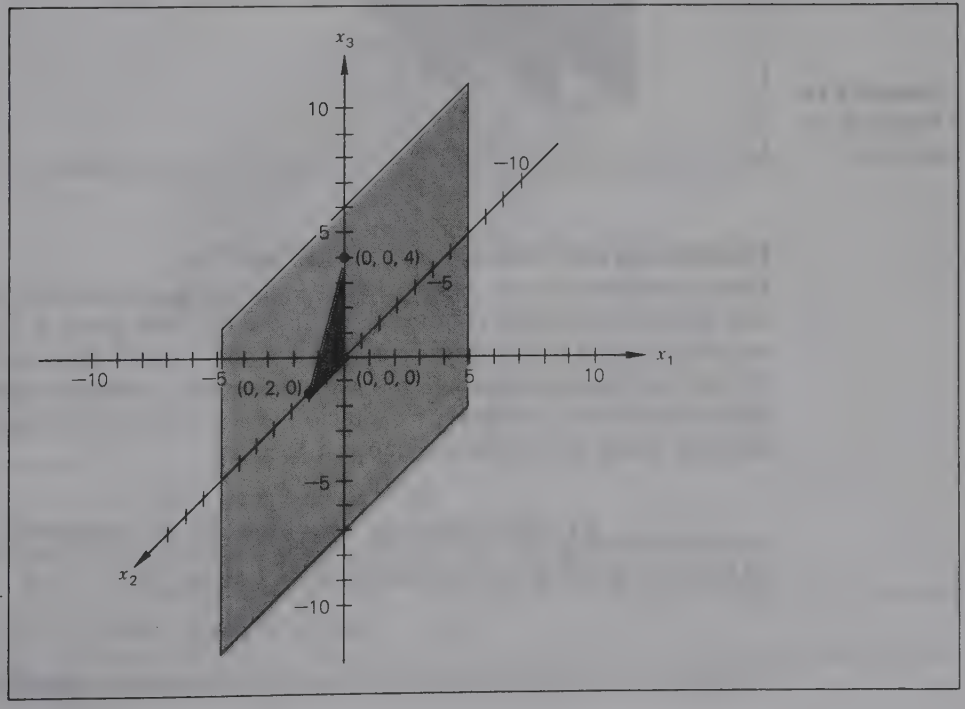


FIGURA 2.15
El plano $x_1 = 0$.

La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x_1 = k$ en el espacio tridimensional es un plano perpendicular al eje x_1 y lo interseca en $x_1 = k$.

La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x_j = k$, donde $j = 1, 2$ o 3, será un plano perpendicular al eje x_j en $x_j = k$. Esta propiedad se indica en las figuras 2.16 a 2.18.

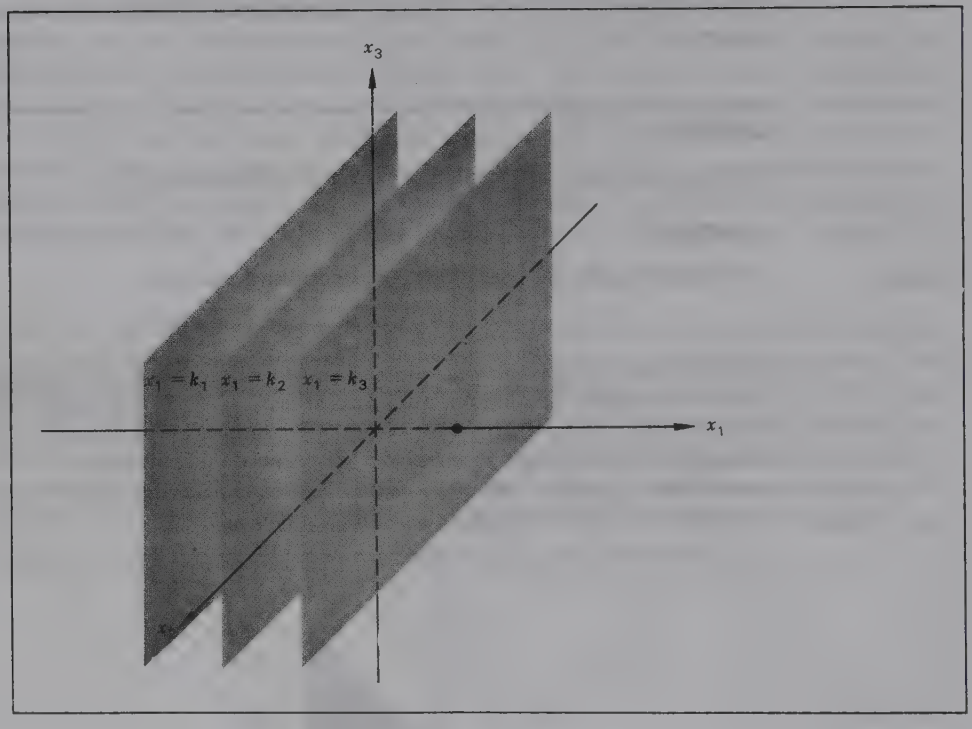


FIGURA 2.16
Planos de la forma $x_1 = k$.

Ecuaciones con más de tres variables

Cuando existen más de tres variables ($n > 3$), su graficación requiere más de tres dimensiones. Que el autor sepa, nadie ha dado hasta la fecha una representación visual o una gráfica de una ecuación lineal en cuatro dimensiones. Si bien no puede imaginarse esa representación, el término ***hiperplano*** se usa para describir la posible representación geométrica de la ecuación. Los matemáticos dirán, por ejemplo, que la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

está representada por un hiperplano en 4 espacios o en cuatro dimensiones. O bien, en general, una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $n > 3$ se representará con un hiperplano en el ***espacio n-dimensional.***

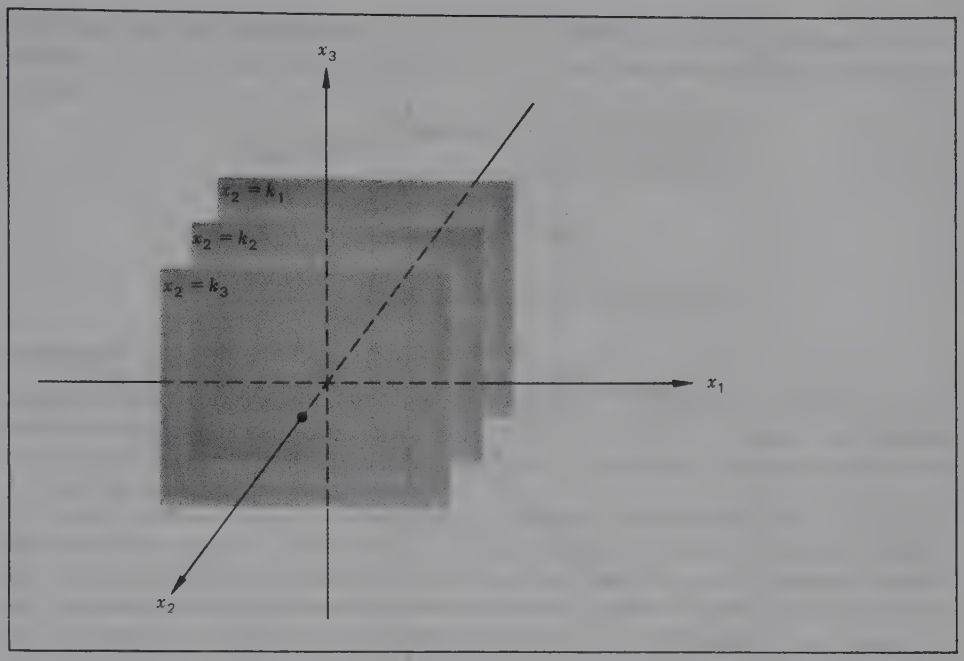


FIGURA 2.17
Planos de la forma $x_2 = k$.

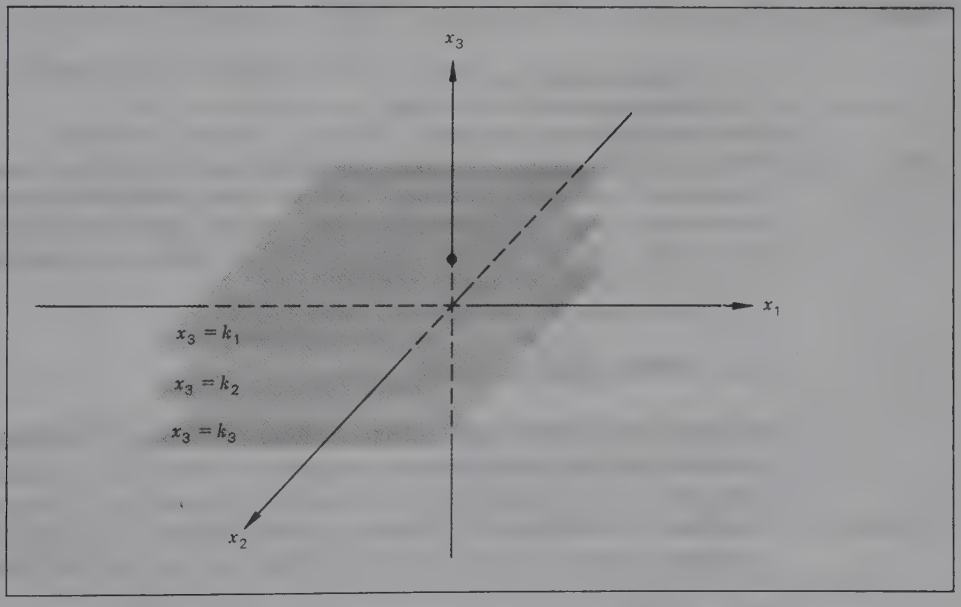


FIGURA 2.18
Planos de la forma $x_3 = k$.

Ejercicios de seguimiento de la sección 2.5

1 En la figura 2.19, determine las coordenadas de los puntos A a I.

2 En la ecuación $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10$, determine las coordenadas de las intersecciones con los ejes x_1, x_2 y x_3.

3 En la ecuación $-2x_1 + 3x_2 - x_3 = -15$, determine las coordenadas de las intersecciones con los ejes x_1, x_2 y x_3.

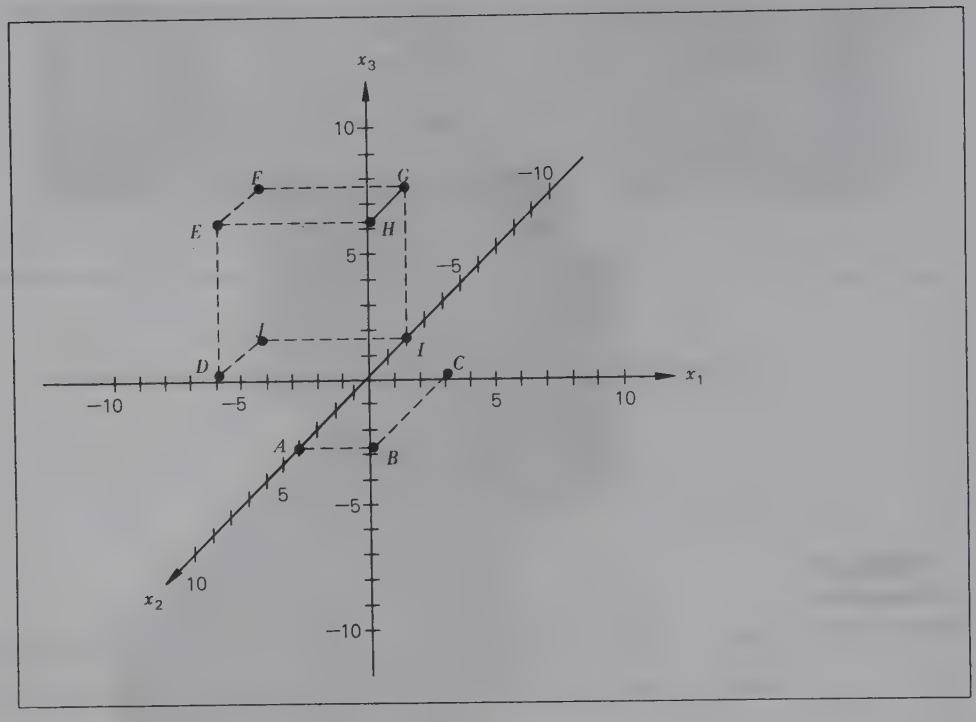


FIGURA 2.19

4 Dibuje el plano $3x_1 = 9$.
5 Dibuje el plano $-2x_2 = -8$.
6 Dibuje el plano $x_3 = -2$.
***7** ¿Puede el lector sacar alguna conclusión general sobre las características de los planos que representan ecuaciones lineales con dos de las tres variables? Por ejemplo, la ecuación $x_1 + x_2 = 5$ no contiene la variable x_3, pero puede graficarse en tres dimensiones. ¿Cómo se grafica esta ecuación? ¿Y cómo se grafican las que contienen x_1 y x_2? ¿Y las que contienen x_2 y x_3?

2.6 OTRAS APLICACIONES

Cuanto más ejercicio haga el lector con los problemas formulados por medio de palabras, más habilidad adquirirá en su planteamiento. Los siguientes ejemplos muestran la formulación de las ecuaciones lineales para diversas clases de aplicaciones. Estúdielas con cuidado y procure resolver el mayor número posible de problemas, tanto al final de esta sección como al final del capítulo.

EJEMPLO 22

Transporte aéreo de emergencia La Cruz Roja Internacional está haciendo planes para transportar por avión alimentos y suministros médicos a una gran ciudad de Sudamérica que hace poco sufrió una devastadora inundación. En la tabla adjunta se incluyen los cuatro suministros que urgen y sus respectivos volúmenes por caja o recipiente. El primer avión que se enviará a la zona tiene una capacidad de volumen de

6000 pies cúbicos. Determine la ecuación cuyo conjunto solución contenga todas las posibles combinaciones de los cuatro suministros que llenarán el avión en toda su capacidad.

Suministro	Volumen/caja, ft^3
Sangre	20
Equipo médico	30
Alimentos	8
Agua	6

SOLUCIÓN

El primer paso en casi cualquier problema formulado con palabras es definir las incógnitas o variables que van a emplearse. Conviene que el lector se pregunte qué decisiones deben tomarse en el problema. Si las decisiones logran identificarse, en ellas estará la clave para definir las variables.

En el presente ejemplo, la decisión que afronta el personal de la Cruz Roja se refiere a cuántas cajas de cada suministro se enviarán en el primer avión. La Cruz Roja quiere enviar la mayor cantidad posible de suministros en él, por lo cual desea identificar las diversas combinaciones que llenarán el avión a toda su capacidad (en volumen).

Expresada en palabras la ecuación que se busca tendrá la siguiente forma:

Volumen de suministros embarcados = 6000 pies cúbicos

Se puede ser más específicos y reescribir la ecuación como

Volumen de sangre + Volumen de equipos de suministros médicos + volumen de alimentos + volumen de agua = 6000

Si se supone que

x_1 = *número de recipientes de sangre*
x_2 = *número de contenedores de equipo médico*
x_3 = *número de cajas de alimentos*
x_4 = *número de recipientes de agua*

la ecuación puede expresarse en su forma matemática correcta como

$$20x_1 + 30x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 6\,000$$

Verifíquese que *cada término* del miembro izquierdo de la ecuación se forme empleando la relación

$$\text{Volumen total del suministro} = \left(\begin{array}{c}\text{volumen por caja}\\ \text{del suministro}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{número de cajas}\\ \text{del suministro}\end{array}\right)$$

Ejercicios de seguimiento

1 En un sentido realista, ¿cuáles son las cantidades máxima y mínima posibles de cada suministro?

2 Suponga que el avión puede transportar sólo una carga de 40 000 libras y que los suministros pesan 150, 100, 60 y 70 libras por caja, respectivamente. Escriba la ecuación cuyo conjunto solución contenga todas las combinaciones de los cuatro suministros cuya suma sea igual a la capacidad de peso del avión.

EJEMPLO 23

Cartera de inversiones Una universidad dispone de 5 millones de dólares para invertirlos en acciones. La junta directiva aprobó seis tipos diferentes de acciones para invertir en ellas. Los precios actuales de cada tipo por acción se indican en la siguiente tabla. Determine la ecuación para la cual el conjunto solución incluye todas las combinaciones de las seis acciones que podrían comprarse exactamente con los $5millones.

Acción	Precio por acción
1	$ 35
2	60
3	125
4	100
5	500
6	250

SOLUCIÓN

La forma general de la ecuación deberá ser tal que el total de dólares gastados en las seis acciones sea igual a $5 millones, o más exactamente

Total de dlls. invertidos en la acción 1 + total de dlls. invertidos en la acción 2 + ... + total de dlls. invertidos en la acción 6 = $5 millones

La decisión básica que debe tomarse se refiere al número de acciones de cada emisor que ha de adquirirse, de modo que se gasten los $5 millones en su totalidad. Por tanto, a continuación se generalizan las variables así:

$$x_j = \textit{número de acciones adquiridas de la acción } j.$$

donde $j = 1, 2, 3, 4, 5$ o 6.

Usando estas variables, formulamos la ecuación como

$$35x_1 + 60x_2 + 125x_3 + 100x_4 + 500x_5 + 250x_6 = 5 \text{ millones}$$

Nótese que cada término del miembro izquierdo de la ecuación presenta la forma

Total de dlls. invertidos en acciones j = (precio por acción) (número de acciones adquiridas)

Ejercicios de seguimiento

1 En un sentido realista, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo permisibles para cada variable en la ecuación desarrollada en el ejemplo 23?

2 Los dividendos anuales esperados por acción en cada una de las acciones precedentes aparecen en la siguiente tabla. Suponga que la junta directiva desea ganar dividendos anuales de $1 000 000 con sus inversiones. Sirviéndose de las mismas variables que se mencionan en el ejemplo, desarrolle la ecuación cuyo conjunto solución incluya todas las posibles combinaciones de las seis acciones que generarán dividendos anuales de $1 000 000.

Acción	1	2	3	4	5	6
Dividendo anual esperado	$5	$8	$4	$7.50	$30	$40

EJEMPLO 24

Programas de tribunales El tribunal de un distrito metropolitano clasifica sus casos en tres categorías. Los registros del tribunal han permitido al administrador hacer estimaciones del número promedio de horas que se tarda en procesar cada tipo de caso. Los casos del tipo 1 duran un promedio de 16 horas, los del tipo 2 duran un promedio de 8 horas y los del tipo 3 dan un promedio de 4.5 horas. Para el mes entrante se dispone de 850 horas en seis salas del juzgado. Determine una ecuación cuyo conjunto solución incluya todas las combinaciones posibles de los tres tipos de casos que programarán la totalidad de las horas disponibles de los tribunales.

SOLUCIÓN

Si x_j = número de casos del tipo j,
La forma general de la ecuación debe ser

Total de las horas programadas del tribunal = 850

$$16x_1 + 8x_2 + 4.5x_3 = 850$$

Si x_1, x_2 y x_3 son el número de casos programados de los tipos 1, 2 y 3, respectivamente, la ecuación será

EJEMPLO 25

Planeación nutricional El dietista de una escuela está planeando los menús del almuerzo. Cuenta con ocho opciones de alimentos que pueden servirse en una comida. Una de sus preocupaciones consiste en satisfacer las necesidades nutricionales de los alumnos. El dietista desea determinar las cantidades de cada uno de los ocho alimentos que suministren exactamente 45 mg de la vitamina requerida. El contenido vitamínico de los ocho alimentos se muestra en la tabla. Determine la ecuación cuyo conjunto solución satisfaga este requerimiento dietético.

Tipo de alimento	1	2	3	4	5	6	7	8
mg/porción	5	7.5	3	4.5	9	10	2.5	6

SOLUCIÓN

Si x_j = número de porciones del alimento j, donde j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8, la ecuación será

$$5x_1 + 7.5x_2 + 3x_3 + 4.5x_4 + 9x_5 + 10x_6 + 2.5x_7 + 6x_8 = 45$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 2.6

1 ¿En cuál de los últimos cuatro ejemplos debería haber preocupación únicamente por los valores enteros de las variables?

2 Un estudiante toma cinco cursos y afronta los exámenes finales con todos sus problemas. Estima que dispone de 40 horas para prepararse. Si x_j = número de horas asignadas al estudio del curso j, formule la ecuación cuyo conjunto solución especifique todas las posibles asignaciones de tiempo entre los cinco cursos a que se dediquen íntegramente las 40 horas disponibles.

3 **Mezcla de productos** Una empresa fabrica tres productos. El producto A requiere 6 horas de tiempo de elaboración, el producto B requiere 4.5 horas y el producto C requiere 7.5 horas por cada unidad. Si se cuenta con 800 horas durante la próxima semana, determine la ecuación cuyo conjunto solución defina todas las cantidades posibles de los tres productos que pueden fabricarse usando las 800 horas.

4 **Transporte** Un fabricante distribuye su producto a cuatro mayoristas. La capacidad mensual es de 40 000 unidades del producto. Hay que tomar decisiones sobre cuántas unidades deberán embarcarse a cada uno de ellos. Determine la ecuación cuyo conjunto solución especifique las cantidades que podrían enviarse si se distribuyeran las 40 000 unidades en su totalidad.

5 **Publicidad** Una compañía nacional está iniciando una campaña publicitaria por medio de la televisión, la radio y la prensa. El objetivo es lograr que 10 millones de personas vean los anuncios. La experiencia revela que, por cada 1000 dólares asignados a la publicidad por televisión, radio y prensa, la publicidad llegará a 25 000, 18 000 y 15 000 personas, respectivamente. Las decisiones que han de adoptarse se refieren a cuánto dinero se asignará a cada forma de publicidad, a fin de llegar a 10 millones de personas. Determine la ecuación cuyo conjunto solución especifique todas las asignaciones de publicidad que den por resultado la obtención de esta meta.

6 **Planeación agrícola** Una empresa agrícola tiene la meta de cosechar 500 000 bushels de soya durante el año entrante. Cuenta con tres granjas para alcanzar la meta. A causa de las diferencias de clima y de otros factores, el rendimiento por acre en los distintos lugares es de 25, 23 y 27 bushels, respectivamente, en las granjas 1, 2 y 3. La decisión que es preciso tomar se refiere a cuántos acres de soya habrán que plantar en cada granja con objeto de cumplir con el objetivo de la compañía. Formule la ecuación que le permita definir las distintas posibilidades de alcanzar la meta de 500 000 bushels.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

conjunto solución 41
ecuación lineal 40
espacio *n*-dimensional 72
forma de pendiente-intersección con el eje *y* de la ecuación lineal 57
fórmula de los dos puntos 54
hiperplano 72
intersección con el eje *x* 50
líneas paralelas 64
plano 70
pendiente 52
intersección con el eje *y* 50
relación de pendiente para líneas perpendiculares 64
sistemas de coordenadas tridimensionales 67

FÓRMULAS IMPORTANTES

$ax + by = c$ **Ecuación lineal: dos variables** **(2.1)**

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ **Ecuación lineal: n variables** **(2.2)**

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **Fórmula de los dos puntos** **(2.10)**

$y = mx + k$ **Forma de pendiente-intersección de la ecuación lineal** **(2.12)**

EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1 a 13 se relacionan con la sección 2.1. En los ejercicios 1 a 10, determine si la ecuación es lineal.

1 $x - \frac{1}{4}y = 6$

2 $\frac{1}{2}(x - 3y) = 5$

3 $x + 2y = xy$

4 $x_1 + x_1x_2 - x_2 = 13$

5 $x_1 - x_2 + x_3 = \frac{1}{4}x_4 + \sqrt{2}$

6 $(a - 5)2 - b = -3(b - a)$

7 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 3x_2x_3$

8 $\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}) = 20$

9 $\frac{x}{4} - \frac{y}{8} + z = \sqrt{7}$

10 $\sqrt{(x + y + z)^2} = 10$

11 Una compañía fabrica dos productos diferentes, A y B. La elaboración de cada unidad del producto A cuesta 6 dólares y \$4 cada unidad del producto B. La compañía insiste en que los costos totales de los dos productos sean de \$300.

a) Defina la ecuación de costo que exprese que el costo total de fabricar x unidades del producto A y y unidades del producto B es de \$300.

b) Suponiendo que la compañía aceptó surtir un pedido de 30 unidades del producto A, ¿cuántas unidades del producto B deberán fabricarse si los costos totales son mantenidos en \$300?

12 Una agencia de viajes recibió la autorización de vender tres nuevos paquetes vacacionales de una gran aerolínea. Los precios de los tres paquetes son, respectivamente, \$500, \$750 y \$1000. La empresa prometió una importante comisión si las ventas totales realizadas por la agencia ascienden a \$100 000 o más. Si x_1, x_2 y x_3 indican el número de paquetes vendidos de los tipos 1, 2 y 3, respectivamente,

a) Defina la ecuación que exprese que las ventas totales son de \$100 000.

b) Si la aerolínea especifica que la agencia ha de vender 10 paquetes de \$1000 y 50 de \$750 a fin de poder conseguir el bono, ¿cuántos paquetes de \$500 necesitará para obtenerlo?

c) Una estrategia que la agencia está estudiando es patrocinar un tour en el cual todos los viajeros escogerían el mismo paquete. Como podían planearse tres tours diferentes, ¿cuántas personas tendrían que firmar cada uno para que la agencia de viajes se hiciera acreedora al bono?

13 Recaudación de fondos Una compañía de teatro está tratando de recaudar 2 millones de dólares para ampliar el cupo de la sala. Ha emprendido una campaña de recaudación de fondos, con objeto de conseguir éstos. Su campaña solicita donaciones en tres categorías diferentes. La categoría de "amigo" requiere un donativo de \$1000; la categoría de "patrocinador" impone un donativo de \$5000, y la categoría de "miembro de apoyo" requiere un donativo de \$10 000. Si x_j es el número de donadores en la categoría j ($j = 1$ para la categoría de "amigo"),

a) Determine la ecuación que asegure que los donativos de las tres categorías ascenderán a \$2 millones.

b) Si quiere alcanzarse la meta con los donativos de una sola categoría de donativo, ¿cuántos donadores se necesitarán en cada una para recaudar los \$2 000 000?

Los ejercicios 14 a 44 se relacionan con la sección 2.2. En los ejercicios 14 a 23, identifique las intersecciones con los ejes x y y si existen y grafique la ecuación lineal.

14 $2x = \frac{1}{2}y$
15 $\frac{1}{4}x = 8$
16 $(y - 3)/2 = -2x$
17 $3(y - 4) = y - 6$
18 $4x - 2y = 0$
19 $3x - 4y + 4 = -3y - x + 3$
20 $4y = 24 - 2y$
21 $x + 3y = 3y - 2x + 12$
22 $x + y + 10 = 0$
23 $-x + 2y = -8$

En los ejercicios 24 a 33, calcule la pendiente del segmento de la línea que une los dos puntos. Interprete el significado de la pendiente en cada caso.

24 $(-3, 2)$ y $(-1, -6)$
25 $(-a, -a)$ y (a, a)
26 (a, b) y $(a, 3b)$
27 $(3, c)$ y $(-4, c)$
28 $(4, 2)$ y $(-2, 18)$
29 $(-3, m)$ y $(-3, n)$
30 $(-2, 2)$ y $(2, -2)$
31 $(6, -8)$ y $(4, 12)$
32 $(1, a)$ y $(1, -a)$
33 $(1, 2)$ y $(3, 4)$

En ejercicios 34 a 47 se relacionan con la sección 2.3. En los ejercicios 34 a 43 reescriba cada ecuación en la forma de pendiente-intersección y determine la pendiente y la intersección con el eje y.

34 $5x - 2y = -x + 15$
35 $-\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}y - 3$
36 $rx - sy = p$
37 $-cx + cy = c$
38 $-x + 2y = -8$
39 $2x - 4y = -16$
40 $2x - 4y = 8 - x + 2y$
41 $ax + by - c = dx + ey$
42 $10x - 5y = 30$
43 $20x + 30y = 20x - 20y + 15$

44 Una asociación local de lecherías contrata los servicios de una empresa de investigación de mercados para predecir la demanda de leche. La empresa descubre que la demanda local de la leche puede predecirse por medio de la ecuación $q = -2000p + 5000$, donde p representa el precio por cuarto (en dólares) y q representa el número de cuartos adquiridos por semana.

a) Grafique la ecuación.
b) Identifique la pendiente y la intersección con el eje y.
c) Interprete el significado de la pendiente y la intersección con el eje y en esta aplicación.

45 Una empresa manufacturera cuenta con 60 horas por semana en uno de sus departamentos. En este departamento se procesan dos productos. El producto A requiere 3 horas por unidad y el producto B requiere 5 horas por unidad. Si x es el número de unidades del producto A procesado por semana y y indica la cantidad de unidades del producto B procesadas por semana,

a) Determine la ecuación que exprese que el tiempo total dedicado a la fabricación de estos dos productos es de 60 horas a la semana.
b) Reescriba esta ecuación en la forma de pendiente-intersección con el eje y e identifique la pendiente y la intersección con el eje y.
c) Interprete el significado de la pendiente y la intersección con el eje y en esta aplicación.

46 Los sueldos promedio iniciales de los estudiantes de administración han ido aumentando. La siguiente ecuación predice el sueldo promedio inicial

$$s = 19\,850 + 950t$$

donde s es el sueldo promedio inicial y t es el tiempo medido en años a partir de 1985 ($t = 0$).

a) Identifique las intersecciones en s y t en esta ecuación.
b) Interprete estos valores donde sean significativos.

47 Una compañía fabrica dos productos. Cada uno requiere cierta cantidad de materias primas. El producto A requiere 9 libras de ellas y el producto B requiere 4 libras. Durante una semana cualquiera, la disponibilidad de las materias primas es de 1200 libras. Si x es el número de unidades fabricadas del producto A y y indica el número total de unidades del producto B,

a) Determine la ecuación que exprese que las materias primas usadas cada semana son de 1200 libras.

b) Reescriba la ecuación en la forma de pendiente-intersección con el eje y e identifique la pendiente y la intersección con el eje y.

c) Interprete los valores de la pendiente y de la intersección con el eje y.

Los ejercicios 48 a 61 se relacionan con la sección 2.4. En los ejercicios 48 a 57 utilice la información dada y determine con ella la forma de pendiente-intersección de la ecuación lineal.

48 m está indefinida y la línea pasa por $(-8, 6)$

49 La pendiente es igual a y la intersección con el eje y ocurre en $(0, -6)$

50 La pendiente es 0, $(a, -b)$ se encuentra sobre la línea

51 $(-1, 7)$ y $(2, -2)$ están sobre la línea

52 $(2, -b)$ y $(-4, -b)$ se hallan sobre la línea

53 $(0, 0)$ y (b, b) se encuentran sobre la línea

54 $(m, -2)$ y $(m, 6)$ se hallan sobre la línea

55 La pendiente es de 0 y (p, q) está sobre la línea

56 La pendiente está indefinida y (a, b) se encuentra sobre la línea

57 $(4, 0)$ y $(0, 4)$ están sobre la línea

58 Determine la ecuación de la línea paralela a la que representa la ecuación $2x - y = 5$ y que pasa por el punto $(3, 6)$.

59 Determine la ecuación de la línea perpendicular a la línea $x - 2y = 20$ y que pasa por el punto $(3, 0)$.

60 Un economista piensa que existe una relación lineal entre el precio de mercado de determinado producto y el número de unidades que los proveedores están dispuestos a introducir en el mercado. Dos observaciones muestra indican que, cuando el precio es de 10 dólares por unidad, la oferta semanal es de 30 000 unidades y cuando es de \$12 por unidad la oferta semanal es de 40 000 unidades.

a) Si el precio por unidad, p, se grafica sobre el eje horizontal y la cantidad de la oferta, q, se traza sobre el eje vertical, determine la ecuación de la línea que pasa por esos dos puntos.

b) Determine la forma de pendiente-intersección con el eje y de la ecuación.

c) Interprete la pendiente de la ecuación en esta aplicación.

d) Prediga la oferta semanal si el precio del mercado es de 15 dólares por unidad.

61 Al intentar predecir la demanda de un estilo particular de calzado, una zapatería al detalle determina que a la semana se venden 60 pares si el precio por par es de 25 dólares; y cuando aumenta a \$30 por par, sólo se venden 40 pares.

a) Si el precio se traza sobre el eje horizontal, determine la forma de pendiente-intersección con el eje y de la ecuación para la demanda. Reescriba la ecuación en la forma general de la ecuación (2.1).

b) Empleando esta ecuación, prediga cuántos pares de zapatos se venderán si el precio se rebaja a \$15.

Los ejercicios 62 a 64 se relacionan con la sección 2.6.

62 Una tienda al detalle vende cuatro productos. Sean x_1, x_2, x_3 y x_4 el número de unidades vendidas, respectivamente, de los cuatro productos. Las utilidades ganadas

por cada unidad vendida de los productos son 20 dólares, $5, $8 y $2, respectivamente. Las utilidades meta de la firma son $40 000.

a) Usando x_1, x_2, x_3 y x_4 defina una ecuación que exprese que la utilidad total lograda con la venta de los cuatro productos es de $40 000.

b) Dé el intervalo de valores (máximo y mínimo) posibles para cada variable de la ecuación desarrollada en la parte *a*.

63 Una mujer que hace poco heredó $100 000 decide invertir su herencia en acciones. Está estudiando ocho acciones cuyos precios se dan en la tabla anexa.

Acción	1	2	3	4	5	6	7	8
Precio por acción	$12	$150	$76.50	$25	$8	$57	$200	$42

Determine la ecuación cuyo conjunto solución contenga todas las combinaciones posibles de las ocho acciones que pueden adquirirse con $100 000. (Cerciórese de definir las variables.)

64 Administración de personal El jefe del departamento de personal recibió una asignación presupuestaria de 250 000 dólares para contratar al personal del departamento de ingeniería. Se necesitan cuatro tipos de empleados: ingenieros de alto nivel con un sueldo anual de 35 000 dólares cada uno, ingenieros de menor nivel con un sueldo anual de $20 000 cada uno, dibujantes con un sueldo anual de $15 000 y secretarias que percibirán un sueldo de $9000 cada una. Escriba una ecuación cuyo conjunto solución contenga las posibles combinaciones de empleados que se pueden contratar con $250 000. (No olvide definir las variables.)

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 En la ecuación $3x - 6y = 30$,

a) Determine las intersecciones con los ejes x y y.

b) Grafique la ecuación.

2 En la ecuación $(x + y)/2 = 10 - (2x - 3y)/3$,

a) Reescriba la ecuación en la forma de pendiente-intersección con el eje y.

b) Identifique la pendiente y la intersección con el eje y.

c) Interprete el significado de la pendiente.

3 Si se tienen dos puntos (2, 9) y (−2, −7),

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

b) Identifique la pendiente y la intersección con el eje y.

4 Determine la ecuación de la recta que sea perpendicular a la línea representada por la ecuación $3x + y = 5$ y que pase por el punto (−2, 0).

5 Un fabricante tiene una oferta mensual de 500 000 libras de una materia prima que se usa en la elaboración de cuatro productos. El número de libras necesarias para fabricar una unidad de cada producto es de 3000, 4000, 1000 y 1500 libras, respectivamente. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son el número de unidades elaboradas de cada producto, defina la ecuación cuyo conjunto solución determine las posibles combinaciones de los cuatro productos que absorban toda la oferta mensual de la materia prima.

MINICASO

ANÁLISIS DE ECUACIONES LINEALES POR COMPUTADORA

Sirviéndose de un lenguaje de computación apropiado (por ejemplo, BASIC, FORTRAN, PASCAL),

A Escriba un programa corto que tenga las siguientes entradas y las salidas requeridas:
Entradas: a, b y c para una ecuación lineal de la forma $ax + by = c$.
Salidas: 1. pendiente, 2. intersección con el eje y, 3. forma de pendiente-intersección de la ecuación.

B Escriba un programa que determine la ecuación de pendiente-intersección de una recta, contando con diversos tipos de información acerca de ella. El programa habrá de tener en cuenta las siguientes salidas:
Entradas: 1. las coordenadas de 2 puntos sobre la línea *o* 2. la pendiente y coordenadas del punto 1 sobre la línea.
Salidas: 1. pendiente, 2. intersección con el eje y, 3. forma de pendiente-intersección de la ecuación.

CAPÍTULO

3 FUNCIONES LINEALES: APLICACIONES

85 - 106

3.1 FUNCIONES LINEALES
3.2 OTROS EJEMPLOS DE LAS FUNCIONES LINEALES
3.3 MODELOS DE EQUILIBRIO
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
MINICASO: DECISIÓN DE CAMBIO DE AUTOMÓVIL

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ofrecer una explicación de las características de las funciones lineales
- Presentar un amplia gama de aplicaciones de las funciones lineales

En este capítulo se examina más a fondo los contenidos descritos en los capítulos 1 y 2 al dar una explicación de las funciones lineales. Después de examinar la forma y las suposiciones en que se fundan esas funciones, se presentarán ejemplos que muestran las aplicaciones de esos modelos en la administración, economía y en otras disciplinas.

3.1 FUNCIONES LINEALES

Forma y suposiciones generales

DEFINICIÓN:

FUNCIÓN LINEAL CON UNA VARIABLE INDEPENDIENTE
Una *función lineal f* con una variable independiente *x* y una variable dependiente *y* tiene la forma general

$$y = f(x) = ax + b \tag{3.1}$$

donde a y b son valores y $a \neq 0$.

El lector deberá reconocer que la ecuación (3.1) es una forma de pendiente-intersección con el eje y de una ecuación lineal. A los parámetros se les ha asignado un nombre diferente, pero representan las mismas características. Es decir, a es la pendiente de la línea que representa la función y b denota la coordenada y de la intersección con el eje y.

En el caso de una función lineal de la forma de la ecuación (3.1), un cambio en el valor de y es directamente proporcional a un cambio en el valor de x. Dicho de otra manera, la *tasa* (rapidez) del cambio del valor de y, dado un cambio en el valor de x, es *constante*. Esta tasa del cambio se representa mediante la pendiente de la función o bien mediante la constante a de la ecuación (3.1).

Una función de sueldo mencionada en el capítulo 1 tenía la forma

$$y = f(x) = 3x + 25$$

donde *y se define como un sueldo semanal en dólares* y *x representa el número de unidades vendidas a la semana*. Éste es un ejemplo de una función lineal. En una representación gráfica, la función aparece como en la figura 3.1. Nótese que la ecuación se grafica en el primer cuadrante solamente, restringiendo x y y a valores no negativos. ¿Tiene sentido esto para el lector?

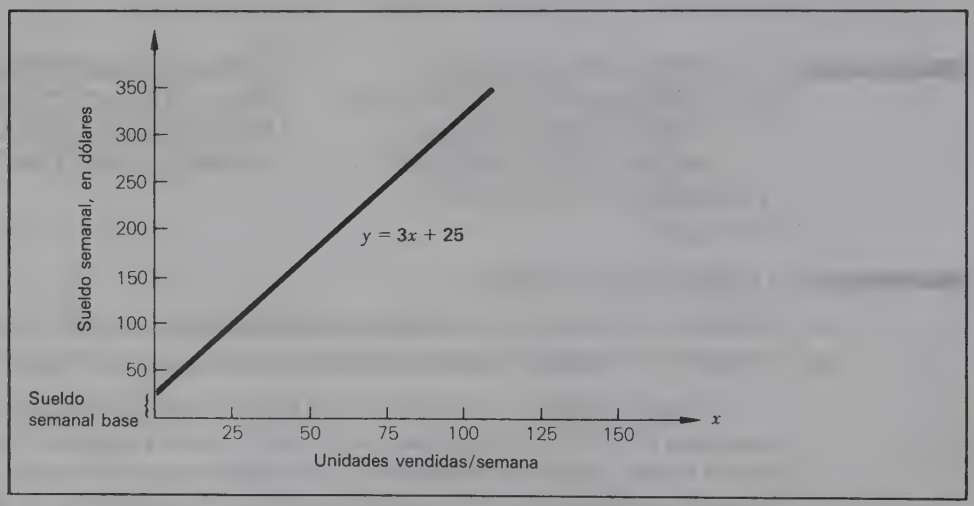


FIGURA 3.1 Función lineal de sueldo.

DEFINICIÓN:

FUNCIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Una función lineal f con dos variables independientes x_1 y x_2 y una variable dependiente y presenta la forma general

$$y = f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b \qquad \textbf{(3.2)}$$

donde a_1 y a_2 son constantes de valor real (no cero) y b tiene un valor real.

Para una función lineal de la forma de la ecuación (3.2), la variable y depende de los valores de x_1 y x_2 de modo conjunto. El valor de y varía en proporción directa con los cambios de los valores de x_1 y x_2. En concreto, si x_1 aumenta en 1 unidad, y cambiará en a_1 unidades. Si x_2 aumenta en 1 unidad, y cambiará en a_2 unidades.

EJEMPLO 1

Supóngase que el sueldo de un vendedor depende del número de unidades vendidas de dos productos. Más exactamente, supóngase que la función de sueldo

es
$$y = f(x_1, x_2)$$
$$y = 5x_1 + 3x_2 + 25$$

donde y = *sueldo semanal*, x_1 = *número de unidades vendidas del producto 1*, x_2 = *número de unidades vendidas del producto 2*. Una interpretación de esta función de sueldo es que existe un sueldo semanal base de \$25 dólares y que las comisiones ganadas por cada unidad vendida son de \$5 y \$3, respectivamente, en los productos 1 y 2.

DEFINICIÓN:

FUNCIÓN LINEAL CON VARIABLES INDEPENDIENTES *n*

Una función lineal f con n variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y una variable dependiente y tiene la forma general

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

o bien
$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b \qquad (3.3)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes de valor real (no cero) y b tiene un valor real.

Funciones lineales de costo

A las empresas les interesan los *costos* porque reflejan el dinero que gastan. Esos flujos de dinero suelen destinarse al pago de sueldo, materias primas, suministros, alquiler, calefacción, servicios públicos y otros gastos. Según se señaló con anterioridad, los contadores y economistas definen el costo total en términos de dos componentes: ***costo total variable*** y ***costo total fijo***. Ambos componentes deben sumarse para determinar el costo total. La función de costo de la compra y operación del carro de patrulla del ejemplo 3 en el capítulo 1 es un ejemplo de una función lineal de costo. La función de costo

$$C(x) = 0.40x + 18\,000$$

tenía costos variables que cambiaban con el número de millas recorridas y costos fijos de \$18 000.

Los costos totales variables cambian con el nivel de producción y se calculan como el producto del costo variable por unidad y nivel de producción. En un ambiente de producción, el costo variable por unidad suele estar constituido por los costos de materias primas y mano de obra. En el ejemplo del carro patrulla, el costo variable por milla constaba de los costos de operación por milla como gasolina, aceite, costos de mantenimiento y depreciación.

Muy a menudo las funciones lineales de costo son realistas, aunque ignoran la posibilidad de las ***economías*** o ***deseconomías de escala*** (costos excesivos de las operaciones a gran escala). Es decir, implican *rendimientos constantes a escala*. Estos rendimientos suponen que, cualquiera que sea el número de unidades producidas, el costo variable de cada una es el mismo. Y tal suposición ignora la posibilidad de que los elementos del proceso de producción, tanto obreros como máquinas, pueden hacerse más eficientes al ir aumentando las

unidades producidas o que, al comprar materias primas en grandes cantidades se pueden obtener descuentos por volumen y que éstos a su vez reducen el costo variable por unidad producida. La función de costo en el caso del carro de patrulla supone que los costos de operación por milla serán de \$0.40 sin importar el número de millas recorridas. Cabría esperar que, a lo largo de la vida de una unidad de equipo, como la patrulla, la unidad pierda eficiencia y necesite más mantenimiento. Ello dará origen a un costo variable más alto por unidad. Algunos modelos de costo reconocen estas posibles "no linealidades" al servirse de alguna medida de *costo variable promedio por unidad*. En otras situaciones podría desarrollarse un conjunto de funciones lineales de costo, apropiada cada una en ciertos casos según el nivel de producción que se escoja.

En el siguiente ejemplo se ilustra la formulación de una función *lineal de costo*.

EJEMPLO 2

Una empresa que elabora un solo producto quiere determinar la función que expresa el costo total anual y en función de la cantidad de unidades producidas x. Los contadores indican que los gastos fijos cada año son de 50 000 dólares. También han estimado que los costos de materias primas por cada unidad producida ascienden a \$5.50 y que los de mano de obra son de \$1.50 en el departamento de montaje, \$0.75 en el cuarto de acabado y \$1.25 en el departamento de empaque y embarque.

La función de costo total tendrá la forma

$$y = C(x)$$
$$= \text{costo total variable} + \text{costo total fijo}$$

Los costos totales variables constan de dos componentes: los costos de materias primas y los de mano de obra. Los segundos se calculan al sumar los respectivos costos de mano de obra de los tres departamentos. El costo total se define por medio de la función

y = costo total de materias primas + costo total de mano de obra + costo total fijo

= costo total de materias primas + costo de mano de obra (depto. de montaje) + costo de mano de obra (depto. de embarque) + costo de mano de obra (sala de acabado) + costo total fijo

o bien $$y = 5.50x + (1.50x + 0.75x + 1.25x) + 50\,000$$

que al simplificarse da

$$y = 9x + 50\,000$$

El 9 representa el costo variable combinado por unidad producida de \$9.00.

EJEMPLO 3

Aproximación lineal de la función no lineal de costo. La figura 3.2 muestra una función no lineal de costo f. Como se dijo en páginas anteriores, puede haber circunstan-

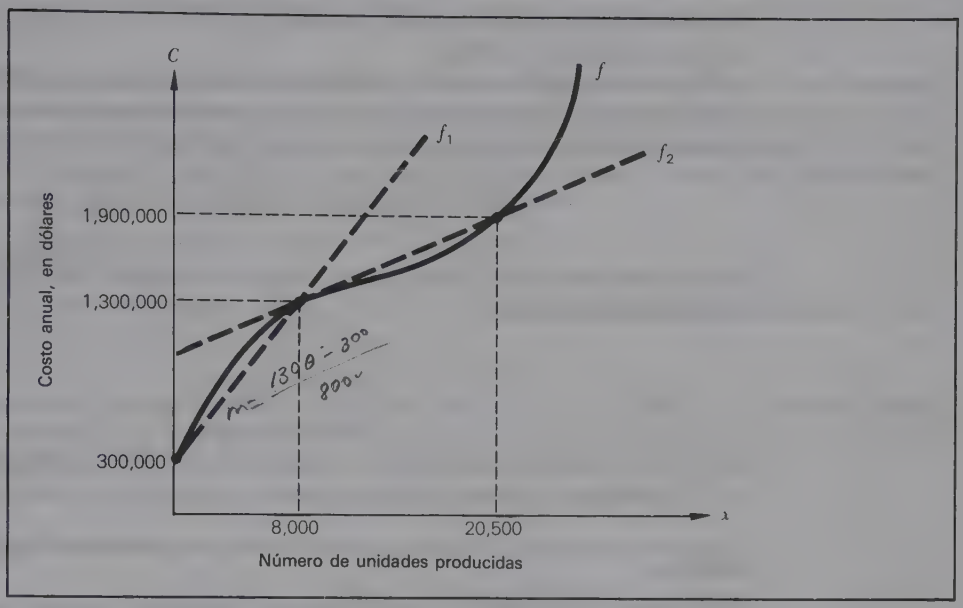


FIGURA 3.2 Aproximación lineal de la función no lineal de costo.

cias en que sea razonable aproximar las funciones no lineales con una o más funciones lineales. Supóngase, en la situación descrita en la figura 3.2, que los analistas piensan que las funciones lineales f_1 y f_2 aproximan bastante bien la función f. En concreto, quieren aproximar f con f_1 cuando $x \leq 8000$ y f_2 cuando $8000 < x \leq 20\,500$. Basándose en las cifras históricas de las ventas, creen que hay pocas probabilidades de que la producción anual rebase las 20 500 unidades.

EJERCICIO

Empleando los puntos de datos (0, 300 000), (8000, 1 300 000) y (20 500, 1 900 000), verifique que las funciones de aproximación son

$$f_1(x) = 125x + 300\,000 \qquad 0 \leq x \leq 8\,000 \tag{3.4}$$

$$f_2(x) = 48x + 916\,000 \qquad 8{,}000 < x \leq 20\,500 \tag{3.5}$$

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

¿Cómo se reflejan en la gráfica de f las economías de escala? ¿Cómo las ecuaciones (3,4) y (3,5) reflejan esas economías de escala? Si f_1 y f_2 se utilizan para aproximar f, comente la aproximación en comparación con el valor real cuando $x < 8000$, cuando $8000 < x < 20\,500$ y cuando $x = 8000$.

Funciones lineales del ingreso

El dinero que entra en una organización por la venta de sus productos o por la prestación de servicios suele recibir el nombre de ***ingreso***. La manera más básica de calcular el ingreso total por la venta de un servicio es

Ingreso total = (precio) (cantidad vendida)

En esta relación una suposición es que el precio de venta es el mismo para todas las unidades vendidas.

Si una compañía vende productos n, donde x_i es el número de unidades vendidas del producto i y P_j indica el precio del producto i, la función que permite calcular el ingreso total obtenido del producto n es

$$R = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_nx_n \tag{3.6}$$

Esta función de ingreso puede formularse de manera más concisa empleando la *notación de sumatoria*:

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i \tag{3.7}$$

Los lectores que por primera vez vean esta notación querrán sin duda consultar el apéndice A, donde se ofrece una introducción a ese concepto.

EJEMPLO 4

Una agencia de alquiler de automóviles está tratando de competir con algunas de las firmas más grandes del país. La dirección se da cuenta de que a los clientes actuales no les interesan mucho cosas como el tipo de cristales, radios, sistema de calefacción u otros aditamentos. El dueño y presidente de la agencia ha estado reciclando automóviles usados para incorporarlos a la flotilla. También simplificó la estructura de la tarifa de alquiler, pues cobra \$9.95 netos diarios por el uso del automóvil. El ingreso total por año es una función lineal del número de días-automóvil rentado por la agencia, esto es, *si* R = *ingreso anual* y d = *número de días-automóvil rentado durante el año*

$$R = f(d) = 9.95d$$

Funciones lineales de la utilidad

La ***utilidad*** de una organización es la diferencia entre el ingreso total y el costo total.

$$\text{Utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total} \tag{3.8}$$

Cuando el ingreso total es mayor que el costo total, la utilidad será positiva. En tales casos a la utilidad puede llamársele ***ganancia*** o ***utilidad neta***. Si el costo total es mayor que el ingreso total, la utilidad es negativa y puede dársele el nombre de ***pérdida neta*** o ***déficit***.

Cuando *tanto* el ingreso total *como* el costo total son funciones lineales de la(s) misma(s) variable(s), la función de utilidad es también una función lineal de la(s) misma(s) variable(s). Esto es, si

$$\text{Ingreso total} = R(x)$$

y

$$\text{Costo total} = C(x)$$

la utilidad se define como

$$P(x) = R(x) - C(x) \tag{3.9}$$

EJEMPLO 5

Una empresa vende un solo producto a 65 dólares por unidad. Los costos variables por unidad son de $20 por concepto de materiales y de $27.50 por concepto de mano de obra. Los costos fijos anuales ascienden a $100 000. Formule la función de utilidad expresada en términos de x, número de unidades producidas y vendidas. ¿Qué utilidad se gana si las ventas anuales son 20 000 unidades?

SOLUCIÓN

Si el producto se vende a $65 por unidad, el ingreso total se calcula mediante la función

$$R(x) = 65x$$

¿Es esto congruente con su modelo mental? De manera análoga, el costo total anual está constituido por los costos de materiales, los costos de mano de obra y los costos fijos:

$$C(x) = 20x + 27.50x + 100\,000$$

que se reduce a

$$C(x) = 47.50x + 100\,000$$

Así pues, la función de utilidad se obtiene así:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 65x - (47.50x + 100\,000) \\ &= 17.50x - 100\,000 \end{aligned}$$

Obsérvese que $P(x)$ es una función lineal. Si la firma vende 20 000 unidades durante el año, entonces

$$\begin{aligned} P(20\,000) &= 17.50(20\,000) - 100\,000 \\ &= 350\,000 - 100\,000 = \$250\,000 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6

Planeación agrícola Una empresa agrícola tiene tres granjas que se utilizarán el año entrante. Cada una está dotada de características especiales que la hacen adecuada sólo para un tipo de cultivo. La tabla 3.1 contiene el cultivo seleccionado para cada granja, el costo anual de plantar 1 acre, el ingreso que se espera obtener por acre y los costos fijos de la administración de las granjas. Además de esos costos fijos, la corporación en conjunto tiene costos fijos anuales de $75 000. Determine la función de utilidad para la operación de las tres granjas si x_j = *número de acres plantadas en la granja j*, r_j = *ingreso por acre en la granja j*, c_j = *costo por acre en la granja j y* F_j = *costo fijo de la granja j.*

TABLA 3.1

Granja	Cultivo	Costo/acre (c_j)	Ingreso/acre (r_j)	Costo fijo (F_j)
1	Soya	$ 900	$1 300	$150 000
2	Maíz	1 100	1 650	175 000
3	Papas	750	1 200	125 000

SOLUCIÓN

El ingreso total proviene de la venta de los cultivos plantados en las tres granjas, o sea

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x_3) &= r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 \\ &= 1\,300x_1 + 1\,650x_2 + 1\,200x_3 \end{aligned}$$

Los costos totales son la suma de los de las tres granjas más los costos fijos de la empresa, es decir

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, x_3) &= c_1x_1 + F_1 + c_2x_2 + F_2 + c_3x_3 + F_3 + 75{,}000 \\ &= 900x_1 + 150\,000 + 1\,100x_2 + 175\,000 + 750x_3 + 125\,000 + 75\,000 \\ &= 900x_1 + 1\,100x_2 + 750x_3 + 525\,000 \end{aligned}$$

La utilidad total es una función lineal que se calcula como

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3) &= R(x_1, x_2, x_3) - C(x_1, x_2, x_3) \\ &= 1\,300x_1 + 1\,650x_2 + 1\,200x_3 - (900x_1 + 1\,100x_2 + 750x_3 + 525\,000) \\ &= 400x_1 + 550x_2 + 450x_3 - 525\,000 \end{aligned}$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 3.1

1 Escriba la forma general de una función lineal con cinco variables independientes.

2 Suponga que el vendedor del ejemplo 1 tiene un objetivo salarial de \$500 por semana. Si en una semana no se dispone del producto B, ¿cuántas unidades del producto A deben venderse para alcanzarle? Si no se cuenta con el producto A, ¿cuántas unidades del producto B tendrán que venderse?

3 Suponga que en el ejemplo 1 el vendedor recibe un bono cuando las ventas combinadas de los dos productos rebasan las 60 unidades. El bono es de \$3.50 por unidad de cada unidad después de esa cantidad. Con este programa de incentivos, la función de sueldo debe describirse mediante dos funciones lineales diferentes. ¿Cuáles son y cuándo son válidas?

4 En el ejemplo 5, ¿cuántas unidades deben producirse y venderse a fin de (*a*) ganar una utilidad de \$1.2 millones y (*b*) obtener una utilidad cero (punto de equilibrio)?

5 Un fabricante de microcomputadoras produce tres modelos diferentes. La tabla adjunta sintetiza los precios al mayoreo, el costo de materiales por unidad y el costo de mano de obra por unidad. Los costos fijos anuales son de \$25 millones.

	Microcomputadora		
	Modelo 1	**Modelo 2**	**Modelo 3**
Precio al mayoreo/unidad	\$600	\$1 200	\$1 950
Costo de materiales/unidad	200	450	795
Costo de mano de obra/unidad	100	150	225

(*a*) Determine el conjunto de la función de ingreso total para las ventas de los tres modelos de microcomputadora.
(*b*) Determine la función de costo total anual de la fabricación de los tres modelos.
(*c*) Determine la función de utilidad para las ventas de los tres modelos.
(*d*) ¿Cuál es la utilidad anual si la empresa vende 20 000, 40 000 y 10 000 unidades, respectivamente, de los tres modelos?

6 En el ejemplo 6, la junta directiva votó por el siguiente programa de cultivos para el año próximo: 1000 acres se plantarán en la granja 1, 1600 en la granja 2 y 1550 en la granja 3. (*a*) ¿Cuáles son las utilidades esperadas del programa? (*b*) Una sequía ha hecho que los rendimientos por acre se reduzcan en 20, 30 y 10%, respectivamente, en las tres granjas. ¿Cuál es la utilidad esperada del programa de plantación antes mencionado?

7 La figura 3.3 muestra una función no lineal de costo f. Los analistas han dicho que la función no lineal puede aproximarse con bastante exactitud mediante dos funciones lineales: f_1 o f_2. Usando los puntos de datos muestrales, determine la función lineal $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$. Basándose en la figura 3.3, comente la precisión relativa de las aproximaciones hechas con f_1 y f_2.

8 Arrendamiento de automóviles Una agencia de alquiler de automóviles compra nuevas unidades cada año para rentarlas. Los automóviles nuevos cuestan 12 000 dólares. Se emplean 3 años y luego se venden en $2 500. El dueño de la agencia estima que los costos variables de operación de los automóviles, sin contar la gasolina, son de $0.25 por milla. Los automóviles se alquilan en $0.40 netos por milla (sin incluir la gasolina).

(*a*) Formule la función de ingreso total relacionada con el alquiler de los automóviles por x millas durante un periodo de 3 años.
(*b*) Formule la función de costo total asociada al alquiler de un automóvil por x millas durante 3 años.
(*c*) Formule la función de utilidad.
(*d*) ¿Cuál será la utilidad si el automóvil se renta por 60 000 millas durante un periodo de 3 años.
(*e*) ¿Cuántas millas se requieren a fin de obtener una utilidad cero durante 3 años.

9 Una compañía elabora un producto cuyo precio es de 25 dólares por unidad. Cada unidad le cuesta $18 en gastos variables, y los costos fijos anuales son de $250 000. Si x es el número de unidades producidas y vendidas durante el año,

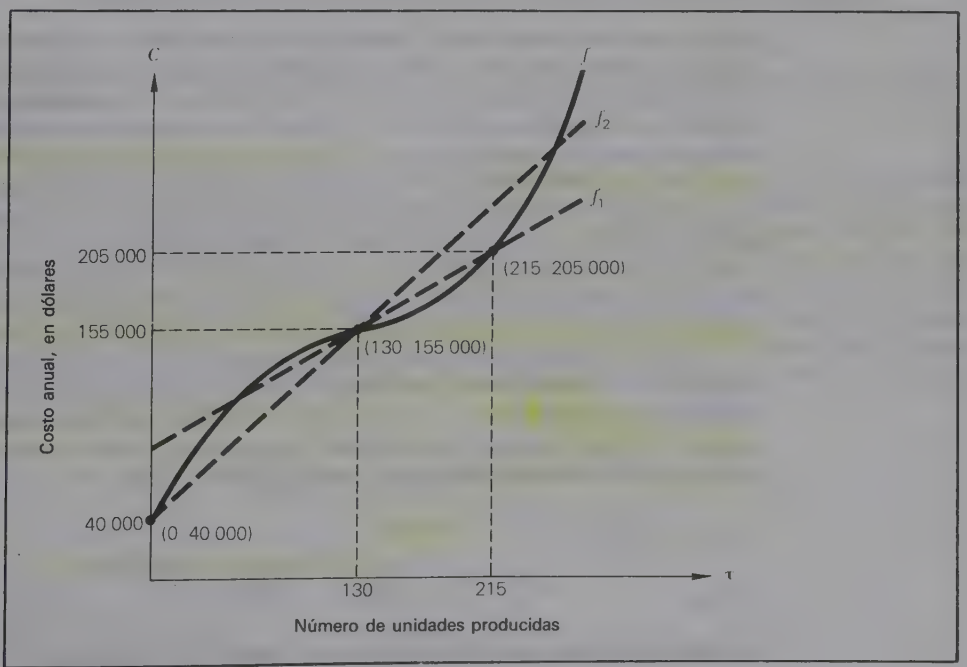


FIGURA 3.3

(*a*) Formule la función lineal del costo total.
(*b*) Formule la función lineal del ingreso total.
(*c*) Formule la función lineal de la utilidad.
(*d*) ¿Cuál será la utilidad anual si se producen y venden 100 000 unidades durante el año?
(*e*) ¿Qué nivel de producción se necesita a fin de obtener una utilidad cero?

10 Una gasolinera vende gasolinas regular sin plomo y de primera calidad sin plomo. El precio por galón es de \$0.899 para la gasolina regular sin plomo y de \$0.999 para la de primera calidad sin plomo. El costo por galón que cobra el proveedor es de \$0.829 y \$0.939, respectivamente. Si x_1 es el número de galones vendidos de gasolina regular y x_2 la cantidad de galones de la gasolina de primera calidad,

(*a*) Formule la función de ingreso obtenido con la venta de galones x_1 y x_2, respectivamente, de los dos grados de gasolina.
(*b*) Formule la función del costo total de la compra de galones x_1 y x_2, repectivamente, de los dos grados.
(*c*) Formule la función de utilidad total.
(*d*) ¿Cuál es la utilidad total esperada si la estación vende 100 000 galones de gasolina regular sin plomo y 40 000 de gasolina de primera calidad sin plomo?

3.2 OTROS EJEMPLOS DE LAS FUNCIONES LINEALES

En la presente sección se estudiarán, a manera de ejemplo, otras aplicaciones de las funciones lineales.

EJEMPLO 7

Depreciación en línea recta Cuando las organizaciones compran equipo, vehículos, edificios y otros tipos de "bienes de capital", los contadores suelen asignar el costo del bien a lo largo del periodo de su uso. En el caso de un camión que cueste 10 000 dólares y que tenga una vida útil de 5 años, los contadores podrían asignar \$20 anuales como costo de poseer el camión. El costo asignado a un periodo determinado recibe el nombre de ***depreciación***. Este concepto se introdujo en el ejemplo 13 del capítulo 1. Los contadores también conservan registros de cada activo principal y de su valor actual en libros. Por ejemplo, el valor del camión aparecerá en los estados contables como \$10 000 en el momento de su compra, \$10 000 − \$2000 = \$8000 un año después de su adquisición y así sucesivamente. La depreciación puede considerarse asimismo como el monto en que ha disminuido el valor en libros de un activo.

Si bien se cuenta con varios métodos para calcular la depreciación, uno de los más simples es la ***depreciación en línea recta***. En este método es constante la tasa de depreciación. Ello significa que el valor en libros decrece como una función lineal con el tiempo. *Si V es el valor en libros (en dólares) de un activo y t indica el tiempo (en años) medido a partir de la fecha de compra* para el camión antes mencionado,

$$V = f(t)$$
$$= \textit{costo de compra} - \text{depreciación}$$

o bien

$$= 10\,000 - 2\,000t$$

La gráfica de esta función aparece en la figura 3.4.

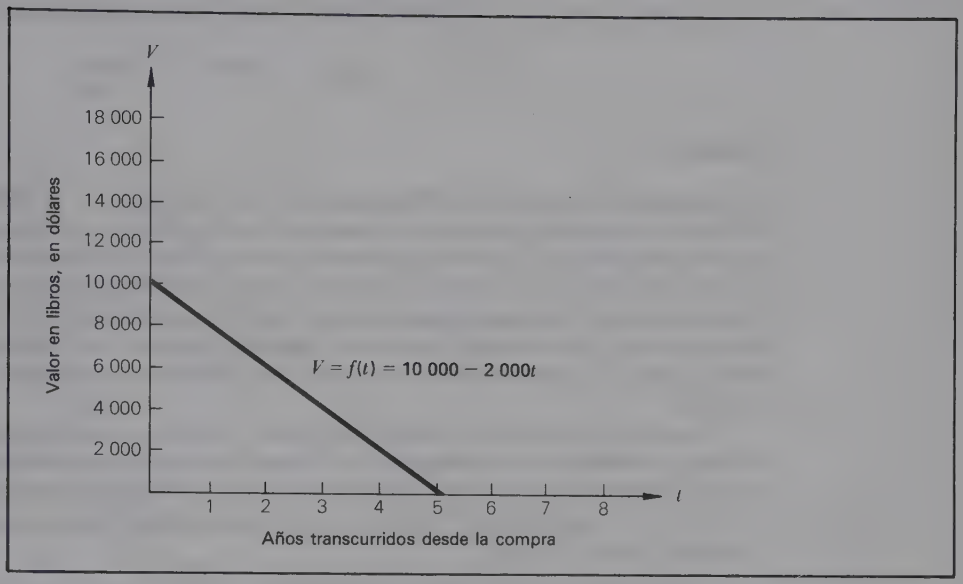


FIGURA 3.4
Función del valor en libros basada en la depreciación en línea recta.

EJERCICIO
Defina el dominio y rango restringidos de esta función. *

EJEMPLO 8

Depreciación en línea recta con valor de salvamento Muchos activos tienen un ***valor de reventa,*** o ***salvamento***, aun después de haber cumplido con el propósito para el cual fueron adquiridos inicialmente. En tales casos, el costo asignado durante la vida del activo es la diferencia entre el costo de compra y el de reventa. El costo asignado en cada periodo es el que se obtiene al dividirlo entre la vida útil. Suponga que el camión del último ejemplo tiene una vida útil de 5 años y que, transcurrido ese lapso, puede venderse en $1000. El costo total que puede asignarse a lo largo de la vida del bien es de $10 000 − $1000, o sea $9000. Si el camión debe depreciarse con este método, la depreciación anual será de

$$\frac{\text{Costo de compra} - \text{valor de reventa}}{\text{Vida útil (en años)}} = \frac{\$10\,000 - \$1\,000}{5}$$

$$= \frac{\$9\,000}{5} = \$1\,800$$

* dominio $= \{t \mid 0 \le t \le 5\}$; rango $= \{V \mid 0 \le V \le 10{,}000\}$.

La función que expresa el valor en libros V en función del tiempo t es

$$V = f(t) = 10\,000 - 1\,800t \qquad 0 \leq t \leq 5$$

EJEMPLO 9

Disuasión del crimen Sigue discutiéndose si las actividades de vigilancia de la policía influyen o no en los niveles de criminalidad. La investigación al respecto no ofrece resultados uniformes. Los investigadores coinciden en que la eficacia de la vigilancia de las patrullas depende de diversos factores, entre otros el tipo de delito. Por ejemplo, es probable que la vigilancia policial no afecte mucho a los pequeños hurtos en las tiendas, que es un delito que se comete en el interior de los establecimientos. Cabría suponer que tenga un mayor efecto en delitos como robo de automóviles y asalto a mano armada.

Algunos departamentos de policía piensan que en el nivel de delitos graves repercuten las actividades de vigilancia. Una ciudad ha reunido información sobre los índices de criminalidad al alterar el número de oficiales de policía asignados a actividades preventivas de vigilancia en patrullas. Los datos revelan la existencia de una relación funcional lineal cuando

$$\text{Número de delitos graves por semana} = f\left(\begin{array}{c}\text{número promedio de oficiales}\\ \text{de policía}\\ \text{asignados a la vigilancia preventiva}\end{array}\right)$$

Sus datos indican que, si no se realizan actividades preventivas de vigilancia, el número esperado de delitos graves es de 1250 por semana. También indican que el número esperado disminuye en 2.5 por cada oficial que se agregue a la vigilancia. Esta relación está representada por la función lineal

$$c = f(p) = 1\,250 - 2.5p$$

donde c es el número esperado de delitos graves por semana y *p denota el número de oficiales asignados a la vigilancia preventiva*. La figura 3.5 muestra esa relación.

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Interprete el significado de la pendiente de esta función lineal. Interprete el significado de las intersecciones con los ejes x y y. ¿Parecen válidas esas interpretaciones? ¿Parece ser la *linealidad* una suposición razonable respecto a esta relación?

EJEMPLO 10

Funciones lineales de la demanda Como se dijo en el ejemplo 10 del capítulo 1, la ***función de demanda*** es una relación matemática que expresa la forma en que la cantidad de demanda de un producto varía según el precio que tenga. La relación entre las dos variables (*cantidad de la demanda* y *precio por unidad*) suele ser *inversa*. En casi todos los productos, una disminución del precio da origen a un incremento de la demanda. Si los supermercados reducen el precio de los filetes mignón a \$0.75 por libra, habría seguramente un aumento importante en la demanda. Por otra parte, los incrementos

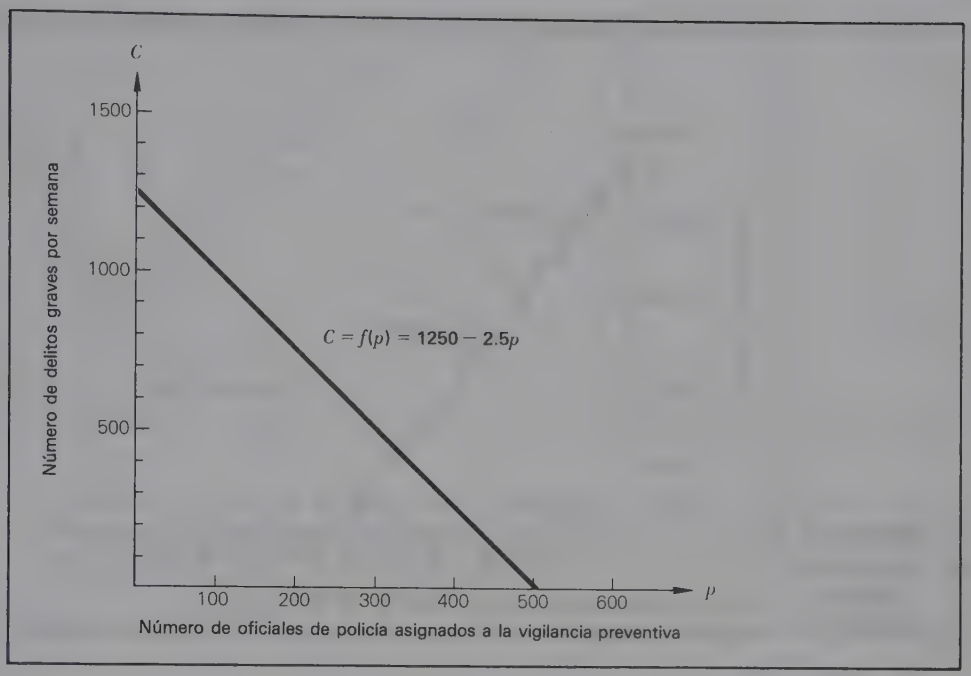


FIGURA 3.5
Función de disuasión de delitos.

del precio de un producto casi siempre provocan una disminución de la demanda. La frase *fijar precios accesibles a un segmento menor del mercado* se refiere a la pérdida de clientes por los incrementos de precios. Si de repente al filete mignón se le pusiera un precio equivalente al triple de otros factores (por ejemplo, mantener constante el nivel de ingresos de la población), muchas personas que actualmente pueden comprarlo ya no tendrían acceso a ese bien de consumo.

Por supuesto esta conducta admite excepciones. La demanda de productos o servicios que se consideran *necesarios* tiende a fluctuar menos con cambios ligeros de precio. Bienes como los medicamentos, los servicios médicos y ciertos comestibles constituyen un ejemplo de esta categoría de productos.

Aunque la mayor parte de las funciones de demanda son no lineales, se dan casos en que la relación de la demanda es una función lineal o puede aproximarse por medio de ella. La figura 3.6 muestra una función lineal de demanda con dos puntos de datos muestrales. Si bien la generalidad de los libros de economía miden el precio sobre el eje vertical y la cantidad de la demanda sobre el eje horizontal, aquí se invertirá la designación de los ejes, cómo se aprecia en la figura 3.6. Ello obedece a que casi todos los clientes perciben que la relación de la demanda presenta la forma

$$\text{Cantidad de la demanda} = f(\text{precio por unidad})$$

Es decir, los consumidores responden al precio. Por eso la cantidad de la demanda, o sea la variable dependiente, se traza sobre el eje vertical.

Por medio de los métodos descritos en el capítulo anterior, verifíquese que la función de demanda en la figura 3.6 tiene la forma

$$q = f(p) = 47\,500 - 7\,500p$$

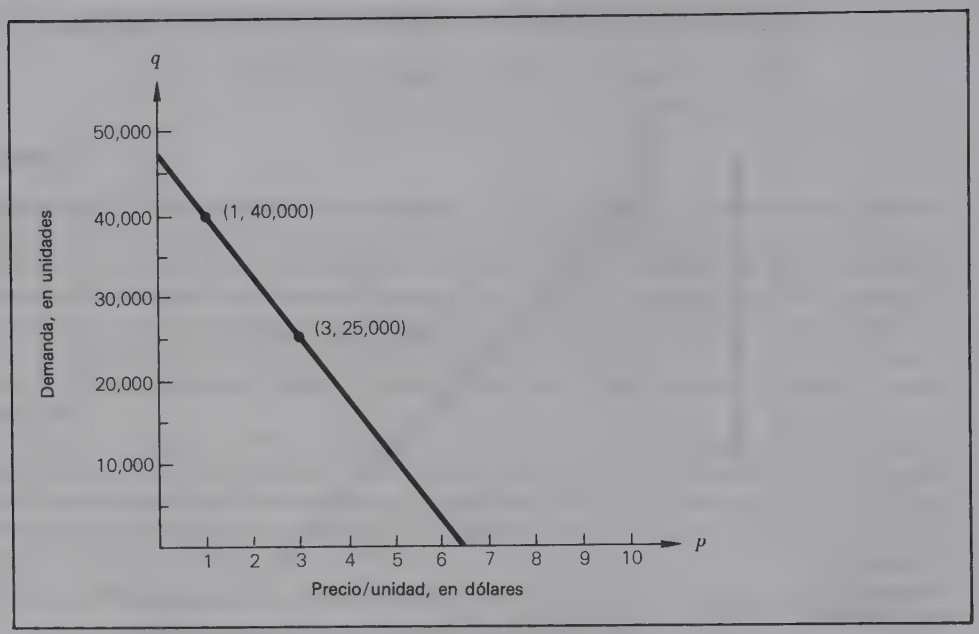


FIGURA 3.6 Función lineal de demanda.

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Interprete el significado de la intersección con el eje *y* en este ejemplo. ¿Parece válido esto? ¿Cuál es la interpretación de la intersección con el eje *x*? ¿Cuál es la interpretación de la pendiente en esta función? El dominio restringido de la función parece ser $0 \leq p \leq 6.333$. ¿Sentirá el lector la tentación de restringir el dominio un poco más?

EJEMPLO 11

Funciones lineales de la oferta La *función de oferta* relaciona el precio de mercado con las cantidades que los proveedores están dispuestos a producir y vender. La implicación de estas funciones es que lo que se introduce en el mercado depende del precio que el público consumidor esté dispuesto a pagar. En contraste con la naturaleza inversa del precio y de la demanda en las funciones de demanda, la cantidad o volumen que los proveedores están dispuestos a ofrecer suele variar directamente con el precio de mercado. *En igualdad de circunstancias*, cuanto mayor sea el precio de mercado, más querrá producir y vender el proveedor; y cuanto menor sea el precio que el público esté dispuesto a pagar, menos incentivos habrá para producir y vender. Suponga el lector que posee un barco para la pesca de langosta. Si todos los demás factores son iguales, ¿qué incentivo tendrá para salir con su barco y tripulación a la pesca de langostas cuando el precio al mayoreo de ellas es de $0.25 por libra? ¿Qué incentivo habría si el precio al mayoreo fuera de $10 por libra?

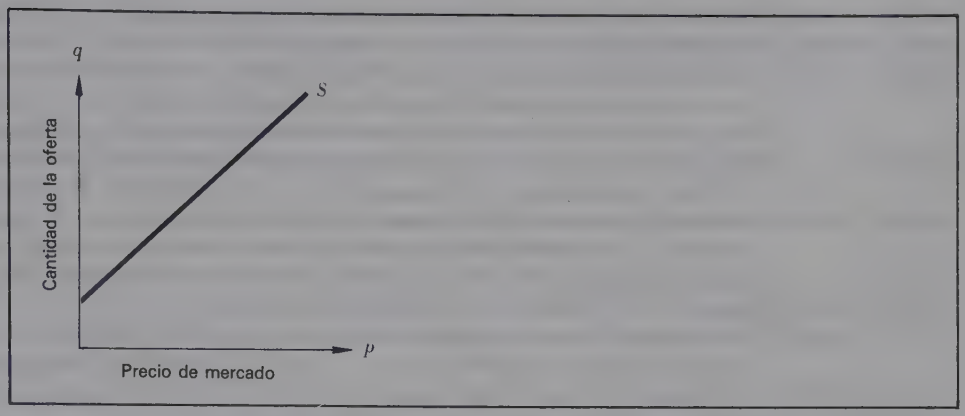


FIGURA 3.7
Función lineal de oferta.

Como en el caso de las funciones de demanda, las funciones de oferta pueden aproximarse algunas veces por medio de funciones lineales. La figura 3.7 muestra una función muestra de oferta. Nótese que, al denotar el eje vertical en q, se sugiere que

$$\text{Cantidad de la oferta} = f(\text{precio de mercado})$$

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

¿Qué sugiere la intersección con el eje y en la figura 3.7 respecto a la relación entre oferta y demanda? Si la curva de la oferta aparece como en la figura 3.8, ¿qué indica la intersección con el eje y respecto a la relación? ¿Cuál figura, es, a su juicio, la más representativa de una relación con la verdadera función de oferta? ¿Por qué?

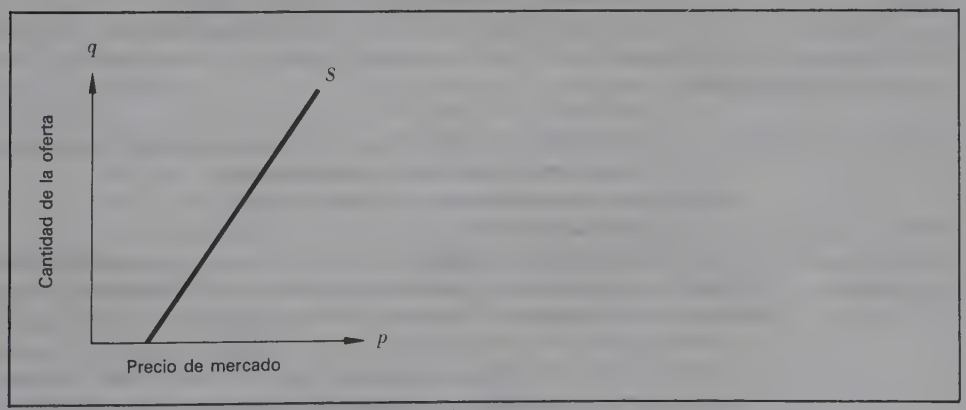


FIGURA 3.8
Función lineal de oferta.

Ejercicios de seguimiento de la sección 3.2

1 Una máquina se compra en 60 000 dólares. Los contadores han decidido servirse de un método de depreciación en línea recta, y la máquina se deprecia completamente al cabo de 8 años. Indicando con V el valor de la máquina en libros y con t su edad, determine la función $V = f(t)$. (Suponga que no hay valor de reventa o salvamento.)

2 En el ejercicio anterior suponga que la máquina tendrá un valor de reventa de \$10 000 al cabo de 8 años. Determine la función $V = f(t)$ para esta situación.

3 Una máquina se compra en 400 000 dólares. Los contadores han decidido valerse del método de depreciación en línea recta, y la máquina se deprecia totalmente después de 10 años. Denotando con V el valor de la máquina en libros y con t su edad, determine la función $V = f(t)$. Suponga que no hay valor de reventa.

4 Una compañía adquiere automóviles para sus ejecutivos. En el presente año el costo de compra es de 15 000 dólares. Las unidades se conservan 3 años, una vez transcurridos los cuales se espera que su valor de reventa sea de \$3600. Si los contadores aplican la depreciación en línea recta, determine la función que describa el valor en libros de V en función de la edad del automóvil t.

5 Un departamento de policía piensa que las tasas de arrestos R son una función del número de oficiales vestidos de civil n que son asignados a la vigilancia. La *tasa de arrestos* se define como el porcentaje de casos en que se han hecho arrestos. Se cree que la relación es lineal y que, con cada oficial más que se asigne a la fuerza policial vestida de civil, aumenta la tasa de arrestos en 0.90%. Si la fuerza actual consta de 20 oficiales y la tasa de arrestos es de 32%,

a) Defina la función $R = f(n)$.
b) Interprete el significado de la intersección con el eje y.

6 Dos puntos sobre una función lineal de demanda son (\$20, 60 000) y (\$30, 47 500).

a) Determine la función de demanda $q = f(p)$.
b) Determine qué precio originará una demanda de 65 000 unidades.
c) Interprete la pendiente de la función.

7 Dos puntos (p, q) sobre la función lineal de la demanda son (\$25, 50 000) y (\$35, 42 500).

a) Determine la función de demanda $q = f(p)$.
b) ¿Qué precio dará por resultado una demanda de 60 000 unidades?
c) Interprete la pendiente de la función.
d) Trace la función.

8 Dos puntos sobre la función lineal de oferta son (\$6.00, 28 000) y (\$7.50, 37 000).

a) Determine la función de oferta $q = f(p)$.
b) ¿Qué precio hará que los proveedores ofrezcan 45 000 unidades?

9 Dos puntos (p, q) sobre la función lineal de oferta son (\$5.50, 45 000) y (\$7.50, 75 000),

a) Determine la función de oferta $q = f(p)$.
b) ¿Qué precio hará que los proveedores ofrezcan 135 000 unidades a la venta?
c) Interprete la pendiente de la función.
d) Interprete la intersección con el eje x.
e) Trace la función.

10 Control de armas de fuego Los índices (tasas) de criminalidad han ido en aumento, por lo cual también el número de pistolas en circulación parece estar creciendo. Según una encuesta de 10 años aplicada a los habitantes de Estados Unidos, se observa un extraordinario incremento lineal en la cantidad de pistolas con el tiempo. En 1970 el número estimado de ellas era de 450 000; en 1980 fue de 580 000. Sea n el número de pistolas que poseen los residentes de la ciudad y sea t el tiempo medido en años desde 1970 ($t = 0$ para 1970).

a) Por medio de dos puntos de datos, determine la función lineal $n = f(t)$.
b) Interprete el significado de la pendiente.
c) Si el número de pistolas sigue aumentando al mismo ritmo, ¿cuándo será mayor que 750 000?

11 Asistencia a los espectáculos deportivos Antes de la huelga de 1981, el béisbol de grandes ligas era uno de los principales deportes en Estados Unidos en cuanto al

número de espectadores.* La asistencia en 1978 fue de 54 881 009 aficionados frente a 53 004 141 en 1977. Si la asistencia ha ido creciendo de modo lineal a partir de 1975,

a) Determine la función $y = f(t)$, donde y es la asistencia anual y t es el tiempo medido en años ($t = 0$ para 1975).
b) Estime la asistencia en 1975.
c) Suponiendo que la huelga no haya tenido un efecto negativo, ¿cuál será en 1990?
d) Comente los factores que podrían influir en el límite superior del rango de esta función con el transcurso del tiempo.

12 Drogadicción El Departamento de Salud de un estado de la Unión Americana estima que el número de los que usan cocaína en él ha ido aumentando en una proporción lineal. El número estimado de drogadictos en 1980 fue de 950 000 y en 1985 fue de 1 025 000.

a) Determine la función $n = f(t)$, donde n representa el número de usuarios y t es el tiempo medido en años ($t = 0$ para 1980), empleando los dos puntos de datos.
b) Interprete el significado de la pendiente.
c) Si el número de drogadictos sigue creciendo de acuerdo con esta función, ¿cuándo llegará a 1 250 000?

13 Pensión alimenticia/mantenimiento de los hijos Las encuestas recientes indican que el pago de pensión alimenticia o del mantenimiento de los hijos tiende a disminuir con el tiempo transcurrido después del divorcio. Una encuesta aplica la función

$$p = f(t) = 92 - 8.5t$$

donde p indica el porcentaje de casos en que los pagos se realizan y t es el tiempo medido en años después de la sentencia de divorcio.

a) Interprete la intersección con el eje p.
b) Interprete la pendiente.
c) ¿En qué porcentaje de casos se sigue pagando la pensión alimenticia o el mantenimiento de los hijos después de 5 años?

14 Lesiones en los deportes Según una encuesta aplicada a jugadores de fútbol americano colegial en Estados Unidos está aumentando el número de lesiones que ponen fin a la carrera de estos deportistas. En 1978 el número de esas lesiones fue de 1025; en 1985 fue de 1235. Si se supone que las lesiones están aumentando en una tasa lineal,

a) Determine la función $n = f(t)$, donde n representa el número de lesiones por año y t indica el tiempo medido en años desde 1978.
b) Interprete el significado de la pendiente de esta función.
c) ¿Cuándo se espera que el número de tales lesiones rebase la marca de 2000?

15 El número de pasajeros de una pequeña aerolínea regional ha ido disminuyendo en la tasa lineal. En 1981 fue de 245 000 y en 1986 fue de 215 000. Si n es el número de pasajeros que viajan en ella por año y t indica el tiempo medido en años ($t = 0$ para 1981),

a) Determine la función líneal $n = f(t)$.
b) Interprete el significado de la pendiente.
c) ¿Cuál es el número de pasajeros que se espera tener en el año 2000?
d) Se estima que la aerolínea quebrará si el número de pasajeros desciende a menos de 180 000. De acuerdo con la función de la parte (*a*), ¿cuándo ocurrirá eso?

---

*De modo sorprendente, las carreras de caballos son el deporte que tiene mayor número de espectadores por amplia margen.

16 Probabilidades de contraer matrimonio Los datos publicados por el Census Bureau en 1986 indicaron la probabilidad de que una soltera se casara. Conforme a esa información, cuanto mayor sea la mujer, menos probabilidades tiene de casarse. En concreto, dos estadísticas revelaron que las que tenían 45 años de edad y siempre habían sido solteras tenían 18% de probabilidades de contraer matrimonio y las de 25 años tenían 78% de probabilidades de casarse. Supóngase que una función lineal adecuada a estos dos puntos de datos ofrece una buena aproximación de la función $p = f(a)$, *donde p denota la probabilidad de matrimonio* y *a representa la edad de la mujer que nunca se ha casado.*

a) Determine la función lineal $p = f(a)$.
b) Interprete la pendiente y la intersección con el eje p.
c) ¿Parecen razonables los valores de la parte (*b*)?
d) Si el dominio restringido de esta función es $20 \leq a \leq 50$, determine $f(20)$, $f(40)$ y $f(50)$.

3.3 MODELOS DE EQUILIBRIO

En la presente sección, se explicarán los ***modelos de equilibrio***, conjunto de herramientas de planeación que pueden ser, y han sido, muy útiles en la dirección de las organizaciones. Una importante indicación del desempeño de una compañía se refleja en último renglón del estado de ingresos y gastos; es decir, el monto de la utilidad ganada. El análisis del punto de equilibrio se centra en la rentabilidad de una empresa. Uno de sus puntos principales consiste en encontrar el nivel de operación o de producción que dé por resultado una utilidad cero. A ese nivel se le da el nombre de ***punto de equilibrio***. Es un punto muy útil de referencia, ya que representa el nivel de operación en que los ingresos totales son iguales a los costos totales. Cualquier cambio en este nivel producirá una utilidad o una pérdida.

El análisis del equilibrio es útil sobre todo como un instrumento de planeación cuando las firmas estudian futuras expansiones; por ejemplo, ofrecer nuevos productos o servicios. De manera semejante, ayuda a evaluar el pro y el contra de emprender un nuevo negocio. En todos los casos el análisis permite efectuar una proyección de la rentabilidad.

Suposiciones

En este apartado nos concentramos en situaciones donde tanto las funciones del costo total como la del ingreso total son lineales. El uso de la primera implica que los costos variables por unidad son constantes o puede suponerse que lo son. La función lineal de costo supone que los costos variables totales dependen del nivel de operación o producción. También supone que la parte del costo fijo de la función de costo es constante en el nivel de operación o producción que está considerándose.

La función lineal de ingreso total supone que el precio de venta por unidad es constante. Cuando no lo es, el precio promedio se escoge algunas veces con el propósito de efectuar el análisis.

Otra suposición consiste en que el precio por unidad es mayor que el costo variable por unidad. Reflexiónese un momento en esto. Si el precio por unidad

es menor que el costo variable por unidad, una firma perderá dinero en todas las unidades que produzca y venda. Nunca podría existir una condición de equilibrio.

Análisis del equilibrio

En este análisis el objetivo primario es determinar el punto de equilibrio. Este punto puede expresarse en función de (1) *volumen de producción* (o nivel de actividad), (2) *ventas totales en dólares* o quizá (3) *porcentaje de capacidad de producción.* Por ejemplo, podría afirmarse que una empresa alcanzará su punto de equilibrio en 100 000 unidades de producción, cuando el total de sus ventas sea de 2.5 millones de dólares o cuando opere a 60% de la capacidad de su planta. Nos centraremos en la primera de estas tres formas, aunque en ocasiones convenga expresar un punto de equilibrio en otra forma.

Los métodos de realizar ese análisis son bastante sencillos, además se dispone de otros métodos de calcularlo. He aquí el método habitual:

1 Se formula el costo total en función de x, o sea el nivel de producción.
2 Se formula el ingreso total en función de x.
3 Se supone que $C(x)$ es igual a $R(x)$ y se despeja x. El valor resultante de x es el nivel de equilibrio de la producción y podría denotarse con x_{NE}.

Otra forma de realizar el paso 3 consiste en construir la función de utilidad $P(x) = R(x) - C(x)$, hacer $P(x)$ igual a cero y despejar x_{NE}.

En el siguiente ejemplo se explican ambos métodos.

EJEMPLO 12

Un grupo de ingenieros quiere formar una compañía para producir detectores de humo. Han ideado un diseño y estiman que los costos variables por unidad, incluyendo material, mano de obra y costos de mercadotecnia, son de 22.50 dólares. Los costos fijos relacionados con la formación, operación y dirección de la compañía y la compra de equipo y maquinaria dan en total $250 000. Estiman que el precio de venta será de $30 por detector.

a) Determine el número de detectores de humo que han de venderse para que la empresa alcance el equilibrio en el negocio.

b) Los datos preliminares de mercadotecnia indican que la empresa venderá aproximadamente 30 000 detectores de humo a lo largo de la vida del proyecto, si les pone un precio de $30 cada uno. Determine las utilidades esperadas en este nivel de producción.

SOLUCIÓN

(*a*) La función de ingreso total se representa por medio de la ecuación

$$R(x) = 30x$$

La función de costo total se representa con la ecuación

$$C(x) = 22.50x + 250\,000$$

La condición de equilibrio se presenta cuando el ingreso total es igual al costo total o cuando

$$\boxed{R(x) = C(x)} \tag{3.10}$$

En este problema el punto de equilibrio se calcula así:

$$30x = 22.50x + 250\,000$$

o

$$7.50x = 250\,000$$

y

$$x_{NE} = 33\,333.33 \text{ unidades}$$

El otro método consiste en escribir primero la función de utilidad y hacerla igual a 0 como sigue:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 30x - (22.50x + 250\,000) \\ &= 7.50x - 250\,000 \end{aligned}$$

Suponiendo que la función de utilidad p es igual a 0, se tiene

$$7.50x - 250\,000 = 0$$

$$7.50x = 250\,000$$

o bien

$$x_{NE} = 33\,333.33 \text{ unidades}$$

Éste es el mismo resultado que el anterior, y la conclusión es que, con los *parámetros (valores) supuestos de costo y precio*, la empresa necesita vender 33 333.33 unidades a fin de alcanzar el equilibrio.

EJERCICIO
Verifique si los ingresos totales y costos totales ascienden a $1 000 000 (teniendo en cuenta el redondeo) en el punto de equilibrio.

b) Cuando se proyecta una venta de 30000 detectores de humo,

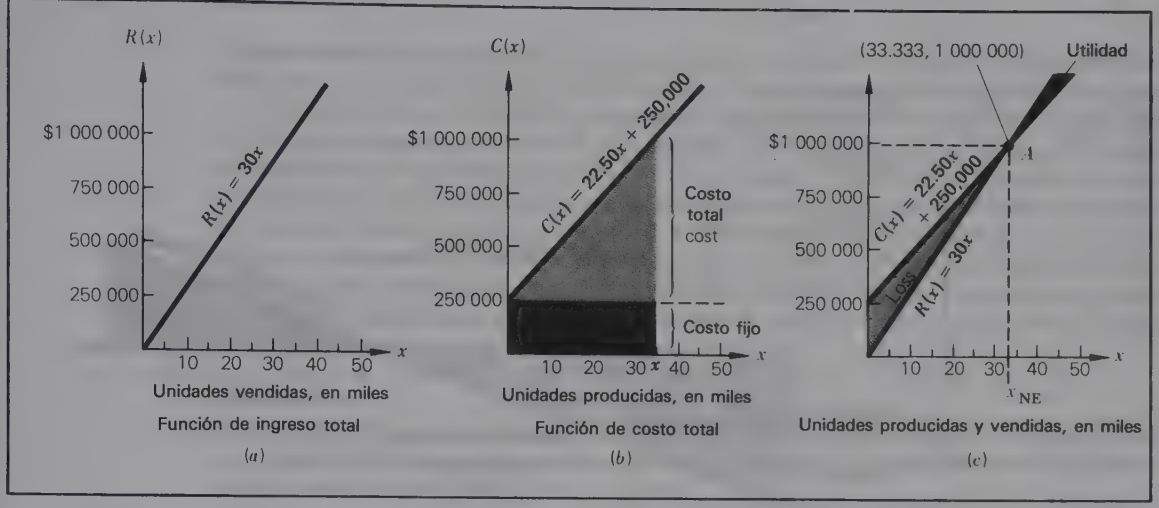
$$\begin{aligned} P(30\,000) &= 7.5(30\,000) - 250\,000 \\ &= 225\,000 - 250\,000 = -25\,000 \end{aligned}$$

Esta ecuación sugiere que, si se cumplen las estimaciones (de precio, costo y demanda), la empresa esperará perder $25 000 en el negocio.

EJEMPLO 13

Método gráfico La esencia del análisis de equilibrio se explica muy bien en el análisis gráfico. En la figura 3.9*a* se describe la función de ingreso total, en la figura 3.9*b* la función de costo total y en la figura 3.9*c* una gráfica compuesta que muestra ambas funciones para el ejemplo 12. Nótese que en la figura 3.9*b* el componente de costo fijo se distingue del componente de costo variable. En *cualquier* nivel de producción x, la

FIGURA 3.9



distancia vertical dentro del área sombreada indica el costo fijo de $250 000.00 A esto se le suma el costo variable total, representado por la distancia vertical x dentro del área menos densa. La suma de esas dos distancias verticales representa el costo total $C(x)$.

En la figura 3.9*c* las dos funciones se grafican en el mismo conjunto de ejes. El punto donde las dos funciones se intersecan representa el nivel de producción donde el ingreso total y el costo total son iguales. Éste es el punto de equilibrio. Para todos los puntos situados a la izquierda del punto de equilibrio, la función de costo C tiene un valor menor que la función de ingreso R. En esta región la distancia vertical que separa las dos funciones representa la pérdida que ocurriría en determinado nivel de producción. A la derecha de $x = 33.333$, $R(x)$ es mayor que $C(x)$, o sea $R(x) > C(x)$. Para niveles de producción mayores que $x = 33.333$, la distancia vertical que separa $R(x)$ y $C(x)$ representa la utilidad en determinado nivel de producción.

La figura 3.10 muestra la función de utilidad P en este ejemplo. El punto de equilibrio se identifica por medio de la coordenada x de la intersección con el eje x. Nótese que, a la izquierda del punto de equilibrio, la función de utilidad se halla debajo del eje x, lo cual indica una utilidad negativa o sea una pérdida. A la derecha, $P(x)$ se encuentra arriba del eje x, lo cual denota una utilidad positiva.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
Explique los cambios en la figura 3.10 y el punto de equilibrio, si (a) aumenta (disminuye), (b) aumenta (disminuye) el costo fijo y (c) aumenta (disminuye) el costo variable por unidad.

Otra manera de considerar el análisis del equilibrio consiste en enfocarlo en términos de la ***contribución a la utilidad***. Mientras el precio por unidad p rebase el costo variable por unidad v, la venta de cada unidad da por resultado una contribución a la utilidad. La diferencia entre p y v recibe el nombre de ***margen de utilidad*** o, expresado en forma de ecuación,

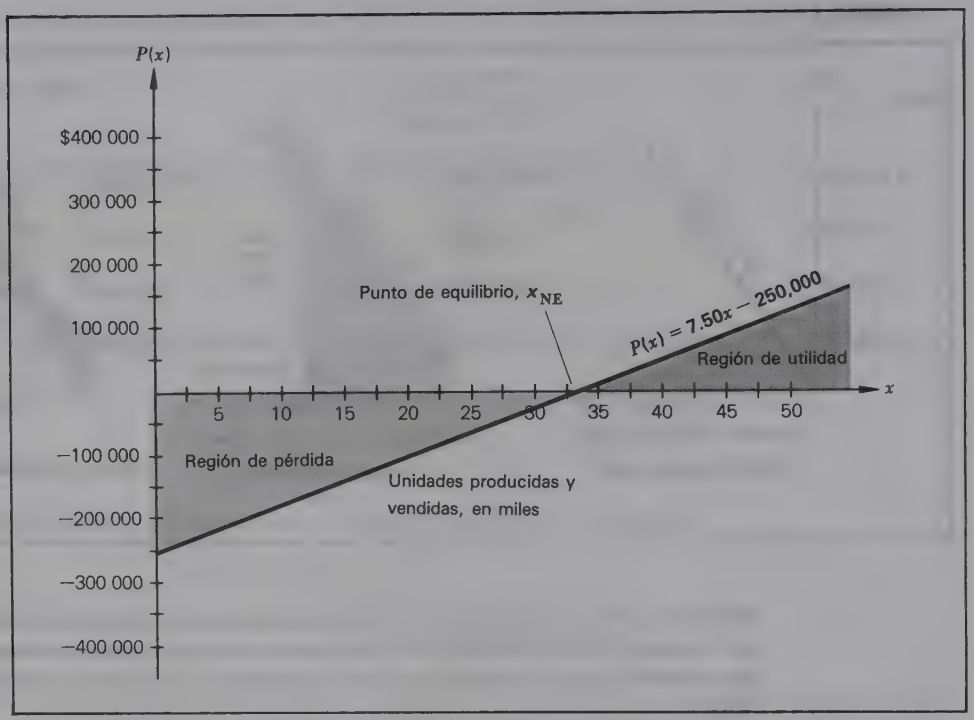


FIGURA 3.10 Función de utilidad.

$$\text{Margen de utilidad} = p - v \qquad p > v$$

El margen de utilidad generado con la venta de unidades ha de asignarse primero a la recuperación de los costos fijos que existan. En niveles más bajos de producción, la ***contribución total a la utilidad*** (margen de utilidad para todas las unidades vendidas) suele ser menor que los costos fijos, lo cual significa que la utilidad total es negativa (Fig. 3.10). Sólo cuando la contribución *total* a la utilidad sea mayor que el costo fijo, habrá una utilidad positiva. A causa de esta orientación (el margen de utilidad por unidad contribuye primero a la recuperación de los costos fijos, aumentando después la utilidad), al margen de utilidad se le llama ***contribución al costo fijo y a la utilidad***.

En esta perspectiva, el cálculo del punto de equilibrio puede considerarse como consistente en determinar el número de unidades que es preciso producir y vender a fin de recuperar los costos fijos. Así pues, el cálculo del punto de equilibrio es

$$\text{Nivel de equilibrio de la producción} = \frac{\text{costo fijo}}{\text{costo fijo y utilidad}}$$

o bien

$$x_{NE} = \frac{FC}{p - v} \qquad \textbf{(3.11)}$$

EJEMPLO 14

Planeación de convenciones Una organización profesional está planeando su convención anual que se celebrará en San Francisco. Están haciéndose arreglos con un gran hotel donde se llevará a cabo la convención. Los participantes en ese evento de 3 días de duración pagarán 250 dólares por persona, cantidad en que se incluyen la cuota de inscripción, la estancia, las comidas y las propinas. El hotel cobra a la organización $20 000 por el uso de las instalaciones como salas de reunión, pista de baile y servicios recreativos. Además, el hotel cobra $145 a cada huésped por concepto de estancia, comidas y propinas. La organización profesional se reserva $25 de la cuota de $250 como cuotas anuales que depositará en la tesorería de la oficina central. Determine el número de participantes que se necesita para que la organización cubra el costo fijo de $20 000.

SOLUCIÓN

La contribución al costo fijo y a la utilidad es la cuota (precio) de inscripción por persona, menos el costo que cobra el hotel por persona, menos la participación de la organización nacional por participante, o bien

$$\text{Contribución por participante} = \text{cuota de inscripción} - \frac{\text{costo de hotel}}{\text{por persona}} - \text{cuotas anuales}$$
$$= 250 - 145 - 25 = \$80$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación (3.11), el número de participantes que se requieren para cubrir el costo fijo es

$$x_{\text{NE}} = \frac{20\,000}{80} = 250 \text{ personas}$$

EJEMPLO 15

Decisión sobre la compra de computadora o la contratación de una empresa de servicio computacionales Un numeroso grupo médico se compone de 30 médicos de tiempo completo. En el momento actual, los empleados preparan manualmente las facturas de los pacientes. Debido al enorme volumen de facturas, el gerente administrativo piensa que ha llegado el momento de hacer la transición de la facturación manual a la computarizada. Están estudiándose dos opciones: (1) el grupo médico puede alquilar la computadora y los programas y hacer él mismo la facturación (la opción *de hacer*) o (2) puede contratar a una empresa de servicios computacionales que se encargue de efectuar la facturación (la opción *de comprar*).

Los costos de una y otra alternativas dependen de la cantidad de facturas. La oferta más baja presentada por una empresa de servicios computacionales originará una cuota de 3000 dólares anuales más $0.95 por factura procesada. Con ayuda de un experto en computación, el gerente administrativo estimó que el grupo puede rentar un pequeño sistema de cómputo para negocios, junto con los programas necesarios, a un costo de $15 000 por año. Se estiman en $0.65 por factura los costos variables de realizar la facturación de este modo.

Si x representa el número de facturas de pacientes al año, el costo de la facturación anual usando los servicios de este tipo de empresa está representado por la función

$$S(x) = 3\,000 + 0.95x$$

El costo anual de alquilar un sistema de cómputo y los programas (software) se expresa por medio de la función

$$L(x) = 15\,000 + 0.65x$$

Estas dos opciones cuestan lo mismo cuando

$$S(x) = L(x)$$

o bien

$$\begin{aligned} 3\,000 + 0.95x &= 15\,000 + 0.65x \\ 0.30x &= 12\,000 \\ x &= 40\,000 \end{aligned}$$

Por tanto, si el número esperado de facturas de pacientes por año rebasa las 40 000, la opción de alquilar es más barata. si se espera que el número de facturas sea menor que 40 000, la opción de contratar los servicios de una empresa de computación cuesta menos. La figura 3.11 muestra las dos funciones de costo.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
Suponga que, según las previsiones, el volumen de facturas de pacientes será de 35 000 al año. ¿Qué razones en favor de la opción de alquilar podría el lector presentar al gerente administrativo? Explique las posibles ventajas y desventajas que no sean cuantificables en las opciones de *alquilar* y de *contratar una empresa de servicios computacionales*.

EJEMPLO 16

Reconsideración de las facturas de los pacientes: tres opciones Supóngase en el último ejemplo que el gerente administrativo no está convencido de que el procesamiento por computadora sea el medio más económico de preparar las facturas. Estima que procesarlas manualmente cuesta al grupo médico $1.25 por factura, es decir,

$$M(x) = 1.25x$$

Si este método se considera como una tercera opción, examine sus implicaciones. Las tres funciones de costo se grafican en la figura 3.12. Si el lector la estudia detenidamente, llegará a las siguientes conclusiones:

1 La opción más barata en cualquier nivel de facturas de los pacientes está indicada por los segmentos de línea gruesa.
2 Si se prevé que el número de facturas de los pacientes por año no llegará a 10 000, el sistema manual es el menos costoso.
3 Si se espera que el número de facturas de los pacientes fluctúe entre 10 000 y 40 000, la opción de recurrir a una empresa de servicios computacionales es la más barata.
4 Si se prevé que el número de facturas rebase las 40 000, la opción de alquilar es la menos costosa.

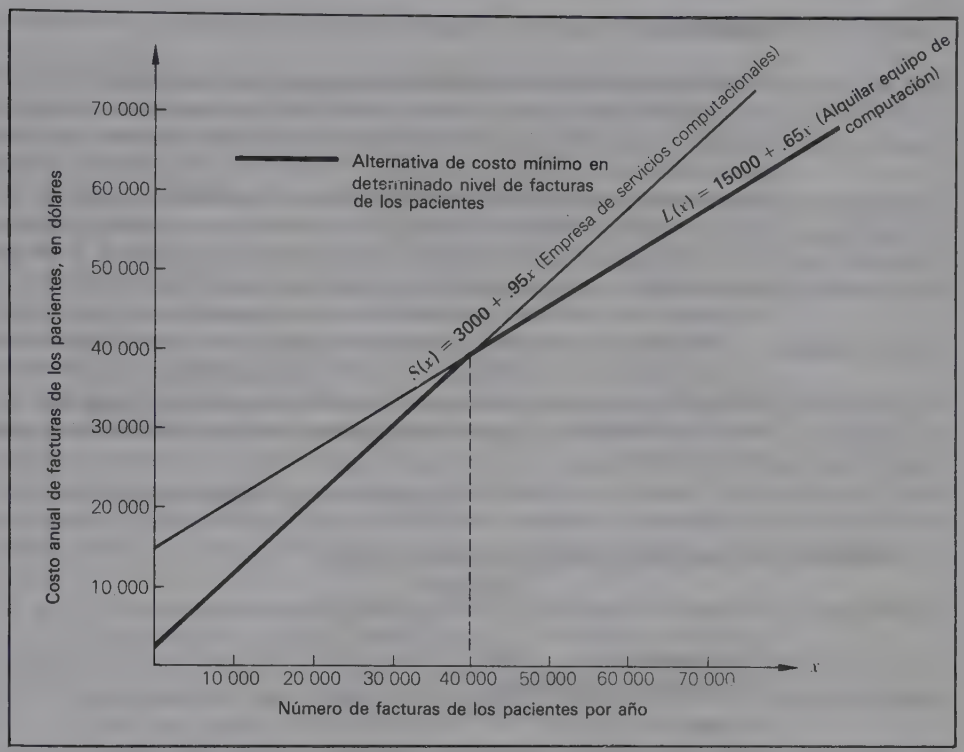


FIGURA 3.11
Funciones de costo de facturas de los pacientes.

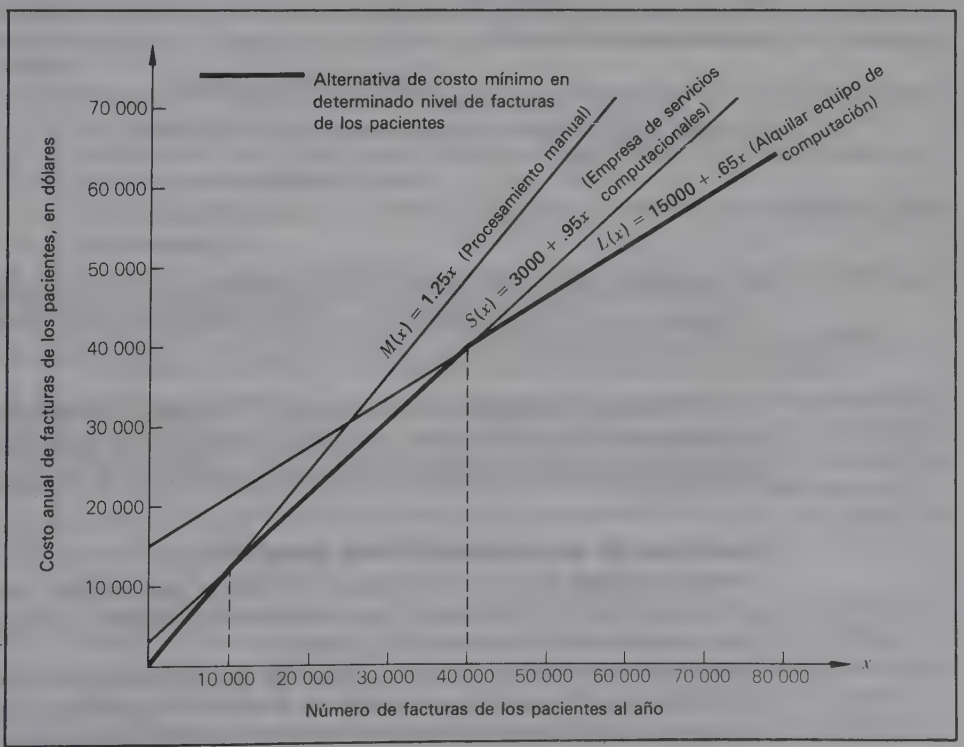


FIGURA 3.12
Funciones de costo de facturas de los pacientes.

EJEMPLO 17

Análisis de productos múltiples En la presente sección la explicación se ha limitado a situaciones de un solo producto/servicio. En situaciones de productos múltiples, el análisis de equilibrio se efectuará cuando se conozca una *mezcla de productos*. Ésta expresa la razón de los niveles de producción para diversos artículos. Por ejemplo, una firma que tenga tres productos podría fabricar 3 unidades del producto *A* y 2 del producto *B* por cada unidad del producto *C*. En este caso, podría definirse que la *unidad 1 de la mezcla de productos* consta de 3 unidades del producto *A*, 2 del producto *B* y 1 del producto *C*. Si una unidad de la mezcla de productos es definible, puede efectuarse el análisis de equilibrio empleándola como la medida de la producción.

Supóngase que esos tres productos poseen las especificaciones de precio y costo que aparecen en la tabla 3.2 El costo fijo combinado de los tres productos es de $240 000. *La unidad 1 de la mezcla de productos* consta de 3 unidades de *A*, 2 unidades de *B* y 1 unidad de *C*, por lo cual *la contribución a la utilidad por unidad de la mezcla de productos será*

$$3(\$10) + 2(\$9) + 1(\$12) = \$60$$

TABLA 3.2

	Producto		
	A	**B**	**C**
Precio/unidad	$40	$30	$55
Costovariable/unidad	30	21	43
Margen de utilidad	$10	$ 9	$12

Si con x se denota el número de unidades de la mezcla de productos, la función de utilidad para los tres productos será

$$P(x) = 60x - 240{,}000$$

El punto de equilibrio se logra cuando $P(x) = 0$, o bien

$$\begin{aligned} 60x - 240{,}000 &= 0 \\ 60x &= 240{,}000 \\ x &= 4{,}000 \end{aligned}$$

La compañía alcanzará el equilibrio cuando fabrique 4000 unidades de la mezcla de productos, o sea 12 000 unidades de *A*, 8000 unidades de *B* y 4000 unidades de *C*.

El análisis presentado en el ejemplo 17 supone que se conoce una mezcla de productos. Si no se conoce con exactitud pero es posible aproximarla, el análisis conservará su utilidad como instrumento o medio de planeación.

Ejercicios de seguimiento de la sección 3.3

1 Una empresa vende un producto a 25 dólares por unidad. Los costos variables por unidad son $13 y los costos fijos ascienden a $150 000. ¿Cuántas unidades hay que vender a fin de alcanzar el equilibrio?

2 Un universitario con mucha iniciativa ha decidido comprar un negocio de lavado de automóviles. El costo de compra es de $30 000. El precio de lavado será de $3.50 y se espera que el costo variable por automóvil (jabón, agua, mano de obra y otros)

sea de $1.00. ¿Cuántos automóviles deben lavarse para recuperar los $30 000 del precio de compra?

3 Una institución de caridad está planeando una rifa para recaudar 10 000 dólares. Venderá 500 boletos para la rifa de un nuevo automóvil. Este le costará $12 000. ¿Cuánto deberá costar cada boleto si la organización desea obtener una utilidad neta de $10 000?

4 Decisión de fabricar o de comprar Suponga que un fabricante puede comprar un componente a un proveedor a un precio de $8 por unidad o bien puede invertir $40 000 en equipo y producir ese componente con un costo de $5.50 por unidad.

a) Determine la cantidad en que los costos totales son iguales para las alternativas de *fabricar* y *comprar*.

b) ¿Cuál es la alternativa de costo mínimo si se requieren 15 000 unidades? ¿Cuál es el costo mínimo?

5 Campaña publicitaria Una firma está diseñando una campaña de publicidad por televisión. Los costos de desarrollo (costos fijos) son 150 000 dólares y la firma pagará $15 000 por minuto en cada spot de televisión. La firma estima que, por cada minuto de publicidad, se obtendrá un aumento de $70 000 en las ventas. De esa cifra, $47 500 se absorben para cubrir el costo variable de producir los artículos y $15 000 sirven para pagar el minuto de publicidad. El resto es la contribución al costo fijo y a la utilidad.

(*a*) ¿Cuántos minutos de publicidad se necesitan para recuperar los costos de desarrollo de la campaña publicitaria?

(*b*) Si la compañía se sirve de 15 spots de 1 minuto de duración, determine el ingreso total, los costos totales (producción y publicidad) y la utilidad (o pérdida) total que resultan de la campaña.

6 Un estadio cívico está negociando un contrato con una compañía ambulante de patinaje sobre hielo. Esta compañía cobra $60 000 por noche más 40% de la recaudación de taquilla. El estadio cívico planea cobrar $12.50 por boleto para cualquier asiento.

a) Determine el número de boletos que deben venderse cada noche a fin de alcanzar el equilibrio.

b) Si el estadio cívico tiene la meta de recaudar $15 000 cada noche, ¿cuántos boletos necesita vender?

c) ¿Cuál será la utilidad por noche si la asistencia promedio por noche es de 7500 espectadores?

7 En el ejercicio anterior, suponga que la experiencia con este espectáculo indica que la asistencia promedio será de 7500 personas.

a) ¿Qué precio por boleto permitirá al estadio cívico alcanzar el equilibrio?

b) ¿Qué precio por boleto le permitirá ganar una utilidad de $15 000?

8 Renta de automóviles Una agencia de renta de automóviles compra unidades nuevas cada año para alquilarlos. Los automóviles nuevos cuestan 12 000 dólares. Se emplean durante 3 años, y transcurrido ese lapso se venden a $3600 cada uno. El dueño de la agencia estima que los costos variables de operar los automóviles, sin incluir la gasolina, son de $0.25 por milla. Los automóviles se rentan a una tarifa de $0.40 por milla (sin incluir la gasolina).

a) ¿Cuál es el recorrido de equilibrio en un periodo de 3 años?

b) ¿Cuáles son los ingresos, costos y utilidades totales durante un periodo de 3 años si un automóvil se renta para un recorrido global de 50 000 millas?

c) ¿Qué precio por milla debe cobrarse a fin de alcanzar el equilibrio si un automóvil se renta para un recorrido global de 50 000 milllas durante 3 años?

d) ¿Qué precio por milla necesita cobrarse para obtener una utilidad de $2000 por

automóvil durante su vida útil de 3 años, si se renta para un recorrido global de 50 000 millas?

9 Desarrollo de programas de computadora Una empresa tiene una computadora que utiliza para varios fines.Uno de los principales costos de la computadora es el desarrollo de software (escribir los programas de computadora). El vicepresidente de sistemas de información desea evaluar si es menos costoso tener a su propio personal de programación o hacer que los programas los prepare una compañía dedicada a esta actividad. Estima que los costos de la escritura de programas en la empresa serán de $1.25 por línea de código. Además, los costos anuales indirectos del apoyo a los programadores ascienden a $15 000. El software preparado fuera de la empresa cuestan, en promedio, $2 por línea de código.

a) ¿Cuántas líneas de código por año hacen iguales los costos de las dos opciones?

b) Si las necesidades de programación se estiman en 30 000 líneas por año, ¿Cuáles son los costos de ambas opciones?

c) En la parte (*b*), ¿cuál deberá ser el costo por línea de código de los programas en la empresa para que las dos opciones cuesten lo mismo?

10 Análisis de sensibilidad Como los parámetros (constantes) utilizados en los modelos matemáticos son a menudo estimaciones, los resultados reales pueden diferir de los proyectados mediante el análisis matemático. Los analistas suelen efectuar un *análisis de sensibilidad* para tener en cuenta algunas de las incertidumbres que puede haber. El objetivo es valorar cuánto podría variar una solución si existen cambios en los parámetros del modelo.

Suponga en el último ejercicio que los costos del desarrollo de software por empresas externas podrían fluctuar en ±20% respecto a la estimación de $2 por línea de código.

a) Calcule de nuevo el punto de equilibrio si los costos son 20% más altos o más bajos y compare su resultado con la respuesta original.

b) Además de la incertidumbre en la parte (*a*), los costos variables del desarrollo de programas en la empresa podrían incrementarse hasta en 30% debido a un nuevo contrato con el sindicato. Calcule los efectos combinados de estas incertidumbres.

11 Una empresa de equipo electrónico de alta tecnología necesita un microprocesador especial para emplearlo en una microcomputadora que fabrica. Se han descubierto tres opciones para satisfacer sus necesidaes. Puede adquirir los microprocesadores a un proveedor por un precio de $10 cada uno. También puede comprar dos equipos automatizados y fabricar los microprocesadores. Un equipo cuesta $80 000 y tendrá costos variables de $8 por microprocesador. Un equipo más automatizado tiene un precio de $120 000 y generará costos variables de $5 por unidad. Determine las opciones de costo mínimo para varios niveles de producción (como se calcularon en el ejemplo 16).

12 Un nuevo competidor en el mercado de "pantalones de mezclilla de alta costura" es Fraçoise Strauss, primo de un tataranieto de Levi Strauss. Este modisto planea vender tres estilos de pantalones. La tabla adjunta resume los datos referentes al precio y al costo.

	Estilo		
	A	**B**	**C**
Precio de venta	$45	$36	$28
Costo variable/par	19	17	14

Los costos fijos combinados ascienden a $7.5 millones. Un estudio de investigación de mercados proyecta una mezcla de productos tal que, con cada par de estilo *A*, se vendan dos pares del estilo *B* y cuatro del estilo *C*. ¿Cuántos pares han de venderse de cada estilo para alcanzar el equilibrio?

13 Una compañía está estudiando la compra de un equipo que utilizará en la elaboración de un nuevo producto. Está analizando tres máquinas. La máquina 1 tiene un precio de 100 000 dólares, y el costo variable de la fabricación de cada nuevo producto se estima en $25. La máquina 2 cuesta $150 000, con un costo variable de producción de $22.50. La máquina 3 tiene un precio de $180 000 y un costo variable de $21. Determine los niveles de producción en que cada máquina será la alternativa de menor costo. Trace sobre una gráfica las tres funciones de costo.

14 Una compañía planea fabricar y vender tres productos. La tabla anexa sintetiza los datos de precio y costo de los tres productos.

	Producto		
	1	2	3
Precio de venta	$75	$60	$83
Costo variable/unidad	50	40	67

Según las estimaciones hechas por los funcionarios de la compañía, los tres productos se venderán en una mezcla tal que 3 unidades del producto 2 y 5 del producto 3 se venderán por cada 2 que se vendan del producto 1. Si los costos fijos se calculan en $3.7 millones, determine el número de unidades que hay que vender de cada producto para alcanzar el equilibrio.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

contribución al costo fijo y a la utilidad 106
costo 87
costo fijo 87
costo variable 87
depreciación (en línea recta) 94
economías de escala 87
función de demanda 96
función lineal 86
función de oferta 98
ingresos 89
margen de utilidad (contribución) 105
modelos de equilibrio 102
punto de equilibrio 102
utilidad 90
valor de reventa o salvamento 95

■ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$y = f(x) = ax + b \tag{3.1}$$

$$y = f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b \tag{3.2}$$

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b \tag{3.3}$$

$$P(x) = R(x) - C(x) \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned} R(x) &= C(x) \\ x_{NE} &= \frac{FC}{p - v} \end{aligned}\right\} \quad \text{Condiciones de equilibrio} \tag{3.10, 3.11}$$

EJERCICIOS ADICIONALES

Los siguientes ejercicios se relacionan con las secciones (3.1) a (3.3).

1 Una empresa vende un producto a \$80 por unidad. Los costos de materias primas son de \$12.50 por unidad, los costos de mano de obra son de \$17.50 por unidad y los costos fijos anuales ascienden a \$250 000.

a) Determine la función de utilidad $P(x)$, donde x es el número de unidades vendidas.

b) ¿Cuantas unidades habrá que vender para obtener una utilidad anual de \$250 000?

2 Una compañía fabrica tres productos que se venden, respectivamente, en \$25, \$35 y \$50. Los requerimientos de mano de obra para cada uno son, respectivamante, 3.0, 4.0 y 3.5 horas por unidad. Suponga que los costos de mano de obra son de \$5 por hora y que los costos anuales fijos ascienden a \$75 000.

a) Construya una función conjunta de ingresos totales para la venta de los tres productos.

b) Determine la función del costo total anual para la elaboración de los tres productos.

c) Determine la función de utilidad para los tres productos. ¿Observa algo raro en esta función?

d) ¿Cuál es la utilidad anual si de los tres productos se venden, respectivamente, 20 000, 10 000 y 30 000 unidades?

3 El municipio de una ciudad compró una nueva máquina para asfaltar a un precio de \$250 000. El contralor municipal declara que la máquina será depreciada aplicando un método de línea recta. Al cabo de 8 años, se venderá con un valor esperado de salvamento de \$50 000.

a) Determine la función $V = f(t)$, que expresa el valor en libros de la máquina V en función de su edad t.

b) ¿Cuál será el valor en libros cuando la máquina tenga 6 años de edad?

4 La natalidad de una región ha ido disminuyendo linealmente en los últimos años. En 1975 fue de 36.4 nacimientos por cada 1000 habitantes. En 1980 fue de 34.6 por cada 1000 personas. Suponga que R denote la natalidad por cada 1000 y t represente el tiempo medido en años desde 1975 ($t = 0$ en 1975).

a) Determine la función lineal de natalidad $R = f(t)$.

b) Interprete el significado de la pendiente.

c) Si el patrón lineal se mantiene igual, ¿cuál será la natalidad esperada en 1990?

d) ¿Cuál es el dominio restringido de esta función?

5 Dos puntos (p, q) sobre una función lineal de demanda son (\$4.50, 75 000) y (\$4.75, 62 000).

a) Determine la función de demanda $q = f(p)$.

b) ¿Cuál precio provocará una demanda de 90 000 unidades?

c) Determine la intersección con el eje y e interprete su significado.

d) Determine la intersección con el eje x e interprete su significado.

6 Dos puntos (p, q) sobre una función lineal de oferta son (\$10, 450 000) y (13 600 000).

a) Determine la función de oferta $q = f(p)$.

b) ¿Qué precio hará que los proveedores ofrezcan 750 000 unidades a la venta?

c) Interprete la pendiente de la función de oferta.

d) ¿Cuál es la intersección con el eje x? Interprete el significado de este punto.

7 Alcoholismo Desde 1970 ha habido un incremento aparentemente lineal en el porcentaje de la población de alcohólicos en una ciudad europea. En 1970 el porcentaje fue de 10.5%. En 1980 se elevó a 12.9%. Si p es el porcentaje de alcohólicos en la población y t representa el tiempo en años desde 1970 ($t = 0$ en 1970),

a) Determine la función lineal de crecimiento $p = f(t)$.

b) Interprete el significado de la pendiente.
c) Si el patrón de crecimiento sigue mostrando la misma tendencia, pronostique el porcentaje de alcohólicos que se prevé para 1990. ¿Y cuál es el pronóstico para el año 2000?

8 Popularidad de la organización para la conservación de la salud Una organización de este tipo presta servicios médicos a los individuos y las familias mediante una especie de seguro. Por lo regular el suscriptor paga una prima de seguro y así adquiere el derecho a recibir la mayor parte de los servicios médicos. En esas organizaciones se da prioridad a las medidas preventivas, y los suscriptores generalmente no pagan las visitas en el consultorio. Según los resultados de una encuesta, este tipo de plan de seguro está siendo elegido cada vez por más personas. En 1980 había 24 millones de individuos cubiertos por esta clase de planes. En 1985 el número fue de 28.4 millones. Si se supone que el crecimiento está ocurriendo a una tasa lineal,

a) Determine la función $n = f(t)$, donde n denota el número de individuos cubiertos por los planes de estas organizaciones y t indica el tiempo medido en años ($t = 0$ en 1980).
b) ¿Cuál es el número de individuos cubiertos por los seguros de las organizaciones de la conservación de la salud que, según las previsiones, habrá en el año 2000?

9 Parece que está disminuyendo el número de computadoras personales vendidas cada año. En 1983, el número de unidades vendidas fue de 2.6 millones. En 1986 el número de unidades había disminuido a 1.85 millones. Si se supone que la tendencia es lineal,

a) Determine la función lineal $s = f(t)$, donde s representa el número de unidades vendidas por año y t indica el tiempo medido en años ($t = 0$ en 1983).
b) De acuerdo con la función obtenida en la parte (*a*), ¿en qué año habrá cero ventas? ¿Cree que la función sea importante para ese momento?

10 Un editor tiene un costo fijo de \$250 000 en la producción de un libro de matemáticas para nivel universitario. La contribución a la utilidad y al costo fijo en la venta de cada libro es de \$6.25.

a) Determine el número de libros que hay que vender a fin de alcanzar el equilibrio.
b) ¿Cuál es la utilidad neta esperada si se venden 50 000 libros?

11 Un equipo de fútbol americano colegial agregó un partido más al programa de partidos de la temporada. El otro equipo aceptó jugarlo por un pago garantizado de 100 000 dólares más 25% de la taquilla. Suponga que el precio del boleto es de \$12.

a) Determine el número de boletos que deben venderse para recuperar los \$100 000 de la garantía.
b) Si los funcionarios de la universidad esperan una utilidad neta de \$240 000 del partido, ¿cuántos boletos deben vender?
c) Si está asegurada una asistencia de 50 000 aficionados, ¿qué precio del boleto permitirá a la universidad ganar la utilidad deseada de \$240 000?
d) Suponiendo de nuevo un lleno completo de 50 000 espectadores, ¿cuál será la utilidad total si se cobra a \$12 la entrada?

12 Selección de equipo Una empresa tiene dos alternativas de equipo en la fabricación de un nuevo producto. Un equipo automatizado cuesta \$200 000 y produce artículos a un costo de 4 dólares por unidad. Otro equipo semiautomatizado cuesta \$125 000 y produce artículos a un costo de \$5.25 por unidad.

a) ¿Qué volumen de producción hace que ambos equipos cuesten lo mismo?
b) Si hay que producir 80 000 unidades, ¿qué equipo será más barato? ¿Cuál es el costo mínimo?

13 Robótica Un fabricante quiere introducir la tecnología de la robótica en uno de sus procesos de producción. El proceso creará un "ambiente hostil" para los hombres.

En concreto, requiere exponerse a temperaturas muy altas y a emanaciones potencialmente tóxicas. Se han identificado dos robots que parecen tener la capacidad para ejecutar las funciones del proceso de producción. Al parecer no hay importantes diferencias en la velocidad a que ambos trabajan. Un robot cuesta $180 000 y tiene costos estimados de mantenimiento de $100 por hora de operación. El segundo modelo cuesta $250 000 con costos de mantenimiento estimados en $80 por hora de operación.

a) ¿A qué nivel de operación (horas totales de producción) costarán lo mismo los dos robots? ¿Y cuál es el costo asociado?

b) Defina los niveles de operación en que cada robot será el menos caro?

14 Juegos de video (electrónicos) Uno de los principales fabricantes de juegos electrónicos está a punto de lanzar al mercado cuatro nuevos juegos. En la tabla anexa se resumen los datos concernientes al precio y al costo. Los costos fijos combinados son de $500 000.

	Juego			
	PacPerson	**Astervoids**	**Haley's Comet**	**Black Hole**
Precio de venta	$50	$45	$30	$20
Costo variable/unidad	20	15	10	10

Un estudio de investigación de mercado predice que, por cada unidad vendida de Black Hole, se venderán 1.5 unidades de Haley's Comet, 3 de Astervoids y 4 de PacPerson.

(*a*) ¿Cuántas unidades de mezcla de productos han de venderse para conseguir el equilibrio?

(*b*) ¿Cómo se traduce esto en las ventas de los juegos individuales?

15 Una compañía fabrica tres productos que se venden a una razón de 4 unidades del producto 2 y 2 unidades del producto 3 por cada unidad del producto 1 que se venda. La siguiente tabla sintetiza los datos de precio y costo de los tres productos.

	Producto		
	1	**2**	**3**
Precio de venta	$40	$32	$55
Costo variable/unidad	20	24	46

Si los costos fijos se estiman en $2.8 millones, determine el número de unidades de cada producto necesarias para lograr el equilibrio.

*** 16** Una compañía está estudiando la compra de un equipo que se utilizará para fabricar un nuevo producto. Se están considerando cuatro máquinas. La siguiente tabla resume el costo de la adquisición de cada una y su costo variable de producción si la máquina se usa para elaborar el nuevo producto.

	Costo de compra	**Costo variable/unidad**
Máquina 1	$ 80 000	$10.00
Máquina 2	$120 000	$ 9.00
Máquina 3	$200 000	$ 7.50
Máquina 4	$300 000	$ 5.50

Determine los niveles de producción en que cada máquina será la alternativa menos cara. Trace en una gráfica las cuatro funciones de costo.

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 Calificaciones infladas Desde 1973 se ha registrado este fenómeno en una gran universidad. La calificación promedio para todos los alumnos fue de 2.42 en 1973. En 1977 el promedio fue de 2.66. Suponiendo que la tendencia es lineal, con g se representará el promedio acumulativo de las calificaciones de todos los alumnos y t denotará el tiempo medido en años a partir de 1973.

a) Determine la función $g = f(t)$.

b) De acuerdo con esta función, ¿cuándo llegará a 3.0 el promedio de las calificaciones?

c) Pronostique el promedio de calificaciones para 1980.

d) Interprete el significado de la pendiente de esta función.

2 Una compañía vende un producto a \$100 por unidad. Los costos de las materias primas son de \$40 por unidad, los de mano de obra son de \$25 por unidad, los de embarque son de \$10 por unidad y los costos fijos anuales ascienden a \$100 000.

a) Determine la función de utilidad $P = f(x)$, donde x denota el número de unidades vendidas.

(*b*) ¿Cuántas unidades hay que vender a fin de obtener una utilidad anual de \$150 000?

3 Una organización de caridad está planeando un tour por avión y una semana de vacaciones en el Caribe. Se trata de una actividad tendiente a recaudar fondos. Se ha contratado un paquete con una aerolínea comercial, y la organización pagará un costo fijo de \$10 000 más \$300 por persona. Esta última cantidad cubre el costo del vuelo, los traslados, el hotel, las comidas y propinas. La organización proyecta cobrar el paquete a \$450 por persona.

a) Determine el número de personas necesarias para alcanzar el equilibro en esta actividad.

b) La meta de la organización es obtener una utilidad neta de \$10 000. ¿Cuántas personas han de participar para poder conseguirla?

MINICASO

DECISIÓN DE CAMBIO DE AUTOMÓVIL

Ante el elevado precio de la gasolina, los propietarios de automóviles están constantemente buscando la manera de ahorrar en sus gastos de transporte. Una opción costosa escogida por algunas personas consiste en comprar un automóvil que economice mucho más combustible que su coche actual. Chamberlain inventó una fórmula matemática para calcular cuántos años una persona tendría que conducir un automóvil nuevo y lograr que los ahorros de combustible compensen el costo de cambiar el automóvil viejo y comprar uno nuevo.* Las variables que se emplean en este análisis son:

y = número de años necesarios para justificar la compra de un automóvil nuevo.
m = millas por litro de gasolina que rinde el automóvil actual, mi/gal
n = millas por litro del nuevo automóvil, mi/gal
c = costo neto del nuevo automóvil (precio de compra menos lo obtenido con la venta del coche actual)
d = número promedio de millas recorridas al año
p = precio de gasolina por galón

Chamberlain determina este periodo de "equilibrio" sirviéndose de la relación general:

Costo de la gasolina con el automóvil actual durante el periodo de equilibrio − costo de la gasolina con el automóvil nuevo durante el periodo de equilibrio + costo neto del automóvil nuevo

o bien $$f_{\text{viejo}}(y) = f_{\text{nuevo}}(y)$$

1 Usando las variables definidas antes, determine las expresiones para $f_{\text{viejo}}(y)$ y $f_{\text{nuevo}}(y)$.

2 Haga $f_{\text{viejo}}(y)$ igual a $f_{\text{nuevo}}(y)$ y derive la fórmula general del periodo de equilibrio y.

3 Determine el periodo de equilibrio si el automóvil actual tiene un valor de $3000 y rinde 18 millas por galón. El nuevo automóvil tiene un costo de compra de $8500 y rinde, según las estimaciones, 54 millas por galón. Los precios de la gasolina son actualmente de $1.20 por galón. Suponga que anualmente se recorren 20 000 millas.

4 Examine la sensibilidad del periodo de equilibrio ante los cambios en el precio de la gasolina. Para probar esto, suponga que el precio actual puede variar ±25% respecto a la cantidad de $1.20. ¿Se produce un cambio semejante en el periodo de equilibrio?

5 Mencione las suposiciones de este modelo. ¿Qué suposiciones son poco realistas? ¿Por qué? ¿Qué factores de costo no se han tenido en cuenta?

---

*"Should the Gas Guzzler Go?" (carta), *Science*, vol. 207, p. 1028, marzo de 1980.

CAPÍTULO

4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

121 a 137 y 147 a 150

4.1 INTRODUCCIÓN
4.2 SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS VARIABLES
4.3 MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA
4.4 SISTEMAS DE TRES VARIABLES
4.5 APLICACIONES SELECTAS

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
EJERCICIOS QUE SE RESUELVEN POR COMPUTADORA
APÉNDICE: PROCEDIMIENTO DE ELIMINACIÓN PARA LOS SISTEMAS (3 × 3)

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Lograr que el lector comprenda la naturaleza de los sistemas de ecuaciones y su representación gráfica (cuando conviene utilizarla)
- Lograr que el lector conozca las varias posibilidades del conjunto solución para diversos tipos de sistemas de ecuaciones
- Lograr que el lector conozca la interpretación gráfica de los conjuntos solución
- Explicar los procedimientos con que se obtienen los conjuntos solución para sistemas de ecuaciones
- Dar ejemplos de algunas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

4.1 INTRODUCCIÓN

Sistemas de ecuaciones

Un ***sistema de ecuaciones*** es un conjunto integrado por más de una ecuación. Una manera de caracterizar un sistema de ecuaciones es definirlo por sus ***dimensiones***. Si un sistema consta de m ecuaciones y n variables, se dice que es un ***sistema de "m por n"***, esto es, que tiene las dimensiones $m \times n$. Un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones y dos variables se describirá como formado por las dimensiones 2×2. Al que esté constituido por 15 ecuaciones y 10 variables se le llama sistema (15×10).

En muchas aplicaciones hechas a la administración y a la economía se recurre a los sistemas de ecuaciones. Por ello a menudo interesa analizar las interacciones de las ecuaciones. Así, en el ejemplo 22 del capítulo 2 (página 74) se habló de transportar de emergencia suministros a una ciudad de América del Sur. La siguiente ecuación se formuló para representar las diversas cantidades de cada suministro que llenarían el avión a toda su capacidad:

$$20x_1 + 30x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 6\,000 \qquad \textbf{(4.1)}$$

El ejercicio 2 de la página 76 presentó los datos concernientes a la capacidad de peso del mismo avión y el peso por caja de cada suministro. La respuesta a ese ejercicio debió haber sido la ecuación

$$150x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 70x_4 = 40\,000 \qquad \textbf{(4.2)}$$

El conjunto solución de esta ecuación contiene los valores de las cuatro variables que representan todas las cantidades de los suministros que llenarán el avión a toda su capacidad de peso: 40 000 libras. Si se tienen las dos ecuaciones, quizá sea interesante determinar si hay combinaciones de cuatro suministros que llenen el avión a toda su capacidad de peso y volumen. En este capítulo se verá cómo contestar este tipo de preguntas.

Conjuntos solución

Al resolver sistemas de ecuaciones, se busca obtener los valores de las variables que satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Por ejemplo, en las dos ecuaciones

$$5x + 10y = 20$$
$$3x + 4y = 10$$

se querrá encontrar los valores de x y y que satisfagan ambas ecuaciones al mismo tiempo. Expresado esto en la notación de conjuntos, se dice que se desea identificar el ***conjunto solución S*** donde

$$S = \{(x,y) \mid 5x + 10y = 20 \quad \text{y} \quad 3x + 4y = 10\}$$

Como verá el lector en este capítulo, el conjunto S para un sistema de ecuaciones lineales puede ser un ***conjunto nulo***, un ***conjunto finito*** o un ***conjunto infinito***.*

*Un conjunto nulo no contiene elementos (está vacío), un conjunto finito consta de un número limitado de elementos y un conjunto infinito tiene un número ilimitado de elementos.

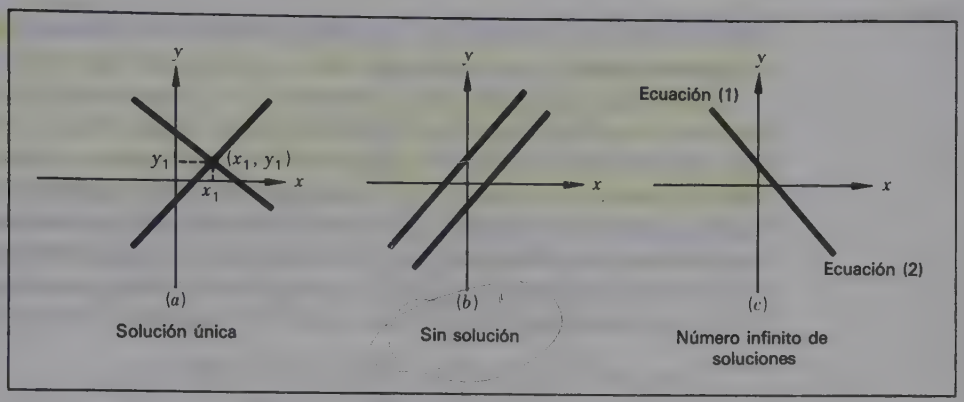


FIGURA 4.1 Posibilidades del conjunto solución para un sistema (2 × 2) de ecuaciones.

Se cuenta con muchos procedimientos de solución que sirven para resolver los sistemas de ecuaciones. Aquí nos concentraremos en dos procedimientos. Otros se expondrán en el capítulo 5. La consideración más importante es que se tenga la habilidad para resolver un sistema de ecuaciones cuando se necesita una solución.

En el presente capítulo se explicarán procedimientos de solución comenzando con los sistemas más simples: los de dos ecuaciones y dos variables. En esta explicación se podrán de relieve los aspectos gráficos y algebraicos de cada caso. Esos métodos se explicarán más a fondo en el capítulo para que el lector se familiarice con la manera de resolver los sistemas más grandes de ecuaciones.

4.2 SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS VARIABLES

Análisis gráfico

En el capítulo 2 se dijo que una ecuación lineal de dos variables se grafica como línea recta. Así pues, un sistema (2 × 2) de ecuaciones se representa mediante dos rectas en dos dimensiones. Al resolver para obtener los valores de las dos variables que satisfagan *ambas* ecuaciones, está tratándose de determinar gráficamente si las dos líneas que representan las ecuaciones tienen puntos en común.

Puede haber tres tipos de conjuntos solución para los sistemas (2 × 2). Si se supone que las dos líneas se grafican en un plano, la figura 4.1 muestra las tres posibilidades. En la figura 4.1*a* las dos líneas se intersecan. Las *coordenadas* del punto de intersección (x_1, y_1) representan la solución del sistema de ecuaciones, es decir, el par de valores de x y y que satisfacen *ambas* ecuaciones. Cuando sólo hay un par de valores de las variables que satisfacen el sistema de ecuaciones, se dice que el sistema tiene una ***solución única***.

En la figura 4.1*b*, las dos líneas son paralelas entre sí. En el capítulo 2 se señaló que las paralelas tienen la misma pendiente; y si tienen diferentes intersecciones con el eje y, no tendrán puntos en común. En la gráfica las líneas nunca se intersecarán. Si un sistema (2 × 2) de ecuaciones presenta esas características, se dice que tiene ***ausencia de solución***. En otras palabras, no hay

valores para las variables que satisfagan ambas ecuaciones. Se da el nombre de ***inconsistentes*** a las ecuaciones de un sistema de este tipo.

La última posibilidad de un sistema (2 × 2) aparece en la figura 4.1*c*. En este caso la gráfica de ambas ecuaciones es la misma línea, y se considera que son ***ecuaciones equivalentes***. Un número infinito de puntos es común a las dos líneas y el sistema se conoce con el nombre de ***número infinito de soluciones***. El hecho de estar representado por la misma línea significa que ambas tienen la misma pendiente y la misma intersección con el eje y. Aunque esta situación rara vez se da en una aplicación, *es posible* que dos ecuaciones parezcan muy distintas y que, sin embargo, sean equivalentes. Por ejemplo, las dos ecuaciones

$$-6x + 12y = -24$$

y

$$1.5x - 3y = 6$$

son equivalentes. Verifique que la pendiente y la intersección con el eje y sean iguales en ambas.

Otra manera de sintetizar los tres casos que se incluyen en la figura 4-1 es:

En un sistema (2 × 2) de ecuaciones lineales

$$y = m_1x + k_1$$
$$y = m_2x + k_2$$

donde m_1 y m_2 representan las pendientes respectivas de las dos líneas y k_1 y k_2 representan las intersecciones respectivas con el eje y.

I El sistema tiene una *solución única* si $m_1 \neq m_2$.
II El sistema *no tiene solución* si $m_1 = m_2$ pero $k_1 \neq k_2$.
III Hay un *número infinito de soluciones* si $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_2$.

Soluciones gráficas

Puede recurrirse a métodos de soluciones gráficas en el caso de sistemas de ecuaciones con dos variables. No obstante, hay que ser exactos en las gráficas. A continuación se ofrece un ejemplo de solución gráfica.

EJEMPLO 1

Determine gráficamente la solución del sistema de ecuaciones

$$2x + 4y = 20 \quad \textbf{(4.3)}$$
$$3x + y = 10 \quad \textbf{(4.4)}$$

Las intersecciones con los ejes x y y son, respectivamente, (10, 0) y (0, 5) para la ecuación (4.3). De modo análogo, las intersecciones en la ecuación (4.4) son $(\frac{10}{3}, 0)$ y (0, 10). Cuando se grafican en la figura 4.2 y se unen, las dos líneas parecen cruzar en (2.4).

Un problema de las soluciones gráficas radica en que a veces resulta difícil leer las coordenadas exactas de los puntos de la intersección. Y esto sucede en especial cuando las coordenadas no son enteros. De ahí que las técnicas de solución algebraica generalmente se consideren superiores desde el punto de vista de la obtención de soluciones *exactas*. Sin embargo, sin importar si se recurre a procedimientos gráficos o alge-

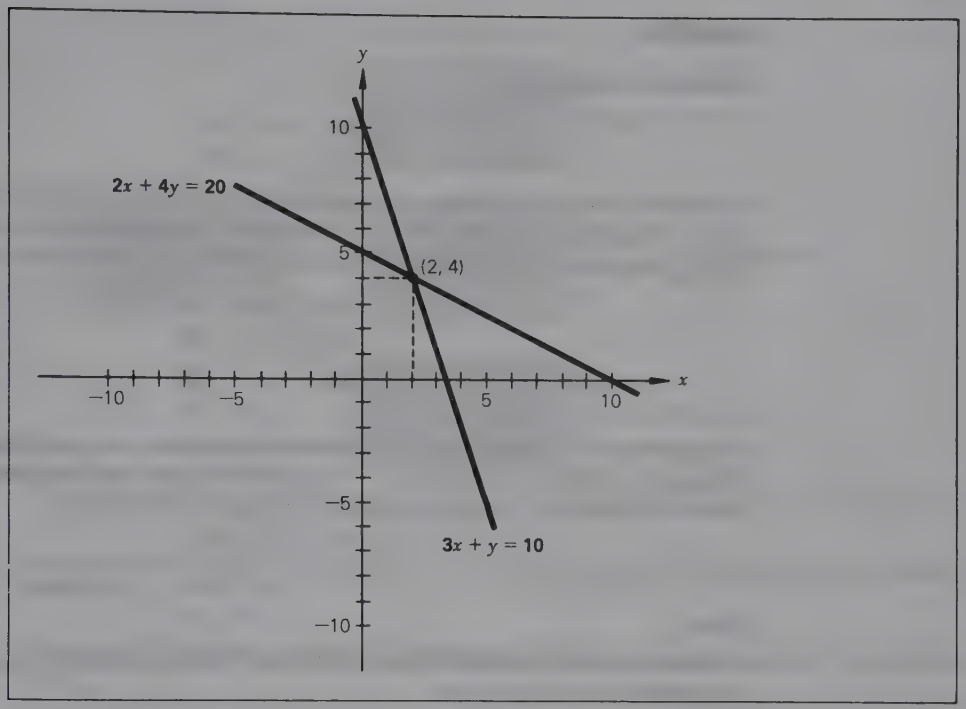


FIGURA 4.2

braicos, siempre es posible comprobar la respuesta: se sustituye ésta en las ecuaciones originales a fin de verificar si éstas están satisfechas por los valores. Sustituyendo $x = 2$ y $y = 4$ en las ecuaciones (4.3) y (4.4) se obtiene

$$2(2) + 4(4) = 20$$

o bien

$$20 = 20$$

y

$$3(2) + (4) = 10$$

o

$$10 = 10$$

Por tanto, la solución es correcta.

El procedimiento por eliminación

Un método de solución de amplia aceptación, es el ***procedimiento por eliminación***, que se sirve de las operaciones de multiplicación y adición. En un sistema (2 × 2) de ecuaciones, las dos ecuaciones (sus múltiplos) se suman de modo que *se elimine* una de las dos variables. La ecuación resultante se expresa en términos de la variable restante. Esta ecuación puede resolverse para dicha variable, cuyo valor se sustituye otra vez en las ecuaciones originales para despejar y obtener el valor de la variable eliminada. El proceso de solución se demuestra en el siguiente ejemplo, después del cual se dará una explicación formal del procedimiento.

EJEMPLO 2

Resuelva el sistema de ecuaciones en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN

El sistema original era

$$2x + 4y = 20 \quad (4.3)$$
$$3x + y = 10 \quad (4.4)$$

El objetivo del procedimiento de eliminación consiste en suprimir una de las dos variables sumando (multiplicando) las ecuaciones. Si se *multiplica* la ecuación (4.4) por -4 y *se suma* la ecuación resultante a la ecuación (4.3), se obtiene la ecuación (4.5):

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 20 && (4.3)\\ -12x - 4y &= -40 && (4.4a)\\ \hline -10x &= -20 && (4.5)\\ x &= 2 \end{aligned}$$

La ecuación (4.5) contiene exclusivamente la variable x, y es posible resolver esta ecuación para encontrar el valor de $x = 2$. Al sustituir por x este valor en una de las ecuaciones originales [se escoge la ecuación (4.3)], se observa que

$$2(2) + 4y = 20$$
$$4y = 16$$

o bien

$$y = 4$$

En consecuencia, la solución única del sistema, según se señalo con anterioridad, ocurre cuando $x = 2$ y $y = 4$.

EJERCICIO

Verifique que la solución es exactamente la misma si se selecciona x para la eliminación. A fin de suprimir x se multiplican las ecuaciones (4.3) y (4.4) por -3 y 2, respectivamente.

El procedimiento de eliminación puede generalizarse como sigue para un sistema (2×2) de ecuaciones:

PROCEDIMIENTO DE ELIMINACIÓN PARA SISTEMAS (2×2)

I Se multiplican (en caso necesario) las ecuaciones por constantes, de manera que los coeficientes en una de las variables sean los negativos de la otra en las dos ecuaciones.

II Se suman las dos ecuaciones resultantes.

III **A)** Si la suma de las ecuaciones produce una nueva ecuación que tenga una variable, el sistema tiene una ***solución única***. Se despeja para obtener el valor de la variable restante, y ese valor se sustituye de nuevo en las ecuaciones originales para determinar el valor de la variable que había sido suprimida inicialmente.

B) Si la suma de las ecuaciones da por resultado una identidad (o sea una ecuación que siempre es verdadera como $0 = 0$), las dos ecuaciones originales son ***equivalentes*** entre sí y el sistema admite un ***número infinito de soluciones***.

C) Si la suma de las ecuaciones origina una proposición falsa, digamos $0 = 5$, las ecuaciones son ***inconsistentes*** y no existe un ***conjunto solución***. Consúltese la figura 4.3.

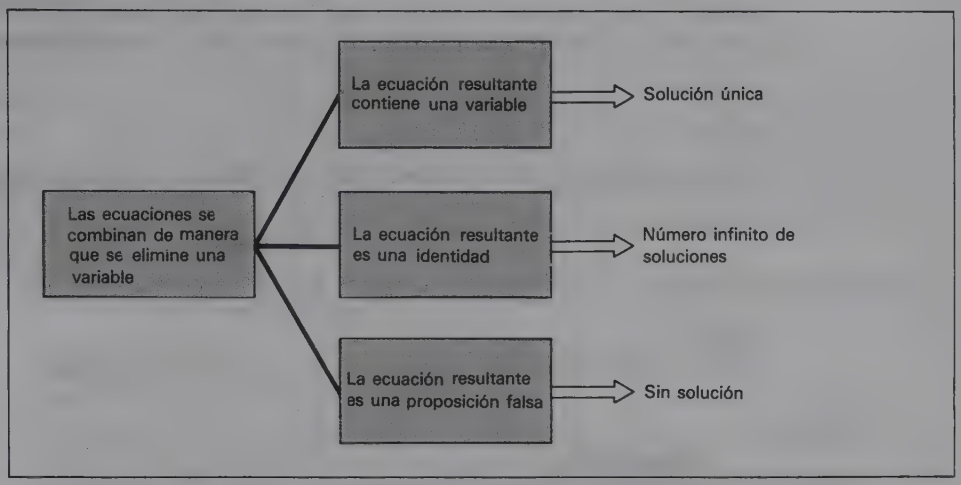


FIGURA 4.3 Procedimiento de eliminación para los sistemas (2 × 2).

EJEMPLO 3

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante el procedimiento por eliminación.

$$3x - 2y = 6 \qquad \textbf{(4.6)}$$
$$-15x + 10y = -30 \qquad \textbf{(4.7)}$$

SOLUCIÓN

Seleecionado x como la variable que será eliminada, se multiplica la ecuación (4.6) por 5 y se suman las ecuaciones resultantes:

$$15x - 10y = 30 \qquad \textbf{(4.6}a\textbf{)}$$
$$-15x + 10y = -30 \qquad \textbf{(4.7)}$$
$$0 = 0$$

Cuando se suman las ecuaciones (4.6a) y (4.7), ambas variables se suprimen en el miembro izquierdo de la ecuación y nos queda la identidad $0 = 0$. Del paso **III(B)** del procedimiento de solución se extrae la conclusión de que las dos ecuaciones son equivalentes y que hay un número infinito de soluciones.

A fin de especificar los miembros muestra del conjunto solución, podría suponerse un valor arbitrario para x o y y sustituirlo en una de las ecuaciones originales, despejando para determinar el valor correspondiente de la otra variable. Por ejemplo, verifíquese que, si se hace $y = 3$, la sustitución de este valor en la ecuación (4.6) o (4.7) producirá el valor correspondiente $x = 4$. Así pues, un miembro del conjunto solución es (4, 3). Una manera más general de especificar el conjunto solución consiste en resolver una de las ecuaciones originales para una de las variables. El resultado es una ecuación que ex-

presa el valor de una variable como función del valor de la otra. He aquí un ejemplo: si la ecuación (4.6) se resuelve para x, el resultado será

$$3x = 2y + 6$$

o bien

$$x = \tfrac{2}{3}y + 2$$

Por consiguiente, una manera de generalizar el conjunto solución es

$$\boxed{\begin{array}{l} y \text{ arbitraria} \\ x = \tfrac{2}{3}y + 2 \end{array}}$$

o bien

$$S = \{(x, y) \ y \text{ es real } x = \tfrac{2}{3}y + 2\}$$

EJERCICIO

I En la solución generalizada que acaba de ser derivada, verifique que (4, 3) es un miembro del conjunto solución.
II Exprese la solución generalizada en una forma donde x sea declarada arbitraria.*

EJEMPLO 4

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación.

$$6x - 12y = 24 \qquad \textbf{(4.8)}$$
$$-1.5x + 3y = 9 \qquad \textbf{(4.9)}$$

SOLUCIÓN

Al multiplicar la ecuación (4.9) por 4 y al sumar este múltiplo a la ecuación (4.8) se obtiene

$$\begin{array}{rr} 6x - 12y = 24 & \textbf{(4.8)} \\ -6x + 12y = 36 & \textbf{(4.9}a\textbf{)} \\ \hline 0 = 60 & \end{array}$$

Puesto que $0 = 60$ es una proposición falsa, el sistema de ecuaciones no admite solución.

EJERCICIO

Reescriba las ecuaciones (4.8) y (4.9) en forma de pendiente-intersección y confirme que poseen las mismas pendientes aunque distintas intersecciones con el eje y.

*x arbitraria $y = \tfrac{3}{2}x - 3$,

Sistemas ($m \times 2$)

Cuando hay más de dos ecuaciones ($m > 2$) con dos variables, su gráfica de cada ecuación será una línea en dos dimensiones. Así, la figura 4.4 contiene dos sistemas (3×2). En la figura 4.4*a* las tres líneas se intersecan en el mismo punto, y hay una solución única. En la figura 4.4*b* existen puntos que son comunes a varios pares de líneas, pero las tres no tienen un punto en común,* lo cual significa que no existe solución alguna. Una situación posible, aunque poco probable, es que las ecuaciones m sean equivalentes entre sí y que su gráfica sea la misma línea.

Con estos sistemas el procedimiento de solución es relativamente sencillo.

PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN PARA LOS SISTEMAS ($m \times 2$) ($m > 2$)

I Seleccione dos cualesquiera de las ecuaciones m y resuélvalas para determinar el valor de las dos variables.

II A) Si en el paso 1 hay una solución única, sustituya en las ecuaciones restantes del sistema los valores obtenidos. Si todas ellas son satisfechas por esos valores, significará que éstos representan una solución única. Si no satisfacen *ninguna* de las ecuaciones restantes, el sistema carece de solución.

B) Si en el paso I no hay solución, el sistema tampoco la tendrá.

C) Si en el paso I existe un número infinito de soluciones, se seleccionarán dos ecuaciones diferentes y se repetirá el paso I. Consúltese la figura 4.5.

EJEMPLO 5

Determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 2y = 8 \quad (4.10)$$
$$2x - 3y = -5 \quad (4.11)$$
$$-5x + 6y = 8 \quad (4.12)$$
$$x + y = 7 \quad (4.13)$$

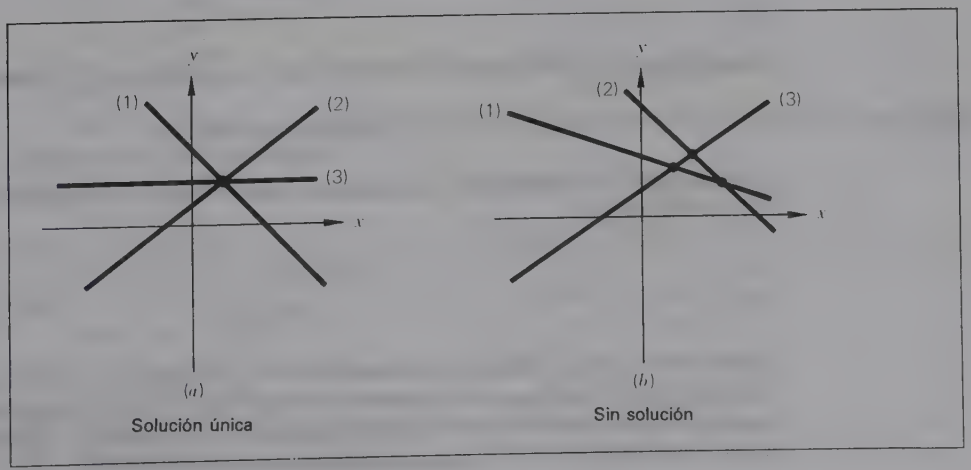


FIGURA 4.4 Posibilidades de solución para los sistemas (3×2).

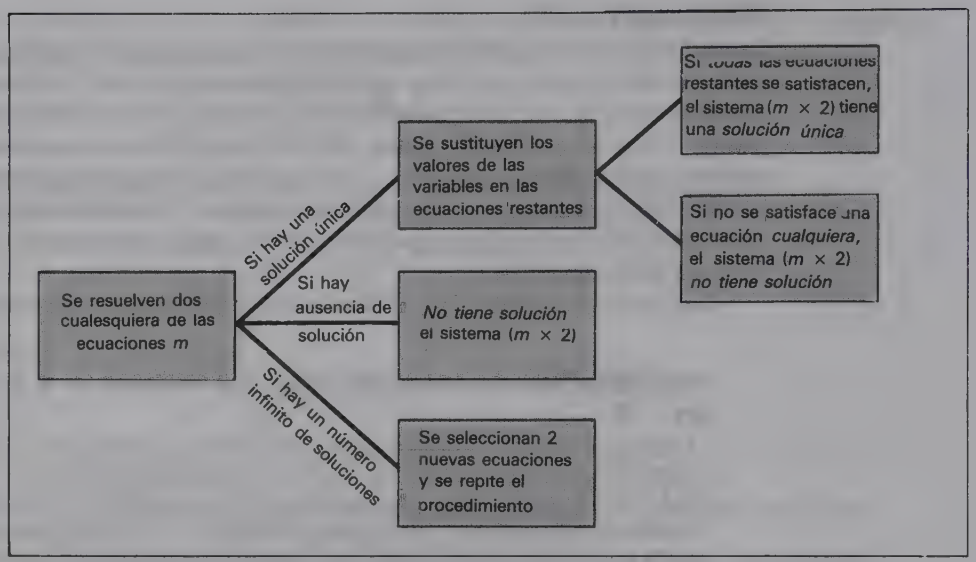


FIGURA 4.5 Procedimiento de eliminación para los sistemas $(m \times 2)$ donde $m > 2$.

SOLUCIÓN

El sistema (2×2) que se compone de las ecuaciones (4.10) y (4.11) se resuelve al multiplicar la ecuación (4.10) por -2 y al sumar el resultado a la ecuación (4.11), o bien

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -16 \\ 2x - 3y &= -5 \\ \hline -7y &= -21 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Al sustituir de nuevo en la ecuación (4.10) se obtiene

$$x + 2(3) = 8$$

o

$$x = 2$$

La solución (2, 3) se prueba al sustituir en la ecuación (4.12). Dado que

$$-5(2) + 6(3) = 8$$

el punto (2, 3) satisface las tres primeras ecuaciones. Sustituyendo en la ecuación (4.13) se obtiene

$$2 + 3 \neq 7$$

o bien

$$5 \neq 7$$

Puesto que (2, 3) no satisface la ecuación (4.13), el sistema de ecuaciones no tiene una solución única. La figura 4.6 muestra la situación. Nótese que las líneas que representan las ecuaciones (4.10) a (4.12) se intersecan en el punto (2, 3); sin embargo (2.3) no se encuentra sobre la línea que representa a la ecuación (4.13).

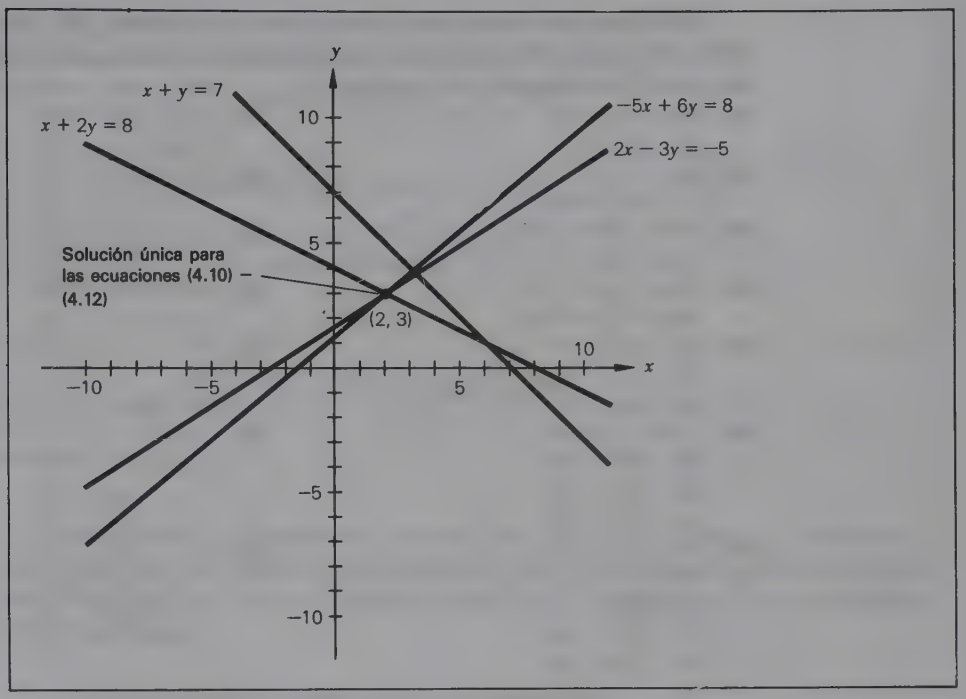


FIGURA 4.6
El sistema (4 × 2) no tiene un conjunto solución.

Ejercicios de seguimiento de la sección 4.2

En los ejercicios 1 a 10, determine la naturaleza del conjunto (único, infinito o sin solución), comparando la pendiente y las coordenadas y de las intersecciones con el eje y para las líneas que representan a las dos ecuaciones.

1 $2x - 9y = 108$
$8x + 6y = 48$

2 $5x + 5y = 0$
$x = -y$

3 $3x - 9y = 24$
$-x + 3y = 0$

4 $4x - 2y = 8$
$x + 2y = 12$

5 $4x - 2y = 36$
$-2x + y = 20$

6 $x - 3y = 6$
$-4x + 12y = -24$

7 $x + y = 20$
$2x - y = 12$

8 $-3x = y + 2$
$9x + 3y = -6$

9 $4x - y = 10$
$2x + 3y = 18$

10 $-x = -y$
$3x + 3y = 0$

En los ejercicios 11 a 20 resuelva gráficamente y compruebe con métodos algebraicos su respuesta.

11 $3x + 2y = 8$
$x - y = 1$

12 $2x - 3y = -13$
$4x + 2y = -2$

13 $x - 2y = 0$
$-3x + 6y = 5$

14 $-x + 2y = -2$
$3x = 6y + 6$

15 $x - 2y = 4$
$-4x + 8y = -10$

16 $3x + 4y = 5$
$4x + y = -2$

17 $x + y = 0$
$-2x + 3y = 10$

18 $4x - 2y = 10$
$-2x + y = -5$

19 $-x + y = 0$
$2x + y = 9$

20 $-x + 3y = 2$
$4x - 12y = -8$

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. En los que tengan un número infinito de soluciones, especifique una forma generalizada de solución como se hizo después del ejemplo 3.

21
$$\begin{aligned} 4x - y &= 17 \\ 5x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

22
$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 20 \\ -2x &= -y + 15 \end{aligned}$$

23
$$\begin{aligned} 6x - 8y &= 4 \\ 6 + 12y &= 9x \end{aligned}$$

24
$$\begin{aligned} -2x + 5y &= 20 \\ 4x + y &= 4 \end{aligned}$$

25
$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -8 \\ -3x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

26
$$\begin{aligned} 2x - y &= 9 \\ x + 3y &= -6 \end{aligned}$$

27
$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -6x + 3y &= -12 \end{aligned}$$

28
$$\begin{aligned} 12x - 4y &= 18 \\ -4x + y &= 6 \end{aligned}$$

29
$$\begin{aligned} x - 2y &= -7 \\ 3x + y &= 0 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

30
$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x + y &= 1 \\ 7x - 5y &= 6 \end{aligned}$$

31
$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - 3y &= 3 \\ 4x - 2y &= 10 \\ -x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

32
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x - y &= 12 \\ x - 4y &= 13 \\ -2x + 5y &= 0 \end{aligned}$$

33
$$\begin{aligned} x - y &= 8 \\ 2x + y &= 4 \\ 3x + 2y &= 4 \\ x + 2y &= -4 \\ 5x - 2y &= 20 \end{aligned}$$

34
$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + 2y &= -8 \\ 3x - 2y &= 0 \\ 2x - 5y &= 11 \\ -4x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

4.3 MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA

En la presente sección se explicará otro procedimiento de solución que tiene un importante papel en la solución de los problemas referentes a la programación lineal (Cap. 6). Este procedimiento es un poco tedioso cuando se efectúa con cálculos manuales. Sin embargo, una ventaja es que los pasos del procedimiento de resolución no cambian a pesar de las dimensiones del sistema. Y además es fácil el procedimiento para realizarlo en la computadora.

La idea general

El *método de eliminación gaussiana* es un tipo especial de procedimiento de eliminación. Comienza con el sistema original de ecuaciones y lo transforma, mediante ***operaciones de renglón***, en un sistema equivalente* en el cual la solución puede leerse directamente. La figura 4.7 muestra la transformación, o sea el cambio de forma, que se desea al resolver un sistema (2 × 2). En contraste con el procedimiento de eliminación descrito en la última sección, el sistema transformado sigue teniendo las dimensiones de 2 × 2. Pero las operaciones de renglón han convertido los coeficientes en las variables, de modo que sólo una variable permanece en cada ecuación; y el valor de ella (v_1 o v_2 en la figura 4.7) se da en el miembro derecho de la ecuación. Nótense los coeficientes de cada variable en el "sistema transformado"

*Recuérdese que un sistema *equivalente* es aquel que tiene el mismo conjunto solución que el sistema original.

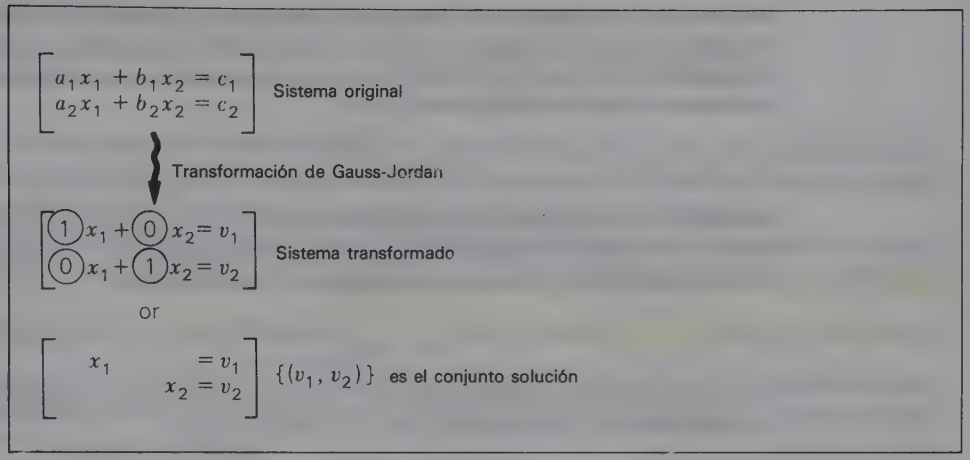


FIGURA 4.7 Transformación por eliminación gaussiana para los sistemas (2 × 2).

Las siguientes operaciones de renglón son lo único que se necesita en el procedimiento de eliminación gaussiana. En un sistema original de ecuaciones, la aplicación de estas operaciones da por resultado un sistema equivalente de ecuaciones.

ALGUNAS OPERACIONES BÁSICAS DE RENGLÓN

I Ambos miembros de una ecuación pueden multiplicarse por una constante no cero.
II Los múltiplos no cero de una ecuación, pueden sumarse a otra ecuación.
III El orden de las ecuaciones es intercambiable.

A continuación se resolverá un ejemplo simple y luego se generalizará y se actualizará el procedimiento.

EJEMPLO 6

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación gaussiana:

$$2x - 3y = -7 \quad (4.14)$$
$$x + y = 4 \quad (4.15)$$

SOLUCIÓN

Examine detenidamente los coeficientes de cada variable en el "sistema transformado" de la figura 4.7. En este ejemplo, queremos que el sistema transformado tenga la forma

$$1x + 0y = v_1 \quad \text{o} \quad x = v_1$$
$$0x + 1y = v_2 \qquad\quad y = v_2$$

En el miembro izquierdo de las ecuaciones transformadas, los coeficientes variables no cero aparecen en el patrón diagonal, de la parte superior izquierda a la parte infe-

rior derecha. El objetivo del método de eliminación gaussiana es convertir el sistema original en esta *forma diagonal*. Usando la operación de renglón I, puede multiplicarse la ecuación (4.14) por ½ y el coeficiente en la variable x se convierte en 1. El sistema equivalente resultante de ecuaciones es

$$\textcircled{1}x - \tfrac{3}{2}y = -\tfrac{7}{2} \qquad \textbf{(4.14}a\textbf{)}$$
$$x + y = 4 \qquad \textbf{(4.15)}$$

El coeficiente de x puede transformarse en cero en la ecuación (4.15) al aplicar la operación de renglón II. Si la ecuación (4.14a) se multiplica por -1 y el resultado se suma a la ecuación (4.15), el sistema equivalente que resulta es

$$1\,x - \tfrac{3}{2}y = -\tfrac{7}{2} \qquad \textbf{(4.14}a\textbf{)}$$
$$\textcircled{0}x + \tfrac{5}{2}y = \tfrac{15}{2} \qquad \textbf{(4.15}a\textbf{)}$$

Si se aplica la operación de renglón I, puede multiplicarse la ecuación (4.15a) por $+\frac{2}{5}$. El coeficiente en y se convierte en 1 en esta ecuación

$$1\,x - \tfrac{3}{2}y = -\tfrac{7}{2} \qquad \textbf{(4.14}a\textbf{)}$$
$$0\,x + \textcircled{1}y = 3 \qquad \textbf{(4.15}b\textbf{)}$$

Por último el coeficiente de y puede transformarse en cero en la ecuación (4.14a) al aplicar la operación de renglón II. Si la ecuación (4.15b) se multiplica por $\frac{3}{2}$ y el resultado se suma a la ecuación (4.14a), el sistema transformado será

$$1\,x + \textcircled{0}y = 1 \qquad \textbf{(4.14}b\textbf{)}$$
$$0\,x + 1\,y = 3 \qquad \textbf{(4.15}b\textbf{)}$$

Estos coeficientes se acarrean en la transformación por una razón. Pronto la comprenderá el lector. Pero cuando los términos cero se suprimen de las ecuaciones (4.14b) y (4.15b), el sistema final tiene la forma diagonal

$$x = 1$$
$$y = 3$$

que da la solución al sistema.

NOTA

Para crear un coeficiente de 1 en x en la ecuación (4.14), podría haberse iniciado el proceso de solución intercambiando las ecuaciones (4.14) y (4.15) [Regla III].

El método

La idea general del método de eliminación gaussiana es transformar un sistema general de ecuaciones en forma diagonal aplicando varias veces las tres operaciones básicas de renglón. El procedimiento puede simplificarse si se utiliza un tipo de notación abreviada para representar el sistema de ecuaciones. El método elimina las variables y representa un sistema de ecuaciones empleando sólo los coeficientes de las variables y las constantes del miembro derecho. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$2x + 5y = 10$$
$$3x - 4y = -5$$

podría escribirse así

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 10 \\ 3 & -4 & -5 \end{array}$$

La línea vertical se emplea para separar los miembros derecho e izquierdo de las ecuaciones. Las columnas situadas a la izquierda de la línea vertical contienen todos los coeficientes de *una* de las variables del sistema.

En el sistema general (2 × 2) incluido en la figura 4.7, la transformación gaussiana aparecerá como en la figura 4.8. El objetivo primario es cambiar la disposición de los coeficientes $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ en la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aunque hay variaciones en el método de eliminación gaussiana y aunque en un problema dado se sentirá la tentación de intentar un procedimiento abreviado, el siguiente método siempre funciona.

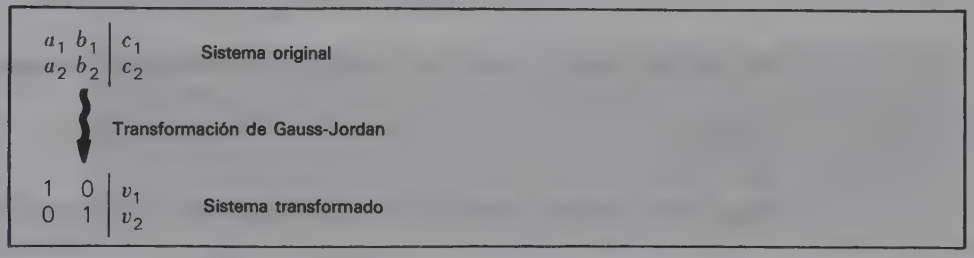


FIGURA 4.8 Transformación de coeficientes para un sistema (2 × 2)

UN PROCEDIMIENTO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA PARA SISTEMAS (2 × 2)

I En el sistema de ecuaciones (2 × 2), cree un arreglo que contenga los coeficientes de las variables y las constantes del miembro derecho que aparecen en el siguiente arreglo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

II Transforme los coeficientes en forma diagonal una columna a la vez principiando con la columna 1. Primero $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ deberá ser transformada en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y luego $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. El proceso de transformar una columna en la forma deseada recibe a veces el nombre de **pivoteo**.

A En cualquier transformación de columna, primero se crea el elemento que es igual a 1. (*Si el elemento actual en esta posición es cero, se aplica la operación de renglón III y se intercambian los renglones para producir un elemento no cero en esta posición.*) Esto se logra multiplicando el renglón (ecuación) en que el 1 es deseado por el recíproco del coeficiente que ocupa esa posición en el momento actual.

B Se crea un cero en la columna multiplicando el renglón del paso IIA por el negativo del valor actualmente en la posición donde se desea el 0. Se suma este múltiplo al renglón donde se desea el 0.

En seguida se da un ejemplo del paso IIB, pues tiende a ser confuso. Supóngase que en el siguiente sistema

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 6 & 10 \\ \textcircled{5} & 3 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{l}\textbf{(1)}\\ \textbf{(2)}\end{array}$$

se quiere un cero donde ⑤ aparece en la columna 1. Se creó el cero al multiplicar el renglón 1 por el negativo de ⑤, o sea -5, y se suma este múltiplo del renglón 1 al renglón 2, es decir,

$$\begin{array}{rr|l} -5 & -30 & -50 \\ 5 & 3 & 12 \\ \hline 0 & -27 & -38 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \cdot \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \\ \hline \text{nuevo renglón 2 o } 2a \end{array} \qquad \textbf{Paso IIB}$$

El sistema revisado será

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 6 & 10 \\ 0 & -27 & -38 \end{array} \qquad \begin{array}{l}\textbf{(1)}\\ \textbf{(2a)}\end{array}$$

En los siguientes ejemplos se explica el procedimiento íntegro.

EJEMPLO 7

Resuelve el siguiente sistema por el método de eliminación gaussiana.

$$\begin{aligned} 5x + 20y &= 25 \\ 4x - 7y &= -26 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

A continuación se reescribe el sistema sin las variables.

$$\begin{array}{rr|ll} 5 & 20 & 25 & R_1 \\ 4 & -7 & -26 & R_2 \end{array}$$

Nótese que los renglones 1 y 2 se denotan por medio de R_1 y R_2. Esto será de utilidad al resumir las operaciones de renglón empleadas en el proceso de transformación.

Se crea un ① en la columna 1 multiplicando el renglón 1 por $\frac{1}{5}$. El nuevo sistema (equivalente) es

Sistema equivalente 1

$$\begin{array}{rr|ll} \textcircled{1} & 4 & 5 & \boldsymbol{R_{1a} = \frac{1}{5}R_1} \\ 4 & -7 & -26 & R_2 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIA)}$$

Se crea un ⓪ en el renglón 2 de la columna 1 al multiplicar el renglón 1 del nuevo sistema ($\boldsymbol{R_{1a}}$) por -4 y al sumar el múltiplo de este renglón al renglón 2. El nuevo sistema es

Sistema equivalente 2

$$\begin{array}{rr|ll} 1 & 4 & 5 & R_{1a} \\ \textcircled{0} & -23 & -46 & \boldsymbol{R_{2a} = -4R_{1a} + R_2} \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIB)}$$

Pasando luego a la segunda columna, se crea un ① en el renglón 2 multiplicando ese renglón por $-\frac{1}{23}$.

El sistema resultante es

Sistema equivalente 3

$$\begin{array}{cc|c|ll} 1 & 4 & 5 & R_{1a} & \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & R_{2b} = -\frac{1}{23}R_{2a} & \textbf{(Paso IIA)} \end{array}$$

Por último, se crea un ⓪ en la segunda columna del renglón 1 al multiplicar el último (R_{2b}) por -4 y al sumar esto al renglón 1, es decir,

Sistema equivalente 4

$$\begin{array}{cc|c|ll} 1 & \textcircled{0} & -3 & R_{1b} = -4R_{2b} + R_{1a} & \textbf{(Paso IIB)} \\ 0 & 1 & 2 & R_{2b} & \end{array}$$

El sistema original ha sido reescrito en la forma diagonal equivalente

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

que es la solución del sistema original.

NOTA
Recuérdese que, en cualquier etapa del proceso de eliminación gaussiana, hay un sistema de ecuaciones que es equivalente al original. Con ello quiere decirse que el sistema modificado de ecuaciones tiene el mismo conjunto solución que el sistema original. Esto se muestra gráficamente en la figura 4.9.

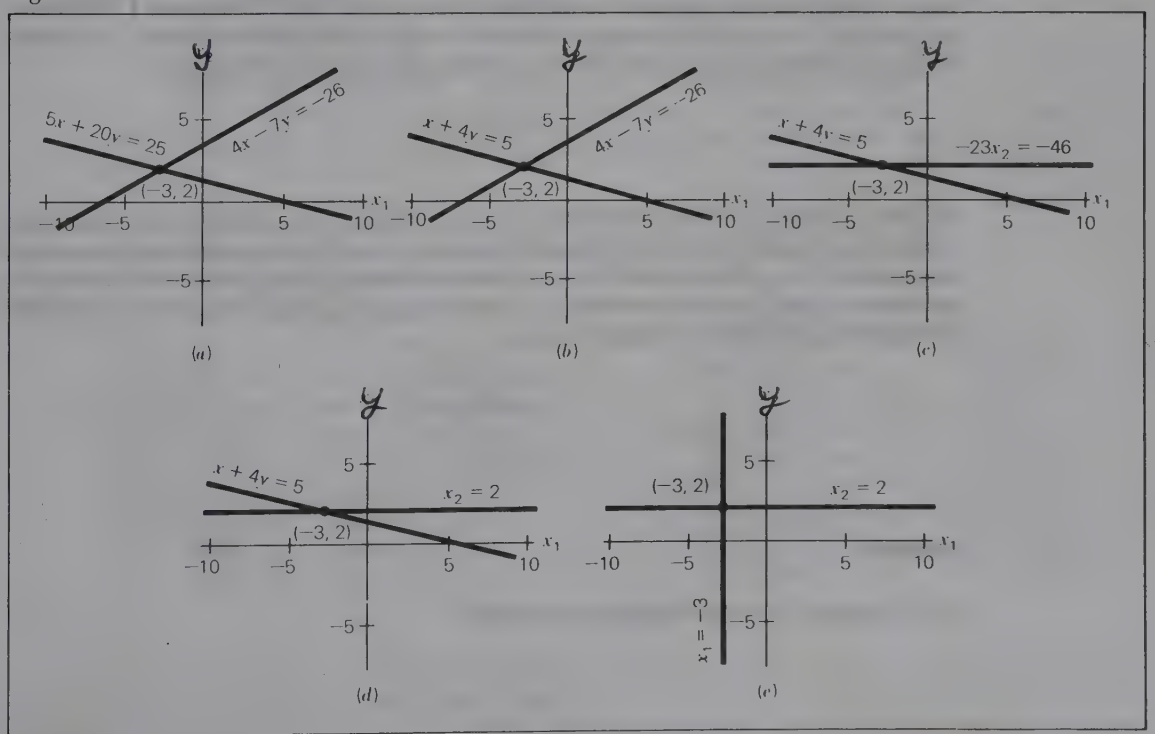


FIGURA 4.9
Sistemas equivalentes para ecuaciones aplicando el método de eliminación gaussiana.

EJEMPLO 8

En el ejemplo 3 se comprobó que el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ -15x + 10y &= -30 \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones. Veamos ahora cómo se descubrió esto usando el método de eliminación gaussiana.

Primero se reescribe el sistema en forma de arreglo

$$\begin{array}{rr|rl} 3 & -2 & 6 & R_1 \\ -15 & 10 & -30 & R_2 \end{array}$$

Se crea un (1) en la columna 1 multiplicando el renglón 1 por $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{rr|rl} (1) & -\frac{2}{3} & 2 & R_{1a} = \frac{1}{3}R_1 \\ -15 & 10 & -30 & R_2 \end{array} \qquad \text{(Paso IIA)}$$

Se crea un (0) en el renglón 2 de la columna 1 al multiplicar el nuevo renglón 1 por 15 y al sumar este múltiplo al renglón 2. El sistema resultante es

$$\begin{array}{rr|rl} 1 & -\frac{2}{3} & 2 & R_{1a} \\ (0) & 0 & 0 & R_{2a} = 15R_{1a} + R_2 \end{array} \qquad \text{(Paso IIB)}$$

Pasando ahora a la columna 2, se desea crear un (1) en el renglón 2. Nótese que la entrada actual es cero. Si se intercambian los renglones 1 y 2 para producir una entrada no cero en esta posición, se anulará lo que se logró en la columna 1. Así pues, no podemos ir más allá en la diagonalización de este sistema de ecuaciones. Si se reescribe este sistema equivalente con las variables incluidas, se obtendrá

$$\begin{aligned} x - \tfrac{2}{3}y &= 2 \\ 0x + 0y &= 0 \end{aligned}$$

El sistema original de dos ecuaciones ha sido reducido a un sistema equivalente que contiene una ecuación. El hecho de que la segunda ecuación haya sido transformada en la identidad $0 = 0$ es la señal de que el sistema original tiene un número infinito de soluciones. Igual que en el ejemplo 3, puede resolverse para x en la primera ecuación y especificar el conjunto solución como

$$\boxed{\begin{array}{l} y \text{ arbitraria} \\ x = \frac{2}{3}y + 2 \end{array}}$$

EJEMPLO 9

En el ejemplo 4 se descubrió que el sistema

$$\begin{aligned} 6x - 12y &= 24 \\ -1.5x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

carecía de solución. Aplicando el método de eliminación gaussiana, en seguida se verá cómo se descubrió eso. Primero se reescribe el sistema en forma de arreglo

$$\begin{array}{rr|ll} 6 & -12 & 24 & R_1 \\ -1.5 & 3 & 9 & R_2 \end{array}$$

Se crea un (1) en la columna 1 multiplicando el renglón 1 por $\frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{rr|ll} (1) & -2 & 4 & R_{1a} = \frac{1}{6}R_1 \\ -1.5 & 3 & 9 & R_2 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIA)}$$

Se crea un (0) en el renglón 2 de la columna 1 al multiplicar el nuevo renglón 1 por 1.5 y sumar este múltiplo al renglón 2.

$$\begin{array}{rr|ll} 1 & -2 & 4 & R_{1a} \\ (0) & 0 & 15 & R_{2a} = 1.5R_{1a} + R_2 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIB)}$$

Como en el ejemplo 8, no puede irse más allá en la diagonalización de este sistema. De hecho, el renglón 2 de este sistema equivalente representa una contradicción:

$$0x + 0y = 15$$

o bien

$$0 = 15$$

Ésta es la misma señal que la del procedimiento de eliminación explicada antes. Este sistema es inconsistente ya que carece de solución.

Ejercicios de seguimiento de la sección 4.3

Determine los conjuntos solución para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de eliminación gaussiana.

1 $2x + 4y = -16$
$x - 2y = 16$

3 $5x - 2y = -12$
$-3x + y = 7$

5 $6x - 8y = 14$
$-3x + 4y = -7$

7 $-x + 2y = -1$
$5x - 10y = 6$

9 $4x - y = 11$
$3x + 5y = -9$

11 $8x - 6y = 24$
$-4x + 3y = 10$

13 $5x - 2y = 19$
$x + 3y = -3$

15 $2x - 4y = 8$
$-x + 2y = 10$

17 $x - 5y = 8$
$3x + y = -8$

19 $12x + 20y = -8$
$-3x - 5y = 2$

2 $3x - 2y = 7$
$2x + 4y = 10$

4 $-2x + 5y = 40$
$3x - 2y = -5$

6 $-x + 2y = 4$
$5x - 10y = -20$

8 $24x - 15y = 30$
$-8x + 5y = -20$

10 $5x - 3y = 17$
$-2x + 5y = -22$

12 $-x + 2y = -8$
$3x - 6y = 24$

14 $8x - 3y = 6$
$3x + 5y = -10$

16 $12x - 6y = 21$
$-4x + 2y = -7$

18 $x - y = 0$
$3x + 4y = -21$

20 $3x - 5y = 9$
$x + 2y = -4$

4.4 SISTEMAS DE TRES VARIABLES

Análisis gráfico

Con tres variables la gráfica de cada ecuación lineal es un *plano* en tres dimensiones. Cuando se resuelve un sistema de ecuaciones con tres variables, se buscan los puntos comunes a los planos. Se considerarán primero los sistemas (2 × 3), o sea los que se representan con dos planos. Para los sistemas (2 × 3) no puede haber una solución única. No es posible que dos planos se intersequen en un solo punto. Reflexione el lector sobre esto. *Los conjuntos solución para los sistemas (2 × 3) o no contienen elementos (solución) o contienen un número infinito de soluciones*. La figura 4.10 muestra las diversas posibilidades de estos tipos de sistemas.

Para los sistemas (m × 3) donde m ≥ 3, es posible tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones. La figura 4.11 muestra varias posibilidades de solución para los sistemas (3 × 3).

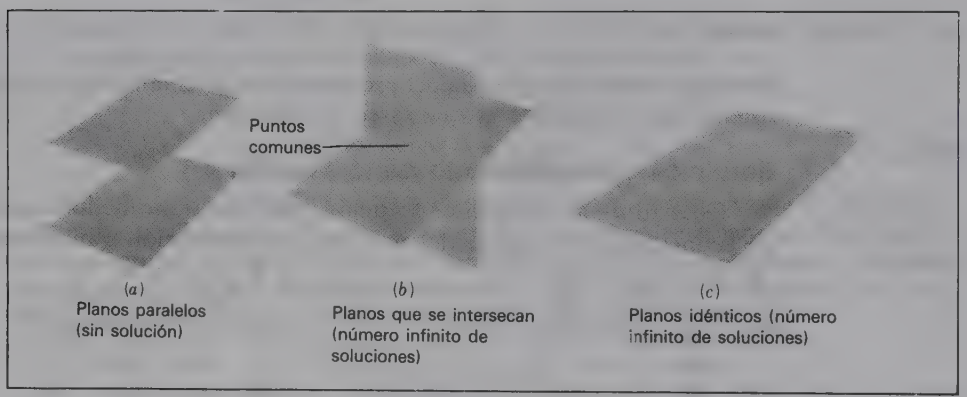


FIGURA 4.10 Posibles conjuntos solución para los sistemas (2 × 3).

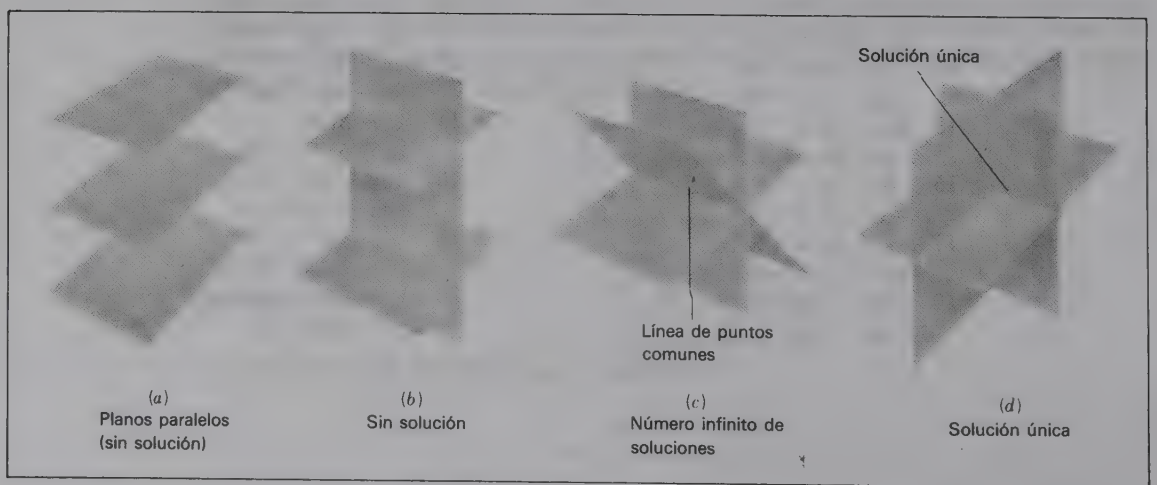
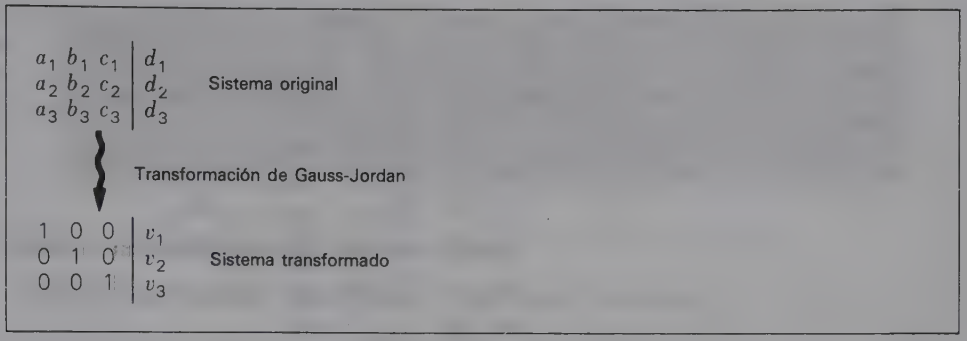


FIGURA 4.11 Posibles conjuntos solución para los sistemas (3 × 3).

FIGURA 4.12
Transformación de coeficientes para el sistema (3 × 3).



Procedimiento de eliminación gaussiana para los sistemas (3 × 3)

Este procedimiento trata de transformar el sistema en forma diagonal como se advierte en la figura 4.12. La transformación deberá efectuarse columna por columna, pasando de izquierda a derecha. En el siguiente ejemplo se ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 10 (SOLUCIÓN ÚNICA)

Determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 10x_3 &= 13 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

En este ejemplo, las transformaciones sucesivas simplemente se enumeran con las correspondientes operaciones de renglón indicadas a la derecha de cada uno.

$$\begin{array}{rrr|rl} \textcircled{1} & 1 & 1 & 6 & R_1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & R_2 \\ 4 & 5 & -10 & 13 & R_3 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIA innecesario)}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 1 & 1 & 6 & R_1 \\ \textcircled{0} & -3 & 1 & -8 & R_{2a} = -2R_1 + R_2 \\ 4 & 5 & -10 & 13 & R_3 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIB)}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 1 & 1 & 6 & R_1 \\ 0 & -3 & 1 & -8 & R_{2a} \\ \textcircled{0} & 1 & -14 & -11 & R_{3a} = -4R_1 + R_3 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIB)}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 1 & 1 & 6 & R_1 \\ 0 & \textcircled{1} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & R_{2b} = -\frac{1}{3}R_{2a} \\ 0 & 1 & -14 & -11 & R_{3a} \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIA)}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & \textcircled{0} & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & R_{1a} = -R_{2b} + R_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & R_{2b} \\ 0 & 1 & -14 & -11 & R_{3a} \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIB)}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & R_{1a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & R_{2b} \\ 0 & \textcircled{0} & -\frac{41}{3} & -\frac{41}{3} & R_{3b} = -R_{2b} + R_{3a} \end{array} \quad \textbf{(Paso IIB)}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & R_{1a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & R_{2b} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & R_{3c} = -\frac{3}{41}R_{3b} \end{array} \quad \textbf{(Paso IIA)}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & R_{1a} \\ 0 & 1 & \textcircled{0} & 3 & R_{2c} = \frac{1}{3}R_{3c} + R_{2b} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & R_{3c} \end{array} \quad \textbf{(Paso IIB)}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & \textcircled{0} & 2 & R_{1b} = -\frac{4}{3}R_{3c} + R_{1a} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & R_{2c} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & R_{3c} \end{array} \quad \textbf{(Paso IIB)}$$

El sistema tiene una solución única cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 1$.

EJEMPLO 11 (SIN SOLUCIÓN)

Determine el conjunto solución para los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 6x_1 - 3x_2 - 9x_3 &= 24 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Como en el ejemplo anterior, las transformaciones sucesivas se enumeran con las correspondientes operaciones de renglón indicadas a la derecha de cada renglón.

$$\begin{array}{ccc|cl} -2 & 1 & 3 & 12 & R_1 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & R_2 \\ 6 & -3 & -9 & 24 & R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} \textcircled{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -6 & R_{1a} = -\frac{1}{2}R_1 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & R_2 \\ 6 & -3 & -9 & 24 & R_3 \end{array} \quad \textbf{(Paso IIA)}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -6 & R_{1a} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & 16 & R_{2a} = R_2 - R_{1a} \\ 6 & -3 & -9 & 24 & R_3 \end{array} \quad \textbf{(Paso IIB)}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -6 & R_{1a} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & 16 & R_{2a} \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & 60 & R_{3a} = R_3 - 6R_{1a} \end{array} \quad \textbf{(Paso IIB)}$$

En esta etapa, el renglón 3 en el sistema transformado representa una proposición falsa. Ello significa que el sistema original de ecuaciones no tiene un conjunto solución.

EJERCICIO

En este ejemplo no se transformó el sistema cuanto se podía. La causa de la interrupción fue la proposición falsa observada en el renglón 3. Prosiga el proceso de transformación hasta que pueda y verifique que el sistema no pueda diagonalizarse por completo.

EJEMPLO 12 (NÚMERO INFINITO DE SOLUCIONES)

Determine el conjunto solución para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -5 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 30 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Adviértase en este ejemplo que están combinándose algunas de las operaciones de renglón en el proceso de transformación a fin de no exceder el espacio. En esta parte del libro, el lector seguramente empieza a entender mejor en qué consiste esto.

$$\begin{array}{rrr|rl} \textcircled{1} & 1 & 1 & 20 & R_1 \\ 2 & -3 & 1 & -5 & R_2 \\ 6 & -4 & 4 & 30 & R_3 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIA innecesario)}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 1 & 1 & 20 & R_1 \\ \textcircled{0} & -5 & -1 & -45 & R_{2a} = R_2 - 2R_1 \\ \textcircled{0} & -10 & -2 & -90 & R_{3a} = R_3 - 6R_1 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIB)} \quad \textbf{(Paso IIB)}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 1 & 1 & 20 & R_1 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{5} & 9 & R_{2b} = -\frac{1}{5}R_{2a} \\ 0 & -10 & -2 & -90 & R_{3a} \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIA)}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & \textcircled{0} & \frac{4}{5} & 11 & R_{1a} = R_1 - R_{2b} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 9 & R_{2b} \\ 0 & \textcircled{0} & 0 & 0 & R_{3b} = R_{3a} + 10R_{2b} \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIB)} \quad \textbf{(Paso IIB)}$$

En esta etapa se hace imposible continuar el proceso de diagonalización. No puede crearse un 1 en la columna 3, sin cambiar las dos primeras. El hecho de que el tercer renglón haya sido convertido en la identidad $0 = 0$ indica la presencia de un número infinito de conjuntos solución para el sistema.

ESPECIFICACIÓN DE SOLUCIONES CON DIAGONALIZACIÓN INCOMPLETA

Los métodos de eliminación gaussiana deberán aplicarse de izquierda a derecha para poner el mayor número posible de columnas en la forma apropiada. Cuando no puede lograrse diagonalización completa (y no hay una señal que indique *ausencia de solución*), el conjunto solución puede especificarse del modo siguiente:

1 Para las columnas que no estén en la forma correcta, las variables correspondientes pueden adoptar cualquier valor (arbitrario).

2 Para las columnas que presentan la forma apropiada, los valores de las variables correspondientes pueden expresarse en términos de las variables del paso 1.

En este ejemplo, la columna 3 no puede transformarse en la forma apropiada. Por consiguiente, a x_3 puede asignársele un valor arbitrario cualquiera y los valores de x_1 y x_2 pueden formularse en términos de ese valor. El sistema de ecuaciones correspondiente a la transformación gaussiana final es

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \tfrac{4}{5}x_3 &= 11 \\ x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Si estas dos ecuaciones se resuelven para x_1 y x_2, respectivamente, se obtendrá

$$\begin{aligned} x_1 &= 11 - \tfrac{4}{5}x_3 \\ x_2 &= 9 - \tfrac{1}{5}x_3 \end{aligned}$$

Los valores de x_1 y x_2 dependen del de x_3, por lo cual una forma generalizada de especificar la solución del sistema original de ecuaciones es:

$$\boxed{\begin{aligned} &x_3 \text{ arbitraria} \\ x_1 &= 11 - \tfrac{4}{5}x_3 \\ x_2 &= 9 - \tfrac{1}{5}x_3 \end{aligned}}$$

Una solución es $x_3 = 20$,

$$\begin{aligned} x_1 &= 11 - \tfrac{4}{5}(20) \\ &= 11 - 16 \\ &= -5 \\ x_2 &= 9 - \tfrac{1}{5}(20) \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Menos de tres ecuaciones

En la sección dedicada al análisis gráfico se llegó a la conclusión de que un sistema (2×3) no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones. Los siguientes ejemplos ilustran la identificación de soluciones aplicando el método de eliminación gaussiana.

EJEMPLO 13

Determine el conjunto solución para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= -14 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Primero se escribe el sistema en forma de arreglo:

$$\begin{array}{rrr|rl} -4 & 6 & 2 & 8 & R_1 \\ 2 & -3 & -1 & -14 & R_2 \\ \hline \textcircled{1} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & R_{1a} = -\frac{1}{4}R_1 \\ 2 & -3 & -1 & -14 & R_2 \\ \hline 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & R_{1a} \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & -10 & R_{2a} = R_2 - 2R_{1a} \end{array}$$

El renglón 2 en el sistema transformado es una proposición falsa. Ello significa que no tiene solución el sistema original de ecuaciones.

EJEMPLO 14

Determine el conjunto solución para el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 20 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$\left[\begin{array}{ccc|cl} 4 & -2 & 1 & 10 & R_1 \\ -3 & 2 & 4 & 20 & R_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cl} \textcircled{1} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2.5 & R_{1a} = \frac{1}{4}R_1 \\ -3 & 2 & 4 & 20 & R_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cl} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2.5 & R_{1a} \\ \textcircled{0} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} & 27.5 & R_{2a} = R_2 + 3R_{1a} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cl} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2.5 & R_{1a} \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{19}{2} & 55 & R_{2b} = 2R_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cl} 1 & \textcircled{0} & 5 & 30 & R_{1b} = R_{1a} + \frac{1}{2}R_{2b} \\ 0 & 1 & \frac{19}{2} & 55 & R_{2b} \end{array}\right]$$

No es posible ir más allá en la diagonalización del sistema. Cualquier intento de valerse de las operaciones de renglón para modificar la tecera columna perturbaría las dos primeras columnas. Ante la diagonalización incompleta (y sin señales de ausencia de solución para el sistema), se concluye que existe un número infinito de soluciones. Aplicando el mismo procedimiento que en el ejemplo 12, se especifica en los siguientes términos la solución de este problema:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_3 \text{ arbitraria} \\ x_2 = 55 - \frac{19}{2}x_3 \\ x_1 = 30 - 5x_3 \end{array}}$$

EJEMPLO 15

Determine el conjunto solución para el sistema

$$\begin{aligned} -10x_1 + 25x_2 - 15x_3 &= 35 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$\left[\begin{array}{ccc|cl} -10 & 25 & -15 & 35 & R_1 \\ 2 & -5 & 3 & -7 & R_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cl} \textcircled{1} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -3.5 & R_{1a} = -\frac{1}{10}R_1 \\ 2 & -5 & 3 & -7 & R_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cl} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -3.5 & R_{1a} \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & 0 & R_{2a} = R_2 - 2R_{1a} \end{array}\right]$$

No es posible ir más allá. Sin una señal de ausencia de solución, se concluye que existe un número infinito de soluciones. Dado que no pueden ponerse en forma apropiada las columnas 2 y 3, a x_2 y x_3 pueden asignárseles valores arbitrarios y el valor de x_1 puede expresarse en términos de esos dos. El conjunto solución puede generalizarse así

$$\begin{array}{|l|}\hline x_2 \text{ arbitraria} \\ x_3 \text{ arbitraria} \\ x_1 = \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - 3.5 \\ \hline \end{array}$$

Sistemas de variables *n*

Cuando hay más de tres variables ($n > 3$), el marco gráfico de referencia desaparece. Sin embargo, el procedimiento de eliminación gaussiana es un método de solución válida para estos sistemas. En estos casos, los posibles conjuntos solución se parecen a los casos estudiados para tres variables. Por ejemplo, si $m = n$ (el número de variables y ecuaciones es igual), es posible tener una solución única, un número infinito de soluciones o ausencia de éstas. Las indicaciones de cada uno de dichos casos son exactamente iguales a las de los sistemas (3×3).

Cuando el número de ecuaciones es menor que el de las variables ($m < n$), no habrá solución o habrá un número infinito de soluciones. Y cuando el número de soluciones es mayor que el de variables ($m > n$), es posible que no haya solución alguna, que haya un número infinito de soluciones o una solución única. Los objetivos, aspectos de la interpretación y la naturaleza general del procedimiento de eliminación gaussiana son iguales en todas estas situaciones. Más allá de los sistemas de tres variables, son imprácticos los métodos de cálculo manual. Se cuenta con procedimientos computarizados de solución para resolver sistemas más grandes.

Ejercicios de seguimiento de la sección 4.4

Determine el conjunto solución para los siguientes sistemas de ecuaciones. En cualquiera que tenga un número infinito de soluciones, especifique una forma generalizada de la solución.

1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 &= 9 \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 10x_1 - 5x_2 - 15x_3 &= 30 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 25 \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} -4x_1 - 12x_2 + 4x_3 &= -40 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 10 \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

7
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 12 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 17 \end{aligned}$$

9 $-x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$
$3x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 14$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 24$

10 $5x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 24$
$3x_1 - 3x_2 + x_3 = 54$
$-2x_1 + x_2 - 5x_3 = 30$

11 $4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 13$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3$

12 $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$
$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4$
$x_1 + x_2 + x_3 = 6$

13 $x_1 - x_2 + x_3 = 10$
$-3x_1 + x_2 - 2x_3 = 17$
$-4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7$

14 $10x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 60$
$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 48$
$-4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -36$

15 $-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 30$

16 $3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -30$
$-5x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 50$

17 $x_1 + x_2 + x_3 = 25$
$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$

18 $8x_1 - 4x_2 + 16x_3 = 50$
$-2x_1 + x_2 - 4x_3 = 20$

19 $-x_1 + 2x_2 + x_3 = -4$
$4x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 10$

20 $3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3$
$-15x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 15$

21 En los ejemplos 14 y 15 describa la representación gráfica. ¿Hay diferencias en las representaciones gráficas de los dos sistemas de ecuaciones?

22 ¿Qué posibilidades de conjuntos solución existen para (*a*) un sistema de ecuaciones (5 × 3), (*b*) un sistema (4 × 8), (*c*) un sistema (25 × 25), (*d*) un sistema (100 × 75) y (*e*) un sistema (4000 × 1000)?

4.5 APLICACIONES SELECTAS

Definición de las funciones matemáticas

La solución de los sistemas de ecuaciones ofrece otra manera de definir las funciones matemáticas. Según se señaló en el capítulo 3, una función lineal con dos variables tiene la forma

$$y = f(x) = ax + b \tag{4.16}$$

A fin de definir una función lineal de esta forma, hay que determinar los valores de a y b. Si se conocen las coordenadas de los dos puntos que se hallan en la gráfica de la función, los valores de a y b pueden determinarse mediante los procedimientos descritos en la sección 2.4. Otro método consiste en sustituir *cada par* de coordenadas en la ecuación (4.16), lo cual da por resultados dos ecuaciones. Y entonces éstas se resuelven para determinar a y b.

EJEMPLO 16

Para obtener la función lineal que satisfacen (4, 8) y (7, −4), pueden sustituirse (4, 8) y (7, −4) en la ecuación (4.16). Esto nos da

$$8 = 4a + b \tag{4.17}$$
$$-4 = 7a + b \tag{4.18}$$

La multiplicación de la ecuación (4.17) por −1 y la adición del resultado a la ecuación (4.18) producen

$$\begin{aligned} -8 &= -4a - b \\ -4 &= 7a + b \\ \hline -12 &= 3a \end{aligned}$$

o bien

$$-4 = a$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (4.17) se obtiene

$$8 = 4(-4) + b$$

o bien

$$24 = b$$

Una vez definidas a y b como -4 y 24, respectivamente, es posible especificar la función así

$$y = f(x) = -4x + 24$$

Problema de la mezcla de productos

Tiene varias aplicaciones la determinación de las cantidades de diferentes productos que satisfagan exigencias específicas. En el siguiente ejemplo, se desea calcular las cantidades de tres productos que aprovechan al máximo la capacidad disponible de manufactura.

EJEMPLO 17

Una compañía elabora tres productos que han de ser procesados en tres departamentos. En la tabla 4.1 se resumen las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Además las capacidades semanales se expresan para cada departamento en términos de las horas de trabajo disponibles. Se desea determinar si hay combinaciones de los tres grupos que aprovechen al máximo las capacidades semanales de los tres departamentos.

TABLA 4.1

	Producto			Horas disponibles
Departamento	1	2	3	a la semana
A	2	3.5	3	1 200
B	3	2.5	2	1 150
C	4	3	2	1 400

SOLUCIÓN

Si x_j = *número de unidades fabricadas por semana del producto j*, las condiciones a satisfacer se expresan en el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3.5x_2 + 3x_3 &= 1\,200 \quad \text{(departamento A)} \\ 3x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 &= 1\,150 \quad \text{(departamento B)} \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1\,400 \quad \text{(departamento C)} \end{aligned}$$

EJERCICIO

Verifique que, al resolver simultáneamente estas ecuaciones, el conjunto solución constará de una solución que es $x_1 = 200$, $x_2 = 100$ y $x_3 = 150$, o sea (200, 100, 150). Interprete el conjunto solución para el supervisor de producción de esta compañía.

EJEMPLO 18

Reconsideración del transporte aéreo de emergencia En el ejemplo 22 (capítulo 2, página 74) del inicio de este capítulo, se expuso un problema que consistía en el transporte aéreo de emergencia de suministros a una ciudad de América del Sur. Se fijaron dos restricciones: una capacidad de volumen de 6 000 pies cúbicos y una capacidad de peso de 40 000 libras. Las dos ecuaciones cuyos conjuntos solución contienen cantidades de varios suministros que llenan el avión a su respectiva capacidad fueron las siguientes

$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 + 8x_3 + 6x_4 &= 6\,000 \quad \text{(volumen)} \\ 150x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 70x_4 &= 40\,000 \quad \text{(peso)} \end{aligned}$$

(En la página 75 se da una definición de las variables.)

Para determinar las cantidades de los suministros que llenan el avión *tanto* a su capacidad de volumen *como* de peso, es preciso definir el conjunto solución del sistema. De las explicaciones precedentes se deduce que o no hay una solución o lo que es más probable, existe un número infinito de soluciones del sistema, puesto que $m < n$. Pueden obtenerse soluciones muestra suponiendo valores de dos de las cuatro variables y resolviendo para los valores de las dos restantes. He aquí un ejemplo: si $x_3 = x_4 = 0$, entonces $x_1 = 240$ y $x_2 = 40$.

EJERCICIO

Interprete el significado de la solución muestra. ¿Qué se enviará por avión? Si el primer avión únicamente transportará agua y alimentos, determine las cantidades apropiadas de ellos.*

Modelo de mezclado

En algunas aplicaciones se requiere mezclar los ingredientes o componentes para formar una combinación definitiva que reúna ciertas características. He aquí algunos ejemplos: la mezcla de gasolina y otros productos del petróleo, la mezcla de granos de café y la de whiskys. Muchas veces las ecuaciones lineales o las desigualdades definen las necesidades y relaciones del mezclado. En el siguiente ejemplo se ilustra una aplicación simple.

EJEMPLO 19

Un fabricante de café quiere mezclar tres tipos de granos en una mezcla final del producto. Los tres tipos de grano le cuestan \$1.20, \$1.60 y \$1.40 por libra, respectivamente. El fabricante quiere mezclar un lote de 40 000 libras y tiene un presupuesto de 57 600 dólares para la compra de café. Al mezclar el café, una restricción es que

*$x_3 = 900$ y $x_4 = -200$. Un número negativo de recipientes de agua carece de sentido, por lo cual se concluye que no hay una combinación de recipientes de alimentos y agua solamente que llene el avión *exactamente* a su capacidad de volumen y de peso.

la cantidad usada del componente 2 debe ser el doble de la del componente 1(el fabricante piensa que esto es indispensable para evitar un sabor amargo).

El objetivo es averiguar si hay una combinación de los tres componentes que lleve a una mezcla definitiva 1) que sea de 40 000 libras, 2) que cueste $57 600 y 3) que satisfaga la restricción de mezclado de los componentes 1 y 2.

Si x_j representa el número de libras del componente utilizado en la mezcla final, la ecuación (4.19) especifica que la mezcla total deberá pesar 40 000 libras:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40\,000 \tag{4.19}$$

La ecuación (4.20) especifica que el costo total de los tres componentes deberá ser de $57 600:

$$1.20x_1 + 1.60x_2 + 1.40x_3 = 57\,600 \tag{4.20}$$

La restricción de la receta se expresa en los siguientes términos:

$$x_2 = 2x_1$$

o alternativamente,

$$-2x_1 + x_2 = 0 \tag{4.21}$$

EJERCICIO

Verifique que, cuando las ecuaciones (4.19) a (4.21) se resuelven simultáneamente, la solución es $x_1 = 8000$, $x_2 = 16\,000$ y $x_3 = 16\,000$. Interprete esta solución para el fabricante.

Modelo de cartera

Una ***cartera*** (o portafolio) de acciones no es otra cosa que un grupo de acciones que posee un inversionista. Al seleccionar una cartera para un inversionista, a menudo se presta atención a factores como la cantidad de dinero que se invertirá, la actitud que tiene el inversionista ante el riesgo (¿le gusta correr riesgos?) y el hecho de que esté o no interesado en un crecimiento a largo plazo o en rendimiento a corto plazo. Este tipo de problema se asemeja a la mezcla de productos. Los productos son las acciones o valores de que se dispone para la inversión.

EJEMPLO 20

Cuando la gente invierte dinero hay profesionales (entre ellos, los corredores de bolsa) a quienes se acude en busca de orientación respecto al portafolio o cartera que mejor cubra las necesidades del inversionista. Supóngase que un inversionista ha consultado a un experto en inversiones. Después de conversar con el cliente, el experto decide que el cliente desea una cartera que posea los siguientes atributos o cualidades: 1) el valor total de cartera en el momento de la compra es $50 000, 2) el crecimiento anual esperado en el valor de mercado es de 12% y 3) el factor promedio de riesgo es de 10%. Se han identificado tres opciones con las tasas relativas de crecimiento y riesgo que aparecen en la tabla 4.2.

TABLA 4.2

Inversión	Crecimiento anual esperado en el valor de mercado	Riesgo previsto
1	16%	12%
2	8	9
3	12	8

Para determinar el portafolio, *se define x_j como el número de dólares invertidos en la inversión j*. El primer atributo puede expresarse en forma de ecuación así

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50\,000 \tag{4.22}$$

El atributo (2) no ofrece dificultades en su formulación. Antes de hacer la formulación se estudiará un ejemplo sencillo. Supóngase que deposita \$100 en un banco y que le rinde un interés de 8% al año. Supóngase asimismo que invierte \$200 en un certificado de depósito que da intereses a una tasa de 14% anual. Para calcular el rendimiento porcentual *promedio* sobre una inversión de \$300, hay que calcular el interés total y dividirlo entre la inversión original, o sea

$$\text{Rendimiento porcentual promedio} = \frac{\text{dólares de interés ganados}}{\text{total de dólares invertidos}}$$

En este ejemplo, el rendimiento porcentual anual promedio se calcula como

$$\frac{0.08(100) + 0.14(200)}{100 + 200} = \frac{8 + 28}{300} = \frac{36}{300} = 0.12, \quad \text{o} \quad 12\%$$

Para obtener el crecimiento porcentual promedio en el ejemplo, hay que determinar el interés anual (en dólares) de cada inversión, sumar los intereses y dividir el resultado entre la inversión total, es decir,

$$\text{Crecimiento porcentual promedio} = \frac{0.16x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$$

Dado que la ecuación (4.22) especifica que $x_1 + x_2 + x_3 = 50\,000$ y como el inversionista desea un crecimiento porcentual promedio de 12%, la ecuación puede escribirse así

$$\frac{0.16x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3}{50\,000} = 0.12$$

o bien, multiplicando ambos miembros de la ecuación por 50 000, se obtiene

$$0.16x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3 = 6\,000 \tag{4.23}$$

Esta ecuación establece que el incremento anual total en el valor de mercado para las tres inversiones debe ser de \$6000 (o sea 12% de \$50 000).

La condición de riesgo ponderado se determina exactamente del mismo modo. Para calcular el riesgo promedio por dólar invertido, cada dólar debe multiplicarse por el factor de riesgo asociado a la inversión de él. Hay que sumarlos en todas las inver-

siones diferentes y dividirlos entre la inversión total. Esta relación se generaliza mediante la ecuación

$$\text{Riesgo promedio} = \frac{\text{suma de los riesgos ponderados de todas las inversiones}}{\text{total de dólares invertidos}}$$

Esta ecuación puede expresarse en el ejemplo como

$$\frac{0.12x_1 + 0.09x_2 + 0.08x_3}{50\,000} = 0.10$$

o bien

$$0.12x_1 + 0.09x_2 + 0.08x_3 = 5\,000 \qquad \textbf{(4.24)}$$

EJERCICIO

Verifique que, cuando las ecuaciones (4.22) a (4.24) se resuelven simultáneamente, $x_1 = 20\,000$, $x_2 = 20\,000$ y $x_3 = 10\,000$. Interprete esta solución para el inversionista.

Ejercicios de seguimiento de la sección 4.5

1 Por medio de ecuaciones simultáneas determine la función lineal que contiene los puntos (20, 50) y (40, 10).

2 Usando ecuaciones simultáneas, determine la función lineal que contiene los puntos (−10, 5) y (10, 75).

3 Funciones cuadráticas En el ejemplo 16 se ilustra un método de determinar la ecuación para una función lineal de la forma $y = f(x) = ax + b$. Tal función se define por medio de dos parámetros a y b. Estos parámetros se determinan para una función si se conocen las coordenadas de dos puntos que satisfacen la ecuación.

Una función cuadrática es una función no lineal que tiene la forma general $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, donde a_0, a_1 y a_2 son reales y $a_2 \neq 0$. Si a_0, a_1 y a_2 pueden especificarse, la función está definida. Los tres parámetros (a_0, a_1 y a_2) definen una función cuadrática, por lo cual se necesitan tres puntos de datos para definir sus valores. Una función cuadrática contiene los puntos (0,,10), (10, −70) y (−5, −25). Sustituya esas coordenadas en la función cuadrática general (de manera semejante a la que se utilizó en el ejemplo 16) y resuelva las tres ecuaciones lineales resultantes para a_0, a_1 y a_2. ¿Cuál es la ecuación de la función cuadrática que contiene esos puntos?

4 Una compañía fabrica tres productos, cada uno de los cuales ha de procesarse en un departamento. La tabla 4.3 sintetiza los requerimientos de horas de trabajo y materias primas por cada unidad de los productos. Al mes se dispone de 1500 horas de trabajo y 3800 libras de materias primas. Si la producción mensual combinada de los tres productos debe ser de 500 unidades, investigue si hay combinaciones de los tres productos que aprovechen al máximo las disponibilidades mensuales de mano de obra y de materias primas, satisfaciendo al mismo tiempo la meta de producir 500 unidades.

TABLA 4.3

	Producto		
	1	2	3
Horas de trabajo/unidad	3	2	4
Libras de materias primas/unidad	10	8	6

5 Un fabricante de café desea mezclar tres tipos de grano en 10 000 libras de una mezcla final. Los tres componentes cuestan \$2.40, \$2.60 y \$2 por libra, respectivamente. El fabricante desea una mezcla de 10 000 libras a un costo total de \$21 000. Al mezclar el café, una restricción establece que las cantidades usadas de los granos componentes 1 y 2 sean iguales. Investigue si hay una combinación de los tres tipos de grano que dé una mezcla final de 10 000 libras que cueste \$21 000 y satisfaga la restricción de la mezcla.

6 Un inversionista cuenta con 500 000 dólares para invertir. Están estudiándose tres inversiones, cada una con una tasa de interés anual esperada. Las tasas de interés son 15, 10 y 18%, respectivamente. La meta del inversionista es un rendimiento promedio de 15% en las tres inversiones. Por el rendimiento alto en la alternativa de inversión 3, el inversionista quiere que la cantidad de esta opción sea 40% del total de la inversión. Determine si hay una estrategia de inversión que satisfaga estas exigencias.

7 Mezcla dietética Un dietista está planeando una comida que conste de tres tipos de alimentos. En la planeación de la comida, quiere que ésta satisfaga las necesidades diarias mínimas (NDM) de tres vitaminas. La tabla 4.4 resume el contenido vitamínico por onza de cada tipo de alimento, expresado en miligramos (mg).

TABLA 4.4

	Contenido vitamínico/onza, mg		
Tipo de alimento	**Vitamina 1**	**Vitamina 2**	**Vitamina 3**
1	4	2	1
2	6	8	6
3	3	4	2
NDM	52	56	34

Determine si hay combinaciones de los tres alimentos que satisfagan exactamente las necesidades diarias mínimas de las tres vitaminas.

8 Un destilador quiere mezclar tres componentes de whisky en un whisky de alta calidad. Suponiendo que, durante el proceso del mezclado, se desea mezclar 50 000 litros del whisky. El único requisito de la mezcla es que la cantidad empleada del whisky 1 sea el doble del que se usa del whisky 3. Además, se han destinado 130 000 dólares para adquirir los whiskys componentes. Los tres cuestan \$2.50, \$2.00 y \$3.00 por li-

tro, respectivamente. Determine si hay una combinación de los tres que produzca los 50 000 litros deseados. De ser así, ¿qué cantidades deberían utilizarse?

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

ausencia de solución 123
conjunto solución 122
dimensiones 122
ecuaciones equivalentes 124
ecuaciones inconsistentes 124
método de eliminación 125
método de eliminación gaussiana 132
número infinito de soluciones 124
operaciones básicas de renglón 132
sistema de ecuaciones 122
solución única 123

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1 a 26 se relacionan con la sección 4.2. En los ejercicios 1 a 8 compare las intersecciones con el eje y y las pendientes de las líneas que representan cada ecuación y determine la naturaleza del conjunto solución.

1 $4x - 2y = 12$
$x - 2y = 18$

2 $-x + 2y = -3$
$3x - 6y = 9$

3 $16x - 4y = 24$
$-4x + y = 10$

4 $x - 2y = 0$
$3x + 4y = 0$

5 $2x + 3y = 0$
$4x + y = 10$

6 $x - 2y = 10$
$-4x + 8y = -6$

7 $x + 3y = 10$
$3x - y = 10$

8 $5x - 3y = 9$
$x + y = 5$

9 a 6 Resuelva en forma gráfica los ejercicios 1 a 8.

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. En los que tengan un número infinito de soluciones, especifique la forma generalizada de la solución.

17 $x + y = 6$
$3x - 2y = 3$

18 $4x - 2y = -40$
$3x + 4y = 25$

19 $5x - 2y = 18$
$3x + y = 2$

20 $6x + 3y = 6$
$2x + 4y = 14$

21 $x - 2y = -8$
$-4x + 8y = 10$

22 $2x - 3y = -1$
$-10x + 15y = 5$

23 $x + y = 0$
$2x - 3y = -10$
$x + 2y = 2$
$-5x + y = 12$
$3x - 2y = 10$

24 $x + y = 1$
$3x - 2y = 18$
$-x + 3y = -13$
$5x - y = 23$
$-x - 4y = 8$

25 $x + y = -1$
$2x - 3y = 8$
$x + 2y = -3$
$4x - 3y = 10$

26 $3x + y = 10$
$x - y = -2$
$2x + 3y = 16$
$x + y = 4$

Los ejercicios 27 a 40 se relacionan con la sección 4.3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones empleando el método de eliminación gaussiana.

27 $5x - 8y = 1$
$4x + 2y = 26$

28 $-3x + 2y = 22$
$5x + 4y = 0$

29 $x - 2y = 4$
$-5x + 10y = 10$

30 $5x - 3y = -2$
$-25x + 15y = 10$

31 $4x - 8y = -32$
$-x + 2y = 10$

32 $3x - 4y = 8$
$-2x + 2y = -6$

33 $x - y = 3$
$5x + 2y = -20$

34 $15x - 3y = 24$
$-5x + y = -8$

35 $6x - y = 26$
$2x + 3y = 2$

36 $4x + 5y = -5$
$6x - 3y = 45$

37 $-x + 2y = -4$
$5x - 10y = 20$

38 $-2x + y = -3$
$12x - 6y = 14$

39 $7x - 4y = 1$
$4x + 2y = -8$

40 $8x - 3y = 49$
$2x + 3y = 1$

Los ejercicios 41 a 54 se relacionan con la sección 4.4. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de eliminación gaussiana.

41 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$
$x_1 + 3x_2 - x_3 = 11$

42 $2x_1 - x_2 + x_3 = -2$
$x_1 + 4x_2 - x_3 = 5$
$x_1 + x_2 + x_3 = 6$

43 $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$
$x_1 - 4x_2 + x_3 = 6$
$3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 25$

44 $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$
$x_1 + x_2 + x_3 = 10$
$-9x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -18$

45 $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1$

46 $2x_1 - x_2 + x_3 = -5$
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -12$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$

47 $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$
$x_1 + x_2 + x_3 = 10$
$-6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -10$

48 $x_1 - 2x_2 + x_3 = -4$
$2x_1 + 6x_2 - x_3 = 12$
$-3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 10$

49 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 40$

50 $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 9$

51 $x_1 + x_2 + x_3 = 6$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2$
$x_1 - x_2 - x_3 = -4$
$5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7$

52 $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 + 3x_2 = 2$
$3x_1 - 2x_3 = 6$

53 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 - x_3 = 7$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$
$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7$

54 $4x_1 - x_2 + 3x_3 = 15$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$6x_1 - x_2 + 2x_3 = 16$

***55** Suponga que un sistema de ecuaciones (3×3) está representado por tres planos que se intersecan en una línea común. ¿Cuántas variables se especificarán como arbitrarias en la solución generalizada?

***56** Suponga en el ejercicio anterior que los tres planos son idénticos. ¿Cuántas variables deberán especificarse como arbitrarias?

***57** Suponga que un sistema de ecuaciones (2×4) puede concebirse como representado por m hiperplanos idénticos en 4 espacios (dimensiones). ¿Cuántas variables podrían especificarse como arbitrarias en una solución generalizada?

***58** Supóngase que un sistema ($m \times n$) de ecuaciones puede considerarse representado por m hiperplanos idénticos en el espacio n. ¿Cuántas variables se especificarán como arbitrarias en la solución generalizada?

Los ejercicios 59 a 64 se relacionan con la sección 4.5.

59 Por medio de ecuaciones simultáneas, determine la función lineal que se satisface con los puntos (10, −5) y (−5, 40).

60 Empleando ecuaciones simultáneas, determine la función cuadrática que se satisface con los puntos (1, 4), (−5, 40) y (2, 5). (Véase el ejercicio 3 al final de la sección 4.5.)

***61** Mediante ecuaciones simultáneas, determine la función lineal que tiene la forma $y = f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ y que se satisface con los puntos (1, 3, −2), (2, −2, 15) y (1, 1, 4).

62 Problemas de mezcla dietética Un dietista está planeando un menú para la cena en un comedor de una universidad. Se servirán tres alimentos que tienen distinto contenido nutricional. La meta es que el contenido nutricional de la comida cumpla con los niveles diarios mínimos de tres vitaminas. La tabla 4.5 compendia el contenido vitamínico *por onza* de cada alimento. Además, los niveles diarios mínimos de las tres vitaminas están indicadas también. Calcule el número de onzas de cada alimento que deben incluirse en la comida, de modo que se alcancen los niveles diarios mínimos de las tres vitaminas.

TABLA 4.5

		mg/oz		
Vitamina	**mínimos**	**Alimento 1**	**Alimento 2**	**Alimento 3**
1	29	5	3	2
2	20	2	1	3
3	21	1	5	2

63 Una compañía elabora tres productos que han de procesarse en un departamento. En la tabla 4.6 se resumen las necesidades de horas de trabajo y materias primas por unidad de cada producto. Cada mes se cuenta con 1300 horas de trabajo y 4700 libras de materias primas. Si la producción mensual combinada de los tres productos ha de ser 400 unidades, averigüe si hay combinaciones de los tres productos que aprovechen al máximo las disponibilidades mensuales de trabajo y de materias primas, alcanzando además la meta de 400 unidades.

TABLA 4.6

	Producto		
	1	**2**	**3**
Horas de trabajo/unidad	5	2	4
Libras de materias primas/unidad	15	10	12

64 Un proceso de mezclado debe combinar tres componentes de modo que se cree una mezcla final de 60 000 galones. Los tres componentes cuestan \$2.00, \$1.50 y \$1.25 dólares por galón, respectivamente. El precio total de los componentes deberá ser de \$90 000. Otra restricción de la mezcla consiste en que la cantidad de galones utilizados del componente 1 deberá ser el doble de los que se usan del componente 3. Determine si hay una combinación de los tres componentes que lleve a una mezcla final de 60 000 galones con un costo de \$90 000 y que además se ajusten a las restricciones.

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 Resuelva en forma gráfica el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 5y &= -4 \\ -3x - 2y &= -5 \end{aligned}$$

2 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 25 \\ 4x + y &= 7 \\ 2x - 5y &= 31 \\ x + y &= -2 \end{aligned}$$

3 *a*) ¿Cuáles son las posibilidades del conjunto solución para un sistema (20 × 15) de ecuaciones? *b*) ¿Y para un sistema (15 × 20)?

4 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones aplicando el método de eliminación gaussiana.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 20 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -30 \end{aligned}$$

5 A continuación se transcriben los resultados del método de eliminación gaussiana. Interprete su significado.

$$(a)\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right] \qquad (b)\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

6 Una compañía fabrica tres productos, los cuales han de procesarse en tres departamentos. La tabla 4.7 sintetiza las horas requeridas por unidad de cada producto en los tres, lo mismo que las capacidades mensuales de cada departamento. Formule, *pero no resuelva*, el sistema de ecuaciones que, al resolverse, indicaría si existen combinaciones de los tres productos que aprovecharían al máximo la disponibilidad de horas de trabajo en todos los departamentos.

TABLA 4.7

	Producto			Horas disponibles
Departamento	*A*	*B*	*C*	a la semana
1	6	2	2	80
2	7	4	1	60
3	5	5	3	100

Ejercicios que se resuelven por computadora

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones empleando un paquete apropiado de software.

1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 &= 12 \\ 2x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 &= 23 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_5 &= -6 \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 130 \\ 3x_1 - 2x_3 + 4x_5 &= 105 \\ 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= -5 \\ 4x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 &= -55 \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_6 &= 26 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 - x_6 &= -2 \\ 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 24 \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_5 &= 5 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 4x_6 &= -8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 &= 46 \\ 4x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 + 3x_6 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 &= 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 20 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + x_7 &= 10 \\ 5x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_7 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 7 \\ x_5 + x_6 + x_7 &= 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_5 - 5x_6 - x_7 + 2x_8 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 &= 0 \end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 + x_6 - 3x_7 + x_8 &= 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 50 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_5 + 3x_6 &= 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 15 \\ x_6 + x_7 + x_8 &= 25 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 - x_6 + 5x_7 + 6x_8 &= 165 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_5 + 2x_7 &= 35 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 &= -50 \end{aligned}$$

7 Una compañía fabrica cinco productos. Cada uno ha de ser procesado en cinco departamentos diferentes *A* a *E*. La tabla 4.8 indica el número de horas que se necesitan para fabricar una unidad de cada producto en cada departamento. También se indica el número de horas de producción disponibles a la semana en cada departamento.

TABLA 4.8

Departamento	Producto 1	2	3	4	5	Horas disponibles por semana
A	2	1	4	3	2	330
B	4	2	3	2	1	330
C	5	4	2	4	3	440
D	3	2	2	2	3	320
E	1	1	1	1	1	130

La compañía quiere determinar si hay cantidades de los cinco productos que puedan fabricarse cada semana y que den por resultado la utilización total de las horas disponibles en todos los departamentos.

a) Formule el sistema adecuado de ecuaciones lineales.

b) Determine las combinaciones de cinco productos que utilicen los cinco departamentos a su entera capacidad. ¿Cómo se distribuirá entre los cinco productos la capacidad semanal de cada uno?

8 Una compañía fabrica cinco productos. Cada uno de ellos tiene que procesarse en cinco departamentos *A* a *E*. La tabla 4.9 indica el número de horas necesarias para elaborar una unidad de cada producto en cada departamento. También se indica el número de horas de producción disponibles al mes en los cinco departamentos.

TABLA 4.9

Departamento	Producto 1	2	3	4	5	Horas disponibles por mes
A	3	4	2	1	4	1 150
B	5	3	4	2	1	1 050
C	2	5	3	6	4	2 200
D	4	4	5	4	3	1 700
E	2	5	5	5	4	2 000

La compañía quiere determinar la combinación de los cincos productos que pueden fabricarse cada semana, de modo que se utilicen todas las horas disponibles en los departamentos.

a) Formule el sistema apropiado de ecuaciones lineales.

b) Determine las combinaciones de cinco productos que satisfagan el sistema de ecuaciones. ¿Cómo se distribuirá entre los cinco productos la capacidad de cada departamento?

9 Un dietista está planeando el menú de la comida de mediodía para una escuela de enseñanza media. Se están estudiando seis vitaminas para su inclusión en la comida, caracterizada cada una por distinto aporte nutricional.

La meta es que el contenido nutricional de la comida cumpla con los niveles diarios mínimos para las seis vitaminas. En la tabla 4.10 se resume el contenido vitamínico por onza de cada alimento, expresado en miligramos (mg). Además, se indica el nivel mínimo diario de las seis vitaminas, también en miligramos.

TABLA 4.10

Vitamina	Niveles diarios mínimos	Alimento 1	2	3	4	5	6
1	23	4	3	0	2	4	1
2	34	5	3	4	0	0	2
3	32	0	2	6	4	3	4
4	16	0	0	2	3	5	2
5	39	5	6	2	0	3	5
6	26	2	3	2	4	2	2

El problema radica en determinar las porciones de cada alimento que se incluirán para que la comida satisfaga las raciones de las seis vitaminas.

a) Formule el sistema apropiado de ecuaciones para este problema.

b) ¿Qué cantidades de cada alimento han de incluirse?

10 Un fabricante de café quiere mezclar cinco tipos de grano en una mezcla final de 120 000 libras de café. Los cinco componentes cuestan \$2, \$3, \$4, \$2 y \$2 por libra, respectivamente. El presupuesto para la compra de los cinco componentes es de \$300 000. Al mezclar el café, se han hecho tres restricciones: a) la combinación de los componentes 1 y 2 deben constituir exactamente la mitad de la mezcla final; b) los componentes 1 y 5 juntos constituirán exactamente 25% de la mezcla final y c) la cantidad del componente 4 utilizado en la mezcla deberá ser exactamente el triple de la cantidad utilizada del componente 3.

a) Formule el sistema de ecuaciones que establezca todas las necesidades en este problema de mezclado.

b) ¿Cuántas libras de cada componente habrán de emplearse en la mezcla final?

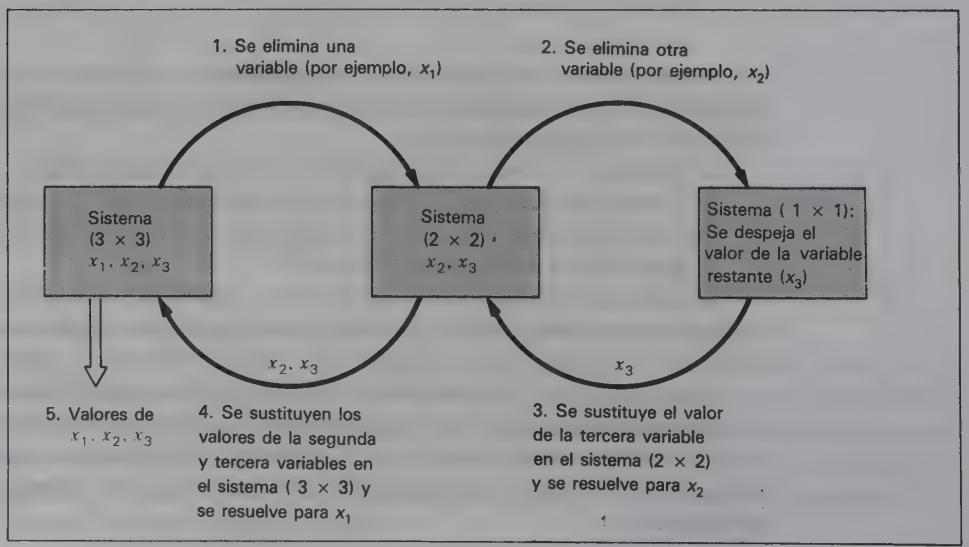


FIGURA 4.13 Procedimiento de eliminación para los sistemas (3 × 3).

APÉNDICE: PROCEDIMIENTO DE ELIMINACIÓN PARA LOS SISTEMAS (3 × 3)

El procedimiento de eliminación para los sistemas (3 × 3) se parece al que se aplica a los sistemas (2 × 2). La finalidad es comenzar con el sistema (3 × 3) y luego reducirlo a un sistema equivalente de dos variables y dos ecuaciones. Una vez suprimida una de las tres variables, el mismo procedimiento usado en los sistemas (2 × 2) sirve para suprimir una segunda variable, lo cual da por resultado un sistema (1 × 1). Después de resolver para la variable restante, su valor se sustituye otra vez secuencialmente en el sistema (2 × 2) y finalmente en el sistema (3 × 3) para calcular los valores de las otras variables. La figura 4.13 muestra el proceso esquemáticamente. En la figura 4.13, x_1 se elimina primero y luego x_2. Ese orden no es obligatorio; simplemente sirve a manera de ejemplo.

He aquí el procedimiento de eliminación para un sistema (3 × 3):

PROCEDIMIENTO DE ELIMINACIÓN PARA LOS SISTEMAS 3 × 3

I Se suman los múltiplos de dos de las tres ecuaciones a fin de suprimir una de las tres variables. El resultado deberá ser una ecuación que contenga las otras dos variables.

II Se repite el paso I con *otro* par de las ecuaciones originales, eliminando la misma variable que en el paso I. Este segundo par de ecuaciones incluirá *una* de las dos que se utilizaron en el paso I y la ecuación no empleada en él.

III Los resultados de los pasos I y II serán un sistema (2 × 2). Utilice el procedimiento de los sistemas (2 × 2) (página 126), a fin de calcular los valores de las dos variables restantes.

IV Sustituya los valores de estas dos variables en una de las ecuaciones originales. Resuelva para el valor de la tercera variable.

Si durante una fase del procedimiento de eliminación se produce una identidad [véase el paso III(B) del procedimiento (2 × 2)], entonces el conjunto solución contendrá un número infinito de elementos. Una excepción la constituye el caso en que el paso I origina una identidad y el paso II una proposición falsa. ¿Cuál es la implicación gráfica de esos dos resultados? *Si en una etapa cualquiera se produce una proposición falsa [paso III(C) del procedimiento (2 × 2)], tendrá ausencia de solución el sistema original de ecuaciones.*

EJEMPLO 21

Solución única Determine el conjunto solución para el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \quad (4.25)$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \quad (4.26)$$
$$4x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 13 \quad (4.27)$$

SOLUCIÓN

Aunque no importa cuál variable se elimine primero, se suprimirá ahora x_2. Si se suman las ecuaciones (4.25) y (4.26), la ecuación resultante (4.28) se expresa en términos de x_1 y x_3:

$$\begin{array}{rrrr} x_1 + x_2 + & x_3 = & 6 & \\ 2x_1 - x_2 + & 3x_3 = & 4 & \\ \hline 3x_1 \qquad + & 4x_3 = & 10 & \end{array} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Al multiplicar la ecuación (4.26) por $+5$ y al sumar el producto a la ecuación (4.27), se obtiene una nueva ecuación (4.29) como sigue:

$$\begin{array}{rrrr} 10x_1 - 5x_2 + & 15x_3 = & 20 & \\ 4x_1 + 5x_2 - & 10x_3 = & 13 & \\ \hline 14x_1 \qquad + & 5x_3 = & 33 & \end{array} \qquad \textbf{(4.29)}$$

Puesto que se eliminó x_2, el sistema ha sido reducido al sistema (2 × 2)

$$3x_1 + 4x_3 = 10 \qquad \textbf{(4.28)}$$
$$14x_1 + 5x_3 = 33 \qquad \textbf{(4.29)}$$

Si se procede como en la sección 4.2, puede suprimirse x_3 al multiplicar la ecuación (4.28) por $+5$ y la ecuación (4.29) por -4. Cuando se suman las dos ecuaciones, x_3 se elimina y se forma la ecuación (4.30):

$$\begin{array}{rrrr} 15x_1 + & 20x_3 = & 50 & \\ -56x_1 - & 20x_3 = & -132 & \\ \hline -41x_1 \qquad & = & -82 & \end{array} \qquad \textbf{(4.30)}$$

Al resolver la ecuación (4.30) para x_1, se obtiene $x_1 = 2$. Si este valor se sustituye en la ecuación (4.28), el valor de x_3 se determina de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3(2) + 4x_3 &= 10 \\ 4x_3 &= 4 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de $x_1 = 2$ y $x_3 = 1$ en la ecuación (4.25), se obtendrá

$$2 + x_2 + 1 = 6$$

o bien

$$x_2 = 3$$

Verifique que el conjunto solución consta de un punto donde $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 1$ al sustituir esos valores en las ecuaciones (4.26) y (4.27).

EJEMPLO 22

Ausencia de solución Determine el conjunto solución para este sistema de ecuaciones:

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \qquad \textbf{(4.31)}$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \qquad \textbf{(4.32)}$$
$$6x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 24 \qquad \textbf{(4.33)}$$

SOLUCIÓN

La variable x_1 puede eliminarse multiplicando la ecuación (4.32) por $+2$ y sumando el producto a la ecuación (4.31), como sigue:

$$\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 20 \\ \hline 5x_2 + 13x_3 = 32 \end{array} \quad \textbf{(4.34)}$$

De manera análoga, x_1 puede eliminarse al multiplicar la ecuación (4.32) por -6 y sumar la ecuación resultante a la ecuación (4.33), es decir,

$$\begin{array}{r} -6x_1 - 12x_2 - 30x_3 = -60 \\ 6x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 24 \\ \hline -15x_2 - 39x_3 = -36 \end{array} \quad \textbf{(4.35)}$$

Al suprimir x_1 se obtiene el sistema (2×2)

$$5x_2 + 13x_3 = 32 \quad \textbf{(4.34)}$$
$$-15x_2 - 39x_3 = -36 \quad \textbf{(4.35)}$$

Para eliminar x_2, la ecuación (4.34) se multiplica por $+3$ y se suma el resultado a la ecuación (4.35), o sea

$$\begin{array}{r} 15x_2 + 39x_3 = 96 \\ -15x_2 - 39x_3 = -36 \\ \hline 0 = 60 \end{array} \quad \textbf{(4.36)}$$

Nótese que la ecuación (4.36) es una proposición falsa, lo que significa que tiene ausencia de solución el sistema original de ecuaciones.

EJEMPLO 23

Número infinito de soluciones Determine el conjunto solución para el sistema de ecuaciones

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20 \quad \textbf{(4.37)}$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \quad \textbf{(4.38)}$$
$$6x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 30 \quad \textbf{(4.39)}$$

SOLUCIÓN

Compruebe que x_3 puede eliminarse y que la ecuación (4.40) puede obtenerse al multiplicar la ecuación (4.37) por -1 y al sumar esta nueva ecuación a la ecuación (4.38):

$$x_1 - 4x_2 = -25 \quad \textbf{(4.40)}$$

Verifique asimismo que la ecuación (4.41) se forma al multiplicar la ecuación (4.37) por -4 y al sumar la nueva ecuación a la ecuación (4.39):

$$2x_1 - 8x_2 = -50 \quad \textbf{(4.41)}$$

Para eliminar x_1 de las ecuaciones (4.40) y (4.41), la ecuación (4.40) puede multiplicarse por -2 y el resultado se suma a la ecuación (4.41). Cuando se efectúan esas operaciones, la ecuación (4.42) es una identidad:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 8x_2 &= 50 \\ 2x_1 - 8x_2 &= -50 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.42)}$$

Ésta es la señal de que existe un número infinito de soluciones para el sistema original.

Si se desea determinar ciertos miembros del conjunto solución, se retorna a una de las últimas ecuaciones significativas generadas durante el procedimiento de eliminación [ecuaciones (4.40) y (4.41)]. Se asigna un valor arbitrario a una de las variables y se resuelve para el valor correspondiente de la otra variable en la ecuación. El valor correspondiente de la tercera variable se calcula sustituyendo los dos valores conocidos en una de las ecuaciones originales.

En el ejemplo anterior, si se supone que x_1 es igual a -5 en la ecuación (4.40),

$$-5 - 4x_2 = -25$$

$$-4x_2 = -20$$

y

$$x_2 = 5$$

Al sustituir $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$ en la ecuación (4.37), se obtiene

$$-5 + 5 + x_3 = 20$$

o bien

$$x_3 = 20$$

Verifique que $x_1 = -5$, $x_2 = 5$ y $x_3 = 20$ satisfacen las ecuaciones (4.38) y (4.39).

CAPÍTULO

5 ÁLGEBRA DE MATRICES

Tresmen

165-181

5.1 INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES
5.2 TIPOS ESPECIALES DE MATRICES
5.3 OPERACIONES CON MATRICES
5.4 LA DETERMINANTE
5.5 LA INVERSA DE UNA MATRIZ
5.6 ALGUNAS APLICACIONES
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
EJERCICIOS QUE SE RESUELVEN POR COMPUTADORA

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Lograr que el estudiante entienda la naturaleza de una matriz y la representación matricial de datos
- Lograr que el estudiante comprenda el álgebra de matrices
- Ofrecer varias aplicaciones de las matrices y del álgebra matricial

En el presente capítulo se explican el álgebra de matrices y sus aplicaciones. Se describe la naturaleza de las matrices, luego se exponen los diversos tipos de matrices, el álgebra matricial y algunos conceptos especiales de las matrices. En la última sección del capítulo se incluyen varias aplicaciones del álgebra de matrices.

5.1 INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES

¿Qué es una matriz?

Siempre que se utilizan datos, debe sentirse la necesidad de organizarlos de modo que sean significativos y puedan identificarse sin dificultad. Y esta fun-

ción la cumple la condensación de datos en forma tabular. Las tablas de impuestos sobre la renta constituyen un ejemplo de esta clase de organización. La *matriz* es un medio común para resumir y presentar números o datos.

DEFINICIÓN: MATRIZ
La ***matriz*** es un arreglo rectangular de elementos.

Los elementos de una matriz suelen ser números reales, pero no siempre. Considérense las puntuaciones de prueba obtenidas por cinco estudiantes en tres exámenes. Las calificaciones podrían mostrarse en la siguiente matriz.

		Prueba		
		1	2	3
Alumno	1	75	82	86
	2	91	95	100
	3	65	70	68
	4	59	80	99
	5	75	76	74

La matriz es un arreglo de puntuaciones de prueba incluidas en paréntesis más grandes. El arreglo tiene una forma rectangular, con cinco renglones (uno para cada alumno) y tres columnas (una para cada prueba). Cada renglón contiene las tres puntuaciones de un estudiante en particular. Y cada columna contiene las cinco calificaciones obtenidas en una prueba dada.

FORMA GENERALIZADA
Una matriz **A** que contenga los elementos a_{ij} tiene la forma general

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz generalizada se representa como formada por m renglones y n columnas. Los subíndices de un elemento a_{ij} indican que el elemento está situado en la intersección del renglón i y la columna j de la matriz. Por ejemplo, a_{21} está situado en la intersección del renglón 2 y la columna 1. El elemento a_{35} se encontrará en el renglón 3 y en la columna 5 de la matriz.

EJERCICIO
Si la matriz de las calificaciones de los estudiantes se denota con **S** y los elementos se indican con s_{ij}, ¿cuáles son los elementos s_{12}, s_{32}, s_{43} y s_{16}?*

Los nombres de matrices casi siempre se representan con mayúsculas y los de sus elementos se representan por medio de minúsculas con subíndices.

*82, 70, 99, sin elemento s_{16}.

Una matriz se caracteriza además por su ***dimensión***. La dimensión u ***orden*** indica los números de renglones y de columnas contenidos dentro de la matriz. Si una matriz tiene m renglones y n columnas, se dice que posee una dimensión $m \times n$, que se lee "***m por n***". La matriz de las calificaciones de los estudiantes tiene la dimensión 5×3, es decir, es una matriz "5 por 3"

Finalidad del estudio del álgebra de matrices

Si se conoce la naturaleza de una matriz, es posible servirse de las matrices para utilizarlas en el almacenamiento, presentación y manipulación de datos. Los datos relativos a las calificaciones conseguidas en una prueba se guardaron de modo adecuado en la matriz anterior y la matriz ofrece un método claro y compacto de presentar estos datos.

Los programas de computación se valen periódicamente de matrices o "arreglos" para guardar información. En FORTRAN se reserva espacio para los arreglos en la memoria de la computadora por medio de la proposición DIMENSION. La proposición "DIMENSION *A*(20, 30)" reserva espacio para una matriz **A** que tiene la dimensión de 20×30. En el lenguaje BASIC, la proposición "DIM A (20, 30)" consigue el mismo objetivo.

Cuando los datos se almacenan dentro de matrices, a menudo se necesitan exhibirlos. Si los datos se guardan dentro de una matriz en algún patrón lógico, la recuperación de los elementos individuales o grupos de elementos puede ser relativamente fácil. Con frecuencia se necesitan manipular datos que se almacenan en una matriz. Por ejemplo, un profesor desea conocer el promedio de su grupo en determinada prueba o un promedio de los alumnos en tres exámenes utilizando los datos de las calificaciones de los estudiantes en la matriz antes definida. El álgebra de matrices tiene en cuenta la manipulación de datos y la realización de los cálculos, mientras los datos se conservan en una forma matricial. Esto es de gran utilidad, sobre todo en las aplicaciones computarizadas.

EJEMPLO 1

Consumo de energía en Estados Unidos La matriz **E** que aquí se muestra contiene el promedio del consumo diario de energía por fuente de energía en cuatro regiones de ese país durante 1987. Las cifras se dan en millones de barriles diarios y representan la cantidad de petróleo que producirá la energía equivalente. Las cifras se redondearon a los 100 000 barriles más cercanos.

	Petróleo y gas de Estados Unidos	Carbón	Petróleo y gas importados	Combustibles hidroeléctricos, geotérmicos y sintéticos	Nuclear	
$\mathbf{E} =$	6.5	2.8	3.0	0.2	0.5	Nordeste
	3.2	1.1	0.5	0.5	0.2	Sur
	3.4	2.0	1.1	0.1	0.4	Oeste medio
	5.5	1.5	3.3	0.6	0.2	Oeste

En las siguientes secciones se explican varios tipos de matrices y su manipulación.

5.2 TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Vectores

Una clase especial de matrices recibe el nombre de ***vector***. El vector es una matriz que tiene únicamente un renglón o una columna.

DEFINICIÓN: VECTOR RENGLÓN
El ***vector renglón*** es una matriz que tiene sólo un renglón. Un vector renglón **R** con n elementos r_{1j} tiene una dimensión $1 \times n$ y la forma general

$$\mathbf{R} = (r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13} \quad \cdots \quad r_{1n})$$

Las tres calificaciones conseguidas por el alumno 1 en la prueba pueden representarse por el vector renglón (1×3) **A** así

$$\mathbf{A} = (75 \quad 82 \quad 86)$$

La matriz **B** que se da a continuación es un vector renglón (1×8).

$$\mathbf{B} = (3 \quad 4 \quad 7 \quad -6 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad -2)$$

DEFINICIÓN: VECTOR COLUMNA
El ***vector columna*** es una matriz que tiene una columna solamente. Un vector columna **C** que posea m elementos c_{j1} tiene la dimensión $m \times 1$ y la forma general

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

En la matriz anterior de las calificaciones conseguidas en la prueba, las obtenidas por los cinco alumnos en el primer examen podrían representarse mediante el vector columna (5×1)

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 75 \\ 91 \\ 65 \\ 59 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas

DEFINICIÓN: MATRIZ CUADRADA
La ***matriz cuadrada*** es aquella que tiene el mismo número de renglones y columnas.

Si la dimensión de una matriz es $m \times n$, una matriz cuadrada es tal que $m = n$. Las siguientes matrices son cuadradas.

$$\mathbf{A} = (3) \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Si una matriz **A** es cuadrada, algunas veces es posible ocuparse de un subconjunto de elementos a_{ij} que se encuentra a lo largo de la ***diagonal primaria*** de la matriz. Estos elementos se hallan en posiciones donde $i = j$; por ejemplo $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \ldots, a_{nn}$. Los elementos de la diagonal principal de la matriz **B** son $b_{11} = 1$, $b_{22} = 4$. Los elementos sobre la diagonal principal de la matriz **C** son $c_{11} = 2$, $c_{22} = -4$, $c_{33} = 6$.

DEFINICIÓN: MATRIZ IDENTIDAD
La ***matriz identidad*** I, algunas veces denominada ***matriz unidad***, es una matriz cuadrada en la cual los elementos situados sobre la diagonal principal son iguales a 1 y el resto de los elementos son iguales a 0.

Si e_{ij} denota un elemento generalizado dentro de una matriz identidad, entonces

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Las matrices

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices identidad de tipo (2×2) y (3×3).

Aunque se verán aquí varias aplicaciones de la matriz identidad, una propiedad importante incluye la multiplicación de una matriz identidad y otra matriz. La multiplicación de matrices es una operación algebraica legítima en ciertas circunstancias. Si se tiene una matriz **A** y una matriz identidad **I**, ***AI = A*** *en caso de que se defina el producto* ***AI***. De manera análoga, *si el producto* ***IA*** *se define, entonces* ***IA = A***. La matriz identidad **I** es a la multiplicación de matrices lo que el número 1 es a la multiplicación en el sistema de números reales; es decir, $(a)(1) = (1)(a) = a$.

Traspuesta de una matriz

Hay veces en que es preciso rearreglar los elementos de datos en una matriz. El rearreglo puede consistir simplemente en ver el arreglo de números desde otra perspectiva o bien en manipular los datos en una etapa posterior. Un rearreglo es formar la ***traspuesta*** de una matriz.

DEFINICIÓN: TRASPUESTA
En la matriz **A** $(m \times n)$ con elementos a_{ij}, la ***traspuesta*** de **A**, denotada por $\mathbf{A}^t$, es una matriz $(n \times m)$ que contenga los elementos a^t_{ij} donde $a^t_{ij} = a_{ji}$.

EJEMPLO 2

Para encontrar la traspuesta de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

primero se determina la dimensión de $\mathbf{A}^t$. Puesto que **A** es una matriz (3×2), $\mathbf{A}^t$ será una matriz (2×3) que tenga la forma

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a^t_{11} & a^t_{12} & a^t_{13} \\ a^t_{21} & a^t_{22} & a^t_{23} \end{pmatrix}$$

Empleando la definición anterior se obtiene

$$a^t_{11} = a_{11} = 3 \qquad a^t_{21} = a_{12} = 2$$
$$a^t_{12} = a_{21} = 4 \qquad a^t_{22} = a_{22} = 0$$
$$a^t_{13} = a_{31} = 1 \qquad a^t_{23} = a_{32} = -2$$

o bien

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Estudie el lector las matrices **A** y $\mathbf{A}^t$ en el ejemplo 2. ¿Descubre en ellas algún patrón? Lo que observará es que *los renglones de* **A** *se convierten en las columnas de* $\mathbf{A}^t$ *y las columnas de* **A** *se convierten en los renglones de* $\mathbf{A}^t$. Estas relaciones pueden ser verdaderas para cualquier matriz y su traspuesta, y ofrecen un método fácil de determinar la traspuesta.

EJEMPLO 3

A continuación se aplicará esta lógica para calcular la traspuesta de

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Para formar la traspuesta de **B**, los renglones 1, 2 y 3 se convierten en las columnas 1, 2 y 3 de $\mathbf{B}^t$, o sea

$$\mathbf{B}^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

El lector también podría haber visto esto en términos de las columnas 1, 2 y 3 de **B** que se convierten en los renglones 1, 2 y 3 de $\mathbf{B}^t$. Ambas perspectivas son válidas.

Ejercicios de seguimiento de la sección 5.2

Determine la dimensión de cada una de las siguientes matrices y obtenga la traspuesta.

1 $(6 \quad -8 \quad 2 \quad 3)$

2 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

7 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

8 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

9 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10 $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11 Encuentre una matriz **A** (2×4) para la cual

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

5.3 OPERACIONES CON MATRICES

En la presente sección explicaremos algunas de las operaciones del álgebra de matrices.

Adición y sustracción de matrices

PROPIEDAD DE LA ADICIÓN (SUSTRACCIÓN) DE MATRICES
Pueden sumarse o restarse dos matrices si y sólo si tienen la misma dimensión.

Si se suman las matrices **A** y **B** para formar una nueva matriz **C**, ésta tendrá las mismas dimensiones que **A** y **B**. Los elementos de **C** se obtienen al sumar los elementos correspondientes de **A** y **B**. Es decir,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{para todas las } i \text{ y las } j$$

EJEMPLO 4

En las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + (-3) & 3 + 2 \\ 4 + 0 & -2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5

Empleando las mismas matrices

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 - (1) & 2 - (3) \\ 0 - (4) & 4 - (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6

El Departamento de Energía ha proyectado el consumo de energía para el año 2000. La matriz **P** muestra el promedio de consumo diario por fuente de energía para las mismas regiones del país que se indicaron en el ejemplo 1. Igual que en ese caso, estas cifras son los millones de barriles de petróleo que producirán la energía equivalente.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Petróleo y gas de Estados Unidos} & \text{Carbón} & \text{Petróleo y gas importados} & \text{Combustibles hidroeléctricos, solares, geotérmicos y sintéticos} & \text{Nuclear} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 5.9 & 4.8 & 2.0 & 0.7 & 1.2 \\ 2.9 & 1.9 & 0.2 & 0.9 & 0.5 \\ 2.3 & 2.4 & 0.5 & 0.5 & 0.9 \\ 6.0 & 1.9 & 2.9 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{Nordeste} \\ \text{Sur} \\ \text{Oeste medio} \\ \text{Oeste} \end{matrix}$$

El cálculo matricial $\mathbf{P} - \mathbf{E}$ refleja el cambio estimado en el promedio del consumo diario por fuente de energía entre 1987 y 2000.

$$\mathbf{P} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 5.9 & 4.8 & 2.0 & 0.7 & 1.2 \\ 2.9 & 1.9 & 0.2 & 0.9 & 0.5 \\ 2.3 & 2.4 & 0.5 & 0.5 & 0.9 \\ 6.0 & 1.9 & 2.9 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6.5 & 2.8 & 3.0 & 0.2 & 0.5 \\ 3.2 & 1.1 & 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 3.4 & 2.0 & 1.1 & 0.1 & 0.4 \\ 5.5 & 1.5 & 3.3 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.6 & 2.0 & -1.0 & 0.5 & 0.7 \\ -0.3 & 0.8 & -0.3 & 0.4 & 0.3 \\ -1.1 & 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & -0.4 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO
Interprete el significado de los valores en la matriz de diferencia **P** − **E**.

Multiplicación por escalares

El *escalar* es un número real. La ***multiplicación por escalares*** de una matriz es la multiplicación de ésta por un escalar. El producto se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por el escalar. Por ejemplo, si k es un escalar y **A** la siguiente matriz (3 × 2), entonces

$$k\mathbf{A} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k & 3k \\ -2k & k \\ 0 & 4k \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 7

Una fundación dedicada a la investigación de las políticas privadas hace una proyección de que el consumo de energía se incrementará 20% en cada región y para todas las fuentes de energía entre 1987 y 1992. Si el consumo aumenta de acuerdo con la proyección, el consumo durante 1992 será de 120% más que en 1987. Así pues, el consumo proyectado en 1992 puede determinarse mediante la multiplicación por escalares 1.2**E**, o sea

$$\mathbf{R} = 1.2\begin{pmatrix} 6.5 & 2.8 & 3.0 & 0.2 & 0.5 \\ 3.2 & 1.1 & 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 3.4 & 2.0 & 1.1 & 0.1 & 0.4 \\ 5.5 & 1.5 & 3.3 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.80 & 3.36 & 3.60 & 0.24 & 0.60 \\ 3.84 & 1.32 & 0.60 & 0.60 & 0.24 \\ 4.08 & 2.40 & 1.32 & 0.12 & 0.48 \\ 6.60 & 1.80 & 3.96 & 0.72 & 0.24 \end{pmatrix}$$

El producto interno

DEFINICION: PRODUCTO INTERNO

Sea $\mathbf{A} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$; entonces definiremos el ***producto interno***, escrito **A** • **B**, como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

En esta definición cabe señalar tres puntos:

1 *El producto interno se define sólo si los vectores renglón y columna contienen el mismo número de elementos.*

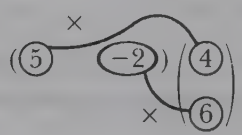
2 *El producto interno* resulta cuando un vector renglón se multiplica por un vector columna y *el producto resultante es una cantidad escalar.*

3 *El producto interno se calcula multiplicando los elementos correspondientes de los dos vectores y haciendo la suma algebraica.*

Pongamos por ejemplo la multiplicación de los siguientes vectores:

$$\mathbf{AB} = (5 \quad -2)\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

Para encontrar el producto interno, el primer elemento del vector renglón se multiplica por el primer elemento del vector columna; el producto resultante se suma al producto del elemento 2 del vector renglón y al elemento 2 del vector columna. En los vectores indicados, el producto interno se obtiene como $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$, es decir,



EJEMPLO 8

En los vectores renglón y columna

$$\mathbf{M} = (5 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3) \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\10\\20\\6\end{pmatrix}$$

el producto interno se calcula como

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = (5 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix}-2\\-4\\10\\20\\6\end{pmatrix}$$

$$= (5)(-2) + (-2)(-4) + (0)(10) + (1)(20) + (3)(6) = 36$$

Multiplicación de matrices

Supóngase que una matriz **A** con la dimensión $m_A \times n_A$ debe multiplicarse por una matriz **B** que tenga la dimensión $m_B \times n_B$.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

I El producto matricial **AB** se define si y sólo si el número de columnas de **A** es igual al de renglones de **B**, o bien si $n_A = m_B$.

II Si la multiplicación puede efectuarse (es decir, $n_A = m_B$), *el producto resultante será una matriz que tenga la dimensión* $m_A \times n_B$.

La primera propiedad de la multiplicación establece la *condición necesaria y suficiente* de la multiplicación de matrices. Si $n_A \neq m_B$, no es posible multiplicar las matrices.

A	·	**B**	Prueba de la condición necesaria y suficiente
$(m_A \times n_A)$		$(m_B \times n_B)$	
	$n_A = m_B$		

La propiedad II define la dimensión de una matriz de productos.

A	·	**B**	=	**C**	Dimensión de la matriz de productos
$(m_A \times n_A)$		$(m_B \times n_B)$		$(m_A \times n_B)$	
	$n_A = m_B$				

Para determinar los elementos de la matriz de productos, se aplica la siguiente regla.

REGLA DE CÁLCULO
Si **AB** = **C**, un elemento c_{ij} de la matriz de productos será igual al *producto interno* del renglón *i* en la matriz **A** y de la columna *j* de la matriz **B**. (Véase la figura 5.1.)

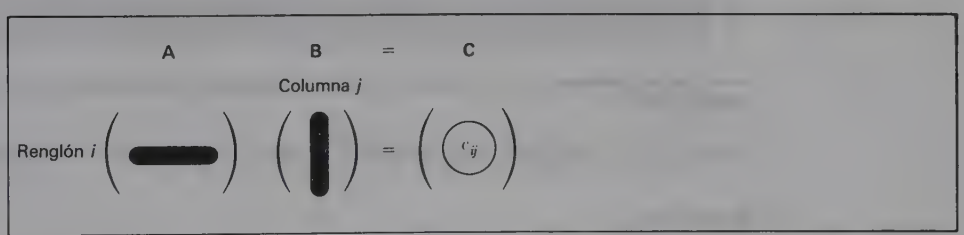


FIGURA 5.1 Multiplicación de matrices; cálculo de c_{ij} por medio del producto interno.

EJEMPLO 9

Para obtener el producto matricial **AB**, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la primera comprobación consiste en determinar si la multiplicación es posible. **A** es una matriz (2×2) y **B** es una matriz (2×1).

A	·	**B**	**C**
$(2 \times \mathbf{2})$		$(\mathbf{2} \times 1)$	$= (2 \times 1)$
	=		

El producto está definido porque el número de columnas de **A** es igual al de renglones de **B**. La matriz de productos resultante será de dimensión 2×1 y tendrá la forma general

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

Para encontrar c_{11}, el producto interno se obtiene multiplicando el renglón 1 de **A** por la columna 1 de **B**, o sea

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$$

De manera análoga, c_{21} se obtiene al calcular el producto interno entre el renglón 2 de **A** y la columna 1 de **B**, o sea

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

NOTA
En el primer intento de resolver los problemas relacionados con la multiplicación de matrices, el lector quizá encuentre útil escribir la forma general de la matriz de productos. Esto se hizo aquí al formular primero la forma general de **C** como $\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. Una vez identificados así los elementos, es posible calcular los subíndices de cada uno.

EJEMPLO 10

Determine el producto de matrices **BA** para las matrices del ejemplo 9.

SOLUCIÓN

El producto **BA** requiere multiplicar una matriz (2×1) por una matriz (2×2), o sea

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B} & \cdot & \mathbf{A} \\ (2 \times 1) & & (2 \times 2) \\ | & & | \\ 1 & \neq & 2 \end{array}$$

Puesto que el número de columnas de **B** no es igual al de renglones de **A**, el producto **BA** no está definido.

NOTA
Este ejemplo muestra que la propiedad conmutativa que se cumple en la multiplicación de números reales *no necesariamente* es válida en la multiplicación de matrices. *No puede* afirmarse que **AB** = **BA** para dos matrices cualesquiera **A** y **B**.

EJEMPLO 11

Obtenga, de ser posible, el producto **PI** = **T** cuando

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

P es una matriz (4 × 3) e **I** es una matriz identidad (3 × 3). Dado que el número de columnas de **P** es igual al número de renglones de **I**, la multiplicación puede realizarse y la matriz del producto **T** tendrá la dimensión 4 × 3. Por consiguiente,

$$\underset{(4 \times 3)}{\mathbf{P}} \cdot \underset{(3 \times 3)}{\mathbf{I}} = \underset{(4 \times 3)}{\mathbf{T}}$$

T poseerá la forma general

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \end{pmatrix}$$

Algunos elementos muestra se calculan de la siguiente manera:

$$t_{11} = (1 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)(1) + (0)(0) + (-1)(0) = 1$$

$$t_{12} = (1 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)(0) + (0)(1) + (-1)(0) = 0$$

$$t_{13} = (1 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(0) + (0)(0) + (-1)(1) = -1$$

Verifique que la matriz de productos **T** es

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

NOTA
Este ejemplo muestra la propiedad mencionada antes respecto a las matrices identidad. Es decir, si una matriz identidad se multiplica por otra, el producto será la otra matriz. En este ejemplo **PI** = **T**. Pero **P** = **T**; por tanto **PI** = **P**.

EJEMPLO 12

El profesor que administró las tres pruebas a cinco estudiantes está preparando los promedios del curso. Ha decidido ponderar los dos primeros exámenes a 30% cada uno y el tercero a 40%. Desea calcular los promedios finales de los cinco alumnos mediante la multiplicación de matrices. La matriz de las calificaciones es

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix}$$

y los pesos de los exámenes se ponen en el vector renglón

$$\mathbf{W} = (0.30 \quad 0.30 \quad 0.40)$$

El profesor necesita multiplicar estas matrices de manera que la puntuación obtenida por *cada* alumno en el primer examen se multiplique por 0.30, la conseguida en el segundo examen por 0.30 y la última puntuación por 0.40. Verifique el lector que los productos **GW** y **WG** no estén definidos. Pero si **W** hubiera sido expresado como vector columna, el producto matricial **GW** conduciría al resultado deseado.

No es posible transformar **W** en un vector columna con sólo obtener su traspuesta. El producto $\mathbf{GW}^t$ está definido, lleva a una matriz de productos (5 × 1) y lo más importante es que efectúa los cálculos deseados.

$$\underset{(5 \times 3)}{\mathbf{G}} \cdot \underset{(3 \times 1)}{\mathbf{W}^t} = \underset{(5 \times 1)}{\mathbf{A}}$$

Los promedios finales se calculan como

$$\begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75(0.3) + 82(0.3) + 86(0.4) \\ 91(0.3) + 95(0.3) + 100(0.4) \\ 65(0.3) + 70(0.3) + 68(0.4) \\ 59(0.3) + 80(0.3) + 99(0.4) \\ 75(0.3) + 76(0.3) + 74(0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81.5 \\ 95.8 \\ 67.7 \\ 81.3 \\ 74.9 \end{pmatrix}$$

Los promedios son 81.5, 95.8, 67.7, 81.3 y 74.9, respectivamente, para los cinco estudiantes.

EJERCICIO
Calcule el producto $\mathbf{WG}^t$. ¿No produce esto el mismo resultado que $\mathbf{GW}^t$?

Representación de una ecuación

Una ecuación puede representarse empleando el producto interno. La expresión

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3$$

puede representarse por medio del producto interno

$$(3 \quad 5 \quad -4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

donde el vector renglón contiene los coeficientes de cada variable en la expresión y el vector columna contiene las variables. Multiplíquense los dos vectores para comprobar que el producto interno dé por resultado la expresión original.

Si se desea representar la *ecuación*

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 25$$

puede igualarse el producto interno con una matriz (1×1) que contenga la constante del miembro derecho, o sea

$$(3 \quad 5 \quad -4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (25)$$

Recuérdese que para que dos matrices sean iguales, han de tener la misma dimensión. El producto interno siempre da por resultado una matriz (1×1), que en este caso contiene un elemento: la expresión $3x_1 + 5x_2 - 4x_3$.

Una ecuación lineal de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ puede representarse en la forma matricial como sigue

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \qquad \textbf{(5.1)}$$

Representación de sistemas de ecuaciones

A diferencia de las ecuaciones individuales que pueden representarse mediante el producto interno, un sistema de ecuaciones se representa utilizando la multiplicación de matrices. El sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 15 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 12 \end{aligned}$$

puede representarse así $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$

Si se efectúa la multiplicación de matrices en el miembro izquierdo de la ecuación matricial, el resultado será

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Para que estas dos matrices (2×1) sean iguales, los elementos correspondientes también deben serlo (es decir, $5x_1 + 3x_2 = 15$ y $4x_1 - 2x_2 = 12$, el par original de ecuaciones).

Un sistema de ecuaciones ($m \times n$) que tenga la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

puede representarse por la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

donde **A** es una matriz ($m \times n$) que contiene los coeficientes variables en el miembro izquierdo del conjunto de ecuaciones. **X** es un vector columna de n componentes que contiene n variables y **B** es un vector columna de m componentes que contiene las constantes del lado derecho para las ecuaciones m. Esta representación aparece como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

EJEMPLO 13

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 &= 100 \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 &= 60 \\ 4x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 125 \end{aligned}$$

puede representarse en la forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ como

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Verifique que esta representación es válida y que los ceros deben incluirse en la matriz **A** cuando una variable no aparece en determinada ecuación.

Ejercicios de seguimiento de la sección 5.3

Efectúe las siguientes operaciones con matrices siempre que sea posible.

1 $-\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 21 & -3 \end{pmatrix}$

3 $-2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4 $3k\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & 2a \end{pmatrix} - 2k\begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$

5 $5\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 20 & -15 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

7 $(2 \quad -3)\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

8 $(1 \quad -2 \quad -3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

9 $(3 \quad -1)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

10 $(10 \quad -4 \quad 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

11 $(a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

12 $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

13 $(-1 \quad 2 \quad -3 \quad 4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

14 $(1 \quad -3 \quad 6 \quad 5 \quad -2)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

15 $(a \quad b \quad c \quad d)\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

16 $(1 \quad 0 \quad -5 \quad 0 \quad 3)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

17 $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

18 $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

19 $(20 \quad -8)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

21 $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

22 $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

23 $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 20 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

24 $(1 \quad 8 \quad -2)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

25 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

26 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

27 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

28 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

29 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

30 $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

31 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

32 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)$

33 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

34 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \\ i & j \end{pmatrix}$

35 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

36 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Reescriba los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial.

37
$$\begin{aligned} x - 3y &= 15 \\ 2x + 3y &= -10 \end{aligned}$$

38
$$\begin{aligned} 2x &= 4 \\ 3x + 4y &= 15 \end{aligned}$$

39
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 15 \end{aligned}$$

40
$$\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 &= 48 \\ 2x_1 - 4x_3 &= 25 \end{aligned}$$

41
$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= c \\ dx_1 + ex_2 &= f \\ gx_1 + hx_2 &= i \end{aligned}$$

42
$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 &= f \\ gx_1 \qquad - hx_3 \qquad + ix_5 &= j \end{aligned}$$

43
$$\begin{aligned} a_1x^2 + a_2x + a_3 &= b_1 \\ a_4x^2 + a_5x + a_6 &= b_2 \end{aligned}$$

44
$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13} &= b_1 \\ a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23} &= b_2 \\ a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33} &= b_3 \end{aligned}$$

45
$$\begin{aligned} 5x^3 - 2x^2 + x &= 100 \\ 3x^3 \qquad\quad &= -18 \\ 5x^2 \qquad\quad &= 125 \end{aligned}$$

46
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

5.4 LA DETERMINANTE

Un concepto importante en el álgebra matricial es el de ***determinante***. *Si una matriz es cuadrada, sus elementos pueden combinarse para calcular un número de valor real llamado la determinante.* El concepto de determinante es de particular utilidad en la solución de ecuaciones simultáneas. En la siguiente sección se tratará de su importancia.

La determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

puede denotarse escribiendo líneas verticales alrededor del nombre de la matriz o colocando líneas verticales en torno a los elementos de la matriz. La determinante de **A** puede indicarse por

$$|\mathbf{A}| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Se cuenta con diversas formas de calcular el valor de una determinante. Primero se explicarán técnicas específicas para manejar las matrices (1 × 1), (2 × 2) y (3 × 3) y luego el ***procedimiento de cofactores*** más generalizado.

Determinante de una matriz (1 × 1)

La determinante de una matriz (1 × 1) es simplemente el valor de un elemento contenido en la matriz. Si $\mathbf{A} = (5)$, $|\mathbf{A}| = 5$. Si $\mathbf{M} = (-10)$, $|\mathbf{M}| = -10$.

Determinante de una matriz (2 × 2)

En una matriz (2 × 2) que tenga la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{5.3}$$

El cálculo incluye una multiplicación cruzada de los elementos de las dos diagonales, como se indica en seguida:

$$|\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \times & \\ & & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 14

Si
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces
$$|\mathbf{A}| = (1)(4) - (3)(-2)$$
$$= 4 + 6 = 10$$

Determinante de una matriz (3 × 3)

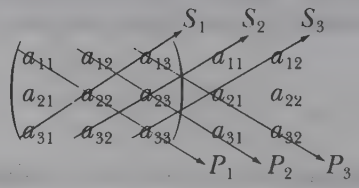
En la matriz (3 × 3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la determinante puede encontrarse por medio del siguiente proceso:

1 Se reescriben las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de la matriz original.

2 Se localizan los elementos en las tres diagonales primarias (P_1, P_2, P_3) y los situados en las tres diagonales secundarias (S_1, S_2, S_3).



3 Se multiplican los elementos en *cada* diagonal primaria y *cada* secundaria.

4 La determinante es igual a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos la suma de los productos de las tres diagonales secundarias.

En forma algebraica la determinante se calcula así

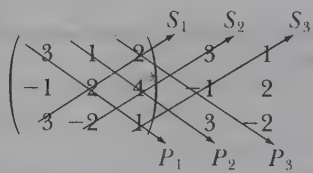
$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \tag{5.4}$$

EJEMPLO 15

Si se desea encontrar la determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

las dos primeras columnas se reescriben a la derecha de la matriz original:



Se identifican las tres diagonales primarias y secundarias y la determinante se calcula como

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= [(3)(2)(1) + (1)(4)(3) + (2)(-1)(-2)] - [(3)(2)(2) + (-2)(4)(3) \\ &\quad + (1)(-1)(1)] \\ &= (6 + 12 + 4) - (12 - 24 - 1) = 22 - (-13) = 35 \end{aligned}$$

NOTA
Los métodos examinados para las matrices (1 × 1), (2 × 2) y (3 × 3) se aplican exclusivamente a las que tengan esas dimensiones. No es posible generalizar el procedimiento (3 × 3) para ocuparse de matrices (4 × 4), (5 × 5) o matrices cuadradas de un orden superior. En la siguiente sección opcional se explica un procedimiento más generalizado.

El método de cofactores

En la presente sección se expone otro procedimiento de cálculo más generalizado aplicable a todas las matrices cuadradas de tamaño 2 × 2 o de un orden superior. Para cualquier matriz cuadrada **A** puede encontrarse una ***matriz de cofactores*** que se denotará como $\mathbf{A}_c$. La matriz de cofactores tendrá la misma dimensión que **A** y constará de elementos a'_{ij}, los cuales se conocen con el nombre de ***cofactores***. Por cada elemento a_{ij} contenido en **A** habrá un factor correspondiente a'_{ij}.

El cofactor asociado a un elemento a_{ij} se determina del modo siguiente:

1 Mentalmente o con lápiz tache el renglón *i* y la columna *j* en la matriz original. Concéntrese en los elementos restantes de la matriz. Estos constituyen una *submatriz* de la matriz original.
2 Encuentre la determinante de la submatriz restante. Esa determinante recibe el nombre de *menor* del elemento a_{ij}.
3 El cofactor a'_{ij} se obtiene al multiplicar la menor por +1 o −1, según la posición que ocupe el elemento a_{ij}. Una fórmula para calcular el cofactor es

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j}(\text{el menor})$$

(La esencia de esta fórmula es que, si $i + j$ es un número *par*, la menor se multiplicará por +1, conservando su signo; si $i + j$ es un número *impar*, la menor se multiplicará por −1 y cambiará su signo.)

EJEMPLO 16

Para encontrar la matriz de cofactores para la matriz (2 × 2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

se comenzará con el cofactor correspondiente al elemento a_{11}. Al tachar el renglón 1 y la columna 1, queda la submatriz (1 × 1) (−2). La determinante de esta submatriz

$$\begin{pmatrix} \not{5} & \not{-4} \\ \not{2} & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \underset{\text{Submatriz}}{(-2)}$$

es igual a −2 y, por tanto, es la *menor*. El cofactor se calcula como sigue

$$\begin{aligned} a'_{11} &= (-1)^{1+1}(-2) = (-1)^2(-2) \\ &= (1)(-2) = -2 \end{aligned}$$

Para los elementos restantes.

$$\begin{pmatrix} \not{5} & \not{-4} \\ \not{2} & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a'_{12} &= (-1)^{1+2}(2) \\ &= (-1)(2) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \not{5} & -4 \\ \not{2} & \not{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a'_{21} &= (-1)^{2+1}(-4) \\ &= (-1)(-4) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & \not{-4} \\ \not{2} & \not{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a'_{22} &= (-1)^{2+2}(5) \\ &= (1)(5) = 5 \end{aligned}$$

La matriz de cofactores es

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 17

Para obtener la matriz de cofactores para la matriz (3 × 3) en el ejemplo 15, se comienza con el elemento a_{11}. Al cruzar con una línea el renglón 1 y la columna 1, queda una submatriz (2 × 2):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & 2 & 4 \\ \cancel{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Submatriz

El cofactor se calcula como

$$a'_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^2[(2)(1) - (-2)(4)] = 1(10) = 10$$

Para el elemento a_{12}, al tachar el renglón 1 y la columna 2, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Submatriz

El cofactor a'_{12} se calcula de la siguiente manera

$$a'_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^3[(-1)(1) - (3)(4)] = -1(-13) = 13$$

Y ahora le toca al lector intentarlo. Compruebe que la matriz de cofactores es

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -4 \\ -5 & -3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

La determinante y cofactores Esta sección comienza con el objetivo de encontrar una forma generalizada de calcular la determinante. El ***método de expansión por cofactores*** permite obtener la determinante de una matriz como sigue:

1 Se selecciona un renglón o columna *cualquiera* de la matriz.

2 Se multiplica cada elemento del renglón (columna) por su cofactor correspondiente y se suman los productos.

En una matriz $\mathbf{A}$ $(m \times m)$, la determinante puede encontrarse al ampliar un *renglón* i cualquiera conforme a la ecuación

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}a'_{i1} + a_{i2}a'_{i2} + \cdots + a_{im}a'_{im} \tag{5.5}$$

De manera análoga, la determinante se calcula al ampliar una columna j cualquiera de acuerdo con la ecuación

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}a'_{1j} + a_{2j}a'_{2j} + \cdots + a_{mj}a'_{mj} \tag{5.6}$$

NOTA
Si su objetivo es encontrar la determinante, no será necesario calcular toda la matriz de cofactores. Basta determinar sólo los cofactores del renglón o columna seleccionados para la expansión.

EJEMPLO 18

La matriz $\mathbf{A}$ y su matriz de cofactores $\mathbf{A}_c$ del ejemplo 16 se muestra en seguida.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

La determinante de $\mathbf{A}$ puede encontrarse mediante expansión sobre el renglón 1 así

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} \\ &= (5)(-2) + (-4)(-2) = -2 \end{aligned}$$

o hacia abajo en la columna 2 como

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{12}a'_{12} + a_{22}a'_{22} \\ &= (-4)(-2) + (-2)(5) = -2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 19

He aquí las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_c$ tomadas del ejemplo 17:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -4 \\ -5 & -3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

La determinante de $\mathbf{A}$ se calcula mediante expansión hacia abajo en la columna 3 como

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (2)(-4) + (4)(9) + (1)(7) \\ &= -8 + 36 + 7 = 35 \end{aligned}$$

EJERCICIO
Verifique que el valor de la determinante es la misma si se hace la expansión hacia abajo de otras dos columnas o a lo largo de cualquiera de los renglones.

EJEMPLO 20

La selección de un renglón o columna para la expansión mediante cofactores no siempre habrá de ser arbitraria. A menudo puede aprovecharse el contenido o la forma de una matriz. Por ejemplo, a continuación se obtendrá la determinante de la matriz (4×4)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se selecciona la columna 2 para la expansión, habrá que calcular un solo factor: el que corresponda a a_{22}. Es decir,

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (0)a'_{12} + (-2)a'_{22} + (0)a'_{32} + (0)(a'_{42}) \\ &= (-2)a'_{22} \end{aligned}$$

Al tachar el renglón 2 y la columna 2, queda la submatriz (3×3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Compare esta matriz con la del último ejemplo. Puesto que el lector seguramente habrá llegado a su límite, este problema ha sido "modificado". Ya se calculó la determinante de la submatriz como 35. Por tanto,

$$a'_{22} = (-1)^{2+2}(35) = 35$$

y

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (-2)a'_{22} \\ &= (-2)(35) = -70 \end{aligned}$$

Propiedades de las determinantes

Ciertas propiedades son válidas para las matrices y sus determinantes. ***Dada la matriz cuadrada A:***

Propiedad 1 **Si todos los elementos de cualquier renglón o columna son cero, $|\mathbf{A}| = 0$.**

EJERCICIO
Verifique para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ que $|\mathbf{A}| = 0$.

Propiedad 2 **Si se intercambian dos renglones (o columnas) cualesquiera, el signo de la determinante también cambia.**

EJERCICIO

En la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$, intercambie las columnas 1 y 2 para formar la matriz **B**. Calcule $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}|$ y haga una comparación.

Propiedad 3 **Si todos los elementos de cualquier renglón o columna se multiplican por una constante k, el valor de la determinante será $k|\mathbf{A}|$.**

EJERCICIO

En la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$, multiplique cada elemento de la columna 2 por −5 para formar la matriz **B**. Calcule $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}|$ y haga una comparación.

Propiedad 4 **Si un múltiple cualquiera de un renglón (columna) se suma a otro renglón (columna), permanecerá inalterado el valor de la determinante.**

EJERCICIO

En la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, multiplique el renglón 2 por −3 y sume el resultado al renglón 1, formando una nueva matriz **B**. Calcule $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}|$ y haga una comparación.

Propiedad 5 **Si un renglón (columna) cualquiera se multiplica por otro renglón (columna), la determinante será cero.***

EJERCICIO

En la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 1 \\ -9 & 6 & -12 \end{pmatrix}$, nótese que el renglón 3 es igual a (−3) multiplicado por el renglón 1. Calcule $|\mathbf{A}|$.

Estas propiedades son útiles al calcular el valor de la determinante. Así, la magnitud de los números que van a ser manipulados puede reducirse si to-

*Un caso especial de esta propiedad se presenta cuando dos renglones (columnas) son iguales entre sí.

dos los elementos de un renglón o columna tienen un factor común. Ello se logra también al sumar (sustraer) los múltiplos de un renglón (columna) a otro. Se lograrán eficiencias significativas si, antes de aplicar el método de cofactores, se combinan los múltiplos de renglones (columnas) para crear un renglón (columna) que contenga principalmente ceros (como sucedió en el ejemplo 20). Para dar un caso de esto, se estudia el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 21

Supóngase que se quiere encontrar la determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Si se desea aplicar el método de cofactores, la expansión a lo largo de un renglón o columna requiere la evaluación de tres cofactores. No obstante, si se utiliza la propiedad 4, puede multiplicarse la columna 3 por -2 y sumar este múltiplo a la columna 1, lo cual da por resultado la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Según la propiedad 4, la determinante de la matriz anterior es la misma que la de la matriz original **A**. Al hacer la expansión mediante cofactores hacia abajo en la columna 1, basta determinar el cofactor del elemento (2, 1). Así pues, la determinante **A** será

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| &= (0)b'_{11} + (1)b'_{21} + (0)b'_{31} \\ &= (1)(-23) \\ &= -23 \end{aligned}$$

EJERCICIO
Encuentre la determinante de **A** sirviéndose de la matriz original y confirme que las respuestas son iguales.

Ejercicios de seguimiento de la sección 5.4

Obtenga la determinante de las siguientes matrices.

1 $\mathbf{A} = (-2)$

2 $\mathbf{A} = (a)$

3 $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4 $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

5 $\mathbf{N} = (25)$

6 $\mathbf{T} = (-b)$

7 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

9 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

10 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

11 $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 10 & -5 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$

12 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 2 & -6 & 6 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

13 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

14 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

15 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16 $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Encuentre la matriz de cofactores de las siguientes matrices.

17 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

18 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

19 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

21 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

22 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24 $\begin{pmatrix} 2 & 10 & -4 \\ 0 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

25 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

26 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

27 $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

28 $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

29 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 5 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

30 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

31 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ -5 & 5 & 0 \\ 10 & 5 & -10 \end{pmatrix}$

32 $\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

33 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

34 $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

35 a 52 Por medio de la matriz de cofactores encontrada en los ejercicios 17 a 34, respectivamente, obtenga la determinante de la matriz original.

53 Encuentre la determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 6 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 6 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

54 Obtenga la determinante de

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

55 Encuentre la determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

56 Encuentre la determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5.5 LA INVERSA DE UNA MATRIZ

En *algunas* matrices puede identificarse otra matriz denominada ***matriz inversa multiplicativa*** o, más simplemente, la ***inversa***. La relación entre una matriz **A** y su inversa (denotada por $\mathbf{A}^{-1}$) es que el producto de **A** y $\mathbf{A}^{-1}$, en uno u otro orden, da origen a una matriz identidad, es decir,

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}} \qquad (5.7)$$

La inversa se parece al recíproco en el álgebra de números reales. Se obtiene un producto de 1 al multiplicar una cantidad b por su recíproco $1/b$. En el álgebra de matrices, la multiplicación de una matriz por su inversa da por resultado la matriz identidad.

OBSERVACIONES IMPORTANTES SOBRE LA INVERSA

I Para que una matriz **A** tenga una inversa, tiene que ser cuadrada.
II La inversa de **A** también será cuadrada y de la misma dimensión que **A**.
III No toda matriz cuadrada posee una inversa.

Una matriz cuadrada tendrá una inversa a condición de que todos los renglones o columnas sean ***linealmente independientes***; es decir, ningún renglón (o columna) es una combinación lineal de los renglones (o columnas) restantes. Si los renglones (o columnas) son linealmente dependientes [son combinaciones lineales de otros renglones (o columnas)], la matriz no tendrá una inversa. Si una matriz posee una inversa, se le llama ***matriz no singular***. Si no la tiene, se dice que es una ***matriz singular***.

EJEMPLO 22

Puede verificarse que la matriz **B**, la cual se da a continuación, es una inversa de la matriz **A** al obtener los productos **AB** y **BA**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como ambos productos dan por resultado una matriz (2 × 2), puede afirmarse que la matriz **B** es la inversa de **A**, esto es

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

y que **A** es la inversa de **B**, o sea

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$$

Determinación de la inversa

Se cuenta con diversos métodos para calcular la inversa de una matriz. Uno de ellos se basa en el procedimiento de eliminación gaussiana explicado en la sección 4.3. A continuación se desarrollará el procedimiento general por medio de un ejemplo. Si todavía el lector no ha entendido bien el método de Gauss, se le aconseja volver a leer la sección 4.3.

EJEMPLO 23

Retornemos a la matriz **A** en el último ejemplo. Si existe otra matriz **B** que sea la inversa de **A**, tendrá la dimensión 2 × 2. Los elementos de **B** se denotan como sigue.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se multiplica en el miembro izquierdo de la ecuación, el resultado será

$$\begin{pmatrix} 3b_{11} + 7b_{21} & 3b_{12} + 7b_{22} \\ 2b_{11} + 5b_{21} & 2b_{12} + 5b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que estas dos matrices sean iguales, sus elementos respectivos han de ser iguales entre sí; es decir,

$$3b_{11} + 7b_{21} = 1 \quad \textbf{(5.8)}$$

$$2b_{11} + 5b_{21} = 0 \quad \textbf{(5.9)}$$

$$3b_{12} + 7b_{22} = 0 \quad \textbf{(5.10)}$$

$$2b_{12} + 5b_{22} = 1 \quad \textbf{(5.11)}$$

Si se desea determinar los valores b_{11} y b_{21}, hay que resolver simultáneamente las ecuaciones (5.8) y (5.9). Para determinar b_{12} y b_{22} se deben resolver las ecuaciones (5.10) y (5.11).

Si se quisieran resolver los dos sistemas individualmente por medio del método de eliminación gaussiana, las transformaciones habrían de efectuarse como se señala en la figura 5.2. Para cada sistema hay que realizar operaciones de renglón con objeto de convertir el arreglo de coeficientes $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ en una matriz identidad (2 × 2). *Ambos* sistemas tienen la misma matriz de coeficientes en el miembro izquierdo, por lo cual se utilizarán idénticas operaciones de renglón para resolver los *dos*. El proceso puede simplificarse al sumar los coeficientes del lado derecho en el primer sistema con los del segundo sistema de ecuaciones, como se muestra a continuación:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Las operaciones de renglón deben efectuarse una vez solamente. Después de la transformación de la matriz de coeficientes en el lado izquierdo en una matriz identidad (2 × 2), la primera columna de los valores del lado derecho contendrá la solución del primer sistema de ecuaciones (b_{11} y b_{21}) y la segunda columna la solución para el segundo sistema de ecuaciones (b_{12} y b_{22}). Las matrices transformadas aparecerán como

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & b_{21} & b_{22} \end{array}\right)$$

y la matriz (2 × 2) situada a la derecha de la línea vertical será la matriz **B**, o sea la inversa de **A**.

PROCEDIMIENTO DE REDUCCIÓN GAUSSIANA
Para determinar la inversa de una matriz **A** ($m \times m$):

I A la matriz **A** se le suma una matriz identidad ($m \times m$), lo cual da por resultado

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$$

II Se efectúan las operaciones de renglón en toda la matriz aumentada, de manera que **A** se transforme en una matriz identidad ($m \times m$). La matriz resultante presentará la forma

$$(\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

de donde $\mathbf{A}^{-1}$ se puede leer a la derecha de la línea vertical.

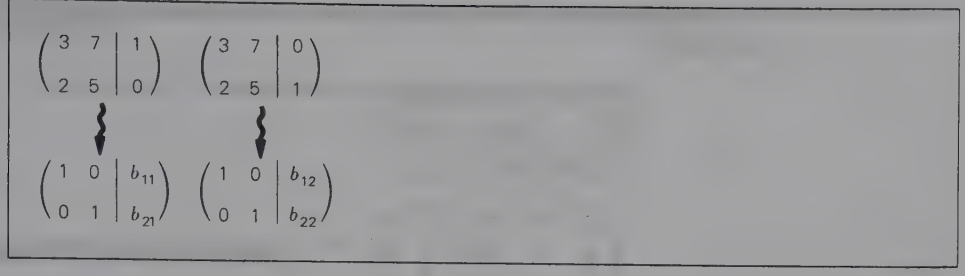


FIGURA 5.2 Transformación gaussiana

EJEMPLO 24

Continuando el último ejemplo, puede obtenerse $\mathbf{A}^{-1}$ mediante los siguientes pasos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \textcircled{1} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(multiplicación del renglón 1 por } \tfrac{1}{3}\text{)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \textcircled{0} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \quad \text{(multiplicación del renglón 1 por } -2 \text{ y adición del producto al renglón 2)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \text{(multiplicación del renglón 2 por 3)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \textcircled{0} & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \text{(multiplicación del renglón 2 por } -\tfrac{7}{3} \text{ y adición del producto al renglón 1)}$$

La inversa de **A** es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

según se vio en el ejemplo 22.

NOTA
Si la matriz no tiene una inversa, no será posible transformar **A** en una matriz identidad.

EJEMPLO 25

Considere la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 6 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Obsérvese la dependencia lineal entre los renglones 1 y 3. El renglón 1 es igual a 2 multiplicado por el renglón 3. A partir de la explicación anterior, puede preverse que

B no tendrá inversa. Esta hipótesis prueba a continuación aplicando el procedimiento gaussiano

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & -2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (multiplicación del renglón 1 por $\frac{1}{2}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \textcircled{0} & 13 & -13 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (multiplicación del renglón 1 por -6 y adición del producto al renglón 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -13 & -3 & 1 & 0 \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (multiplicación del renglón 1 por -1 y adición del producto al renglón 3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (multiplicación del renglón 2 por $\frac{1}{13}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \textcircled{0} & 1 & \frac{1}{26} & \frac{2}{13} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (multiplicación del renglón 2 por 2 y adición del producto al renglón 1)

En este momento se vuelve imposible generar un 1 en la tercera columna del renglón 3. Podría ponerse un 1 en esa posición sumando al renglón 3 un múltiplo del renglón 1 o 2. Sin embargo, ello produciría valores no cero en las columnas 1 o 2 del renglón 3. Intente hacer esto si no está convencido del todo. Nuestra conclusión es que **B** no tiene inversa.

Obtención de la inversa por medio de cofactores (opcional)

Otro método con el cual se determina la inversa de una matriz se vale de la matriz de cofactores.

EL MÉTODO DE COFACTORES

El procedimiento de cofactores con el cual se encuentra la inversa de una matriz cuadrada **A** es el siguiente.

I Se determina la matriz de cofactores $\mathbf{A}_c$ para la matriz de **A**.

II Se determina la **matriz conjunto** $\mathbf{A}_j$, que es la traspuesta de $\mathbf{A}_c$:

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_c^t$$

III La inversa de **A** se calcula multiplicando la matriz conjunta por el recíproco de la determinante de **A**, o sea

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}_j \qquad (5.12)$$

EJEMPLO 26

A continuación se determina la inversa de una matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cofactores $\mathbf{A}_c$ es

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

La correspondiente matriz conjunta es

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La determinante de $\mathbf{A}$ es

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (-1)(4) - (2)(-3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EJEMPLO 27

Para determinar la inversa de la matriz (3 × 3)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

la matriz de cofactores $\mathbf{B}_c$ es

$$\mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz conjunta $\mathbf{B}_j$ es la traspuesta de $\mathbf{B}_c$, es decir,

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Verifique que la determinante de $\mathbf{B}$ es 1.

En consecuencia,

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

La inversa y los sistemas de ecuaciones

En la sección 5.3 se habló de la representación de los sistemas de ecuaciones por medio de matrices. La inversa de una matriz puede servir para determinar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones. En un sistema de ecuaciones de la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz *cuadrada* de coeficientes, ambos miembros de la ecuación matricial pueden multiplicarse por $\mathbf{A}^{-1}$, produciendo

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{5.13}$$

Dado que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, la ecuación (5.13) puede reescribirse como

$$\mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

o bien

or

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} \tag{5.14}$$

En otras palabras, el vector solución de un sistema de ecuaciones puede obtenerse multiplicando la inversa de la matriz de los coeficientes $\mathbf{A}$ *por el vector de las constantes del miembro derecho* $\mathbf{B}$. *Si* $\mathbf{A}^{-1}$ *no existe, las ecuaciones (más exactamente, la matriz de coeficientes) son linealmente dependientes y no hay solución ni un número infinito de soluciones.*

EJEMPLO 28

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como sigue

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones mediante el método de la inversa, es preciso determinar $\mathbf{A}^{-1}$. Las cosas se facilitan porque $\mathbf{A}$ es la matriz examinada en el

ejemplo 26 y $\mathbf{A}^{-1}$ ya se calculó. Por tanto, el vector solución $\mathbf{X}$ se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x_1 = -2$ y $x_2 = 4$.

EJEMPLO 29

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 - x_3 &= -15 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 40 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y también en este caso el ejemplo ha sido inventado (véase el ejemplo 27). El vector solución se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

sea $x_1 = -5$, $x_2 = 5$ y $x_3 = 10$.

Ejercicios de seguimiento de la sección 5.5

Determine la inversa, si es que existe, en las siguientes matrices por medio del procedimiento gaussiano.

1 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

7 $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

8 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

10 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

11 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

12 $\begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Determine la inversa de las siguientes matrices sirviéndose del método de cofactores.

13 $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

14 $\begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$

15 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -9 & -15 & -6 \end{pmatrix}$

16 $\begin{pmatrix} -5 & 6 & -7 \\ 10 & -11 & 13 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

17 $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

18 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

19 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$

21 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

22 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

Con los resultados obtenidos en los ejercicios 1 a 22, determine la solución única de los sistemas de ecuaciones en los ejecicios 23-44, respectivamente (si es que tienen solución).

23
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -5 \end{aligned}$$

24
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 7x_2 &= 3 \end{aligned}$$

25
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 24 \\ -2x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}$$

26
$$\begin{aligned} 40x_1 + 8x_2 &= 80 \\ 30x_1 + 6x_2 &= 60 \end{aligned}$$

27
$$\begin{aligned} x_1 &= 24 \\ x_2 &= 35 \end{aligned}$$

28
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

29
$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

30
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= -10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -40 \\ -x_1 + 2x_3 &= 40 \end{aligned}$$

31
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 17 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 22 \end{aligned}$$

32
$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &= 10 \\ 6x_1 - 9x_2 &= 20 \end{aligned}$$

33
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

34
$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 10 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

35
$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &= -3 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -3 \end{aligned}$$

36
$$\begin{aligned} 3x_1 - 15x_2 &= 25 \\ 5x_1 + 25x_2 &= 40 \end{aligned}$$

37
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 20 \\ 4x_1 + x_2 &= 40 \\ -9x_1 - 15x_2 - 6x_3 &= 30 \end{aligned}$$

38
$$\begin{aligned} -5x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 25 \\ 10x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= -45 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

39
$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 22 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 12 \end{aligned}$$

40
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= -14 \\ 3x_1 + x_2 &= -9 \end{aligned}$$

41
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 10 \\ -4x_1 + 4x_2 &= 12 \end{aligned}$$

42
$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= 20 \\ 15x_1 - 5x_2 &= 12 \end{aligned}$$

43
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 - 4x_3 &= 22 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -18 \end{aligned}$$

44
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -6 \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 11 \end{aligned}$$

45 La solución de un sistema de ecuaciones que tenga la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ se consigue por medio de la multiplicación de matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}$$

¿Cuál fue el sistema original de ecuaciones?

46 La solución de un sistema de ecuaciones que tenga la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ se obtiene con la multiplicación de matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuál fué el sistema original de ecuaciones?

5.6 ALGUNAS APLICACIONES

EJEMPLO 30

Pronósticos de las elecciones Un experto en sondeos de opinión está observando detenidamente una reñida votación para elegir el alcalde de una ciudad. Las últimas encuestas indican las preferencias de los electores en seis distritos de la ciudad. La matriz **P** contiene dichas preferencias.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Distrito} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.40 & 0.35 & 0.30 & 0.50 & 0.30 & 0.36 \\ 0.42 & 0.40 & 0.25 & 0.30 & 0.30 & 0.32 \\ 0.18 & 0.25 & 0.45 & 0.20 & 0.40 & 0.32 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Demócrata} \\ \text{Republicano} \\ \text{Independiente} \end{array}$$

Cada columna indica los porcentajes de electores en cada distrito que, según las proyecciones, votará por diferentes candidatos al puesto de alcalde. Por ejemplo, la columna 3 indica que en el distrito 3 se espera que 30% de los electores voten en favor del candidato del partido demócrata, 25% por el candidato republicano y 45% por el candidato independiente.

Con estas preferencias del electorado, es posible hacer una proyección del resultado de los comicios si se conoce el número de ciudadanos que se espera que voten en cada distrito. El vector **V** contiene las estimaciones actuales de esos números.

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 60\,000 \\ 70\,000 \\ 45\,000 \\ 55\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix}$$

El resultado de las elecciones puede proyectarse por medio de la multiplicación de matrices **PV**. o sea

$$\begin{pmatrix} 0.40 & 0.35 & 0.30 & 0.50 & 0.30 & 0.36 \\ 0.42 & 0.40 & 0.25 & 0.30 & 0.30 & 0.32 \\ 0.18 & 0.25 & 0.45 & 0.20 & 0.40 & 0.32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 60\,000 \\ 70\,000 \\ 45\,000 \\ 55\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107\,400 \\ 96\,900 \\ 95\,700 \end{pmatrix}$$

Estos resultados revelan que el candidato del partido demócrata tiene ventaja de más de 10 000 votos sobre los otros dos candidatos.

EJERCICIO

El encuestador piensa que las preferencias relativas de los electores en cada distrito cambiarán poco en el momento de la votación. Así pues, los cambios en el resultado proyectado recibirán la influencia principal del número de personas que acudan a dar su sufragio en cada distrito. El jefe de la campaña del candidato independiente está convencido de que el número de votantes en los distritos 3 y 5 aumentaría de manera importante con una campaña intensa que subraye la importancia de la votación. En esos distritos se advierte una clara preferencia por el candidato independiente, por lo cual se confía que cambien los resultados de la elección. Una empresa dedicada a las encuestas de opinión pública estima que la propuesta campaña tendiente a "concientizar al elector" puede aumentar el número de electores en cada distrito a los siguientes niveles: 35 000, 66 000, 82 000, 48 000, 70 000 y 45 000, respectivamente. En estas circunstancias haga una proyección de los resultados de la elección.*

EJEMPLO 31

Planeación de necesidades de partes El álgebra matricial ayuda a planear las operaciones futuras de una compañía. Un área específica es la planeación de la producción. Las técnicas matriciales se utilizan regularmente para calcular y mostrar las necesidades de partes en un programa de producción. El proceso comienza determinando el número de unidades de los productos terminados que han de fabricarse. Dado que cada producto final se elabora con partes componentes, puede formarse una matriz de partes que contenga la cantidad de cada parte componente requerida en los productos finales. Puede recurrirse a las multiplicaciones de matrices para determinar las cantidades de cada componente que se necesita en toda la serie de producción, lo mismo que otro tipo de información como los costos de los componentes.

Suponga que la oficina nacional de una empresa dedicada a la renta de automóviles está planeando su programa de mantenimiento para el próximo año. Los ejecutivos quieren conocer las necesidades de la compañía respecto a ciertas partes de repuesto (refacciones) y los costos esperados de dichas categorías. La compañía alquila automóviles de tamaño mediano, compactos y subcompactos. La matriz **N** indica el número

*Candidato demócrata (122 900), republicano (111 400), independiente (111 700).

de automóviles de cada tamaño de los cuales se dispone para alquilarlos en cuatro regiones del país.

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Tamaño mediano} & \text{Compactos} & \text{Subcompactos} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 16\,000 & 40\,000 & 50\,000 \\ 15\,000 & 30\,000 & 20\,000 \\ 10\,000 & 10\,000 & 15\,000 \\ 12\,000 & 40\,000 & 30\,000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{Este} \\ \text{Oeste medio} \\ \text{Sur} \\ \text{Oeste} \end{matrix}$$

Cuatro partes de repuesto que tienen interés especial por su costo y frecuencia de sustitución son las bandas del ventilador, las bujías, el acumulador y las llantas. Basándose en estudios de los registros de mantenimiento realizados en diversas regiones del país, los analistas han calculado el número promedio de repuestos que se necesitan por unidad durante un año. En la matriz **R** se resumen esas cifras:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Tamaño mediano} & \text{Compactos} & \text{Subcompactos} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1.7 & 1.6 & 1.5 \\ 12.0 & 8.0 & 5.0 \\ 0.9 & 0.75 & 0.5 \\ 4.0 & 6.5 & 6.0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{Bandas del ventilador} \\ \text{Bujías} \\ \text{Acumuladores} \\ \text{Llantas} \end{matrix}$$

Los ejecutivos quieren determinar qué cantidad de cada respuesto se necesitará en las diversas regiones. La cantidad puede calcularse efectuando la multiplicación de matrices $\mathbf{NR}^t$. Las necesidades regionales se incluyen en la matriz **P**. Compruebe los elementos de ella.

$$\mathbf{P} = \mathbf{NR}^t = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Bandas del ventilador} & \text{Bujías} & \text{Acumuladores} & \text{Llantas} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 166\,200 & 762\,000 & 69\,400 & 624\,000 \\ 103\,500 & 520\,000 & 46\,000 & 375\,000 \\ 55\,500 & 275\,000 & 24\,000 & 195\,000 \\ 129\,400 & 614\,000 & 55\,800 & 488\,000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{Este} \\ \text{Oeste medio} \\ \text{Sur} \\ \text{Oeste} \end{matrix}$$

La columna vector **C** contiene el costo por unidad de bandas del ventilador, bujías, acumuladores y llantas:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \$1.25 \\ \$0.80 \\ \$30.00 \\ \$35.00 \end{pmatrix}$$

Los ejecutivos pueden calcular el costo de los repuestos (refacciones) anuales por región realizando la multiplicación

$$\mathbf{T} = \mathbf{PC} = \begin{pmatrix} \$24\,739\,350 \\ \$15\,050\,380 \\ \$\ 7\,834\,375 \\ \$19\,406\,950 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Este} \\ \text{Oeste medio} \\ \text{Sur} \\ \text{Oeste} \end{matrix}$$

Los costos anuales esperados de las cuatros partes de la compañía son la suma de los cuatro elementos en **T**, o sea \$67 031 050.

EJEMPLO 32

Migración de la población: condiciones de equilibrio Otra aplicación del álgebra matricial la constituye la migración de la población, donde la población está integrada por personas, animales salvajes, etc. Los patrones o modelos migratorios pueden representarse con una ***matriz de transición*** semejante a la que caracteriza a la conducta de cambio de marca. Cuando se cuenta con una matriz de transición junto con un ***vector de población*** que describa los totales de la población en cada región, es posible hacer una proyección de la dinámica de los cambios demográficos con el tiempo. Si los patrones migratorios son estables con el transcurso del tiempo (no cambia la matriz de transición), podrá ocurrir la condición de equilibrio cuando se estabilice la población de cada región. En el equilibrio los incrementos demográficos en cada región se compensan con las disminuciones durante cada periodo. El siguiente ejemplo simplificado muestra esta condición.

A causa del creciente costo de la energía, la población de un país europeo parece estar desplazándose del norte hacia el sur, como se advierte en la figura 5.3. La matriz de transición **S** describe el comportamiento migratorio observado entre las dos regiones.

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Al norte} & \text{Al sur} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Del norte} \\ \text{Del sur} \end{array}$$

El valor de 0.95 en **S** indica que 95% de los que viven en el norte durante un año seguirán viviendo allí al año siguiente. El 0.05 representa el restante 5% que se desplazará del norte al sur. El 0.98 indica que 98% de los que viven en el sur durante un año seguirán viviendo en esa región al año siguiente. El 0.02 indica la migración anual al norte de 2% de la población que habita en el sur.

NOTA
Para simplificar el análisis se supondrá que la población del país es constante o que los parámetros 0.95 y 0.98 reflejan los efectos netos que explican los nacimientos, muertes, inmigración y emigración durante el año.

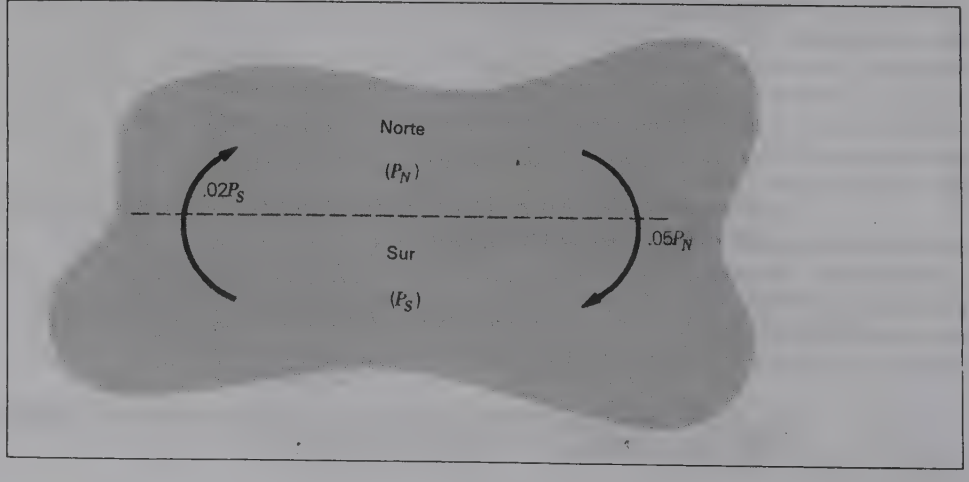


FIGURA 5.3
Cambios de población.

Si P_N representa la población de la región norte del país y P_S la población de la región sur en un año cualquiera, la población proyectada de cada región en el año siguiente se calcula con la multiplicación de matrices

$$\mathbf{PS} = \mathbf{P'} \tag{5.15}$$

o bien

$$(P_N \quad P_S)\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} = (P'_N \quad P'_S) \tag{5.16}$$

El equilibrio ocurre cuando $P_N = P'_N$ y $P_S = P'_S$. Si se expande la ecuación (5.16), se alcanza el equilibrio cuando

$$0.95P_N + 0.02P_S = P_N \tag{5.17}$$

y

$$0.05P_N + 0.98P_S = P_S \tag{5.18}$$

Todavía hay que especificar las cifras demográficas de este país. A fin de determinar la condición de equilibrio basta conocer la población total. Supóngase que la población de un país es de 70 millones de habitantes, o sea

$$P_N + P_S = 70 \tag{5.19}$$

Así pues, la ecuación (5.19) ha de incluirse con las ecuaciones (5.17) y (5.18). Se puede demostrar que, para resolver este sistema (3 × 2), sólo se requieren dos de las tres ecuaciones: la ecuación (5.19) y una de las dos (5.17) o (5.18). Por tanto, la solución del sistema

$$0.95P_N + 0.02P_S = P_N \tag{5.17}$$

$$P_N + P_S = 70 \tag{5.19}$$

producirá las poblaciones de equilibrio. Resuelva (por métodos matriciales o de otro tipo) el sistema y verifique que $P_N = 20$ y $P_S = 50$.

Para probar que existe el equilibrio en esos valores, puede hacer una proyección de la población para el próximo año por medio de la ecuación (5.15), es decir,

$$(20 \quad 50)\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} = (19 + 1 \quad 1 + 49) = (20 \quad 50)$$

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Recuérdese que no se especificaron las distribuciones de la población inicial del país. Resulta que los *valores* de equilibrio son independientes de esas condiciones iniciales. Sin embargo, si se conocen las cifras iniciales, una pregunta interesante es la siguiente: ¿cuánto tiempo se necesita para conseguir el equilibrio? Ésta es una cuestión que no se abordará aquí. No obstante, se supondrá que, cuanto más se acerque la distribución de la población inicial a la distribución de equilibrio, más corto será el *tiempo para alcanzar el equilibrio*.

Explique las suposiciones de este modelo. ¿Cuáles le ocasionan cierta reserva? ¿Piensa que un modelo como éste es de alguna utilidad?

EJEMPLO 33

Análisis de insumos-producción El ganador del Premio Nobel, Wassily Leontief, es famoso por su modelo de una economía basado en insumos y producción. Una de las

suposiciones del modelo es que todo cuanto se produce se consumirá. La demanda de los productos de una industria puede provenir de dos fuentes: (1) demanda de industrias diferentes y (2) demanda de otras fuentes que no sean las industrias. Para poner un ejemplo de ello, veamos lo que sucede en el sector de la producción de energía. Las compañías de electricidad generan energía que (1) se necesita para operar sus propias plantas, (2) se requiere para satisfacer las necesidades eléctricas de otras empresas y (3) se necesita para satisfacer las exigencias de los consumidores en general.

Los dos primeros son ejemplos de la ***demanda interindustrial*** y el último de la ***demanda no industrial***. El objeto del análisis de insumos-producción consiste en determinar cuánto producirá una industria, para que ambos tipos de la demanda queden exactamente satisfechos. En otras palabras, ¿cuánto deberá producirse a fin de alcanzar un equilibrio entre la oferta y la demanda?

(Lea detenidamente este párrafo.) La demanda interindustrial suele sintetizarse en una **matriz tecnológica** o **de insumos-producción.** Un ejemplo es la siguiente matriz **A** (3 × 3). Supóngase que la producción de una industria se mide en dólares. Si a_{ij} es el elemento general

$$\begin{array}{cc} & \text{Usuario} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Proveedor} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \end{array}$$

en la matriz de insumos-producción, *a_{ij} representará la cantidad de producción requerida de la industria i para generar un dólar en la producción de la industria j*. Esta matriz representa una situación de tres industrias. El elemento $a_{11} = 0.3$ indica que por cada dólar de producción *en* la industria 1, 30% de ese valor proviene de la industria 1. El elemento a_{12} indica que por cada dólar de producción *en* la industria 2, 30% es aportado por la industria 1. El elemento a_{13} indica que cada dólar de producción *en* la industria 3 requiere 20 centavos de producción en la industria 1. El elemento $a_{21} = 0.1$ indica que por cada dólar de producción *proveniente* de la industria 1, 10% es proporcionado por la industria 2. El elemento $a_{31} = 0.2$ indica que por cada dólar de producción *en* la industria 1, 20% procede de la industria 3. Intente el lector interpretar los elementos restantes.

Sea x_j la producción de la industria j (en dólares) y sea d_j la demanda no industrial (en dólares) de la producción de la industria j. Puede formularse un conjunto de ecuaciones simultáneas que, al ser resueltas, determinen los niveles de producción de x_j en los cuales la oferta y demanda totales estarán en equilibrio. Las ecuaciones de ese sistema presentarán la forma general

$$\text{Producción de la industria} = \text{demanda interindustrial} + \text{demanda no industrial}$$

En el ejemplo de tres industrias el sistema será

$$\begin{array}{lll} & \overbrace{\text{Demanda interindustrial}} & \overbrace{\text{Demanda no industrial}} \\ x_1 = 0.3x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + & & d_1 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + & & d_2 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + & & d_3 \end{array} \qquad \textbf{(5.20)}$$

Al rearreglar estas ecuaciones

$$\begin{aligned} 0.7x_1 - 0.3x_2 - 0.2x_3 &= d_1 \\ -0.1x_1 + 0.8x_2 - 0.3x_3 &= d_2 \\ -0.2x_1 - 0.1x_2 + 0.6x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Con un conjunto de valores de demanda no industrial d_j, las ecuaciones anteriores pueden resolverse para determinar los niveles de equilibrio de la producción.

Nótese por ahora la estructura de la ecuación (5.20). Si **X** es un vector columna que contiene los elementos x_1, x_2 y x_3 y si **D** es un vector columna que incluye los elementos d_1, d_2 y d_3, la ecuación (5.20) tiene la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$$

Esta ecuación matricial se simplifica del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} - \mathbf{AX} &= \mathbf{D} \\ \mathbf{IX} - \mathbf{AX} &= \mathbf{D} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}} \qquad (5.21)$$

Es decir, si se supone una matriz cuadrada de insumos-producción **A**, los niveles de equilibrio de la producción se calculan al (1) formar la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$, (2) al encontrar $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, si es que existe, y (3) al multiplicar $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ por el vector de la demanda no industrial **D**.

El lector deberá comprobar que, en el ejemplo de las tres industrias, $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.245$ y

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.837 & 0.816 & 1.020 \\ 0.490 & 1.551 & 0.939 \\ 0.694 & 0.531 & 2.163 \end{pmatrix}$$

Con la matriz de insumos-producción del ejemplo de las tres industrias, suponga que los niveles de las demandas no industriales son

$$\begin{aligned} d_1 &= \$50\,000\,000 \\ d_2 &= \$30\,000\,000 \\ d_3 &= \$60\,000\,000 \end{aligned}$$

Los niveles de equilibrio pueden determinarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1.837 & 0.816 & 1.020 \\ 0.490 & 1.551 & 0.939 \\ 0.694 & 0.531 & 2.163 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50\,000\,000 \\ 30\,000\,000 \\ 60\,000\,000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 177\,530\,000 \\ 127\,370\,000 \\ 180\,410\,000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La industria 1 debería generar una producción con un valor de 177 530 000 dólares, la industria 2 una producción con un valor de $127 370 000 y la industria 3 una producción con un valor de $180 410 000.

Usando los coeficientes de la matriz original de insumos-producción, la demanda interindustrial puede calcularse (en millones de dólares) como sigue:

		Usuario		
		1	2	3
Proveedor	1	53.259	38.211	36.082
	2	17.753	25.474	54.123
	3	35.506	12.737	72.164

Si se suma la demanda interindustrial y la demanda no industrial, se obtendrán totales un poco diferentes a los valores de equilibrio calculado. Esas diferencias pueden atribuirse a los errores de redondeo cometidos al calcular $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

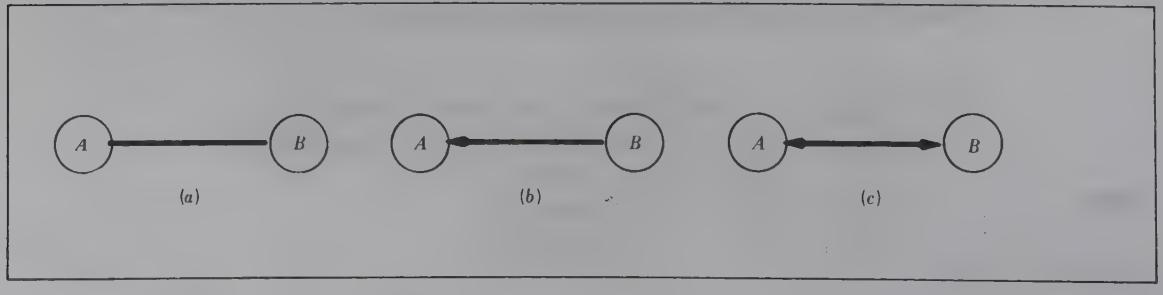
EJEMPLO 34

Aplicaciones a las redes Una ***red*** consta de un grupo de ***nodos*** y un conjunto de ***arcos*** que los unen. Los nodos pueden representar ciudades, intersecciones de carreteras, calculadoras, depósitos de agua u objetos menos tangibles como las partes fundamentales de un proyecto. Los nodos suelen representar los puntos donde se origina, se revela o termina alguna clase de flujo. Los arcos de una red pueden representar carreteras, rutas aéreas, líneas de electricidad, oleoductos, etc. En la figura 5.4 se observan varias representaciones de nodos y arcos. En la figura 5.4*a* no se indica una orientación específica del flujo. El arco en este caso recibe el nombre de ***arco no dirigido***. En la figura 5.4*b*, el arco se llama ***arco dirigido*** por fluir en una dirección. En la figura 5.4*c* el arco es ***bidirigido*** porque los flujos pueden tener dos direcciones.

La figura 5.5 es un diagrama de redes que muestra la estructura de las rutas para una pequeña aerolínea regional de abono que da servicio a cuatro ciudades. Los nodos representan a las ciudades, y los arcos representan las rutas que dan servicio a las ciudades. El arco bidirigido que une los nodos A y B indica que la aerolínea vuela de A a B y de B a A.

La esencia de estas relaciones de nodo-arco pueden resumirse en lo que se llama ***matriz adyacente***. Ésta tiene un renglón y una columna para cada nodo. Los elementos de la matriz son ceros y unos, dependiendo de si un arco dirigido de un nodo a otro. En el ejemplo, a un elemento en posición (i, j) se le asigna un valor de 1 en caso que haya servicio de la ciudad i a la ciudad j; de lo contrario, se asignará un valor de 0. Compárese la matriz adyacente con la figura 5.5. Esa matriz sintetiza todos los *servicios sin escala* entre las ciudades que se hallan en las rutas de la aerolínea.

FIGURA 5.4 Representación de nodo-arco.



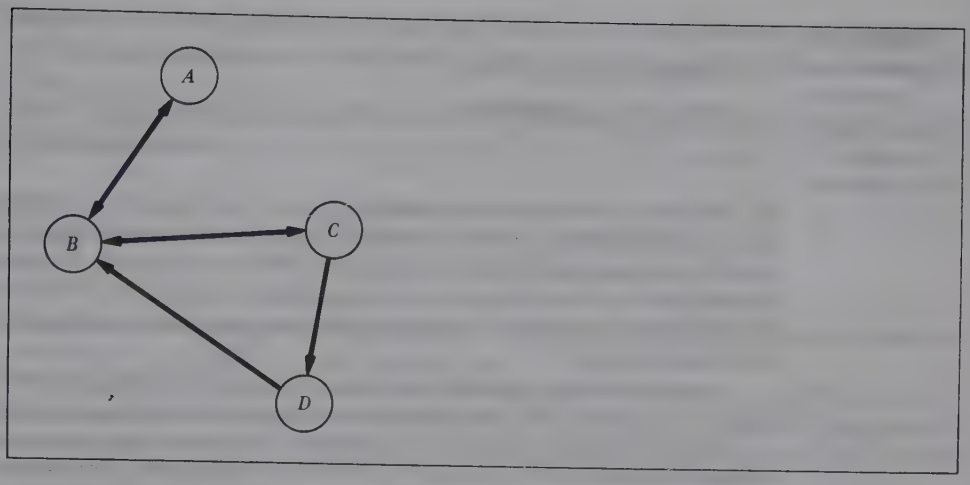


FIGURA 5.5
Rutas de una aerolínea de abono.

$$\begin{array}{c} \\ \text{De} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \end{array}$$

Matriz adyacente

Ahora bien, si la matriz adyacente se multiplica por sí misma, se obtiene un resultado interesante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \text{De} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \end{array}$$

La matriz de productos resume el *servicio sin escalas* entre todas las ciudades. Así, la matriz de productos indica que existe una ruta de una escala de la ciudad C a la ciudad A. Una ojeada a la figura 5.5 confirma que se dispone de ese servicio de la C a la A, con una escala en la ciudad B.

Veamos si esto tiene sentido. Si examinamos el producto interno que produce el elemento (3, 1) de la matriz de productos, el renglón 3 de la primera matriz indica la presencia (ausencia) de los vuelos directos *de* la ciudad C a otras ciudades. La columna 1 de la segunda matriz indica la presencia (ausencia) de vuelos *a* la ciudad A desde otras ciudades. La multiplicación busca correspondencias de pares de vuelos.

$$\begin{array}{c} \\ \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \end{array}$$

Componentes del producto interno	(0)	(1)	+	(1)	(1)	+	(0)	(1)	+	= 1
Pares de vuelo con correspondencia	$C \rightarrow A$	$A \rightarrow A$		$C \rightarrow B$	$B \rightarrow A$		$C \rightarrow C$	$C \rightarrow A$		

FIGURA 5.6 Cálculo del producto interno para el renglón 3 y la columna 1.

En este caso se buscan correspondencias entre los vuelos *de* la ciudad C a otra ciudad con vuelos *de* ese destino *a* la ciudad A. Quizá pueda ejemplificarse esto expandiendo el cálculo del producto interno como se muestra en la figura 5.6. Nótese en esta figura que el único par de vuelos con correspondencia son de C a B y de B a A. Estudie el lector el procedimiento de multiplicación hasta que entienda cómo (y por qué) se calcula cada elemento.

Aunque no muy significativa, la matriz indica dos rutas con una escala de la ciudad B a la ciudad B. Éstas reflejan rutas de viaje redondo a las ciudades A y C.

Al elevar al cubo la matriz se obtendrá una matriz de productos que sintetiza el número de rutas "de dos escalas" entre todas las ciudades. Por ejemplo, los resultados conseguidos hasta ahora han indicado la ausencia de un servicio directo o de una escala de A a D. Esa matriz señala que hay una ruta de dos escalas ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{matrix} \text{A} \\ \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, las rutas con dos escalas no siempre son significativas. Para ilustrar esto, las rutas de dos escalas indicadas de la ciudad A a la ciudad B son $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B$ y $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B$. He aquí otro ejemplo: una ruta de dos escalas puede ocurrir cuando se fuera de la ciudad C a la ciudad A. La ruta sigue la dirección $C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$. Pero la ruta más directa es $C \rightarrow B \rightarrow A$.

Este ejemplo es muy sencillo, sin que realmente justifique los métodos matriciales. Sin embargo, se ha simplificado con fines de ilustración. Los métodos, en especial cuando se llevan a cabo con una computadora, aportan una considerable eficiencia a los problemas a gran escala, como podrían presentarse en las grandes líneas aéreas como United, Eastern, TWA y Delta.

Ejercicios de seguimiento de la sección 5.6

1 En relación con las elecciones mencionadas en el ejemplo 30, el candidato independiente logró captar las simpatías del público en un debate reciente celebrado entre los tres candidatos y transmitido por televisión. El experto en sondeos de opinión pública ha observado un cambio en las preferencias de los electores como se muestra a continuación.

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} \\ \\ \text{Demócrata} \\ \text{Republicano} \\ \text{Independiente} \end{matrix} \begin{matrix} \text{Distrito} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.35 & 0.33 & 0.30 & 0.44 & 0.25 & 0.30 \\ 0.40 & 0.38 & 0.27 & 0.35 & 0.28 & 0.35 \\ 0.25 & 0.29 & 0.43 & 0.21 & 0.47 & 0.35 \end{pmatrix}$$

Suponiendo las estimaciones originales de la votación en seis distritos, haga una proyección de los resultados de la elección. ¿Parece ser que el debate haya influido en ellos?

2 En el ejemplo 32 suponga que la matriz de transición que describe el comportamiento migratorio sea

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \\ \text{Del norte} \\ \text{Del sur} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Al norte} & \text{Al sur} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.05 & 0.95 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine si las poblaciones alcanzarán el estado de equilibrio y, si la respuesta es afirmativa, la población de las dos regiones.

3 En el ejemplo 33, suponga que las demandas no industriales son de \$80 millones, \$40 millones y \$100 millones, respectivamente. Determine los niveles de equilibrio de la producción en las tres industrias. Calcule asimismo las demandas interindustriales de las tres industrias.

4 La figura 5.7 es un diagrama de redes que muestra la estructura de rutas de una pequeña aerolínea regional de abono, la cual da servicio a cuatro ciudades. Por medio de la figura construya una matriz adyacente. Elévela al cuadrado y compendie verbalmente el servicio de una escala existente entre todas las ciudades.

5 La figura 5.8 es un diagrama de redes que muestra la estructura de rutas de una aerolínea de abono que da servicio a cinco ciudades. Con esa figura construya una matriz adyacente. Elévela al cuadrado y sintetice con palabras el servicio de una escala que existe entre todas las ciudades.

6 La matriz de insumos-producción para una economía de tres industrias es

$$\begin{array}{c} \\ \text{Proveedor} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{Usuario} & \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0.25 & 0.30 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.20 \\ 0.40 & 0.10 & 0.25 \end{pmatrix} \end{array} = \mathbf{A}$$

Si las demandas no industriales son, respectivamente, \$100 000 000, \$60 000 000 y \$150 000 000, (*a*) determine los niveles de equilibrio de producción en las tres industrias y (*b*) las demandas interindustriales de las tres industrias.

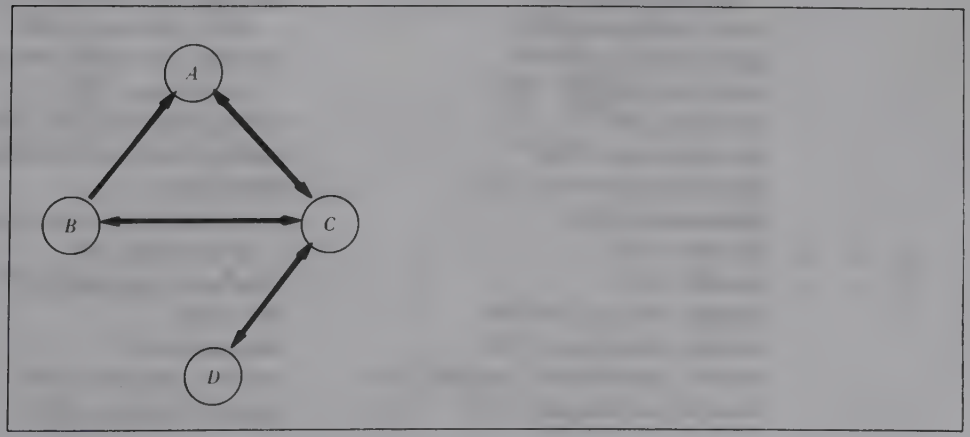


FIGURA 5.7

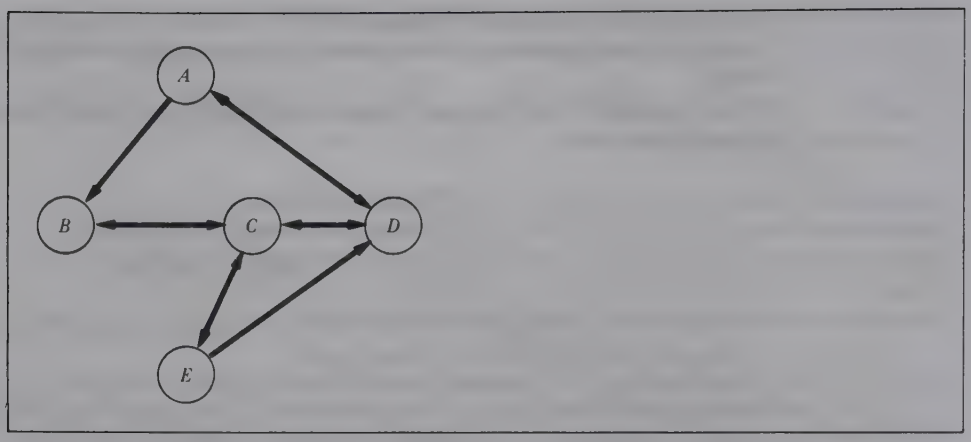


FIGURA 5.8

7 La siguiente matriz de transición indica los cambios anuales de la población en las tres regiones de un país.

$$\begin{array}{cc} & \text{A} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{De} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.90 & 0.06 & 0.04 \\ 0.08 & 0.86 & 0.06 \\ 0.03 & 0.02 & 0.95 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine si las poblaciones alcanzarán una condición de equilibrio y las proporciones relativas de la población en las tres regiones.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

adición (sustracción) de matrices 173
análisis de insumos-producción 207
arco bidirigido 210
arco dirigido 210
arco no dirigido 210
cofactor 187
determinante 184
diagonal primaria 171
dimensión 169
inversa 195
matriz 167
matriz adyacente 210
matriz cuadrada 170
matriz identidad (unidad) 171
matriz no singular 195
matriz singular 195
método de cofactores (obtención de la determinante) 187
método de cofactores (obtención de la inversa) 198
método de expansión por cofactores 188
multiplicación por escalares 175
multiplicación de matrices 176
nodo 210
procedimiento de reducción gaussiana 196
producto interno 175
red 210
traspuesta 171
vector columna 170
vector renglón 170

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1 a 44 se relacionan con la sección 5.3.

1 Las matrices $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ representan las ventas anuales de tres productos de una empresa por región, expresadas en millones de dólares. $\mathbf{S}_1$ representa las ventas durante el primer año de operaciones y $\mathbf{S}_2$ las conseguidas en el segundo año.

$$\mathbf{S}_1 = \begin{array}{c} \text{Región} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2.6 & 4.8 & 1.8 & 0.9 \\ 3.2 & 4.4 & 2.5 & 2.8 \\ 2.4 & 3.6 & 3.8 & 2.5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{array}{c} \text{Región} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3.6 & 2.5 & 3.0 & 2.5 \\ 4.5 & 5.0 & 3.5 & 3.8 \\ 2.9 & 3.0 & 4.6 & 4.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Calcule $\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1$ e interprete el significado de la matriz resultante.
b) Calcule $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ e interprete el significado de la matriz resultante.
c) La dirección ha proyectado un 30% de incremento en las ventas de todos los productos en todas las regiones durante el segundo año de operaciones. Por medio de las operaciones matriciales calcule la diferencia entre los niveles de ventas proyectadas y los niveles reales en el segundo año e interprete los resultados. Identifique las regiones y productos que no correspondieron a las expectativas de la dirección.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 10 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 7 & 10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

efectúe estos cálculos matriciales (cuando sea posible).

2 $2\mathbf{A} + \mathbf{E}$
3 $4\mathbf{E} - \mathbf{A}$
4 $\mathbf{B} + \mathbf{D} - \mathbf{F} + \mathbf{H}$
5 $3\mathbf{B} - 2\mathbf{F} + \mathbf{D}$
6 $\mathbf{AB}$
7 $\mathbf{BA}$
8 $\mathbf{CD}$
9 $\mathbf{DC'B}$
10 $\mathbf{BF}$
11 $\mathbf{DH}$
12 $\mathbf{CH}$
13 $\mathbf{GC}$
14 $\mathbf{CG}$
15 $\mathbf{C'G}$
16 $\mathbf{DF}$
17 $\mathbf{ACBD}$
18 $\mathbf{DBCA}$
19 $\mathbf{C'BD}$
20 $\mathbf{GE}$
21 $\mathbf{EG}$

En las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

realice estos cálculos matriciales (cuando sea posible)

22 $5C^t - 2D$
23 $3C - 4D^t$
24 AE
25 EA
26 CA
27 AC^t
28 DC
29 CD
30 FA
31 E^tF
32 BF^t
33 E^tAF
34 BC
35 BF
36 FB
37 CAD
38 F^tAE
39 D^tC
40 C^tD^tAE
41 BF^tAE

42 Exprese la siguiente ecuación matricial en forma algebraica.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 24 \end{pmatrix}$$

43 Exprese la siguiente ecuación matricial en forma algebraica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 10 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 175 \end{pmatrix}$$

44 Exprese la siguiente ecuación matricial en forma algebraica.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 8 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 12 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 100 \\ 55 \\ 75 \\ 250 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Los ejercicios 45 a 66 se relacionan con la sección 5.4. Obtenga la matriz de cofactores para cada una de las siguientes matrices.

45 $\begin{pmatrix} 15 & 10 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$
46 $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$
47 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
48 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 3 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$
49 $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$
50 $\begin{pmatrix} 10 & -30 \\ -20 & 25 \end{pmatrix}$
51 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
52 $\begin{pmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 0 & 20 & 0 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$

Encuentre la determinante de las siguientes matrices.

53 $\begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$
54 $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

55 $\begin{pmatrix} -10 & 16 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

56 $\begin{pmatrix} x+1 & x+2 \\ x-3 & x-1 \end{pmatrix}$

57 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

58 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

59 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

60 $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

61 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

62 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

REGLA DE CRAMER

En un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

donde **A** es una matriz *cuadrada* de coeficientes, la regla de Cramer ofrece un método para resolver el sistema mediante determinantes. Para resolver y obtener el valor de la variable *j*-ésima, se aplica la fórmula

$$x_j = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}} \tag{5.22}$$

donde $\mathbf{A}_j$ es la matriz **A** con una modificación. $\mathbf{A}_j$ se forma reemplazando la columna *j*-ésima de **A** con el vector columna **B**. Nótese que, si **A** es singular, $|\mathbf{A}| = 0$ y x_j no está definida. Por consiguiente, si $|\mathbf{A}| = 0$, el sistema de ecuaciones no tiene solución o posee un número infinito de soluciones. Si $|\mathbf{A}| \neq 0$, existirá una solución única. Aplique la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones en los ejercicios 63 a 66.

63
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 &= 7 \end{aligned}$$

64
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 24 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 10 \end{aligned}$$

65
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_3 &= 17 \end{aligned}$$

66
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Los ejercicios 67 a 86 están relacionados con la sección 5.5. En las siguientes matrices, obtenga la inversa (si es que existe).

67 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

68 $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

69 $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

70 $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

71 $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$

72 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

73 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

74 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 10 & -5 & 10 \end{pmatrix}$

75 $\begin{pmatrix} -12 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

76 $\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ -5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Con los resultados de los ejercicios 67 a 76 determine la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

77
$$x_2 = 4$$
$$8x_1 + 3x_2 = 12$$

78
$$4x_1 + 8x_2 = 12$$
$$7x_1 + 2x_2 = 9$$

79
$$x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4$$
$$7x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$

80
$$4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 7$$
$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -7$$
$$x_1 - x_2 = 1$$

81
$$8x_1 + 10x_2 = 4$$
$$11x_1 + 13x_2 = 4$$

82
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2$$
$$9x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 20$$
$$-x_1 + 5x_3 = -10$$

83
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_1 + 5x_2 = -13$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

84
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$
$$10x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 10$$

85
$$-12x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$4x_1 - x_2 + 2x_3 = 14$$

86
$$10x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 46$$
$$-5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 9$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Los ejercicios 87 a 94 se relacionan con la sección 5.6.

87 Admisión en la universidad La oficina de inscripciones de una gran universidad planea admitir a 7500 alumnos en el próximo año. El vector columna **M** indica la distribución esperada de los nuevos estudiantes en las categorías de varones residentes en el estado (VRE), mujeres residentes en el estado (MRE), varones residentes fuera del estado (VRF) y mujeres residentes fuera del estado (MRF):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3\,000 \\ 2\,750 \\ 1\,000 \\ 750 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{VRE} \\ \text{MRE} \\ \text{VRF} \\ \text{MRF} \end{matrix}$$

El personal de admisión espera que los estudiantes seleccionen su carrera en las escuelas de administración (A), ingeniería (I) y artes y ciencias (AyC) de acuerdo con los porcentajes dados en la matriz **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} \text{VRE} & \text{MRE} & \text{VRF} & \text{MRF} \\ \begin{pmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.24 \\ 0.20 & 0.10 & 0.30 & 0.06 \\ 0.50 & 0.60 & 0.40 & 0.70 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{A} \\ \text{I} \\ \text{AyC} \end{matrix} \end{matrix}$$

Con las operaciones matriciales calcule el número de estudiantes que, según las previsiones, ingresarán a cada escuela.

88 En el ejercicio anterior, la oficina de alojamiento estima que los estudiantes seleccionarán las alternativas de alojamiento de acuerdo con los porcentajes de **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{matrix} & \text{Fraternidad} & & \\ \text{Dormitorio} & \text{o albergue} & \text{Fuera del campus} & \\ \begin{pmatrix} 0.40 & 0.30 & 0.30 \\ 0.60 & 0.20 & 0.20 \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} \text{IS} \\ \text{OS} \end{matrix} \end{matrix}$$

Realice una multiplicación de matrices que calcule el número de estudiantes que, según se espera, escojan las diversas opciones de alojamiento.

89 Una compañía fabrica tres productos, cada uno de los cuales requiere ciertas cantidades de tres materias primas y de mano de obra. La matriz **R** resume los requerimientos por unidad de cada producto.

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Materia prima} & & & \text{Mano} \\ 1 & 2 & 3 & \text{de obra} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Producto A} \\ \text{Producto B} \\ \text{Producto C} \end{array}$$

Falta inicio del Problema 90

Las necesidades de materias primas se dan en libras por unidad y las de mano de obra en horas por unidad. Las tres materias primas cuestan \$2, \$3 y \$1.50 por libra, respectivamente. Los costos de mano de obra son \$5 por hora. Suponga que 500, 1000 y 400 unidades de los productos *A*, *B* y *C* deben fabricarse.

a) Realice una multiplicación matricial que calcule las cantidades totales de los recursos requeridos para elaborar las cantidades deseadas de los productos *A*, *B* y *C*.

b) Valiéndose de la respuesta dada a la parte (*a*), efectúe una multiplicación matricial que calcule el costo total combinado de la producción.

que son admitidas para darles servicios de pacientes internados. El vector **P** indica el porcentaje de los pacientes admitidos a las diversas unidades del hospital. El vector **S** denota la estancia promedio de los enfermos (en días) en cada unidad.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.10 \\ 0.24 \\ 0.48 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Obstetricia} \\ \text{Cardiología} \\ \text{Pediatría} \\ \text{Otras} \end{array} \qquad \mathbf{S} = (4 \quad 14 \quad 3 \quad 5)$$

El vector **C** resume el costo diario actual de los pacientes para cada unidad:

$$\mathbf{C} = (\$280 \quad \$400 \quad \$240 \quad \$260)$$

Si se admiten 200 nuevos pacientes, efectué la multiplicación matricial que calcule:

a) Los números de pacientes admitidos en cada unidad del hospital

b) El número total de pacientes-días esperados

c) El costo total de los 200 pacientes por día

91 Interacción social Se entrevistó a un grupo de ejecutivos respecto a las personas que tienen una influencia directa sobre su toma de decisiones. En la siguiente matriz se compendian sus respuestas.

	Persona cuya opinión se busca					
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A	0	1	0	1	0	0
B	1	0	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0	1
D	0	1	1	0	0	1
E	0	0	0	1	0	0
F	1	0	0	0	1	0

Una entrada de 1 indica que la persona representada por la columna correspondiente tiene influencia directa en la toma de decisiones del individuo indicado por el renglón. Una entrada de 0 denota la ausencia de influencia directa. Igual que en el ejemplo 35, esta matriz se parece a la matriz adyacente. El cuadrado de la matriz indicará las influencias indirectas en el proceso de toma de decisiones en que interviene un intermediario. Eleve la matriz al cuadrado y resuma con palabras las influencias indirectas.

92 La matriz tecnológica para un modelo de insumos-producción de tres industrias es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.12 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si la demanda no industrial de la producción de las industrias mencionadas es d_1 = \$5 millones, d_2 = \$3 millones y d_3 = \$4 millones, determine los niveles de producción de las tres industrias.

93 Migración de animales salvajes Hace años los científicos estudian los hábitos migratorios de algunas especies de animales salvajes. Un censo anual se lleva a cabo en tres regiones habitadas por las especies. Se ha observado un patrón estable de cambios en sus movimientos. El patrón se advierte en la siguiente matriz de transición.

		A la región		
		1	2	3
De la región	1	0.90	0.05	0.05
	2	0.10	0.80	0.10
	3	0.05	0.10	0.85

Suponga que las poblaciones de las tres regiones fueron de 40 000, 20 000 y 30 000 durante el último censo. Prediga las poblaciones de cada región al momento de hacerse el próximo censo. ¿Y cuál será la población al cabo de 2 años?

94 La figura 5.9 es un diagrama de redes que muestra la estructura de rutas de una compañía comercial de autobuses, la cual da servicio a ocho ciudades. Con esta figura construya una matriz adyacente. Elévela al cuadrado y sintetice con palabras el servicio de una escala que existe entre todas las ciudades.

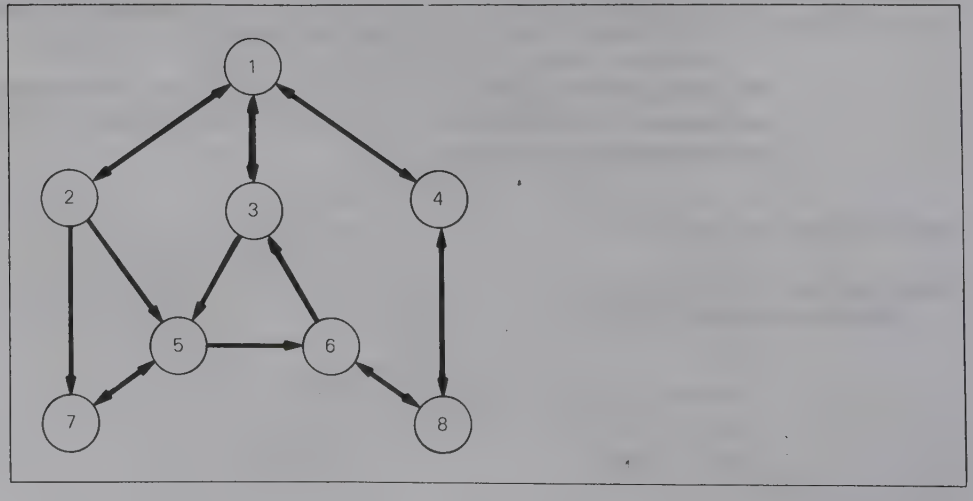


FIGURA 5.9 Rutas de autobús.

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 Obtenga la traspuesta de **A** si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 & 5 \\ 6 & -2 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

2 Calcule el producto interno

$$(a \quad b \quad c \quad d)\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

3 En las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 10 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determine, de ser posible, *a*) **AB**, *b*) **BA**, *c*) **BC**, *d*) **CA**.

4 Escriba el siguiente sistema de ecuaciones en forma de producto de matrices:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_4 &= 20 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 15 \\ x_3 + x_4 &= 18 \\ x_4 &= 9 \end{aligned}$$

5 Obtenga la determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

6 Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

7 La solución de un sistema de ecuaciones de la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ puede lograrse por medio de la multiplicación de matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

¿Cuál fue el sistema original de ecuaciones?

EJERCICIOS QUE SE RESUELVEN POR COMPUTADORA

Con un paquete apropiado de software, resuelva los siguientes ejercicios.

1 En estas matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 10 & 0 & 2 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 6 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcule

(*a*) $\mathbf{AB}$
(*b*) $\mathbf{AC}$
(*c*) $\mathbf{B}^t\mathbf{C}$
(*d*) $\mathbf{C}^t\mathbf{A}^t$
(*e*) $\mathbf{A}^2$
(*f*) $\mathbf{A}^3$

2 En las siguientes matrices

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & 8 & -5 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -3 & 6 & -5 \\ -15 & 8 & -8 & 20 & 25 & 3 \\ 6 & 14 & 15 & -9 & 10 & 9 \\ 0 & 24 & -8 & -5 & 30 & 18 \\ 28 & -7 & 16 & 0 & 10 & 12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -8 & 35 & 25 \\ 15 & -15 & -20 \\ 0 & 12 & 24 \\ 18 & -6 & 10 \\ 24 & 16 & -9 \\ 15 & 20 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 35 & 20 & -15 & -18 & -12 & 0 & 0 \\ -8 & 10 & -8 & 10 & 12 & 28 & 0 & 16 & 14 & 18 \\ 25 & 10 & 35 & 26 & -6 & -14 & -15 & 20 & 12 & 10 \\ 0 & 15 & 25 & 10 & 5 & 16 & 8 & -5 & -8 & -2 \\ 4 & 3 & 5 & -8 & 10 & 12 & -5 & 20 & 15 & 0 \\ 10 & 12 & -6 & 20 & 0 & 6 & 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Calcule

(*a*) $\mathbf{EF}$
(*b*) $\mathbf{EG}$
(*c*) $\mathbf{G}^t\mathbf{F}$
(*d*) $\mathbf{EE}^t$
(*e*) $\mathbf{E}^2$
(*f*) $\mathbf{E}^3$
(*g*) $\mathbf{G}^t\mathbf{E}$

3 En el siguiente sistema de ecuaciones que tienen la forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_5 + 2x_6 - x_8 &= -8 \\ 3x_2 - x_4 + 5x_5 - 2x_7 + 3x_9 &= 6 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad - 3x_8 \qquad + 4x_{10} &= -9\\
5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0\\
3x_6 - 5x_7 + 2x_8 - x_9 + x_{10} &= 5\\
5x_3 - 2x_4 + 6x_5 - 4x_6 \qquad\qquad &= 1\\
x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 \qquad\qquad &= -9\\
3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 + 2x_7 - 5x_8 - x_9 + x_{10} &= 7\\
x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 \qquad - 2x_8 \qquad + x_{10} &= -5
\end{aligned}
$$

a) Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Realice el cálculo $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ para determinar la solución del sistema.

4 En el siguiente sistema de ecuaciones que tiene la forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 11\\
2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 \qquad\qquad\qquad &= 11\\
x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 5\\
x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 \qquad + x_7 \qquad &= 8\\
x_2 \qquad + x_4 \qquad + x_6 \qquad + x_8 &= 3\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \qquad &= 10\\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \qquad\qquad &= 5\\
5x_2 + 2x_3 \qquad - x_5 \qquad + 6x_7 - 5x_8 &= 31
\end{aligned}
$$

a) Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Efectúe el cálculo $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ para determinar la solución del sistema.

5 La siguiente matriz adyacente indica las conexiones directas que tiene una aerolínea entre 10 ciudades.

De \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
3	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
4	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
6	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
10	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

a) Eleve al cuadrado la matriz y con palabras resuma el servicio de *una escala* entre todas las ciudades.

b) Eleve al cubo la matriz y sintetice con palabras el servicio de *dos escalas* entre todas las ciudades.

6 Una compañía está tratando de decidir cuántos de 10 productos fabricar durante el próximo trimestre. No es preciso elaborarlos todos. Pero existen las

siguientes restricciones. Primero, la producción total de los 10 productos deberá ser de 10 000 unidades durante el trimestre. El número de unidades fabricadas del producto 1 habrá de ser el doble de la del producto 2. La producción combinada de los productos 4, 5 y 7 deberá ser de 4000 unidades, y el número de las que se generen del producto 10 habrá de ser igual a la producción combinada de los productos 1 y 2. Además, se desea que los seis departamentos de la compañía se utilicen a toda su capacidad durante el trimestre. La tabla adjunta resume el número de horas requeridas para fabricar los productos en los seis departamentos, así como el número disponible en cada uno de ellos.

	Producto										Horas
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	disponibles
Departamento 1	4	2	3	1	0	0	0	0	0	0	10 000
Departamento 2	1	1	1	1	2	1	0	0	0	1	6 000
Departamento 3	0	0	4	2	2	0	1	2	0	1	11 000
Departamento 4	0	1	3	2	2	5	0	1	1	0.5	8 000
Departamento 5	5	2	2	1	2	1	3	0	0	0	6 000
Departamento 6	0	0	4	2	1	1	2	1	0	0	4 000

a) Formule el sistema de ecuaciones que, al ser resueltas, determinen el número de unidades de los 10 productos que se elaborarán.
b) Utilice el método de inversa de la matriz para resolver el sistema.
c) Con palabras resuma los resultados.

7 La siguiente matriz de insumos-producción para una economía de seis industrias se muestra en el siguiente cuadro.

		Usuario					
		1	2	3	4	5	6
Proveedor	1	0.180	0.005	0.000	0.003	0.000	0.010
	2	0.005	0.290	0.020	0.002	0.004	0.015
	3	0.030	0.170	0.450	0.008	0.010	0.006
	4	0.035	0.040	0.020	0.040	0.010	0.050
	5	0.010	0.001	0.040	0.250	0.360	0.250
	6	0.120	0.080	0.100	0.120	0.180	0.230

Si las demandas no industriales son, respectivamente, \$20 000 millones, \$10 000 millones, \$30 000 millones, \$5000 millones, \$12 000 millones y \$30 000 millones, (*a*) determine los niveles de equilibrio de la producción para las seis industrias y (*b*) las demandas interindustriales en las seis industrias.

CAPÍTULO

6 PROGRAMACIÓN LINEAL: UNA INTRODUCCIÓN

p - 223-230
223-252

6.1 PROGRAMACIÓN LINEAL
6.2 ALGUNAS APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN LINEAL
6.3 SOLUCIONES GRÁFICAS
6.4 MÉTODOS DE SOLUCIÓN POR COMPUTADORA
UNA APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA INDUSTRIA BANCARIA
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
PAQUETES DE PROGRAMAS
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: CONCESIÓN DE CONTRATOS

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Lograr que el lector entienda la estructura y las suposiciones en que se fundan los modelos de la programación lineal
- Dar ejemplos de diversas aplicaciones de los modelos de programación lineal
- Conseguir que el lector comprenda los procedimientos de solución gráfica
- Dar ejemplos de la naturaleza e importancia de fenómenos especiales que pueden presentarse en los modelos de programación lineal
- Explicar la naturaleza de los métodos de solución por computadora y dar ejemplos de un paquete muestra de programas de computadora

En este capítulo se da una introducción del tema de la ***programación lineal***, en el cual se integra gran parte del material que se explicó en el capítulo 5. La programación lineal es una técnica de modelado (construcción de modelos) potente y de gran aplicación en matemáticas. Por otra parte, ofrece además un importante marco de referencia que se relaciona con un área más general de las técnicas de modelado denominada ***programación matemática***.

En el presente capítulo se expondrán la naturaleza y estructura de los problemas de la programación lineal; se estudiarán algunas aplicaciones y algunos procedimientos de solución gráfica en el caso de dos variables. Además, como la mayor parte de los problemas de este tipo se resuelven mediante métodos de computadora, se describirán esos procedimientos de solución. En la última sección se exponen varias formas del análisis de postoptimización. Este tema tiene gran importancia en cualquier análisis de matemáticas aplicadas. En el capítulo 7 se incluye el ***método símplex***, procedimiento de solución que se basa en el álgebra y que es adecuado cuando no conviene aplicar los métodos gráficos. Casi todos los paquetes de programas con que se resuelven los problemas de programación lineal se fundan en el método símplex.

6.1 PROGRAMACIÓN LINEAL

Introducción

La ***programación lineal (PL)*** es una técnica matemática de optimización. Por técnica de "optimización" se entiende un método que trata de maximizar o minimizar un objetivo; por ejemplo, maximizar las utilidades o minimizar los costos. La programación lineal es un subconjunto de un área más extensa de procedimientos de optimización matemática llamada ***programación matemática***. Aunque la aplicación de estos métodos de programación matemática suele exigir el empleo de computadoras, ninguno de ellos se ocupa directamente de la "programación" por computadora. Su interés principal es tomar decisiones óptimas. La programación lineal es una técnica muy potente y con multitud de aplicaciones. Se usa mucho en la industria militar y en la petrolera. Si bien esos sectores han sido quizá los principales usuarios de ella, el sector de servicios y el sector público de la economía también la han aprovechado ampliamente.

En todo problema de programación lineal hay que tomar ciertas decisiones. Éstas se representan con ***variables de decisión*** x_j que se utilizan en el modelo de programación lineal. La estructura básica de un problema de este tipo es maximizar o minimizar la ***función objetivo***, satisfaciendo al mismo tiempo un grupo de ***condiciones restrictivas*** o ***restricciones***. Dicha función es una representación matemática de la meta global formulada en función de las variables de decisión x_j. Puede representar metas como el nivel de utilidades, los ingresos totales, el costo total, los niveles de contaminación y el rendimiento porcentual sobre la inversión. El conjunto de restricciones, también formulado en función de x_j, representa condiciones que es preciso satisfacer cuando se determinan los niveles de las variables de decisión. Así, al procurar maximizar las utilidades obtenidas de la producción y venta de un grupo de productos, las restricciones muestra podrían reflejar los escasos recursos de mano de obra, las pocas

materias primas y la limitada demanda de los productos. Las restricciones de un problema de programación lineal pueden representarse con ecuaciones o con desigualdades (de tipo $\leq$ y/o $\geq$).

A estos problemas se les da el nombre de problemas de programación ***lineal*** porque la función objetivo y las restricciones son lineales. A continuación se plantea un problema simple de este tipo:

$$\begin{aligned} &\text{Maximice} && z = 4x_1 + 2x_2 && (6.1)\\ &\text{sujeta a} && x_1 + 2x_2 \leq 24 && (6.2)\\ & && 4x_1 + 3x_2 \geq 30 && (6.3) \end{aligned}$$

El objetivo es maximizar z, que se formula como función lineal de las dos variables de decisión x_1 y x_2. Al escoger los valores de esas dos variables, hay que satisfacer dos restricciones. Éstas se representan con dos desigualdades lineales (6.2) y (6.3).

TABLA 6.1

	Producto A	Producto B	Capacidad de trabajo semanal
Departamento 1	3 h por unidad	2 h por unidad	120 h
Departamento 2	4 h por unidad	6 h por unidad	260 h
Margen de utilidad	\$5 por unidad	\$6 por unidad	

Un ejemplo

Los problemas concernientes a la mezcla de productos constituyen un grupo importante de aplicaciones de los modelos matemáticos. En capítulos anteriores se habla de esos ejemplos. A continuación se ilustrará con un ejemplo simplificado el tratamiento que en la programación lineal se da a este tipo de problemas. Una empresa fabrica dos productos, los cuales deben procesarse en los departamentos 1 y 2. En la tabla 6.1 se resumen las necesidades de horas de trabajo por unidad de cada producto en uno y otro departamento. También se incluyen las capacidades de horas de trabajo semanales en ambos departamentos y los márgenes respectivos de utilidad que se obtienen con los dos productos. El problema consiste en determinar el número de unidades que hay que fabricar de cada producto, con objeto de maximizar la aportación total a los costos fijos y a las utilidades.

Si se supone que x_1 y x_2 son el número de unidades fabricadas y vendidas, respectivamente, de los productos A y B, entonces puede calcularse la aportación a las utilidades totales sumando las contribuciones de ambos productos. La que hace cada uno se obtiene al multiplicar el margen de utilidad por unidad por el número de unidades producidas y vendidas. *Si z se define como la aportación a los costos y utilidades totales*, se tendrá:

$$z = 5x_1 + 6x_2$$

Según la información suministrada en el planteamiento del problema, las únicas restricciones al decidir el número de unidades que deben fabricarse son las capacidades de trabajo semanal en los dos departamentos. De lo señalado en capítulos precedentes se deduce que el lector estará en condiciones de verificar si estas restricciones son representables por las desigualdades:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad \text{departamento 1}$$
$$4x_1 + 6x_2 \leq 260 \quad \text{departamento 2}$$

Si bien no hay una expresión formal de tal restricción, se sabe implícitamente que x_1 y x_2 no pueden ser negativas. Hay que explicar esta clase de restricción en la formulación del modelo.

Al combinar la función objetivo y las restricciones, el modelo de programación lineal que representa el problema se formula así:

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximice} & z = 5x_1 + 6x_2 & \\ \text{sujeta a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 & (6.4) \\ & 4x_1 + 6x_2 \leq 260 & (6.5) \\ & x_1 \geq 0 & (6.6) \\ & x_2 \geq 0 & (6.7) \end{array}$$

Restricciones estructurales y restricciones de no negatividad

El modelo de programación lineal se ocupa de maximizar o minimizar una función objetivo lineal sujeta a dos tipos de restricciones: 1) ***restricciones estructurales*** y 2) ***restricciones de no negatividad***, una para cada variable de decisión. Las restricciones estructurales reflejan factores como la limitación de recursos y otras condiciones que impone la situación del problema. Las desigualdades (6.4) y (6.5) en la formulación anterior son restricciones estructurales. Las restricciones de no negatividad garantizan que ninguna variable de decisión sea negativa. Las restricciones (6.6) y (6.7) son restricciones de no negatividad. En casi todos los problemas esa restricción resulta lógica. Se dispone de técnicas para manejar casos raros donde se permite a una variable asumir valores negativos.

6.2 ALGUNAS APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

En la última sección se explicó un problema simple de mezcla de productos. En ésta se examinarán otras áreas de aplicación.

Modelos de dieta balanceada

El problema clásico de mezcla dietética requiere determinar los alimentos que deberán incluirse en una comida para 1) minimizar su costo y, al mismo tiempo, 2) cumplir con ciertas necesidades nutricionales. Éstas suelen ser raciones diarias de vitaminas, restricciones que estimulan la variedad de alimentos (por ejemplo, no servir a cada persona 10 libras de papas hervidas) y restricciones que tienen en cuenta el sabor y los alimentos que suelen acompañar al platillo principal. El ejemplo que se cita a continuación es un problema sencillo de mezcla dietética.

EJEMPLO 1

Un dietista está planeando el menú de la cena de un comedor universitario. Se servirán tres alimentos principales, todos ellos con distinto contenido nutricional. El dietista quiere suministrar por lo menos la ración mínima diaria de tres vitaminas en la cena. En la tabla 6.2 se sintetiza el *contenido vitamínico por onza de cada tipo de alimento*, el costo de una onza de cada alimento y la ración diaria mínima de las tres vitaminas. Puede seleccionarse cualquier combinación de los tres comestibles a condición de que el tamaño de la porción total sea de 9 onzas por lo menos.

TABLA 6.2

Alimento	Vitamina 1	Vitamina 2	Vitamina 3	Costo por onza, $
1	50 mg	20 mg	10 mg	0.10
2	30 mg	10 mg	50 mg	0.15
3	20 mg	30 mg	20 mg	0.12
Ración diaria mínima (RDM)	290 mg	200 mg	210 mg	

El problema radica en determinar el número de onzas de cada alimento que ha de incluirse en la comida. El objetivo es minimizar el costo de cada alimento a fin de satisfacer las raciones diarias mínimas de las tres vitaminas, así como la restricción impuesta al tamaño mínimo de cada porción.

Para formular el modelo de programación lineal en este problema, *supóngase que x_j sea el número de onzas del alimento j*. La función objetivo deberá representar el costo total de la comida. Expresado en dólares, dicho costo es igual a la suma de los costos de los tres alimentos, o sea

$$z = 0.10x_1 + 0.15x_2 + 0.12x_3 \tag{6.8}$$

Se desea proporcionar *por lo menos* la ración diaria mínima (RDM) de cada una de las tres vitaminas, por lo cual habrá tres restricciones de "mayor que o igual a". La restricción de cada vitamina será así:

Miligramos de ingestión de vitaminas ≥ RDM

o bien

miligramos del alimento 1 + miligramos del alimento 2 + miligramos del alimento 3 ≥ RDM.

Las restricciones son, respectivamente,

$$50x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 290 \tag{6.9}$$
$$20x_1 + 10x_2 + 30x_3 \geq 200 \tag{6.10}$$
$$10x_1 + 50x_2 + 20x_3 \geq 210 \tag{6.11}$$

La restricción de que el tamaño de la porción sea por lo menos 9 onzas se expresa así:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \tag{6.12}$$

He aquí la formulación íntegra del problema:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimice } & z = 0.10x_1 + 0.15x_2 + 0.12x_3 \\
\text{sujeta a } & 50x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 290 \\
& 20x_1 + 10x_2 + 30x_3 \geq 200 \\
& 10x_1 + 50x_2 + 20x_3 \geq 210 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Nótese que la restricción de no negatividad ha quedado incorporada a la formulación. Con ello se garantiza que no se recomienden cantidades negativas de ninguno de los alimentos.

Se trata de un problema muy simplificado que requiere la planeación de una comida, el empleo de tres tipos de alimento solamente y la consideración de tres vitaminas. En la práctica real se han elaborado modelos que tienen en cuenta 1) la planeación de menús a lo largo de periodos más prolongados (en forma diaria, semanal, etc.), 2) las interrelaciones entre todas las comidas que se sirven durante un día determinado, 3) las interrelaciones entre todas las comidas servidas en el periodo total de planeación, 4) muchos alimentos y 5) varias necesidades nutricionales. En ocasiones resulta extremadamente extenso el número de variables y de restricciones en estos modelos.

Modelos de transporte

Los modelos de transporte son, acaso, los modelos de programación lineal de uso más común. Las compañías petroleras dedican enormes recursos a la implantación de ellos. El ejemplo clásico de un problema de transporte es el embarque de *un producto homogéneo* de *m fuentes de suministro,* u ***orígenes***, a *n puntos de demanda,* o ***destinos***. Por *homogéneo* se entiende que no existen notables diferencias en la calidad del producto proporcionado por las fuentes de suministro. Sus características son las mismas en lo esencial.

En el problema clásico, cada origen puede abastecer a cualquiera de los destinos. Y la demanda de un destino puede ser satisfecha conjuntamente por una combinación de orígenes o en forma total por uno. Cada origen suele contar con determinada capacidad que representa el número máximo de unidades que puede suministrar. Los destinos presentan una demanda específica, la cual constituye el número de unidades que se necesitan.

Suponiendo que cada origen esté en condiciones de abastecer unidades a los destinos, para cada *combinación de origen-destino* se especifica alguna medida del costo o esfuerzo del envío de una unidad. A veces esto se traduce en un costo monetario, en la distancia entre los dos puntos o en el tiempo necesario para pasar de un punto a otro. Un problema común se refiere a calcular el número de unidades que deberían enviarse de cada punto al destino. Con ello se pretende minimizar los costos totales del transporte o la entrega, garantizando al mismo tiempo que 1) el número de unidades suministradas desde un origen no rebase la cantidad de las unidades disponibles en ese origen y 2) que quede satisfecha la demanda de los destinos. En el ejemplo 2 se ofrece un caso de un modelo simple de transporte.

EJEMPLO 2

Mantenimiento de carreteras Una ciudad de tamaño mediano cuenta con dos lugares donde se mantienen reservas de sal y arena que se utilizan durante las tormentas de nieve y la congelación del agua. Cuando sobreviene una tormenta, la sal y la arena se distribuyen de esos sitios a cuatro zonas de la ciudad. En ocasiones se necesita mayor cantidad de sal y arena. Sin embargo, por lo regular es imposible conseguir suministros adicionales durante una tormenta puesto que están amontonados en un sitio central, un poco fuera de la ciudad. Los funcionarios municipales confían en que no habrá tormentas consecutivas.

El director de obras públicas desea determinar el costo mínimo de asignar suministros de sal y arena durante una tormenta. En la tabla 6.3 se sintetiza el costo de enviar a cada zona de la ciudad 1 tonelada de sal o arena de cada reserva. Además, están indicadas (en toneladas) las capacidades de las reservas y los niveles normales de la demanda en cada zona.

TABLA 6.3

	Zona				
	1	2	3	4	Oferta máxima, toneladas
Reserva 1	$2.00	$3.00	$1.50	$2.50	900
Reserva 2	$4.00	$3.50	$2.50	$3.00	750
Demanda, toneladas	300	450	500	350	

Al formular el modelo de programación lineal para este problema, hay ocho decisiones que tomar: cuántas toneladas deben enviarse de cada reserva a las zonas. En algunos casos, la decisión más acertada puede ser no enviar unidades de una reserva particular a determinada zona. Se definirán las variables de decisión de una manera un poco diferente. *Supóngase que x_{ij} es el número de toneladas abastecidas a la zona j desde la reserva i.* Por ejemplo, x_{11} es el número de toneladas suministradas a la zona 1 de la reserva 1. En forma análoga, x_{23} denota el número de toneladas suministradas de la reserva 2 a la zona 3. Esta variable *de dos subíndices* trasmite más información al usuario que el simple hecho de definir las variables en el problema como $x_1, x_2, \ldots, x_8$. Con esta definición de las variables de decisión, el costo total de distribuir la sal y la arena presenta la forma

$$\text{Costo total} = 2x_{11} + 3x_{12} + 1.5x_{13} + 2.5x_{14} + 4x_{21} + 3.5x_{22} + 2.5x_{23} + 3x_{24} \qquad \textbf{(6.13)}$$

Ésta es la función que deseamos minimizar. ¿Parece adecuada su estructura? Use su *modelo mental* para calcular el costo total de enviar 200 toneladas de la reserva 1 a la zona 3 y 100 toneladas de la reserva 2 a la zona 1. ¿Estamos sirviéndonos de la misma función?

Una clase de restricciones se ocupa de las capacidades de distintas pilas. Para cada reserva habría que formular una restricción que especifique que los embarques totales no exceden el suministro o existencias disponibles. En el caso de la reserva 1, la suma de los embarques a todas las zonas no debe ser mayor que 900 toneladas, es decir,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 900 \qquad \textbf{(6.14)}$$

La misma restricción de la reserva 2 es

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 750 \qquad \textbf{(6.15)}$$

La clase final de restricciones deberá garantizar que cada zona reciba su cantidad demandada. Para la zona 1, la suma de los embarques de las reservas 1 y 2 deberá ser igual a 300 toneladas, o sea

$$x_{11} + x_{21} = 300 \qquad \textbf{(6.16)}$$

Las mismas restricciones de las otras tres zonas son, respectivamente,

$$x_{12} + x_{22} = 450 \quad \textbf{(6.17)}$$

$$x_{13} + x_{23} = 500 \quad \textbf{(6.18)}$$

$$x_{14} + x_{24} = 350 \quad \textbf{(6.19)}$$

He aquí la formulación completa del modelo de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Minimice } z = {} & 2x_{11} + 3x_{12} + 1.5x_{13} + 2.5x_{14} + 4x_{21} + 3.5x_{22} + 2.5x_{23} + 3x_{24} \\ \text{sujeta a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 900 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 750 \\ & x_{11} + x_{21} = 300 \\ & x_{12} + x_{22} = 450 \\ & x_{13} + x_{23} = 500 \\ & x_{14} + x_{24} = 350 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0 \end{aligned}$$

Modelos de elaboración de presupuesto de capital

En las decisiones de elaboración (racionamiento) de capital se asignan fondos limitados de inversión a un conjunto de opciones contrarias de inversión. Las opciones de que se dispone en un periodo se caracterizan por un costo de inversión y una utilidad estimada. Suele ser bastante fácil la determinación de esos costos. Es un poco más difícil calcular las utilidades, sobre todo cuando los proyectos se caracterizan por rendimientos menos tangibles (por ejemplo, los programas que aportan beneficios sociales). El problema radica en seleccionar un grupo de alternativas que maximice las utilidades globales sujetas a restricciones presupuestarias y a otras que pueden afectar la elección de proyectos.

EJEMPLO 3

Concesión de subsidios Una oficina federal cuenta con un presupuesto de mil millones de dólares para otorgarlos como subsidio destinado a la investigación innovadora en el campo de la búsqueda de otras formas de producir energía. Un equipo gerencial integrado por científicos y economistas efectuó una reseña preliminar de 200 solicitudes, reduciendo los candidatos a seis finalistas. Los seis proyectos han sido evaluados y calificados en relación con los beneficios que se espera conseguir de ellos en los próximos 10 años. Los beneficios estimados se dan en la tabla 6.4. Representan la *utilidad neta por dólar invertido* en cada opción. Así, el valor de 4.4 asociado a la opción 1 indica que con cada dólar que se invierta en ella se obtendrá una utilidad neta (después de restar la inversión) de $4.40 durante los 10 años próximos.

La tabla 6.4 muestra además el nivel requerido de financiamiento (en millones de dólares). Esas cifras representan la cantidad máxima de que se dispone para cada proyecto. La oficina del gobierno puede conceder a cada proyecto una suma que no rebase esa cifra. Observando estas disposiciones, el presidente ha ordenado financiar el proyecto nuclear por lo menos en 50% de la suma solicitada. El administrador de la dependencia gubernamental tiene mucho interés en el proyecto solar y ha pedido que la cantidad combinada que se conceda a estos proyectos sea como mínimo $300 millones de dólares.

TABLA 6.4

Proyecto	Clasificación de proyectos	Utilidad neta por $ invertidos	Nivel solicitado de financiamiento, en millones de $
1	Solar	4.4	220
2	Solar	3.8	180
3	Combustibles sintéticos	4.1	250
4	Carbón	3.5	150
5	Nuclear	5.1	400
6	Geotérmico	3.2	120

El problema consiste en determinar las sumas de dinero que se otorgarán a cada proyecto con objeto de maximizar los *beneficios netos* medidos en dólares. *Si x_j es el número de dólares (en millones) otorgados al proyecto j*, la función objetivo será

$$\text{Maximice} \quad z = 4.4x_1 + 3.8x_2 + 4.1x_3 + 3.5x_4 + 5.1x_5 + 3.2x_6 \tag{6.20}$$

Entre las restricciones estructurales figuran los siguientes tipos. Primero, el presupuesto es de mil millones de dólares y la suma total no debe exceder esa cifra. Esto se expresa matemáticamente así:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1\,000 \tag{6.21}$$

En *cada* proyecto debe existir una restricción que refleje la concesión máxima posible. En el caso del proyecto 1 la restricción es

$$x_1 \leq 220 \tag{6.22}$$

Hay que incluir cinco restricciones más para el resto de los proyectos. A fin de asegurarse de que el presidente se interese en el proyecto nuclear se incluirá la restricción

$$\begin{aligned} x_5 &\geq 0.5(400) \\ &\geq 200 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Por último, el interés del administrador en los proyectos solares se obtiene mediante la restricción

$$x_1 + x_2 \geq 300 \tag{6.24}$$

He aquí la formulación íntegra de este problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 4.4x_1 + 3.8x_2 + 4.1x_3 + 3.5x_4 + 5.1x_5 + 3.2x_6 \\ \text{sujeta a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1\,000 \\ & x_1 \leq 220 \\ & x_2 \leq 180 \\ & x_3 \leq 250 \\ & x_4 \leq 150 \\ & x_5 \leq 400 \\ & x_6 \leq 120 \\ & x_5 \geq 200 \\ & x_1 + x_2 \geq 300 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Es razonable formular con igual rigor la restricción del presupuesto total [Ecuación (6.21)]? Explique su respuesta afirmativa o negativa.

Modelos de mezclado

La programación lineal se presta a muchas aplicaciones en un área denominada ***modelos de mezclado***. Éstos se formulan para determinar la combinación óptima de los componentes que deben mezclarse para obtener un producto final. Esos modelos se han usado para mezclar productos de petróleo, crear mezclas destinadas a la agricultura, a los fertilizantes y semillas de pasto, a los licores, tés y café, etc. El objetivo de los modelos casi siempre es reducir al mínimo el costo de la mezcla. Entre las restricciones habituales se cuentan los requerimientos de tamaño de cada mezcla, las exigencias tecnológicas (o receta) y la escasez de los ingredientes. A continuación se ofrecen ejemplos que ilustran un modelo de mezclado.

EJEMPLO 4

Mezcla de petróleo Una refinería pequeña está a punto de mezclar cuatro productos de petróleo para obtener tres mezclas finales de gasolina. Aunque las fórmulas del mezclado no son exactas, hay algunas restricciones que deben observarse en el proceso, a saber:

1 El componente 2 deberá constituir no más de 40% del volumen de la mezcla 1.
2 El componente 3 deberá constituir por lo menos 25% del volumen de la mezcla 2.
3 El componente 1 deberá ser exactamente 30% de la mezcla 3.
4 Los componentes 2 y 4 deberán constituir, juntos, por lo menos 60% del volumen de la mezcla 1.

Hay poca disponibilidad de los componentes 2 y 3: 1 500 000 y 1 000 000 de litros, respectivamente. El gerente de producción desea mezclar un total de 5 000 000 de litros. De este total un mínimo de 2 000 000 de litros de la mezcla final 1 deberán de producirse. El precio al mayoreo por litro en la venta de cada mezcla final es de \$0.26, \$0.22 y \$0.20, respectivamente. El costo de los insumos componentes es de \$0.15, \$0.18, \$0.12 y \$0.14 por litro respectivamente. El problema radica en determinar el número de litros de cada componente que se utilizará en las mezclas finales, de manera que se maximice la aportación de la utilidad total de la corrida de producción.

Al plantear el problema se usará la variable con dos subíndices x_{ij} *para representar el número de litros del componente i empleado en la mezcla final j.* Una suposición fundamental en este modelo es que no se pierde volumen durante el proceso de mezclado. Es decir, si se combinan 3 litros de los productos componentes, el resultado de la mezcla final será exactamente 3 litros.

La función objetivo tiene la forma

Contribución a la utilidad total = ingresos totales de las tres mezclas − costo total de los 4 componentes

contribución a la utilidad de la mezcla 1 + contribución de utilidad de la mezcla 2 + contribución a la utilidad de la mezcla 3 − costo del componente 1 − costo del componente 2 − costo del componente 3 − costo del componente 4

\$0.26 (núm. de litros de la mezcla 1) + \$0.22 (núm. de litros de la mezcla 2) + \$0.20 (núm. de litros de la mezcla 3) − \$0.15 (núm. de litros del componente 1) − \$0.18 (núm. de litros del componente 2) − \$0.12 (núm. de litros del componente 3) − \$0.14 (núm. de litros del componente 4)

Examine las expresiones entre paréntesis en las siguientes ecuaciones y compruebe que la función objetivo sea

$$\begin{aligned} z = {} & 0.26(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 0.22(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) \\ & + 0.20(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) - 0.15(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \\ & - 0.18(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 0.12(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & - 0.14(x_{41} + x_{42} + x_{43}) \end{aligned}$$

que puede simplificarse al combinar términos semejantes para obtener

$$\begin{aligned} z = {} & 0.11x_{11} + 0.07x_{12} + 0.05x_{13} + 0.08x_{21} + 0.04x_{22} + 0.02x_{23} + 0.14x_{31} \\ & + 0.10x_{32} + 0.08x_{33} + 0.12x_{41} + 0.08x_{42} + 0.06x_{43} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Por lo que respecta a las restricciones estructurales, la corrida de la producción total habrá de ser de 5 000 000 de litros, o sea

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{43} = 5{,}000{,}000 \tag{6.26}$$

La restricción de la fórmula (*a*) está representada por la desigualdad

cantidad del componente 2 usada en la mezcla 1 ≤ 40% de la cantidad de la mezcla final 1

o bien

$$x_{21} \leq 0.40(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$$

Esta restricción se simplifica y adquiere la forma

$$-0.4x_{11} + 0.6x_{21} - 0.4x_{31} - 0.4x_{41} \leq 0 \tag{6.27}$$

La restricción de la fórmula (receta) (*b*) se expresa como

cantidad del componente 3 usada en la mezcla 2 $\geq$ 25% de la cantidad de la mezcla final 2

o

$$x_{32} \geq 0.25(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42})$$

o bien

$$-0.25x_{12} - 0.25x_{22} + 0.75x_{32} - 0.25x_{42} \geq 0 \tag{6.28}$$

Las restricciones (*c*) y (*d*) están representadas de modo semejante por la ecuación (6.29) y la desigualdad (6.30):

$$x_{13} = 0.3(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43})$$

o

$$0.7x_{13} - 0.3x_{23} - 0.3x_{33} - 0.3x_{43} = 0 \tag{6.29}$$

y

$$x_{21} + x_{41} \geq 0.6(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$$

o bien

$$-0.6x_{11} + 0.4x_{21} - 0.6x_{31} + 0.4x_{41} \geq 0 \tag{6.30}$$

Las disponibilidades limitadas de los componentes 2 y 3 se indican con las desigualdades (6.31) y (6.32):

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1\,500\,000 \tag{6.31}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1\,000\,000 \tag{6.32}$$

Por último, la necesidad mínima de producción de la mezcla final 1 se representa mediante

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 2\,000\,000 \tag{6.33}$$

La formulación íntegra de este modelo de mezclado es

Maximice $z = 0.11x_{11} + 0.07x_{12} + 0.05x_{13} + 0.08x_{21} + 0.04x_{22} + 0.02_{23} + 0.14x_{31} + 0.10x_{32} + 0.08x_{33} + 0.12x_{41} + 0.08x_{42} + 0.06x_{43}$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{43} &= 5\,000\,000 \\
-0.4x_{11} + 0.6x_{21} - 0.4x_{31} - 0.4x_{41} &\leq 0 \\
-0.25x_{12} - 0.25x_{22} + 0.75x_{32} - 0.25x_{42} &\geq 0 \\
0.7x_{13} - 0.3x_{23} - 0.3x_{33} - 0.3x_{43} &= 0 \\
-0.6x_{11} + 0.4x_{21} - 0.6x_{31} + 0.4x_{41} &\geq 0 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1\,500\,000 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 1\,000\,000 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &\geq 2\,000\,000 \\
x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43} &\geq 0
\end{aligned}$$

A medida que el lector comience a probar sus conocimientos en la formulación de los modelos de programación lineal, se le recomiendan las siguientes pautas o lineamientos.

SUGERENCIAS PARA FORMULAR MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1 Lea con mucho cuidado el planteamiento del problema.

2 Identifique las variables de decisión. Se trata de las decisiones que es preciso tomar. ¿Qué conjunto de variables tiene un efecto directo sobre el nivel de obtención de los objetivos y puede controlar el encargado de la decisión? Una vez identificadas esas variables, se enumeran y se da una definición escrita (por ejemplo, x_1 = *número de unidades producidas y vendidas por semana del producto 1,* x_2 = *número de unidades producidas y vendidas por semana del producto 2.* Realizar un análisis Dimensional de unidades

3 Identifique el objetivo. ¿Qué debe maximizarse o minimizarse (por ejemplo, *maximizar la utilidad total semanal obtenida de la fabricación de los productos 1 y 2*)?

4 Identifique las restricciones estructurales. *¿Qué condiciones deben satisfacerse cuando se asignan valores a las variables de decisión? ¿Qué restricciones prohíben llevar a la infinidad (positiva o negativa) el valor de la función objetivo? Quizá el lector quiera escribir una descripción verbal de las restricciones antes de anotar la representación matemática (por ejemplo, la fabricación total del producto 1* $\geq$ *100 unidades).*

5 Formule por escrito el modelo matemático. *Según el problema de que se trate, puede comenzar por definir la función objetivo o* las restricciones estructurales. No olvide incluir la restricción de no negatividad.

Ejercicios de seguimiento de la sección 6.2

1 En el ejemplo 3, modifique la formulación si se cumplen las siguientes condiciones.

a) Cada proyecto deberá recibir un porcentaje mínimo de 10 del nivel de financiamiento deseado.

b) La suma asignada al proyecto de combustible de carbón tendrá que ser por lo menos igual a la que se destina al proyecto de combustibles sintéticos.

c) El financiamiento combinado del proyecto de combustibles geotérmicos y el del proyecto de combustibles sintéticos será de 40 millones de dólares por lo menos

2 En el ejemplo 4, modifique la formulación si hay que satisfacer las siguientes condiciones.

a) No se elaborarán más de 3 millones de litros de la mezcla final 1.

b) Los componentes 1 y 3 constituirán como mínimo 50% de la mezcla final 3.

c) Los componentes 1 y 4 no constituirán más de 60% de la mezcla final 1.

d) El ingreso total de la mezcla 2 deberá ser mayor que \$200 000.

3 Una dietista está planeando el menú de la comida de una escuela primaria. Proyecta servir tres alimentos principales, todos ellos con distinto contenido nutricional. La dietista desea suministrar al menos la ración diaria mínima de las tres vitaminas en una comida. En la tabla 6.5 se sintetiza el contenido vitamínico por onza de los tres tipos de alimento. Cualquier combinación de ellos puede seleccionarse, con tal que el tamaño total de la porción sea de 7.5 onzas por lo menos.

Formule un problema de programación lineal que, al ser resuelto, determine el número de onzas que deben servirse de cada alimento. El objetivo es reducir al mínimo el costo de la comida y, al mismo tiempo, alcanzar los niveles de las raciones diarias mínimas de las tres vitaminas y observar la restricción relativa al tamaño mínimo de la porción.

4 Un importante fabricante de azúcar tiene dos plantas que abastecen a cuatro bodegas. En la tabla 6.6 se resumen las capacidades semanales de ellas, sus exigencias se-

TABLA 6.5

Alimento	Vitamina 1	2	3	Costo por onza, $
1	30 mg	10 mg	40 mg	0.15
2	20 mg	15 mg	30 mg	0.10
3	40 mg	5 mg	20 mg	0.12
RDM	300 mg	120 mg	210 mg	

TABLA 6.6

	Almacén 1	2	3	4	Oferta semanal, toneladas
Planta 1	$ 20	$ 15	$ 10	$ 25	1 200
Planta 2	$ 30	$ 25	$ 20	$ 15	1 500
Demanda semanal, toneladas	400	600	1 000	500	

manales y el costo de embarque por tonelada (en dólares) entre una planta y una bodega cualquiera. Si x_{ij} es el número de toneladas enviadas de la planta i al depósito j, formule el modelo de programación lineal que permite determinar el programa de distribución que reduzca al mínimo los costos de embarque. No deben violarse las capacidades semanales de la planta, y es preciso satisfacer las necesidades de las bodegas.

5 Una compañía química produce oxígeno líquido en dos localidades del sur de un país. Ha de abastecer tres depósitos en la misma región. La tabla 6.7 contiene un resumen del costo de embarque por 1000 galones entre una planta y un depósito, así como la capacidad mensual de las plantas y la demanda mensual de los depósitos. Si x_{ij} es el número de galones (en miles) enviados de la planta i al depósito j, formule el modelo de programación lineal que permita determinar el programa de asignación que ofrezca el costo mínimo. No deben violarse las capacidades de la planta, y el programa habrá de satisfacer las necesidades de los depósitos.

6 Una compañía fabrica tres productos que se procesan en algunos de los cuatro departamentos o en todos ellos. La tabla 6.8 indica el número de horas que una unidad de cada producto requiere en los departamentos y el número de libras de materias primas que se necesitan. También se incluyen los costos de mano de obra y de materiales por unidad, el precio de venta y las capacidades semanales de las horas de trabajo y de las materias primas. Si el objetivo es maximizar la utilidad semanal total, formule el modelo de programación lineal de este ejercicio.

TABLA 6.7

	Depósito 1	2	3	Oferta, 1000 gal
Planta 1	50	40	35	1 000
Planta 2	30	45	40	1 400
Demanda, 1000 gal	800	750	650	

TABLA 6.8

	Producto			Disponibilidad semanal
	A	*B*	*C*	
Departamento 1	3.5	4	2	120 h
Departamento 2		2	2	100 h
Departamento 3	4	1		80 h
Departamento 4	2	3	6	150 h
Libras de materias primas por unidad	5.5	4.0	3.5	250
Precio de venta	$50	$60	$65	
Costo de mano de obra por unidad	30	32	36	
Costo de materiales por unidad	11	8	7	

7 En relación con el ejercicio 6, escriba las restricciones que acompañan a cada una de las siguientes condiciones.

a) La producción semanal combinada debe ser por lo menos de 40 unidades.

b) El número de unidades del producto *A* no debe ser mayor que el doble de la cantidad del producto *C*.

c) Puesto que los productos *B* y *C* suelen venderse juntos, sus niveles de producción tienen que ser idénticos.

8 Una agencia regional de renta de camiones hace planes para afrontar una fuerte demanda durante los meses de verano. Ha hecho recuentos de esos camiones de carga en algunas ciudades y los comparó con las necesidades proyectadas en cada una de ellas (todos los camiones de carga son del mismo tamaño). Se espera que tres zonas metropolitanas tengan más camiones de los que necesitarán en el verano, pero se prevé que cuatro ciudades tendrán menos camiones de los que requerirá la demanda. A fin de prepararse para esos meses, es preciso contratar a conductores que trasladen los camiones de carga de las áreas de excedente a aquellas donde existe escasez de esos vehículos. Se les paga un sueldo fijo que depende de la distancia entre las dos ciudades. Además reciben gastos diarios. La tabla 6.9 resume los costos de hacer que un camión sea llevado de una ciudad a otra. También se incluyen los excedentes proyectados de cada ciudad que muestra una oferta excesiva y la escasez que se prevé para la ciudad que necesitará más camiones de carga. (Nótese que el excedente total es mayor que la escasez total.)

Si el objetivo es minimizar el costo de reasignar los camiones de carga, formule el modelo de programación lineal que permita la solución del problema. (*Sugerencia*: denote con x_{ij} el número de camiones trasladados del área de excedente i a la de escasez j.)

9 Un fabricante de café mezcla cuatro granos en tres mezclas finales. Los cuatro granos componentes le cuestan $0.55, $0.70, $0.60 y $0.80 por libra, respectivamente. Las existencias semanales de los cuatro componentes son, respectivamente,

TABLA 6.9

	Área de escasez				Excedente de camiones
	1	2	3	4	
Ciudad con excedente 1	$100	$250	$300	$150	150
Ciudad con excedente 2	400	75	100	200	125
Ciudad con excedente 3	300	100	50	400	180
Escasez de camiones	40	80	90	150	

30 000, 40 000, 25 000 y 20 000 libras. El fabricante vende las tres mezclas a precios de mayoreo de $1.25, $1.40 y $1.80 por libra, respectivamente. La producción semanal habrá de incluir por lo menos 40 000 libras de la mezcla final 1.

A continuación se dan las restricciones de la mezcla que debe seguir el que la prepara.

a) El componente 2 deberá constituir por lo menos 30% de la mezcla final y no más de 20% de la mezcla final 3.

b) El componente 3 deberá constituir exactamente 20% de la mezcla final 3.

c) El componente 4 deberá constituir por lo menos 40% de la mezcla final 3 y no más de 10% de la mezcla final 1.

El objetivo es determinar el número de libras de cada componente que debería usarse en la mezcla final para maximizar la utilidad semanal. Formule esto como un modelo de programación lineal, definiendo cuidadosamente sus variables de decisión.

6.3 SOLUCIONES GRÁFICAS

Cuando un modelo de programación lineal se expresa en términos de dos variables de decisión, puede resolverse con procedimientos gráficos. El método gráfico ofrece un buen marcado visual de referencia, y es de gran utilidad para entender las clases de fenómenos que pueden ocurrir en la solución de los problemas de este tipo. En la presente sección se expondrá el método de solución gráfica. Antes de describirlo, se explicará la graficación de las desigualdades lineales.

Gráficas de desigualdades lineales

Cuando una desigualdad lineal contiene dos variables, el conjunto solución puede describirse de manera gráfica. Así, la desigualdad

$$-4x + 3y \leq -24$$

tiene un conjunto solución representado por el ***medio espacio*** sombreado de la figura 6.1. El conjunto puede dividirse en dos subconjuntos. Uno de ellos consta de todos los pares de valores (x, y) que satisfacen la *parte de igualdad* o la ecuación $-4x + 3y = -24$. Este subconjunto está representado por la línea recta en la figura 6.1. El otro subconjunto consta de todos los pares de valores (x, y) que satisfacen la *parte de desigualdad*, o sea la desigualdad $-4x + 3y < -24$. El subconjunto está representado por el área sombreada situada debajo y a la derecha de la recta en la figura 6.1.

La conclusión es ésta: 1) las desigualdades lineales que contienen dos variables son susceptibles de representación gráfica en dos dimensiones por medio de un *medio espacio* del plano cartesiano; 2) el medio espacio está compuesto por la línea que representa la parte de igualdad de la desigualdad y todos los puntos situados en un lado de la recta (que representa a la desigualdad estricta). He aquí el procedimiento con que se determina el medio espacio apropiado:

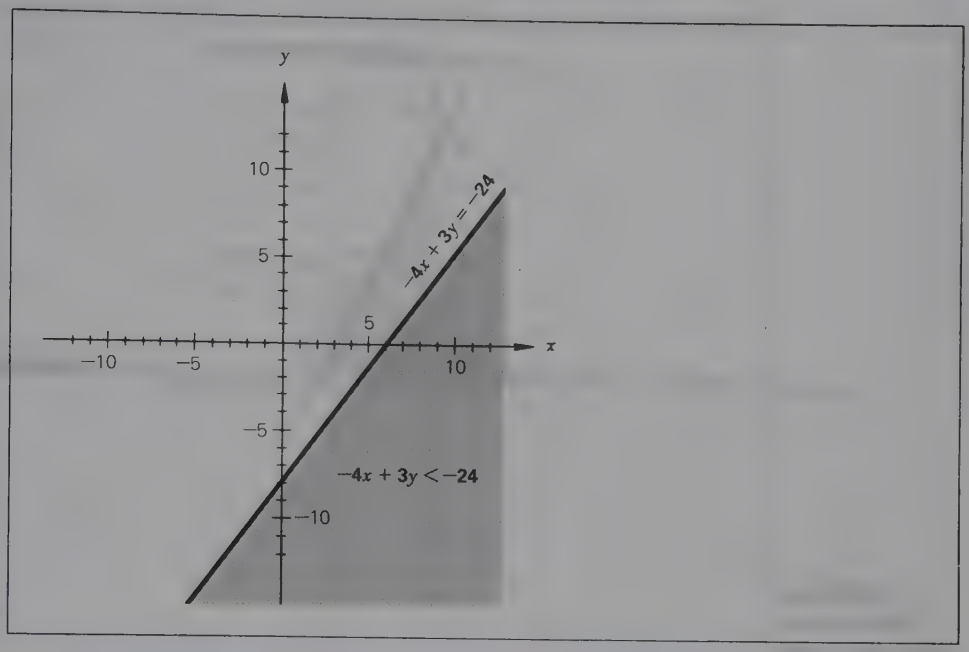


FIGURA 6.1
Solución de $-4x + 3y \leq -24$.

1 Se grafica la línea que representa la ecuación.
2 Se determina el lado de la que satisface la desigualdad estricta.

Para hacer esta determinación, puede escogerse un punto arbitrariamente en cualquiera de los lados de la línea y sustituir sus coordenadas en la desigualdad (el *origen* es una opción adecuada si no se encuentra sobre la línea). Si las coordenadas *satisfacen* la desigualdad, ese lado de la línea queda incluido en el ***medio espacio permisible***. Si no la satisfacen, ese espacio se hallará en el otro lado de la línea.

EJEMPLO 5

Una empresa fabrica dos productos. Éstos han de procesarse en un departamento. El producto A requiere 4 horas por unidad y el producto B requiere 2 horas por unidad. El tiempo total de producción con que se cuenta para la semana entrante es de 60 horas. Por tanto, una restricción al planear el programa de producción es que las horas totales usadas en la fabricación de ambos productos no debe ser mayor que 60; o bien, *si x_1 es el número de unidades elaboradas del producto A y x_2 denota el número de unidades fabricadas del producto B,* la restricción se representa con la desigualdad

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$

Existen otras dos restricciones implicadas en las definiciones de las variables. Cada variable representa una cantidad de producción, y por ello ninguna de las dos podrá ser negativa. Estas restricciones se indican con las desigualdades $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

El conjunto solución de la desigualdad original representa distintas combinaciones de los dos productos que pueden fabricarse, sin rebasar las 60 horas. En la figura 6.2 se da la solución gráfica del conjunto solución. Verifique y vea si el medio espacio permisible ha sido identificado correctamente. Los puntos que satisfacen la desigualdad

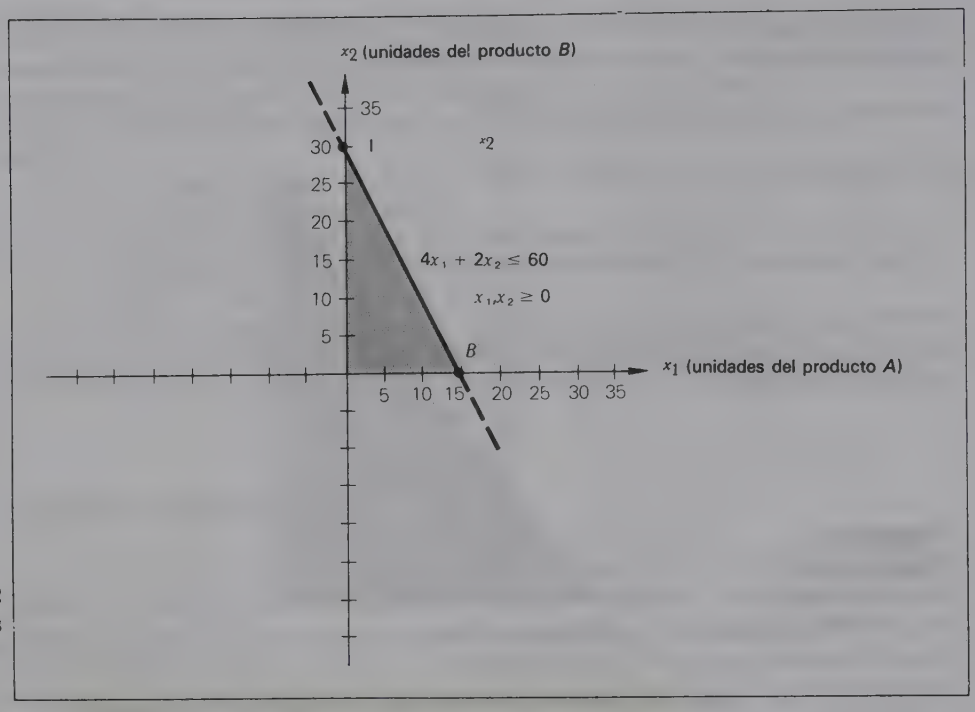


FIGURA 6.2 Posibilidades de producción: departamento 1.

$4x_1 + 2x_2 \leq 60$ serán el medio espacio que incluye todos los puntos situados en la línea y a su izquierda. Sin embargo, la restricción de que ambas variables no sean negativas nos confina a la parte del medio espacio en el primer cuadrante. Así pues, el área sombreada representa las combinaciones de los productos A y B que pueden fabricarse. Es posible hacer una distinción ulterior en la figura 6.2. Todas las combinaciones de los dos puntos denotados por los puntos en $\overline{AB}$ consumirán las 60 horas. Los puntos situados en el interior del área sombreada representan combinaciones de los dos productos que requerirán menos de 60 horas. ¿Es el origen una decisión posible?

Sistemas de desigualdades lineales

En los problemas de programación lineal, nos ocuparemos de *sistemas* de desigualdades lineales. Nuestro interés se centrará en determinar el conjunto solución que satisfaga todas las desigualdades dentro del sistema de restricciones. Para dar un ejemplo de la representación gráfica de los sistemas de desigualdades lineales, se estudiarán los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6

Suponga que los productos del ejemplo precedente necesitan también ser procesados en otro departamento además del departamento original. Y suponga que el producto A requiere 3 horas por unidad y el producto B requiere 5 horas por unidad. Si el segundo departamento dispone de 75 horas cada semana, la desigualdad que describe las posibilidades de producción en este departamento será

$$3x_1 + 5x_2 \leq 75$$

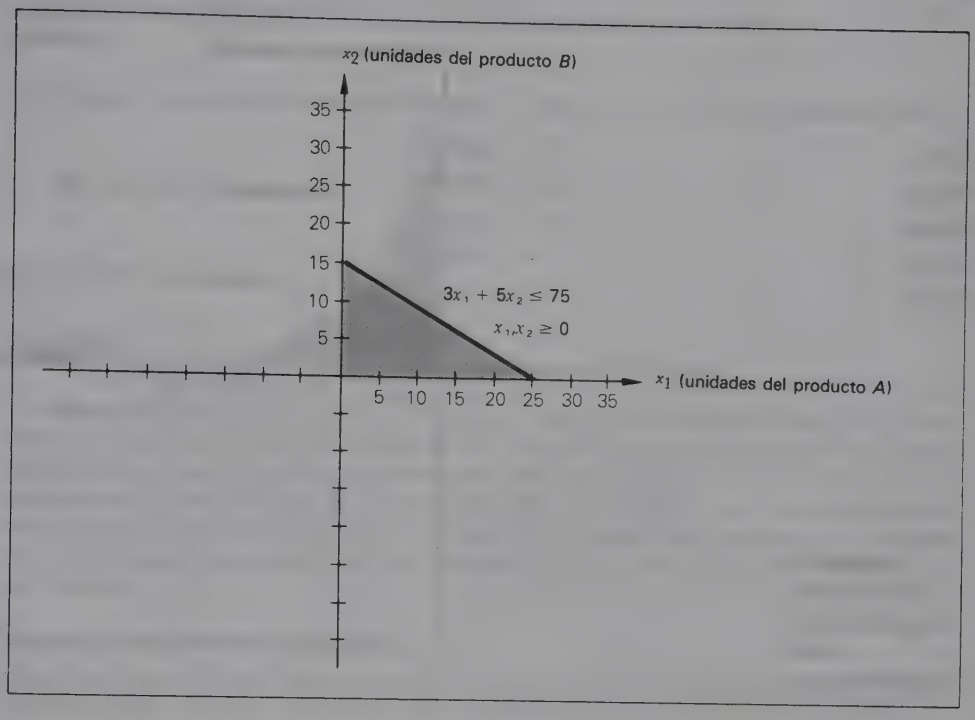


FIGURA 6.3
Posibilidades de producción: departamento 2.

El conjunto solución de esta desigualdad se muestra en la figura 6.3. Igual que en el caso de la figura 6.2, el área sombreada representa todas las combinaciones de los productos A y B que pueden fabricarse en el segundo departamento, sin rebasar las 75 horas disponibles.

Si el objetivo es determinar las combinaciones de los dos productos que pueden procesarse en *ambos* departamentos, estaremos buscando el conjunto solución del sistema de desigualdades lineales

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60 \quad \textbf{(6.34)}$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 75 \quad \textbf{(6.35)}$$
$$x_1 \geq 0 \quad \textbf{(6.36)}$$
$$x_2 \geq 0 \quad \textbf{(6.37)}$$

La figura 6.4 contiene la combinación de los dos conjuntos solución de las figuras 6.2 y 6.3 El conjunto solución del sistema incluye el grupo de puntos que son comunes a esos dos conjuntos en estas figuras. Y en la figura 6.4 el conjunto solución del sistema es el área sombreada *ABCD*.

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Por qué las combinaciones de los dos productos que se hallan dentro del área *AEB* no son posibles? ¿Por qué tampoco lo son las combinaciones dentro del área *BFC*? ¿Existen características especiales de producción asociadas a la combinación de los productos denotados por el punto B? ¿Y qué decir de la combinación a lo largo de $\overline{AB}$? ¿Y de las que se encuentran a lo largo de $\overline{BC}$?

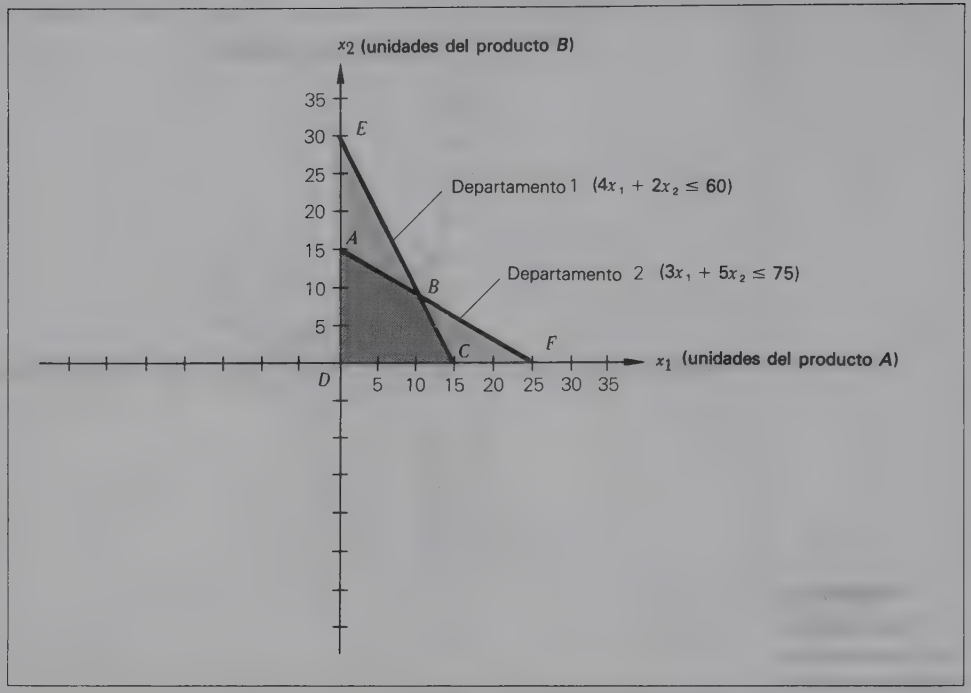


FIGURA 6.4
Posibilidades de producción: ambos departamentos.

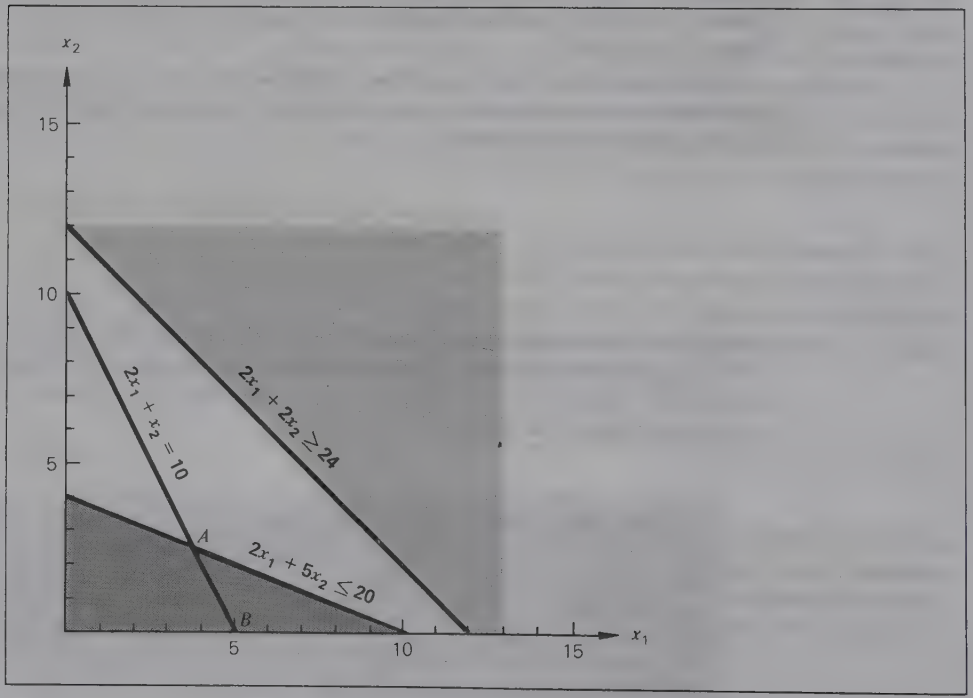


FIGURA 6.5
Conjunto sin solución.

EJEMPLO 7

Determine con procedimientos gráficos el conjunto solución del siguiente sistema.

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20 \quad (6.38)$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq 24 \quad (6.39)$$
$$2x_1 + x_2 = 10 \quad (6.40)$$
$$x_1 \geq 0 \quad (6.41)$$
$$x_2 \geq 0 \quad (6.42)$$

SOLUCIÓN

La figura 6.5 muestra el sistema. Habría que hacer varias observaciones. En primer lugar, el tercer miembro del sistema es una ecuación cuyo conjunto solución está representado por una línea. En segundo lugar, las desigualdades (6.41) y (6.42) han sido explicadas al graficarlas en el primer cuadrante. En tercer lugar, las desigualdades (6.38) a (6.39) no tienen puntos comunes. Por consiguiente, tampoco el conjunto solución contiene elementos. No hay puntos (x_1,x_2) que satisfagan todas las relaciones del sistema.

Área de soluciones factibles

En la sección 6.1 se formuló un problema de programación lineal de mezcla de productos con dos variables. He aquí como se reescribe la formulación:

$$\text{Maximice} \quad z = 5x_1 + 6x_2 \quad (6.43)$$
$$\text{sujeta a} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad (6.44)$$
$$4x_1 + 6x_2 \leq 260 \quad (6.45)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (6.46)$$

donde x_1 y x_2 representan el número de unidades fabricadas de los productos A y B. Puesto que el problema contiene dos variables de decisión, es posible determinar gráficamente la solución óptima. *El primer paso en el procedimiento gráfico es identificar el conjunto solución del sistema de restricciones.* Al conjunto a veces se le da el nombre de ***área de soluciones factibles.*** Incluye todas las combinaciones de las variables de decisión que satisfacen las restricciones estructurales y de no negatividad. Dichas combinaciones pueden considerarse *candidatos* de la solución óptima. El conjunto solución de las desigualdades (6.44) a (6.46) está indicado en la figura 6.6. Ésta es el área de las soluciones factibles del problema de programación lineal.

NOTA
Las coordenadas de los puntos *A* y *C* se identifican como los valores de las intersecciones con los ejes. Por las inexactitudes de la gráfica, tal vez sea difícil leer las coordenadas exactas de algunos puntos como *B*. A fin de determinar las coordenadas exactas de dichos puntos, las *ecuaciones* de las líneas que se intersecan en el punto han de resolverse *simultáneamente*. Para determinar las coordenadas (20, 30), las partes de la igualdad de (6.44) y (6.45) se resuelven al mismo tiempo.

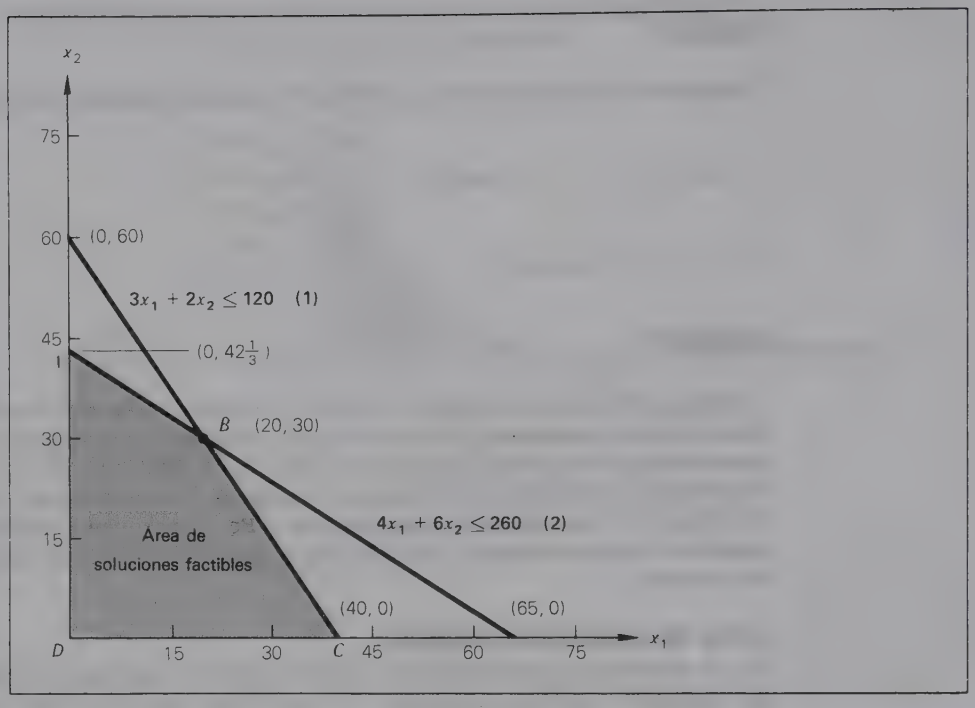


FIGURA 6.6

Cada punto dentro del área de las soluciones factibles en la figura 6.6 representa una combinación de los dos productos que pueden elaborarse. El problema radica en determinar la combinación o combinaciones que maximicen el valor de la función objetivo.

Incorporación de la función objetivo

El procedimiento de solución de la programación lineal exige una búsqueda del área de soluciones factibles para encontrar la solución óptima. Antes de presentar el procedimiento de búsqueda, se examinarán algunas características de las funciones objetivo. En el problema de la mezcla de productos, se identificarán las combinaciones de los dos productos que generen un nivel de utilidades previamente establecido. Por ejemplo, si se quisiera obtener las combinaciones de los dos productos que aportaran una utilidad de $120, habría que hacer que la función objetivo fuera 120:

$$5x_1 + 6x_2 = 120$$

Si se grafica esta ecuación, el resultado será la línea de utilidades de $120 que aparece en la figura 6.7. Si queremos determinar las combinaciones que generen una utilidad de $180, habrá que determinar el conjunto solución de la ecuación

$$5x_1 + 6x_2 = 180$$

La gráfica de esta línea se muestra también en la figura 6.7. De manera análoga, la línea de utilidades de $240 está indicada en esa misma figura. Estas tres

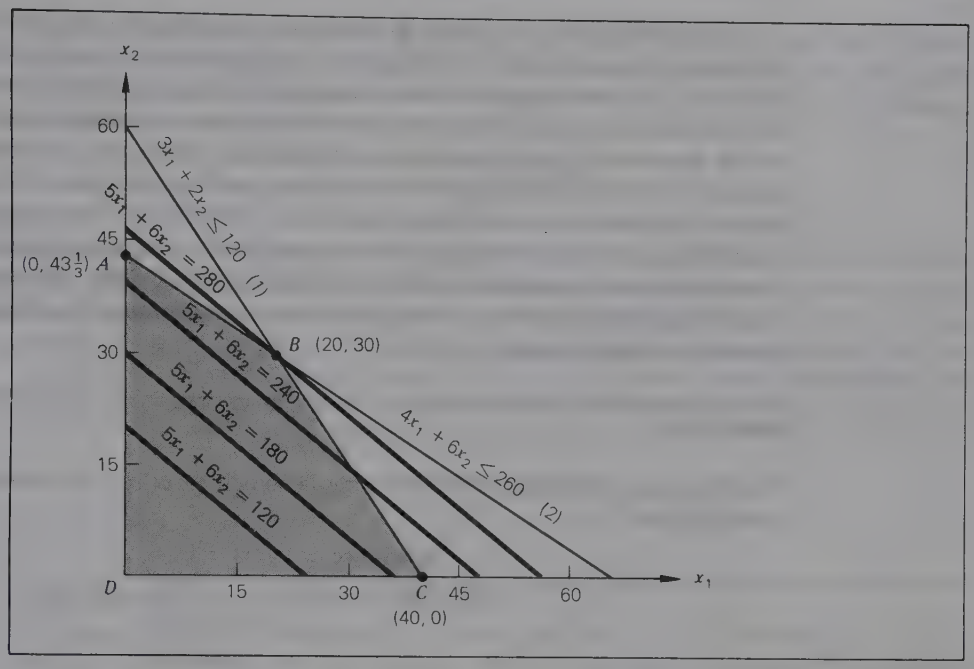


FIGURA 6.7
Líneas de utilidades iguales.

líneas reciben a menudo el nombre de ***líneas de utilidades iguales*** porque cada punto en una línea dada representa una utilidad idéntica.

Nótese que, en el caso de estas tres líneas de utilidades, se desea conocer las partes que se hallan dentro del área de las soluciones factibles. Para la línea de \$240 existen algunas combinaciones de los dos productos que aportarían una utilidad combinada de \$240, pero no se encuentran en el interior del área de las soluciones factibles. Un ejemplo de tales combinaciones son las 48 unidades del producto *A* y la ausencia de unidades del producto *B*. Aun cuando esta combinación generaría una utilidad de \$240, no se cuentan con suficientes horas (en el departamento 1) para producir esas cantidades.

Obsérvese desde las tres líneas de utilidades que los niveles de utilidad aumentan a medida que las líneas salen de su origen. También se advierte que son paralelas entre sí. Esto puede verificarse rápidamente al reescribir la función utilidad

$$z = 5x_1 + 6x_2 \tag{6.47}$$

en la forma de pendiente-intersección. En la figura 6.7, x_2 equivale a y (si a las variables se les hubiera dado el nombre de x y y). Al resolver la ecuación (6.47) para x_2, se obtendrá

$$x_2 = \frac{-5}{6}x_1 + \frac{z}{6} \tag{6.48}$$

La pendiente de la función objetivo es $-5/6$, y no recibe el influjo del valor de z. Se determina exclusivamente por los coeficientes de las dos variables de la función objetivo.

La intersección con el eje x_2 (o y) está definida por (0, z/6). Desde ella se advierte que, al cambiar el valor de z, lo mismo sucede con la intersección con el eje x_2. Si z aumenta de valor, también lo hace la intersección con el eje x_2, lo cual significa que la línea de utilidades iguales se desplaza hacia arriba y hacia la derecha. Si quisiéramos maximizar las utilidades, tendríamos que desplazar la línea de utilidades lo más afuera posible, sin dejar de tocar un punto dentro del área de las soluciones factibles. Al deslizarse hacia afuera de la línea de \$240, el último punto que debe tocarse es B, con las coordenadas (30, 30). Este punto se encuentra en la línea de utilidades de \$280. *En nuestra conclusión: la utilidad se maximiza en un valor de \$280 cuando se fabrican 20 y 30 unidades, respectivamente, de los productos A y B.*

EJEMPLO 8

Problema de minimización Determine la solución óptima del problema de programación lineal

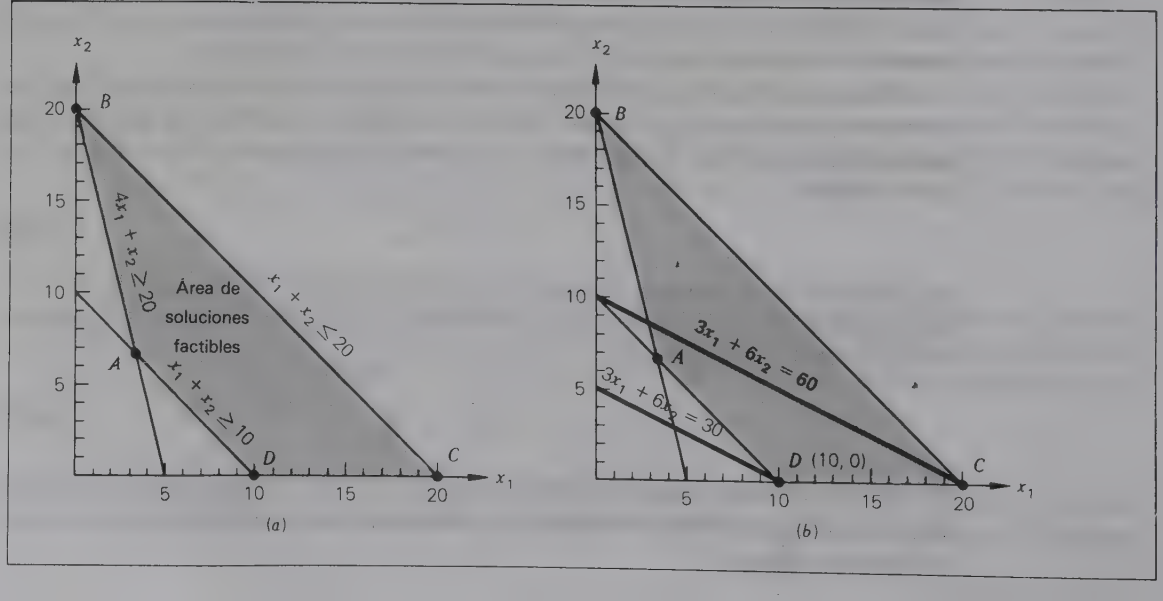
$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 3x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeta a} \quad & 4x_1 + x_2 \geq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

En la figura 6.8*a* se muestra el área de las soluciones factibles para el conjunto de restricciones. Con el propósito de obtener la solución óptima, se determinará la orientación de la función objetivo. Supóngase un valor arbitrario de z. digamos 60. La ecuación

$$3x_1 + 6x_2 = 60$$

FIGURA 6.8



se grafica en la figura 6.8*b*. Para determinar la dirección del movimiento de la función objetivo, puede escogerse un punto a uno u otro lado de la línea y calcular el valor correspondiente de z. Si se selecciona el origen, se observa que el valor de la función objetivo en (0, 0) es

$$\begin{aligned} z &= 3(0) + 6(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

El valor de z en el origen es menor que 60, y nuestra conclusión es que el movimiento de la función objetivo hacia el origen produce valores *más bajos* de z. Se desea minimizar z, por lo cual se querrá acercar la función objetivo, paralela a sí misma, lo más posible al origen, logrando al mismo tiempo que toque un punto en el área de soluciones factibles. El último punto tocado antes que la función abandone totalmente el área de las soluciones posibles es D, es decir (10, 0). El valor mínimo de z se encuentra en (10, 0), de manera que el valor mínimo se calcula como

$$\begin{aligned} z &= 3(10) + 6(0) \\ &= 30 \end{aligned}$$

Soluciones de punto en la esquina

El procedimiento de búsqueda puede simplificarse si se aprovechan las características del área de las soluciones factibles y la función objetivo. El ***conjunto convexo*** es un grupo de puntos tales que, si dos de ellos seleccionados arbitrariamente dentro del conjunto se conectan mediante una recta, todos los elementos del segmento de línea serán también miembros del conjunto. En la figura 6.9 se aprecia la diferencia entre un conjunto convexo y uno no convexo. El conjunto de puntos de la figura 6.9*b* representa un conjunto convexo. Si dos puntos cualesquiera del conjunto se unen por medio de un segmento de línea, cada punto del segmento de línea será también miembro del conjunto. En contraste con esto, la figura 6.9*a* muestra un conjunto no convexo. Para él hay muchos pares de puntos como A y B en que el segmento de línea conector contiene los puntos que *no* son miembros del conjunto.

De aquí se deducen los siguientes enunciados que son de fundamental importancia en la programación lineal.

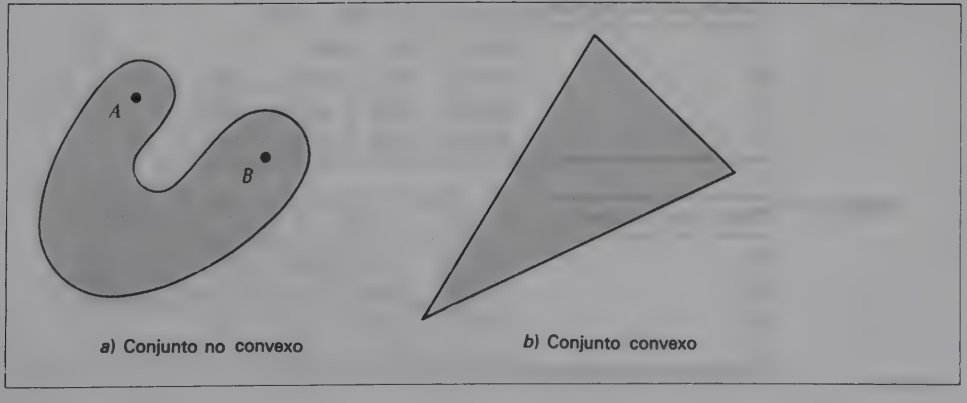


FIGURA 6.9

1 El conjunto solución de un grupo de desigualdades lineales es un conjunto convexo. Por tanto, el área de soluciones factibles (si es que existe) para un problema de programación lineal será un conjunto convexo.

2 Tratándose de una función objetiva lineal en un problema de programación lineal, la solución óptima incluirá siempre un punto en la esquina dentro del área de las soluciones factibles. Esto sucede sin importar la pendiente de la función objetivo ni los problemas de maximización o minimización.

El segundo enunciado simplemente implica que, cuando una función objetivo se traslada a través del área convexa de soluciones factibles, el último punto que se toca antes de abandonar enteramente el área abarcará por lo menos un punto en la esquina

Así pues, el ***método de punto en la esquina*** con que se resuelven los problemas de programación lineal es como sigue:

MÉTODO DE PUNTO EN LA ESQUINA

I Se identifica gráficamente el área de las soluciones factibles.

II Se determina las coordenadas de cada punto en la esquina en el área de las soluciones factibles.

III Se sustituyen las coordenadas de los puntos en la esquina en la función objetivo, a fin de determinar el valor correspondiente de z.

IV Se presenta una solución óptima en un problema de maximización en el punto en la esquina que produce el valor más alto de z, y en un problema de minimización en el punto en la esquina que produce el valor más bajo de z.

EJEMPLO 9

En el ejemplo de mezcla de productos incluida en esta sección, la función objetivo a maximizar es $z = 5x_1 + 6x_2$. Los puntos en la esquina dentro del área de soluciones factibles fueron (0,0), (0,43⅓), (20,30) y (40,0). Al sustituirlos en la función objetivo, se llega a las cifras de la tabla 6.10. Nótese que la solución óptima ocurre en $x_1 = 20$ y en $x_2 = 30$, lo que produce un valor máximo de 280 para z.

TABLA 6.10

Punto en la esquina	(x_1, x_2)	$z = 5x_1 + 6x_2$
A	$(0, 0)$	$5(0) + 6(0) = 0$
B	$(0, 43\frac{1}{3})$	$5(0) + 6(43\frac{1}{3}) = 260$
C	$(20, 30)$	$5(20) + 6(30) = 280^*$
D	$(40, 0)$	$5(40) + 7(0) = 200$

TABLA 6.11

Punto en la esquina	(x_1, x_2)	$z = 3x_1 + 6x_2$
A	$(3\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3})$	$3(3\frac{1}{3}) + 6(6\frac{2}{3}) = 50$
B	$(0, 20)$	$3(0) + 6(20) = 120$
C	$(20, 0)$	$3(20) + 6(0) = 60$
D	$(10, 0)$	$3(10) + 6(0) = 30^*$

EJEMPLO 10

En el ejemplo 8, la figura 6.8 indica cuatro puntos en la esquina dentro del área de soluciones factibles. Al emplear el método de puntos en la esquina, los valores de éstos y los valores respectivos de la función objetivo se resumen en la tabla 6.11. Dado que el objetivo es minimizar z, la solución óptima se presenta en el punto en la esquina D cuando $x_1 = 10$, $x_2 = 0$ y $z = 30$.

Si el objetivo hubiera sido maximizar z en este problema, el valor máximo de 120 habría producido el punto en la esquina B cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$.

Soluciones óptimas alternativas

Al hablar del método del punto en la esquina se dijo que una solución óptima ocurrirá siempre en un punto en la esquina dentro del área de soluciones factibles. Existe la posibilidad de más de una solución óptima en los problemas de programación lineal. En la figura 6.10 se incluye un caso en que la función objetivo tiene la misma pendiente que la restricción (2). Si la función se mejora al salir y abandonar el origen, los últimos puntos tocados antes que la función abandone el área de las soluciones factibles son los puntos en $\overline{AB}$. En esta situación existirá un número infinito de puntos, produciendo cada uno el mismo valor máximo de z. En casos como éste, se dice que el problema tiene ***soluciones óptimas alternativas***.

Hay que satisfacer dos condiciones si se quiere que exista ese tipo de soluciones: 1) *la función objetivo debe ser paralela a una restricción que forma un borde o límite en el área de las soluciones factibles en dirección del movimiento óptimo de la función objetivo; es decir, la restricción será una restricción limitante que impida el mejoramiento ulterior del valor de la función.* Esta segunda condición se violaría en la figura 6.10, si el problema fuera de minimización, o sea si se deseara cambiar la función objetivo en otra dirección. Aun cuando ésta sea paralela a la restricción (2), la restricción no nos impide desplazarnos hacia el origen.

Cuando se utiliza el método de punto en la esquina, conviene recurrir a las soluciones óptimas alternativas si hay un *empate* del valor óptimo de la función objetivo. Este tipo de soluciones ocurre en los puntos en la esquina "empatados", así como a lo largo de todo el segmento de línea que une los dos puntos.

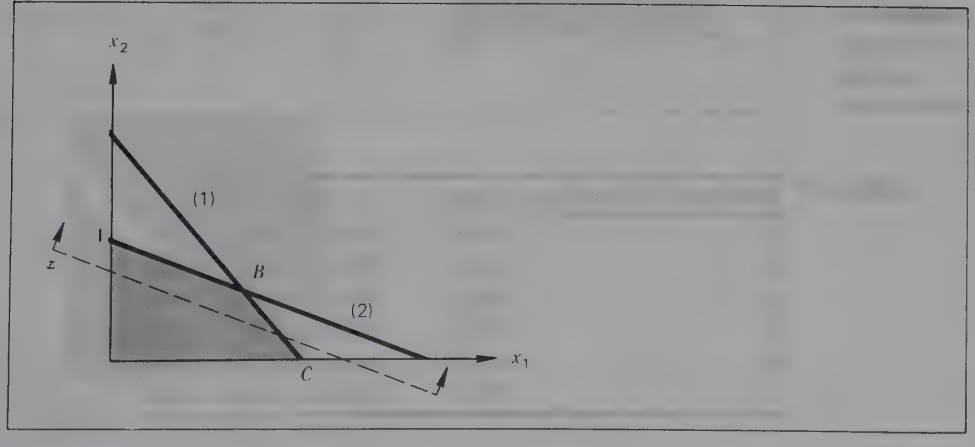


FIGURA 6.10 Soluciones óptimas alternativas.

EJEMPLO 11

Resuelva por el método de punto en la esquina el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} \text{Maximice a} \quad & z = 20x_1 + 15x_2 \\ \text{sujeta a} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 60 && (1) \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 60 && (2) \\ & x_1 \leq 10 && (3) \\ & x_2 \leq 12 && (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0 && (5) \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

El área de las soluciones factibles aparece en la figura 6.11. Y en la tabla 6.12 se resumen los puntos en la esquina y sus respectivos valores para z. Nótese que hay un empa-

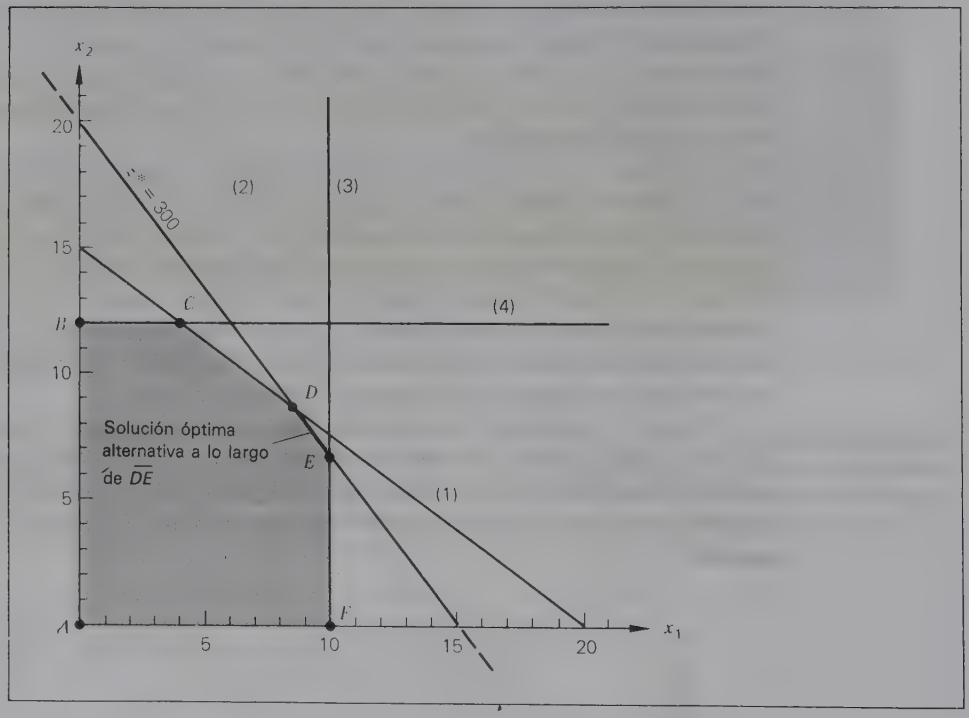


FIGURA 6.11 Soluciones óptimas alternativas.

TABLA 6.12

Punto en la esquina	(x_1, x_2)	$z = 20x_1 + 15x_2$
A	$(0, 0)$	$20(0) + 15(0) = 0$
B	$(0, 12)$	$20(0) + 15(12) = 180$
C	$(4, 12)$	$20(4) + 15(12) = 260$
D	$(\frac{60}{7}, \frac{60}{7})$	$20(\frac{60}{7}) + 15(\frac{60}{7}) = 300^*$
E	$(10, \frac{20}{3})$	$20(10) + 15(\frac{20}{3}) = 300^*$
F	$(10, 0)$	$20(10) + 15(0) = 200$

te entre D y E respecto al valor de z. La pendiente de la función objetivo es la misma que la de la restricción (2). En la figura 6.11 existe un número infinito de soluciones óptimas alternativas a lo largo de $\overline{DE}$.

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Hay varias implicaciones de las soluciones óptimas alternativas. Una de ellas es el conjunto de criterios que podría escogerse para seleccionar la solución que se pondrá en práctica. Esos criterios pueden incluir factores tangibles e intangibles. Para contar con una base de discusión, vuelva a leer el problema de la mezcla de productos en la página 232 [ecuaciones (6.43) a (6.46)] y resuélvalas de nuevo, sirviéndose de la función objetivo $z = 4x_1 + 6x_2$. Debe verificar que las soluciones óptimas alternativas existen a lo largo de $\overline{AB}$ en la figura 6.6. Explique las implicaciones de la selección del punto A en vez del punto B. Considere tales problemas como el número de horas de producción consumidas en cada departamento y la *mezcla* de productos que han de ofrecerse al público.

Ausencia de solución factible

El sistema de restricciones en un problema de programación lineal quizá no tenga puntos que cumplan con todas ellas. En tales casos no habrá puntos en el conjunto solución, y entonces se dice que el problema ***carece de una solución factible***. La figura 6.12 muestra un problema que no tiene una solución factible. La restricción 1 es de tipo "menor que o igual a" 1, y la restricción 2 es de tipo "mayor que o igual a". Un problema puede presentar ambos tipos de restricción. En este caso el conjunto de puntos que satisfagan una no comprende ninguno de los puntos que cumplen con la otra.

Soluciones no acotadas

La figura 6.13 contiene lo que se conoce con el nombre de ***espacio de soluciones no acotadas***. Las dos restricciones parecen ser del tipo ($\geq$), y el espacio de la solución resultante se extiende una distancia infinita *hacia afuera*, sin tener límite alguno. En un espacio de solución no acotada, el valor óptimo de la función

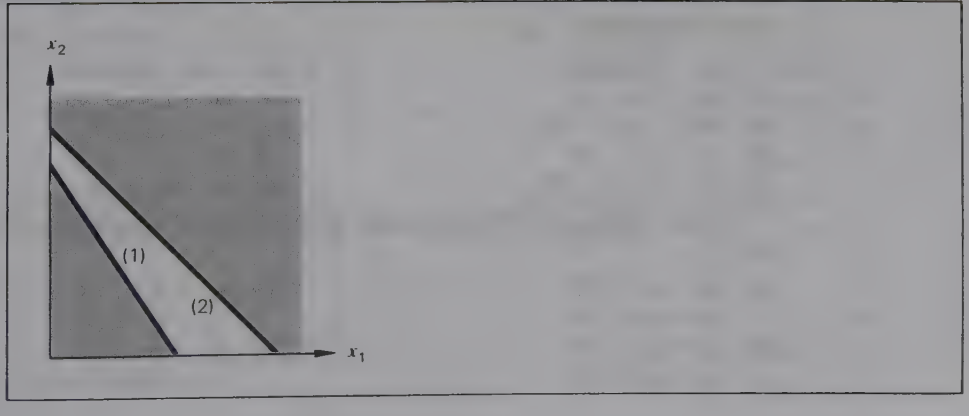


FIGURA 6.12 Ausencia de solución factible.

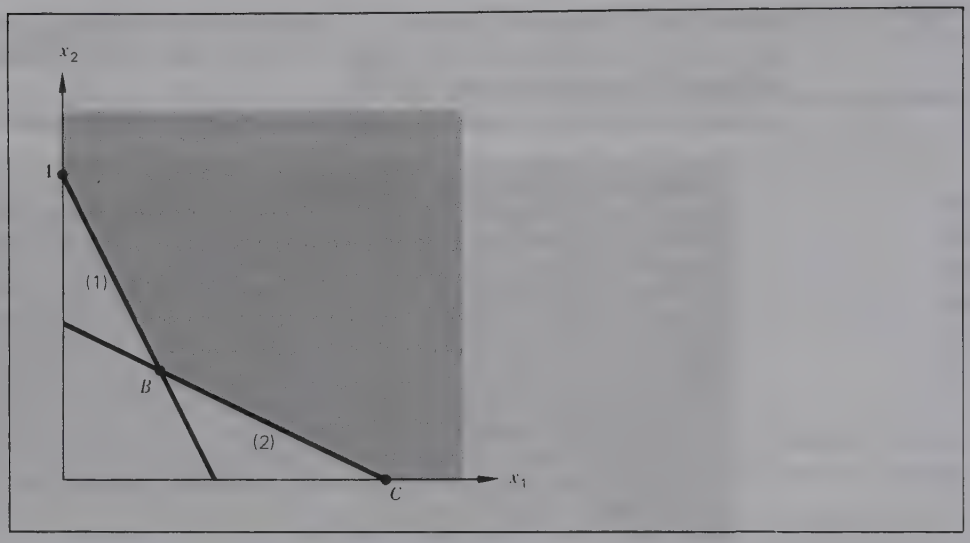


FIGURA 6.13
Espacio de solución no acotada.

objetivo puede estar acotada o sin acotar. Si en la figura 6.13 la *dirección del mejoramiento* de la función objetivo es hacia el origen (casi siempre un objetivo de minimización), habrá un límite en el valor de z y se realizará en el punto en la esquina A, B o C. Pero si la dirección del mejoramiento es hacia afuera, lejos del origen (generalmente un objetivo de maximización), la función objetivo puede ser llevada hacia afuera en una distancia infinita. Así pues, el valor de z carece de límite y se dice que el problema tiene una ***solución no acotada***.

NOTA
Un espacio de solución no acotada constituye una *condición necesaria*, pero no suficiente de la aparición de una solución no acotada.

Ejercicios de seguimiento de la sección 6.3

En los ejercicios 1-10, determine gráficamente el medio espacio permisible que satisfaga la desigualdad.

1 $2x + 3y \leq 18$
2 $-4x + 4y \geq 24$
3 $0.5x - y \geq -8$
4 $2x + 2.5y \leq 20$
5 $1.5x + 6y \leq -18$
6 $-x + 2y \geq 7$
7 $-x + y \geq -5$
8 $3x - 2y \geq -12$
9 $-2x + 5y \leq -20$
10 $6x - 4y \leq 24$

En los ejercicios 11-20, determine gráficamente el espacio solución (si es que existe).

11 $2x - 4y \leq 20$
$3x + 2y \geq 18$
12 $3x + 2y \leq 18$
$x + 4y \leq 8$
13 $5x + 2y \leq 23$
$3x + 4y \leq 25$
14 $3x - 2y \geq 12$
$x + 2y \leq 4$

15
$$\begin{aligned} x + y &\geq 8 \\ 2x + y &\geq 12 \\ x &\leq 10 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

16
$$\begin{aligned} x + y &\geq 2 \\ 3x + y &\geq 3 \\ x &\leq 5 \\ y &\leq 6 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

17
$$\begin{aligned} 4x + 3y &\leq 24 \\ x + y &\geq 4 \\ x &\leq 6 \\ y &\leq 6 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

18
$$\begin{aligned} 5x + 3y &\leq 15 \\ x &\geq 1 \\ x &\leq 4 \\ y &\geq 2 \\ y &\leq 6 \end{aligned}$$

19
$$\begin{aligned} 4x - 2y &\geq 12 \\ x &\leq 15 \\ y &\leq 6 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

20
$$\begin{aligned} 2x + 2y &\leq 16 \\ 3x - y &\geq 18 \\ x + 2y &= 10 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

En los siguientes problemas de programación lineal, grafique el área de soluciones factibles (si existe una) y resuelva aplicando el método correcto.

21 Maximice $z = 9x_1 + 3x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 32 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

22 Minimice $z = 3x_1 + 6x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 36 \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 90 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

23 Maximice $z = 30x_1 + 20x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

24 Minimice $z = 10x_1 + 16x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 &\leq 400 \\ x_2 &\geq 200 \\ x_1 + x_2 &= 500 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

25 Maximice $z = 10x_1 + 15x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 48 \\ x_1 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

26 Maximice $z = 2x_1 + 5x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 16 \\ x_1 &\leq 12 \\ x_1 &\geq 8 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

27 Maximice $z = 16x_1 + 8x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

28 Maximice $z = 6x_1 + 5x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ 1.5x_1 + x_2 &\geq 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

29 Maximice $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 &\leq 60 \\ 40x_1 + 32x_2 &\leq 160 \\ x_1 &\leq 2.5 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

30 Minimice $z = 20x_1 + 5x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 12 \\ 4x_1 + x_2 &\geq 24 \\ x_1 &\geq 3 \\ x_2 &\leq 18 \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 120 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

TABLA 6.13

31 Maximice $z = 15x_1 + 20x_2$
sujeta a
$x_1 + x_2 \geq 48$
$6x_1 + 9x_2 \leq 216$
$15x_1 + 10x_2 \leq 360$
$x_1, x_2 \geq 0$

32 Minimice $z = 4x_1 + 2x_2$
sujeta a
$4x_1 + 6x_2 \leq 48$
$x_1 + x_2 \geq 15$
$x_1, x_2 \geq 0$

33 Una compañía fabrica dos productos. Uno y otro deben ser procesados en dos departamentos. El producto *A* requiere 2 horas por unidad en el departamento 1 y 4 horas por unidad en el departamento 2. El producto *B* requiere 3 horas por unidad en el departamento 1 y 2 horas por unidad en el departamento 2. Los departamentos 1 y 2 tienen, respectivamente, 60 y 80 horas disponibles a la semana. Los márgenes de utilidad de los dos productos son, respectivamente, \$3 y \$4 por unidad. Si x_j es el número de unidades fabricadas del producto j, *a*) formule el modelo de programación lineal para determinar la mezcla de productos que maximice las utilidades totales y *b*) resuelva el problema mediante el método de punto en la esquina. *c*) Interprete totalmente los resultados que indiquen la mezcla de productos recomendada. ¿Qué porcentaje de la capacidad diaria se utilizará en cada departamento?

34 El dietista de una institución penal está preparando el menú de la cena *ligera* de hoy. Se servirán dos alimentos. El dietista quiere obtener las raciones diarias mínimas de las dos vitaminas. En la tabla 6.13 se sintetiza el contenido vitamínico por onza de cada alimento, las raciones diarias mínimas de cada vitamina y el costo por onza de alimento. Si x_j es el número de onzas del alimento j, *a*) formule el modelo de programación lineal para determinar las cantidades de los dos alimentos que reducirán al mínimo el costo de la comida, garantizando al mismo tiempo que se alcancen por lo menos los niveles mínimos de ambas vitaminas. *b*) Resuelva el problema por el método de punto en la esquina, indicando en qué consistirá la comida de costo mínimo y su precio. ¿qué porcentajes de las raciones diarias mínimas de cada vitamina se obtendrán con esta comida?

	Alimento 1	Alimento 2	Ración diaria mínima
Vitamina 1	2 mg/oz	3 mg/oz	18 mg
Vitamina 2	4 mg/oz	2 mg/oz	22 mg
Costo por onza	\$0.12	\$0.15	

6.4 MÉTODOS DE SOLUCIÓN POR COMPUTADORA

El método gráfico se limita obviamente a los problemas de dos variables. Las aplicaciones muestra descritas antes (ejemplos 1 a 4) incluyen más de dos variables, pero son muy modestas en cuanto al tamaño, si se las compara con las aplicaciones comunes en las organizaciones actuales. Estos ejemplos podrían resolverse manualmente mediante procedimientos algebraicos como el ***método símplex***, el cual se estudia en el siguiente capítulo. Sin embargo, el autor de este libro recomendaría resolverlos aplicando tales procedimientos sólo en el caso de que el lector tenga una tendencia masoquista.

En las aplicaciones concretas, los problemas de programación lineal se resuelven por métodos computarizados. En el momento presente se dispone de muchos y eficientes códigos de computadora que suministran los fabricantes de estas máquinas, las empresas que producen programas y las universidades.

(Véase la lista que se da al final de este capítulo.) El usuario de esta clase de modelos no siempre debe preocuparse por los detalles del método de solución* Por el contrario, puede hacerse un uso eficaz de estos modelos si el sujeto 1) entiende bien el modelo de programación lineal y sus suposiciones, 2) tiene habilidad en la identificación de esta clase de problemas, 3) sabe formular problemas, 4) puede obtener la solución con un paquete de programas y 5) sabe interpretar la salida de los paquetes.

En la presente sección se explicarán los requisitos y necesidades del método símplex, ofrecer un panorama general de algunos términos, describir cómo funciona el método y dar ejemplos del uso de un paquete de computación para resolver los problemas de programación lineal.

Requisitos del método símplex

Antes de exponer los métodos de solución por computadora, hay que mencionar algunos preliminares. La mayor parte de las técnicas computarizadas se fundan en procedimientos de solución algebraica. El método símplex es el más conocido de ellos, y se estudia en el capítulo 7. La solución de un problema de programación lineal por el método símplex incluye tres requisitos o condiciones:

REQUISITOS DEL MÉTODO SÍMPLEX

I Todas las restricciones deben formularse como ecuaciones.
II El miembro derecho de una restricción no puede ser negativo.
III Todas las variables están restringidas a valores no negativos.

En lo tocante al *primer requisito*, el método símplex es una rutina especial para resolver sistemas de ecuaciones lineales. La mayor parte de estos problemas contienen restricciones que son desigualdades. Antes de resolverlos por el método símplex, es preciso reformular como ecuaciones dichas desigualdades. La transformación de desigualdades a ecuaciones varía según la naturaleza de la desigualdad.

Para cada restricción de tipo "menor que o igual a" ($\leq$), al lado izquierdo de la restricción se le añade una variable no negativa, denominada ***variable de holgura***. Esta variable cumple la función de equilibrar ambos miembros de la ecuación.

EJEMPLO 12

Considere las dos restricciones

$$2x_1 + 3x_2 \leq 50 \quad \text{(departamento 1)}$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 60 \quad \text{(departamento 2)}$$

*Sin embargo, no cabe duda de que el usuario *podrá* aprovechar mejor estos programas de computación si *conoce* bien sus detalles.

donde x_1 y x_2 denotan, respectivamente, el número de unidades fabricadas de los productos A y B. Suponga que las dos restricciones representan la disponibilidad limitada de mano de obra en ambos departamentos; los coeficientes en las variables indican el número de horas necesarias para elaborar una unidad de cada producto, y los lados derechos de las restricciones denotan el número de horas de que se dispone en cada departamento.

El tratamiento que se da a tales restricciones consiste en añadir una variable de holgura al miembro izquierdo de ellas. Otra opción consiste en reescribir las restricciones así:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + S_1 &= 50 \quad \text{(departamento 1)} \\ 4x_1 + 2x_2 + S_2 &= 60 \quad \text{(departamento 2)} \end{aligned}$$

Las variables de holgura S_1 y S_2 mantienen en equilibrio ambos miembros de sus respectivas ecuaciones. También poseen un significado que es fácil de entender. En este problema representan el número de horas que no se emplean en los departamentos. Por ejemplo, $x_1 = 5$ y $x_2 = 10$ sugiere fabricar 5 unidades del producto A y 10 del producto B. Si esos valores se sustituyen en ambas restricciones, se tendrá

$$\begin{aligned} 2(5) + 3(10) + S_1 &= 50 \\ 4(5) + 2(10) + S_2 &= 60 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} 40 + S_1 &= 50 \quad \text{(departamento 1)} \\ 40 + S_2 &= 60 \quad \text{(departamento 2)} \end{aligned}$$

En otras palabras, se utilizarán 40 horas en la fabricación en cada departamento. Las variables de holgura deberían adoptar, respectivamente, los valores de $S_1 = 10$ y $S_2 = 20$ para equilibrar las ecuaciones. Las interpretaciones de esos valores es que, si se elaboran 5 unidades del producto A y 10 unidades del producto B, sobrarán 10 horas en el departamento 1 y 20 en el departamento 2.

Adviértase que las variables de holgura se convierten en variables adicionales en el problema y han de tratarse como cualquier otra. Ello significa que están sujetas al requisito 3, o sea que no pueden asumir valores negativos.

Por cada restricción de tipo "mayor que o igual a" ($\geq$) al lado izquierdo de la restricción se le sustrae una variable no negativa, denominada ***variable de demasía.*** Esta variable cumple la misma función que la de holgura: conserva en equilibrio ambos miembros de la ecuación.

EJEMPLO 13

Supóngase, en el ejemplo 12, que la producción combinada de los dos productos ha de ser de 25 unidades como nínimo. La restricción que representa la tercera condición es

$$x_1 + x_2 \geq 25$$

Antes de resolver la ecuación por el método símplex, habrá que transformar la desigualdad en la ecuación equivalente

$$x_1 + x_2 - E_3 = 25.$$

El subíndice de la variable de demasía indica el número de restricciones; no indica que sea la tercera variable de demasía. Si $x_1 = 20$ y $x_2 = 35$, la variable de demasía E_3 ha de ser igual a 30 para que se satisfaga la ecuación. La interpretación de la variable de demasía es que la producción combinada excede la cantidad mínima en 30 unidades.

Por cada restricción ($\geq$) y por cada restricción ($=$), al miembro izquierdo de la restricción se le añade una variable no negativa llamada ***variable artificial***.

La variable artificial carece de significado real en el problema; su única función consiste en ofrecer un punto de arranque adecuado (solución inicial) para el método símplex. Y lo hace: *para las restricciones de tipo ($\geq$) se suma la variable artificial además de restar una variable de demasía.*

EJEMPLO 14

Transforme el siguiente conjunto de restricciones en la forma estándar requerida por el método símplex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 40 \\ x_1 - 2x_2 &= 25 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

El conjunto transformado de restricciones es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + S_1 &= 100 && (1) \\ 2x_1 + 3x_2 - E_2 + A_2 &= 40 && (2) \\ x_1 - 2x_2 + A_3 &= 25 && (3) \\ x_1, x_2, S_1, E_2, A_2, A_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

*Obsérvese que a cada variable complementaria (artificial, de demasía, de holgura) se le asigna un subíndice que corresponde al número de restricciones.**

*Las literales que se asignan a las variables complementarias pueden variar ligeramente según los libros de texto.

A las variables de holgura y de demasía se les asignan coeficientes 0 en la función objetivo. Esto suele ser lógico cuando se considera su significado, aunque a veces se dan excepciones. Las variables artificiales carecen de significado real en un problema, y por ello casi siempre se les asignan coeficientes de la función objetivo que les hace extremadamente inconvenientes. *En los problemas de maximización, a las variables artificiales debería asignárseles esos coeficientes de* $+M$. La contribución muy grande negativa (positiva) en un problema de maximización (minimización) no crea incentivos para que la variable artificial sea positiva. De hecho existe un enorme incentivo para hacerla 0.

EJEMPLO 15

Si la función objetivo original en el ejemplo 14 hubiera sido

$$\text{Maximice} \quad z = 5x_1 + 10x_2$$

entonces habría sido revisada para que adoptara la forma

$$\text{Maximice} \quad z = 5x_1 + 10x_2 + 0S_1 + 0E_2 - MA_2 - MA_3$$

Si la función objetivo original hubiera sido

$$\text{Minimice} \quad z = 5x_1 + 10x_2$$

se habría reescrito así:

$$\text{Minimice} \quad z = 5x_1 + 10x_2 + 0S_1 + 0E_2 + MA_2 + MA_3$$

El *segundo requisito* (o condición) del método símplex establece que el miembro derecho de cualquier ecuación de restricciones no sea negativo. Si una restricción tiene un miembro derecho negativo, la restricción puede multiplicarse por -1 para hacer positivo el miembro derecho.

EJEMPLO 16

En las siguientes restricciones, haga positivo el miembro derecho.

a) $2x_1 - 5x_2 \leq -10$ (*b*) $x_1 + 6x_2 \geq -100$ (*c*) $5x_1 - 2x_2 = -28$

SOLUCIÓN

a) Al multiplicar la restricción por -1 se obtiene

$$-2x_1 + 5x_2 \geq 10$$

b) Al multiplicar la restricción por -1 se obtiene

$$-x_1 - 6x_2 \leq 100$$

c) Al multiplicar la restricción por -1 se obtiene

$$-5x_1 + 2x_2 = 28$$

Adviértase, en las restricciones de desigualdad, que el sentido de desigualdad se invierte cuando se multiplica por un número negativo.

La *tercera condición* del método símplex señala que se restrinjan todas las variables a valores no negativos. Se cuenta con técnicas especializadas para ocuparse de variables *capaces* de adoptar valores negativos; sin embargo, no las examinaremos aquí. Lo único que se mencionará es que las variables de holgura, de demasía y artificiales pueden restringirse también a que no sean negativas.

Soluciones factibles básicas y el método símplex

Una vez que los problemas de programación lineal han sido convertidos en la *forma estándar* en que todas las restricciones se reformulan como igualdades y que se han agregado variables complementarias, el sistema resultante de ecuaciones tiene más variables que ecuaciones. Pongamos el caso de un problema generalizado de este tipo que posea m restricciones de tipo ($\leq$) y n variables de decisión. Una vez transformado en la forma estándar, habrá m restricciones estructurales, n variables de decisión y m variables de holgura. Por tanto, el sistema de restricciones puede considerarse un sistema $m \times (n + m)$ donde $m < n + m$.* Es decir, el número de ecuaciones es menor que el de variables. En el capítulo 4 se dijo que, *si existe una solución para ese sistema de ecuaciones,* habrá un número infinito de ellas.

A continuación se citan algunas definiciones que son importantes para las explicaciones que se ofrecen en seguida. Supóngase la forma estándar de un problema de programación lineal que tiene m restricciones estructurales y n' variables reales y complementarias:

DEFINICIÓN: SOLUCIÓN FACTIBLE

La ***solución factible*** es cualquier conjunto de valores de n' variables que satisfacen tanto las restricciones estructurales como las no negativas.

DEFINICIÓN: SOLUCIÓN BÁSICA

La ***solución básica*** es cualquier solución que se obtiene al hacer igual a 0 las variables $(n' - m)$ y al resolver el sistema de ecuaciones para los valores de las variables m restantes. Las variables m resueltas reciben el nombre de ***variables básicas***. Se dice que éstas constituyen una ***base***. Las variables restantes $(n' - m)$, o aquellas a las que se har asignado valores de 0, se llaman variables ***no básicas***.

DEFINICIÓN: SOLUCIÓN FACTIBLE BÁSICA

La ***solución factible básica*** es una solución básica que además cum ple con las restricciones de no negatividad.

*Se suponen las restricciones de no negatividad en todos los problemas y rara vez se incluyen cuando se cuentan las restricciones.

EJEMPLO 17

Examinemos, otra vez, el problema de la mezcla de productos con dos variables, con el cual en la sección 6.3 se ejemplificó el procedimiento de la solución gráfica

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeta a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \qquad (1) \\ & 4x_1 + 6x_2 \leq 260 \qquad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Nos concentraremos en un conjunto de restricciones estructurales por un momento. Cuando se convierten en una forma estándar, éstas se escribirán como

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + S_1 &= 120 \qquad (4) \\ 4x_1 + 6x_2 + S_2 &= 260 \qquad (5) \end{aligned}$$

El conjunto reescrito de restricciones es un sistema de ecuaciones (2×4). A continuación se dan ejemplos de los conceptos de *a) una solución factible. b) una solución básica* y *c) una solución factible básica* para este sistema.

a) La solución factible es cualquier conjunto de valores de las cuatro variables que satisfaga las dos ecuaciones. Por ejemplo, si x_1 y x_2 se hacen igual a 5, estos valores pueden sustraerse a (4) y (5) para despejar los valores correspondientes de S_1 y S_2.

$$\begin{aligned} 3(5) + 2(5) + S_1 &= 120 \\ 4(5) + 6(5) + S_2 &= 260 \\ 25 + S_1 &= 120 \\ 50 + S_2 &= 260 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} S_1 &= 95 \\ S_2 &= 210 \end{aligned}$$

Así pues, una solución factible del sistema es $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $S_1 = 95$ y $S_2 = 210$.

b) Una solución básica se encontrará al hacer igual a 0 dos variables cualesquiera y al resolver para las otras dos. Por ejemplo, si se hacen igual a cero S_2 y x_2, con la sustitución se obtiene

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2(0) + S_1 &= 120 \\ 4x_1 + 6(0) + (0) &= 260 \end{aligned}$$

Al despejar x_1 en la segunda ecuación y al sustituir esta variable en la primera ecuación,

$$\begin{aligned} x_1 &= 65 \\ 3(65) + S_1 &= 120 \\ S_1 &= -75 \end{aligned}$$

Por tanto, una solución básica del sistema es $x_1 = 65$, $x_2 = 0$. $S_1 = -75$ y $S_2 = 0$. Las variables hechas igual a cero (x_2 y S_2) se consideran variables no básicas en esta solución. Las que han sido despejadas (x_1 y S_1) son las variables básicas. Adviértase que esta solución básica en particular no es factible por no cumplir con la restricción de no negatividad.

c) La solución factible básica es cualquier solución básica que satisfaga la restricción de no negatividad. Por ejemplo, si se hacen igual a cero x_1 y x_2, al sustituir en las dos ecuaciones nos da

$$\begin{aligned} 3(0) + 2(0) + S_1 &= 120 \\ 4(0) + 6(0) + S_2 &= 260 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} S_1 &= 120 \\ S_2 &= 260 \end{aligned}$$

Así pues, otra solución básica del sistema es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $S_1 = 120$ y $S_2 = 260$. Las variables x_1 y x_2 son no básicas, y S_1 y S_2 son variables básicas. Se trata de una solución factible básica porque las cuatro variables satisfacen la restricción de no negatividad.

Puede demostrarse que la solución óptima de un problema de programación lineal está incluida en el conjunto de soluciones factibles básicas. Y así se llega a la solución óptima efectuando una búsqueda del conjunto de soluciones factibles básicas. Esto es precisamente lo que se consigue con el método símplex. Comienza con una solución factible básica formada por dos grupos de variables $-m$ variables básicas y $(n' - m)$ variables no básicas. El método símplex determina si la función objetivo puede mejorarse intercambiando una variable básica y una no básica. Si con el intercambio se logra la mejora, una variable básica actual se hace igual a 0 (convirtiéndose con ello en variable no básica), una variable no básica se incluye en el grupo de variables básicas y el sistema de ecuaciones vuelve a resolverse con el nuevo conjunto de variables básicas para alcanzar una nueva solución factible básica. Vuelve a realizarse una determinación sobre si existe o no una solución más satisfactoria. En caso de que la haya, se lleva a cabo otro intercambio y el proceso se repite de nuevo. Al método símplex se le da el nombre de ***proceso iterativo***, porque un conjunto especificado de pasos de solución se repiten hasta llegar a una solución óptima. En la figura 6.14 se sintetiza el intercambio de variables que tiene lugar en cada iteración.

Un ejemplo de un paquete de programación lineal

Según se mencionó con anterioridad, se dispone de muchos paquetes de software para programación lineal, tanto en el modo de lote como en el modo en línea. El lector deberá consultar a su centro de cómputo para averiguar cuáles ofrecen su sistema. En la presente sección se dan ejemplos de un programa interactivo que traen varios sistemas de microcomputación.* Al leer la presente sección, el lector debería darse cuenta de que las condiciones de entrada y el formato general de la salida (resultados) son específicos de este programa y que

*El programa "LINPI" es uno de los que figuran en la obra *Computer Models for Management Science*, 2a. ed., de Warren Erikson y Owen P. Hall, hijo (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986). Los programas pueden conseguirse en disquete para emplearse en un sistema Apple II plus (48K de memoria) o en una IBM PC (64K de memoria).

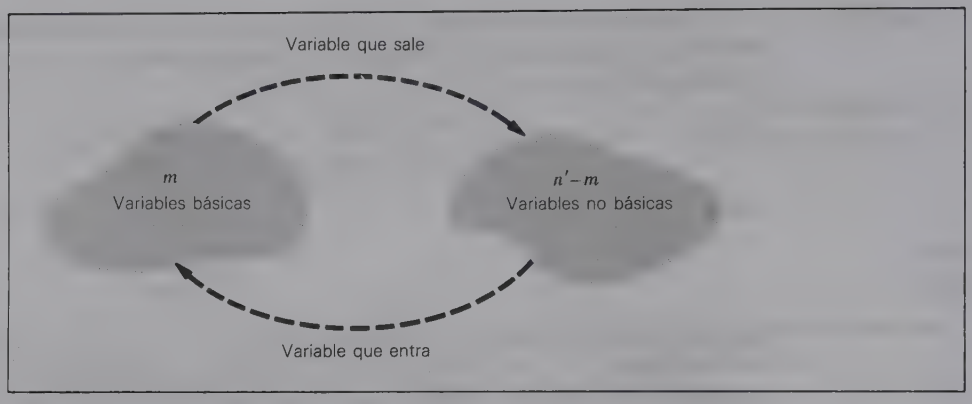


FIGURA 6.14
Intercambio de variables con el método símplex.

pueden diferir respecto a otros programas. Sin embargo, los principios generales que se ejemplifican son los mismos.

El problema resuelto por el programa es el ejemplo 3. Para ayudarle a resolverlo, la formulación del problema se repite en la figura 6.15.

Entrada del problema La figura 6.16 muestra la entrada (datos) de este problema. Nótese la naturaleza interactiva del paquete y la forma en que guía al usuario para que dé la entrada. Las respuestas de él se resaltan en la tipografía para distinguirlas de las que da la computadora. Hay que hacer las siguientes observaciones respecto a la entrada del problema:

1 El usuario debe caracterizar al inicio la ***estructura del problema***, indicando *a*) el número de restricciones estructurales, *b*) el número de variables de decisión, *c*) el número de restricciones del tipo $\leq$, *d*) el número de restricciones

Maximice

$$z = 4.4x_1 + 3.8x_2 + 4.1x_3 + 3.5x_4 + 5.1x_5 + 3.2x_6$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 1000 \quad (1)\\
x_1 &\leq 220 \quad (2)\\
x_2 &\leq 180 \quad (3)\\
x_3 &\leq 250 \quad (4)\\
x_4 &\leq 150 \quad (5)\\
x_5 &\leq 400 \quad (6)\\
x_6 &\leq 120 \quad (7)\\
x_5 &\geq 200 \quad (8)\\
x_1 + x_2 &\geq 300 \quad (9)\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

FIGURA 6.15
Formulación del ejemplo 3.

de tipo = , *e*) el número de restricciones ≥ y *f*) la clase de problema (de maximización o minimización).

2 Una vez especificada la estructura del problema, el paquete (programa) le pide al usuario los coeficientes de la función objetivo para las variables de decisión. A continuación le solicita los coeficientes de las variables y las constantes del miembro derecho para cada restricción estructural.

FIGURA 6.16 Entrada de datos para el problema de concesión de subvenciones.

```
****************************
*                          *
*    ANALISIS DE PROGRAMACION *
*            LINEAL        *
*                          *
****************************

   RESTRICCIONES Y VARIABLES

NUMERO DE RESTRICCIONES      (1 A 25) ? 9
NUMERO DE VARIABLES          (1 A 20) ? 6

NUMERO DE < = RESTRICCIONES ? 7
NUMERO DE     = RESTRICCIONES ? 0
NUMERO DE > = RESTRICCIONES ? 2

TIPO DE PROBLEMA (1=MAX, -1=MIN) ? 1

   FUNCION OBJETIVO

O.F. COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 4.4
O.F. COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 3.8
O.F. COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 4.1
O.F. COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 3.5
O.F. COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 5.1
O.F. COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 3.2

   RESTRICCIONES

MENOS O IGUAL A LA RESTRICCION
   NUMERO 1

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
VALOR RHS (CUALQUIER NUMERO) ? 1000

   RESTRICCION NUMERO 2

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
VALOR RHS (CUALQUIER NUMERO) ? 220
```

```
   RESTRICCION NUMERO 3

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
VALOR RHS (CULQUIER NUMERO) ? 180

   RESTRICCION NUMERO 4

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
VALOR RHS (CUALQUIER NUMERO) ? 250

   RESTRICCION NUMERO 5

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
VALOR RHS (CUALQUIER NUMERO) ? 150

   RESTRICCION NUMERO 6

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
VALOR RHS (CUALQUIER NUMERO) ? 150

   NUMERO DE RESTRICCION 7

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
VALOR RHS (CUALQUIER NUMERO) ? 400
```

```
   MAYOR O IGUAL A LA RESTRICCION NUMERO 8

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
VALOR RHS (CUALQUIER NUMERO) ? 200

   RESTRICCION NUMERO 9

COEFICIENTE 1 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 2 (CUALQUIER NUMERO) ? 1
COEFICIENTE 3 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 4 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 5 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
COEFICIENTE 6 (CUALQUIER NUMERO) ? 0
VALOR RHS (CUALQUIER NUMERO) ? 300


CAMBIAR DATOS DE ENTRADA (1=SI, 2=NO) ? 2

    TABLA DE OPCIONES

0 = SIN TABLA
1 = PRIMER Y ULTIMA TABLA
2 = TODAS LAS TABLAS
3 = BASE SOLAMENTE ? 0

ANALISIS DE SENSIBILIDAD (1=SI, 2=NO) ? 1
```

3 Nótese que las variables complementarias (de holgura, de demasía y artificiales) no necesitan ser proporcionadas por el usuario. Para cada tipo de restricción el programa automáticamente introduce las variables complementarias y asigna a cada una el correspondiente coeficiente de la función objetivo.

4 El programa supone la restricción de no negatividad (situación que es la habitual), sin que necesite ser expresada durante la entrada. Tampoco se requiere contarlas ni introducirlas como restricciones.

5 Luego de terminar la entrada de la función objetivo, el programa permite cambiar los datos en caso de haber descubierto errores en la entrada.

Interpretación de resultados La figura 6.17 indica los resultados del análisis hecho por el programa. Adviértase que la estructura del problema se sintetiza junto con la formulación del modelo. Los resultados muestran los valores de cada variable de decisión acompañados de un resumen de las restricciones, el valor de las variables de holgura o demasía y el valor máximo de la función objetivo. El beneficio neto total del programa de concesión de subsidios se maximiza en el valor de $4527 millones. La solución recomienda lo siguiente:

```
**************************
*                        *
*  ANALISIS DE PROGRAMACION *
*          LINEAL        *
*                        *
**************************

     **INTRODUCCION DE INFORMACION**

NUMERO DE RESTRICCIONES                    9
NUMERO DE VARIABLES                        6
NUMERO DE <= RESTRICCIONES                 7
NUMERO DE  = RESTRICCIONES                 0
NUMERO DE >= RESTRICCIONES                 2

PROBLEMA DE MAXIMIZACION

  4.4 X 1   + 3.8 X 2   + 4.1 X 3   + 3.5 X 4   + 5.1 X 5   +
3.2 X 6

SUJETO A

    1 X 1   + 1 X 2   + 1 X 3   + 1 X 4   + 1 X 5   + 1 X 6
                          <=  1000

    1 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3   + 0 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          <=  220

    0 X 1   + 1 X 2   + 0 X 3   + 0 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          <=  180

    0 X 1   + 0 X 2   + 1 X 3   + 0 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          <=  250

    0 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3   + 1 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          <=  150

    0 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3   + 0 X 4   + 1 X 5   + 0 X 6
                          <=  400

    0 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3   + 0 X 4   + 0 X 5   + 1 X 6
                          <=  120

    0 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3   + 0 X 4   + 1 X 5   + 0 X 6
                          >=  200

    1 X 1   + 1 X 2   + 0 X 3   + 0 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          >=  300
```

FIGURA 6.17
Resultados del problema de concesión de subvenciones.

1 Una subvención de $220 millones al proyecto 1 (energía solar)
2 Una subvención de $130 millones al proyecto 2 (energía solar)
3 Una subvención de $250 millones al proyecto 3 (combustibles sintéticos)
4 Una subvención de $400 millones al proyecto 5 (energía nuclear)

Los valores de las variables de holgura y demasía pueden interpretarse así:

5 La subvención de $130 millones al proyecto 2 es $50 millones menor que la que podría haber sido autorizada conforme a la restricción 3

RESULTADOS

VARIABLE	VALOR DE LA VARIABLE	COEFICIENTE ORIGINAL
X 1	220	4.4
X 2	130	3.8
X 3	250	4.1
X 4	0	3.5
X 5	400	5.1
X 6	0	3.2

NUMERO DE RESTRICCION	RHS ORIGINAL	HOLGURA O DEMASIA	PRECIO SOMBRA
1	1000	0	3.8
2	220	0	.61
3	180	50	0
4	250	0	.3
5	150	150	0
6	400	0	1.3
7	120	120	0
8	200	200	0
9	300	50	0

VALOR FUNCION OBJETIVO : 4527

6 La subvención de no fondos al proyecto 4 es $150 millones menor de lo que podría haber sido autorizado según la restricción 7

7 La subvención de no fondos al proyecto 6 es $120 millones menor de lo que podría haber autorizado de acuerdo con la restricción 7

8 La subvención de $400 millones al proyecto 5 es $200 millones más que el mínimo de $200 millones solicitado por el presidente

9 La subvención combinada a los proyectos 1 y 2 por la suma de $350 millones es $50 millones más que el mínimo de $300 millones establecido por el administrador de la oficina gubernamental

Precios sombra

La solución de un problema de programación lineal se basa en ciertas suposiciones y estimaciones. Una vez obtenida la solución, debe ser analizada detenidamente a la luz de estas estimaciones y suposiciones. Esta fase del proceso de solución recibe el nombre de ***análisis de posoptimización***. Un tipo muy importante de él es el examen de los precios sombra.

DEFINICIÓN

Un ***precio sombra*** es el grado en que cambiaría el valor óptimo de la función objetivo si el miembro derecho de una restricción aumentara en una unidad.

Muchas restricciones de tipo ($\leq$) reflejan la escasez de recursos, y por eso a menudo los precios sombra se consideran como representantes del valor económico de contar con una unidad adicional de un recurso. La figura 6.17 contiene los precios sombra del ejemplo de concesión de subsidios.

Si se examina la formulación original en la figura 6.15, se entenderá mejor el análisis de los precios sombra. El precio sombra de 3.8 para la restricción (1) sugiere que, si el dinero total disponible para las concesiones aumentara de \$1000 millones a \$1001 millones, los beneficios netos totales se incrementarían en \$3.8 millones, elevándose del máximo original de \$4527 millones a \$4530.80 millones.

El precio sombra de 0.61 para la restricción (2) indica que la utilidad neta total se incrementaría en \$0.6100 millones si la inversión máxima permitida en el proyecto 1 se elevara de \$220 a \$221 millones. Recuérdese en la solución óptima que el máximo de \$220 millones se otorgó al proyecto 1.

El precio sombra de 0 asociado a la restricción (3) indica que el valor de la función objetivo no cambiaría si la inversión máxima permitida en el proyecto 2 aumentara de \$180 a \$181 millones. Esto es lógico ya que la solución óptima recomienda en este momento una subvención de \$130 millones, o sea 50 millones menos que el máximo original.

Interprete por usted mismo los precios sombra restantes. También debería hacer las siguientes observaciones. *Los precios sombra son positivos para cualquier restricción que haya sido satisfecha como igualdad en la solución óptima (no existe holgura).* La solución óptima llevó estas restricciones a su límite, lo cual revela un valor potencial derivado de la capacidad de incrementar los límites. *Los precios sombra son 0 para cualquier restricción que no se satisfaga como igualdad (hay holgura).* La solución óptima nos llevó las restricciones a sus límites respectivos. Al ampliarse estos últimos no se logra un mejoramiento mayor en la función objetivo.

Asimismo conviene señalar que los precios sombra representan ***rendimientos marginales***. Reflejan el cambio del valor óptimo de la función objetivo, pues hay un aumento unitario en la constante del miembro derecho de la restricción correspondiente. El precio sombra es válido para determinado intervalo de cambios en dicha constante. El de 3.8 no sugiere que, con un incremento de \$100 millones en la constante del miembro derecho de la restricción (1) originará un incremento de 3.8(100) = \$380 millones en la utilidad neta total. El intervalo (rango) válido de cada precio sombra puede determinarse con otro tipo de análisis de postoptimización que se explicará en la siguiente sección.

Análisis de sensibilidad

Los parámetros (constantes) que se utilizan en un modelo de programación lineal a menudo constituyen las mejores estimaciones de sus valores reales. Por ejemplo, el margen de utilidad que se supone para un producto puede estar basado en las mejores estimaciones del precio de venta y del costo variable por unidad, lo cual supone ciertas tarifas salariales, tiempos esperados de procesamiento y costos de materiales. He aquí un ejemplo más: las estimaciones de disponibilidad de mano de obra en varios departamentos tal vez no reflejan las incertidumbres asociadas al ausentismo y a los cambios de personal. El

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO

VARIABLE	LIMITE INFERIOR	COEFICIENTE ORIGINAL	LIMITE SUPERIOR
X 1	3.8	4.4	SIN LIMITE
X 2	0	3.8	5.1
X 3	3.8	4.1	SIN LIMITE
X 4	SIN LIMITE	3.5	3.8
X 5	3.8	5.1	SIN LIMITE
X 6	SIN LIMITE	3.2	3.8

MIEMBRO DERECHO

NUMERO DE RESTRICCION	LIMITE INFERIOR	VALOR ORIGINAL	LIMITE SUPERIOR
1	950	1000	1050
2	170	220	350
3	130	180	SIN LIMITE
4	200	250	300
5	0	150	SIN LIMITE
6	350	400	450
7	0	120	SIN LIMITE
8	SIN LIMITE	200	400
9	SIN LIMITE	300	350

** FIN DEL ANALISIS **

FIGURA 6.18
Análisis de la sensibilidad para el problema de la concesión de subvenciones.

punto es que los parámetros con que se obtiene una solución óptima frecuentemente no puede determinarse con certidumbre.

Por tanto, una vez derivada una solución por medio de esos valores "supuestos", habría que examinarla para conocer los efectos si los parámetros adoptan otros valores que no sean los utilizados en la formulación original. Este análisis posterior a la solución recibe el nombre de ***análisis de sensibilidad***. Si el análisis revela que la *base* óptima y el *valor de la función objetivo* son afectados ligeramente por importantes cambios en los valores de los parámetros, se dice que la solución es ***insensible***. Por si una y otro varían de manera significativa con cambios relativamente pequeños de los parámetros, se juzga que la solución es ***sensible*** y, probablemente, merece un estudio más detenido.

Muchos paquetes de programación lineal ofrecen análisis de sensibilidad. La figura 6.18 muestra esta sección de los resultados para el ejemplo de las subvenciones. Ese programa en especial realiza un análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo de todas las variables reales y las constantes del miembro derecho para las restricciones estructurales. Primero nos concentraremos en esos coeficientes.

En el caso de los coeficientes de la función objetivo, con el análisis de sensibilidad se determina el grado en que cada coeficiente puede cambiar y hacerse que la base actual permanezca inalterada; es decir, el mismo grupo de variables básico permanece óptimo y sus valores no cambian. Otra forma de concebir esto es decir que nos interesa hasta qué punto dichos coeficientes pueden cambiar y no obstante lograr que el mismo punto en la esquina dentro del área siga siendo óptimo.

Para cada variable de decisión, el coeficiente original de la función objetivo se muestra junto con los límites superior e inferior del coeficiente. Así, el coeficiente de x_1 es 4.4 en la formulación original. Este parámetro puede *disminuir* hasta el límite inferior de 3.8 y el grupo actual de variables básicas con sus valores presentes seguirá siendo óptimo. En lo tocante a los aumentos de los parámetros, el límite superior indica que puede aumentar (sin límite) y alcanzar cualquier valor, y aun así el conjunto actual de las variables básicas se mantendrá en su nivel óptimo. Si pensamos en esto de manera intuitiva, el coeficiente original de la función objetivo de 4.4 era suficientemente alto para producir una subvención de $220 millones, el máximo posible para ese proyecto. Según el análisis de sensibilidad, un decremento de c_1 podría hacer con el tiempo que otros proyectos contrarios fueran más atractivos, lo cual haría que no se concediera subvención alguna al proyecto 1 o que se le redujera la subvención. Sin embargo, si c_1 aumenta, el atractivo del proyecto 1 es mayor y la decisión de otorgar la subvención máxima de $220 millones se refuerza todavía más. Es posible afirmar que la solución óptima actual es un *poco sensible* a los decrementos de c_1 e insensible a sus aumentos.

Para x_4 esta sección indica que el coeficiente original de la función objetivo cuyo valor es 3.5 puede llegar a un valor de 3.8 o disminuir sin límite alguno. Una manera de interpretar esto es la siguiente: x_4 es una variable no básica, lo cual significa que con su coeficiente original de rendimiento neto, cuyo valor es de 3.5, el proyecto 4 no era lo bastante atractivo para recibir una subvención. Este análisis implica que, si dicho coeficiente se aumenta más allá del valor 3.8, el proyecto 4 será más atractivo y casi seguramente recibirá una subvención.

EJERCICIO
Interprete los resultados del análisis de sensibilidad de la función objetivo para las variables restantes.

La sección final del análisis de sensibilidad en la figura 6.18 pertenece a las constantes del miembro derecho de las restricciones estructurales.

En el caso de las constantes del miembro derecho, con el análisis de sensibilidad se determina cuánto puede cambiar cada valor y se mantiene factible la base óptima.

Para la restricción (1), el análisis de sensibilidad indica que la restricción del miembro derecho, con un valor de 1000, puede *disminuir* hasta en 50, llegando a un límite inferior de 950, o bien incrementarse hasta en 50, alcanzando un límite superior de 1050; la base óptima permanecerá factible. Si cae por debajo de 960 o rebasa los 1050, la base óptima dejará de ser factible. Dicho con otras palabras, dicha base será factible mientras la cantidad total que deberá asignarse oscile entre \$950 y \$1050 millones. Con este parámetro, la solución óptima parece ser bastante sensible a los decrementos y aumentos.

Con este tipo de sensibilidad se consigue un segundo tipo de información. El intervalo de la variación permisible de la constante del miembro derecho indica asimismo el rango en que es válido el precio sombra correspondiente. Así, en la figura 6.18 se observa que el precio sombra de 3.8, asignado a la restricción 1, es válido con decrementos hasta de 50 y aumentos hasta de 50. En otras palabras, la constante puede aumentar en 1050 y el valor óptimo de z será de $4527 + 50(3.8) = 4717$. Por la misma razón, si esa constante disminuye hasta 950, el valor óptimo de z será de $4527 - 50(3.8) = 4337$.

EJERCICIO
Interprete el análisis de sensibilidad de las constantes del miembro derecho de las restricciones (3) y (7).

Ejercicios de seguimiento de la sección 6.4

1 En la formulación a la aplicación de la dieta balanceada (ejemplo 1) en la página 229, reescríbala en la forma estándar, incorporando todas las variables complementarias.

2 En la formulación de la aplicación al mantenimiento de carreteras (ejemplo 2) en la página 231, reescríbala en la forma estándar, incorporando todas las variables complementarias.

3 En la formulación de la aplicación a la concesión de subvenciones (ejemplo 3) en la página 232, reescríbala en la forma estándar, incorporando todas las variables complementarias

4 En la formulación de la aplicación a la mezcla de petróleo (ejemplo 4) en la página 234 reescríbala en la forma estándar, incorporando todas las variables complementarias.

5 En el siguiente problema de programación lineal, reescríbalo en la forma estándar, incorporando todas las variables complementarias.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimice } & z = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 \\
\text{sujeta a } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 25 \\
& -x_1 + 3x_2 - 2x_4 \leq -20 \\
& 3x_1 - 4x_4 = 10 \\
& 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 125 \\
& x_1 \geq 5 \\
& x_3 \leq 30 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

6 Un problema de programación lineal tiene 10 variables de decisión, 15 restricciones de tipo ($\leq$), 24 restricciones de tipo ($\geq$) y 6 restricciones de tipo ($=$). Cuando se reescriban en la forma estándar, ¿cuántas variables quedarán incluidas? ¿Y cuántas variables habrá de cada tipo?

Ejercicios a realizar con la computadora

Los siguientes ejercicios requieren contar con un paquete computarizado de programación lineal.

7 En la sección 6.3, el problema de programación lineal de la página 232 se resolvió por medio del método de punto en la esquina. Verifique este resultado resolviendo el problema con un paquete de programación lineal.

8 En la sección 6.3 se resolvió el problema de programación lineal de la página 235. Compruebe el resultado resolviéndolo con un paquete de programación lineal.

9 En el ejemplo de la página 239 se resolvió un problema de programación lineal y se encontraron soluciones óptimas alternativas. Resuélvalo por medio de un paquete de programación lineal. ¿Indica su paquete explícitamente ese tipo de soluciones?

10 El problema

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeta a} \quad & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

tiene una solución no acotada. Resuélvalo con un paquete de programación lineal y determine si éste indica explícitamente el resultado.

11 Resuelva el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 2x_1 + 12x_2 + 8x_3 \\ \text{sujeta a} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ & x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 80 \\ & 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 300 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si el paquete computarizado tiene las capacidades requeridas, determine los precios sombra de las tres restricciones y aplique un análisis de sensibilidad a los coeficientes de la función objetivo y a las constantes del miembro derecho.

12 En la formulación de la aplicación a la dieta balanceada (ejemplo 1) de la página 217, determine la solución óptima e interprete los resultados.

13 En la formulación de la aplicación a la mezcla de petróleo (ejemplo 4) en la página 224, determine la solución óptima e interprete los resultados.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

análisis de postoptimización 225
análisis de sensibilidad 257
área de soluciones factibles 232
ausencia de solución factible 240
base 248
conjunto convexo 236
espacio de solución no acotada 240

BancOhio National Bank

UNA APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA INDUSTRIA BANCARIA

La mayor parte de los bancos tienen centros de procesamiento de cheques. Los cheques son enviados de varias sucursales al centro de procesamiento mediante diversos modos de transporte. Cuando llegan al centro, los cheques 1) se codifican con la cantidad marcada en tinta magnética en la parte inferior del cheque, 2) se microfilman y 3) se procesan con una máquina clasificadora que extrae del cheque la información relativa a la contabilidad y al destino del documento. Los cheques que se libran contra otros bancos se envían a la Federal Reserve o a una cámara de compensación.

El procesamiento oportuno de los cheques es decisivo para reducir al mínimo lo que se conoce en el medio con el nombre de "documentos flotantes". Esa designación se refiere al monto de dinero representado por cheques expedidos que se encuentran en vías de cobranza. Existe un costo de oportunidad para los bancos cuando los cheques se encuentran en el proceso de cobranza. Si los bancos tuvieran disponibles esos fondos, podrían invertirlos y ganar interés. Esa pérdida de inversiones puede costarles mucho dinero al año. El procesamiento eficiente de los cheques se basa en la programación de los operadores del cifrador o codificador. La programación se complica a causa de 1) la gran variabilidad de los volúmenes de cheques cada día y cada hora y 2) un número fijo de máquinas codificadoras disponibles.

El BancOhio National Bank de Columbus, con activos que se aproximan a los 6 mil millones de dólares y con más de 200 sucursales en todo el estado, tuvo éxito en la aplicación de la programación lineal al desarrollo de un sistema de turnos de programación para sus codificadores. El modelo ideado por el banco determina el número de operadores del codificador de medio tiempo y de tiempo completo, con el objeto de asignarle a cada uno un conjunto de turnos establecidos de antemano. De ese modo se reducen al mínimo los sueldos semanales (tiempo regular y horas extras) y los costos flotantes. Los funcionarios del banco estimaron ahorros anuales de un millón de dólares conseguidos al modificar los programas de los turnos.

*L.J. Krajewski y L.P.Ritzman, "Shift Scheduling in Baking Operations: A Case Aplication". *Interfaces*. vol. 10 num. 2 (abril 1980). pp. 1-8.

función objetivo 214
líneas de utilidades iguales 234
medio espacio 227
medio espacio permisible 228
método símplex 243
método de punto en la esquina 237
modelo de dieta balanceada 216
modelos de elaboración de presupuestos de capital 220
modelos de mezclado 221
modelos de transporte 218
precio sombra 255
programación lineal 213

programación matemática 213
restricciones estructurales 216
restricciones de no negatividad 216
solución básica 248
solución básica factible 248
solución factible 248
solución no acotada 240
soluciones óptimas alternativas 238
variable artificial 245
variable básica 249
variable de demasía 245
variable de decisión 214
variable de holgura 244
variables no básicas 248

ALGUNOS PAQUETES COMPUTARIZADOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

A continuación se describen algunos de los muchos paquetes de programación lineal que se venden en el mercado.

- **LINP1.** Uno de los programas incluidos en la obra *Computer Models for Management Science* (2a. ed.) de Warren J. Erikson y Owen P. Hall, hijo, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, 1986. Disponible para Apple II y sistemas de microcomputación que tengan una memoria de 48K, Applesoft BASIC, una unidad de disco y el sistema operativo DOS 3.3. También hay una versión para la IBM PC con una memoria de 64K, BASICA, una unidad de disco y la versión 1.1 del DOS IBM. Maneja problemas hasta de 20 variables y 25 restricciones.

- **LINDO/PC.** Puede obtenerse de The Scientific Press, 540 University Avenue, Palo Alto, California 94301. Hay una versión para la IBM PC o los sistemas compatibles con ella que tengan una memoria de 192K. Maneja problemas hasta de 60 renglones y 120 variables.

- **SUPER LINDO/PC.** Puede obtenerse de la misma fuente que el paquete anterior. Hay versiones para las microcomputadoras IBM PC configuradas con un pastilla de 8087 y 256K de memoria. Puede manejar problemas hasta de 120 renglones y 300 variables.

- **LP.** Uno de los programas incluidos en el libro *Management Science Models and the Microcomputer* de James R. Burns y Larry M. Austin, McMillan Publishing Company, Inc., Nueva York, 1985. Este programa corre con el MS-DOS 1.xx, MS-DOS 2.xx y la PC-DOS 1.1 y los sistemas operativos 2.1; por tanto, es adaptable a una amplia diversidad de computadoras compatibles con la IBM PC. Maneja problemas que tengan hasta 40 variables de decisión y 40 restricciones.

- **LINEAR PROGRAMMING.** Es uno de los programas que vienen en la obra *Microcomputer Models for Management Decision-Making* de Laurie B. Dennis y Terry L. Dennis, West Publishing Company, St. Paul, 1986. Este programa puede utilizarse en una IBM PC, en una XT o en muchas de las computadoras compatibles con IBM. El requisito mínimo de equipo es

una memoria de 64K, una unidad de disco de cara doble, la versión 1.2, la 2.0 o bien la 2.1 del sistema operativo DOS IBM y una impresora (opcional). La regla práctica general relativa al tamaño del problema que maneja es de un máximo de 25 variables en un problema de maximización y de 20 en un problema de minimización con 20 restricciones aproximadamente.

Paquetes disponibles para macrocomputadoras y minicomputadoras

- **SAS/OR.** Puede obtenerse del SAS Institute, Inc., SAS Circle, P.O. Box 8000, Cary, North Carolina 27511.
- **MPSX.** Puede obtenerse de la IBM Corporation.
- **APEX-III.** Puede obtenerse de la Control Data Corporation.

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-7 se relacionan con la sección 6.2.

1 Un productor de maquinaria desea maximizar las utilidades que recibe de la fabricación de dos productos: el producto *A* y el producto *B*. Los tres insumos fundamentales de cada producto son acero, electricidad y horas de trabajo. En la tabla 6.14 se resumen los insumos por unidad, las fuentes disponibles y el margen de utilidad por unidad. Formule el modelo de programación lineal aplicable a este problema. ¿Cuál restricción es la más importante?

2 En cierta zona hay ~~tres~~ dos bodegas que suministran comestibles a cuatro tiendas de abarrotes. La tabla 6.15 resume el costo de entrega por camión desde una bodega a una tienda, el número de cargas de camión por tienda a la semana y el número máximo de cargas disponibles a la semana por almacén. Formule un modelo de programación lineal que determine el número de entregas de cada almacén a las tiendas que reduciría al mínimo el costo total de entrega.

3 Expansión de capital Una compañía está estudiando la adquisición de maquinaria adicional como parte de un programa de expansión de capital. Se están examinando cuatro tipos de máquinas. En la tabla 6.16 se indican los atributos pertinentes de ellas.

El presupuesto total destinado al programa es de $600 000. El espacio máximo de piso disponible es de 16 000 pies cuadrados. La empresa quiere maximizar la produc-

TABLA 6.14

	Producto		Total mensual disponible
	A	*B*	
Energía	200 kWh	400 kWh	20 000 kWh
Acero	100 lb	120 lb	10 000 lb
Mano de obra	5 h	8 h	400 h
Utilidad por unidad	$20	$50	

TABLA 6.15

	Tienda				Número máximo de cargas de camión
	1	2	3	4	
Bodega *A*	$40	$30	$45	$25	100
Bodega *B*	$50	$35	$40	$20	150
Número requerido de cargas	80	50	75	45	

TABLA 6.16

	Máquina			
	A	*B*	*C*	*D*
Costo	$50 000	$35 000	$60 000	$80 000
Pies cuadrados requeridos	200	150	250	280
Producción diaria, unidades	30 000	20 000	40 000	60 000

TABLA 617

	Área de escasez				Excedente de automóviles
	1	2	3	4	
Ciudad de excedente 1	$50	$40	$25	$30	300
Ciudad de excedente 2	$40	$25	$35	$45	150
Ciudad de excedente 3	$35	$50	$40	$25	250
Escasez de automóviles	$250	$150	$125	$175	

ción que se conseguirá con la compra de las nuevas máquinas. Defina rigurosamente las variables de decisión y formule el modelo de programación lineal para este problema.

4 Una compañía nacional de renta de automóviles está haciendo sus planes para la estación veraniega. Según un análisis de los inventarios actuales de automóviles subcompactos en siete ciudades junto con las proyecciones de la demanda durante el verano en ellas, tres de esas zonas no lograrán satisfacer sus necesidades de vehículos, en tanto que cuatro tendrán excedentes de automóviles subcompactos. Con objeto de prepararse para la estación de verano, los funcionarios de la compañía han decidido trasladar los automóviles de las ciudades que, según se prevé, tendrán excedentes, a las que supuestamente sufrirán escasez. Los vehículos pueden ser trasladados contratando a una firma dedicada al transporte de automóviles. Se han recibido ofertas de compañías camioneras y gracias a ellas se conoce el costo de trasladar un automóvil de una ciudad con exceso de automóviles subcompactos a otra que muestre escasez. La tabla 6.17 sintetiza esos costos, así como los excedentes y escasez de dichas ciudades.

Supongamos que x_{ij} denota el número de automóviles trasladados de la zona de excedente i a la de escasez j. Si lo que se busca es minimizar el costo del traslado de los vehículos de modo que las ciudades con escasez puedan satisfacer sus necesidades, formule el modelo de programación lineal aplicable a este problema.

5 Cartera financiera Una persona desde invertir $300 000 en una mezcla de inversiones. La tabla 6.18 indica las opciones de inversión y las tasas estimadas de rendimiento de cada una. El inversionista quiere que por lo menos 30% de su inversión esté en bonos del gobierno. En virtud del mayor riesgo que entrañan las dos acciones, ha estipulado que la inversión combinada no rebase los $50 000. También tiene la corazonada de que las tasas de interés van a seguir siendo altas y ha especificado que al menos 25% de la inversión se haga en el fondo del mercado de dinero. Su condición final establece que la cantidad invertida en el fondo mutualista *A* no deberá ser mayor que la invertida en el fondo mutualista *B*. El problema radica en decidir cuánto invertir en cada alternativa para que se maximice el rendimiento total anual (en dólares). Defina rigurosamente las variables y formule el modelo de programación lineal que se aplica a este problema.

6 Modelo de asignación Una empresa desea asignar cinco representantes de ventas a cinco distritos. La dirección estima las ventas totales que cada uno generaría en caso de ser destinado a distritos diferentes durante un periodo de 1 año. En la tabla 6.19

TABLA 6.18

Inversión	Tasa proyectada de rendimiento
Fondo mutualista *A*	0.12
Fondo mutualista *B*	0.14
Fondo del mercado de dinero	0.15
Bonos gubernamentales	0.125
Acción *A*	0.16
Acción *B*	0.18

TABLA 6.19

	Distrito				
Rep. de Ventas	1	2	3	4	5
1	200	150	100	90	160
2	120	180	160	120	100
3	100	200	120	100	140
4	150	100	220	80	180
5	80	120	100	150	200

TABLA 6.20

Producto	Peso ofrecido, tons	Ingreso $ por ton	Ingreso $ por ton
1	200	70	$1.250
2	100	50	900
3	80	60	1.000
4	150	75	1.200

se resumen esas estimaciones de ventas (en miles de dólares). El deseo es asignar cada representante a un distrito de modo que se maximicen las ventas anuales. Sea $x_{ij} = 1$, si el representante i es asignado al distrito j, y sea $x_{ij} = 0$ si el representante i no es asignado al distrito j. Formule el modelo de programación lineal aplicable a este problema (recordando que cada representante ha de ser asignado y que a todos los distritos debe asignárseles un representante).

7 Transportistas El dueño de un barco de transporte está estudiando la naturaleza del siguiente embarque. Le ofrecen cuatro productos para que los transporte. En la tabla 6.20 se resumen su peso, volumen y características generadoras de ingresos. El barco tiene tres bodegas, caracterizadas todas por ciertas capacidades de peso y volumen. La bodega de proa tiene una capacidad de peso de 100 toneladas y una capacidad de volumen de 6 000 pies cúbicos. La bodega del centro tiene una capacidad de peso de 140 toneladas y una capacidad de volumen de 8000 pies cúbicos. La bodega de popa tiene una capacidad de peso de 80 toneladas y una capacidad de volumen de 5000 pies cúbicos. El problema estriba en decidir qué cantidad de cada producto aceptar para el embarque, si el objetivo consiste en maximizar el ingreso total. En concreto, debe decidirse cuántas toneladas de cada artículo deberán colocarse en cada bodega, pero sin rebasar las capacidades de peso ni las de volumen. Suponiendo que x_{ij} denote el número de toneladas del producto i puesto en la bodega j, formule el modelo de programación lineal aplicable a este problema.

Los ejercicios 8-17 se relacionan con la sección 6.3. En los siguientes problemas grafique el área de las soluciones factibles (si es que existe una) y resuelva mediante el método de punto en la esquina

8 Maximice $z = 8x_1 + 3x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

9 Minimice $z = 15x_1 + 6x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 24 \\ x_2 &\ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

10 Maximice $z = 2x_1 + 4x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ -x_1 + x_2 &\ge 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

11 Maximice $z = 3x_1 + 3x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\ge 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge -6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

12 Minimice $z = 4x_1 + 4x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 24 \\ 3x_1 + x_2 &\ge 26 \\ x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

13 Maximice $z = 3x_1 + 2x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ 9x_1 + 6x_2 &\le 108 \\ x_1 &\ge 8 \\ x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

14 Maximice $z = 4x_1 + 3x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4 \\ 8x_1 + 6x_2 &\le 48 \\ x_1 &\ge 3 \\ x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

15 Minimice $z = 3x_1 + 2x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 10 \\ 9x_1 + 6x_2 &\ge 18 \\ x_1 &\ge 2 \\ x_2 &\ge 4 \\ x_1 &\le 6 \\ x_2 &\le 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

16 Minimice $z = 5x_1 + 8x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 30 \\ 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

17 Maximice $z = 8x_1 + 4x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 12 \\ x_1 &\le 6 \\ 4x_1 + 3x_2 &\ge 36 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Los ejercicios 18-23 se relacionan con la sección 6.4.

18 En el siguiente problema de programación lineal, reescríbalo en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

Maximice $z = 6x_1 - 2x_2 + 8x_3$
sujeta a
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\ge 50 \\ 2x_1 - 3x_2 &\le -15 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\ge 40 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 15 \\ -2x_2 &\le -4 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

19 En el siguiente problema de programación lineal, reescríbalo en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$\begin{aligned}
\text{Minimice } & z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{sujeta a } & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 14 \\
& 3x_1 - 4x_3 \geq -15 \\
& x_2 \leq 10 \\
& x_1 = 2x_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

20 En el siguiente problema de programación lineal, reescríbalo en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$\begin{aligned}
\text{Maximice } & z = 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 \\
\text{sujeta a } & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 12 \\
& x_1 - 3x_2 \leq 20 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 8 \\
& 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 25 \\
& x_1 \geq 5 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_3 \geq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

21 Un problema de programación lineal tiene 75 variables de decisión, 80 restricciones de tipo ($\leq$), 50 restricciones de tipo ($\geq$) y 40 restricciones de tipo ($=$). Cuando se reescriben en la forma estándar, ¿cuántas variables quedarán incluidas? ¿Y cuántas variables complementarias de cada tipo?

22 Un problema de programación lineal tiene 50 variables de decisión, 50 restricciones de tipo ($\leq$), 120 restricciones de tipo ($\geq$) y 80 restricciones de tipo ($=$). Cuando se reescriben en la forma estándar, ¿cuántas variables quedarán incluidas? ¿Cuántas variables complementarias de cada tipo?

23 Un problema de programación lineal tiene 200 variables, 500 restricciones de tipo ($\leq$), 300 restricciones de tipo ($\geq$) y 250 restricciones de tipo ($=$). Cuando se reescriben en la forma estándar, ¿cuántas variables quedarán incluidas? ¿Y cuántas variables complementarias de cada tipo?

PRUEBAS DEL CAPÍTULO

1 Determine la solución gráfica, si es que existe, aplicable a este sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\geq 5 \\
x_1 + x_2 &\leq 15 \\
x_1 &\leq 20
\end{aligned}$$

2 Una compañía fabrica y vende cinco productos. En la tabla 6.21 se dan los costos por unidad y precio de venta. Si el objetivo es maximizar las utilidades totales, formule un modelo de programación lineal dotado de las siguientes res-

TABLA 6.21

	Producto				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Costo por unidad	$50	$80	$300	$25	$10
Precio de venta	$70	$90	$350	$50	$12

tricciones: hay que producir un mínimo de 20 unidades del producto A y 10 del producto B; no se dispone de suficientes materias primas para una producción total mayor que 75 unidades; el número de unidades fabricadas de los productos C y E ha de ser igual.

3 Resuelva el siguiente problema empleando el método de punto en la esquina.

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 1.5x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeta a} \quad & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 120 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4 Explique el significado e importancia de *a*) los precios sombra y *b*) el análisis de sensibilidad.

5 Reescriba el siguiente problema en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$\begin{aligned} \text{Minimice} \quad & z = 10x_1 + 5x_2 + 15x_3 \\ \text{sujeta a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ & 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 \geq 25 \\ & 2x_1 - 3x_3 \leq -10 \\ & x_1 + x_2 = 24 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

EJERCICIOS A REALIZAR CON LA COMPUTADORA

Use un paquete de programa apropiado (programación lineal) para resolver los siguientes ejercicios.

1

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ \text{sujeta a} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 50 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 40 \\ & 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 150 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\text{Minimice} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 4x_5 \\
\text{sujeta a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 20 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 100 \\
& 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 24 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_4 \geq 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
\text{Maximice} \quad & z = -1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 5x_6 \\
\text{sujeta a} \quad & x_1 + x_4 \leq 32\,000 \\
& x_2 + x_5 \leq 20\,000 \\
& x_3 + x_6 \leq 38\,000 \\
& -5x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 0 \\
& 28x_1 + 10x_2 - 7x_3 \geq 0 \\
& -2x_4 + 4x_5 - x_6 \leq 0 \\
& 8x_4 - 10x_5 - 27x_6 \geq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 30\,000 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
\text{Maximice} \quad & z = 180\,000x_1 + 20\,000x_2 + 72\,000x_3 + 80\,000x_4 \\
\text{sujeta a} \quad & 30\,000x_1 + 12\,000x_2 + 30\,000x_3 + 20\,000x_4 \leq 65\,000 \\
& 40\,000x_1 + 8\,000x_2 + 20\,000x_3 + 30\,000x_4 \leq 80\,000 \\
& 40\,000x_1 + 20\,000x_3 + 40\,000x_4 \leq 80\,000 \\
& 30\,000x_1 + 4\,000x_2 + 20\,000x_3 + 10\,000x_4 \leq 50\,000 \\
& x_1 \leq 1 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_3 \leq 1 \\
& x_4 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}
\text{Minimice} \quad & z = 464x_1 + 513x_2 + 654x_3 + 867x_4 + 352x_5 + 416x_6 + 690x_7 + 791x_8 \\
& + 995x_9 + 682x_{10} + 388x_{11} + 685x_{12} \\
\text{sujeta a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 75 \\
& x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 125 \\
& x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 100 \\
& x_1 + x_5 + x_9 = 80 \\
& x_2 + x_6 + x_{10} = 65 \\
& x_3 + x_7 + x_{11} = 70 \\
& x_4 + x_8 + x_{12} = 85 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} \geq 0
\end{aligned}$$

6 Resuelva el problema de la cartera financiera en el ejercicio 5 (p. 264) e interprete íntegramente los resultados.

7 Resuelva el problema del modelo de asignación del ejercicio 6 (pág. 274) e interprete íntegramente los resultados.

8 Resuelva el problema del transporte por barco del ejercicio 7 (pág. 264) e interprete íntegramente los resultados.

MINICASO

CONCESIÓN DE CONTRATOS

El departamento de compras de una oficina estatal ha pedido licitaciones (ofertas) para cinco productos. Tres proveedores las presentaron. En la tabla 6.22 se resumen los precios de las licitaciones por unidad de producto. Adviértase que los proveedores no necesariamente presentan licitaciones para los cinco productos. También se indica en la tabla la cantidad de cada producto que requiere la oficina estatal.

Algunos proveedores han especificado las cantidades máximas que pueden suministrar de los productos. El proveedor 1 indica que no puede proporcionar más de 10 000 unidades del producto 3, el proveedor 2 puede suministrar un máximo de 8000 unidades del producto 2 y el proveedor 3 no puede suministrar más de 18 000 unidades del producto 1. Las normas de adquisiciones dictadas por el estado no estipulan que todas las unidades de un producto se le compren a un proveedor. De manera análoga, tampoco establecen que los contratos se otorguen al que haga la oferta más barata.

El departamento de compras quiere determinar cuántas unidades de cada producto debería comprar a los proveedores, para satisfacer así los requisitos de un costo total mínimo fijados por la oficina gubernamental.

1 Formule el modelo de programación lineal de este problema, definiendo con mucho cuidado sus variables.

2 Resuelva el problema empleando un paquete computarizado de programación lineal e interprete los resultados en forma completa. Señale las cantidades de cada producto comprado a los proveedores y el monto de dinero concedido a cada uno de ellos. Indique también cuáles son los costos totales mínimos.

***3** Suponga que el departamento de compras no desea conceder más de $300 000 dólares en contratos a ninguno de sus proveedores. Suponga además que el proveedor 3 estipuló que deberían otorgársele contratos con un valor mínimo de $200 000. En caso de que no se cumpla este requisito, retirará todas sus licitaciones. Modifique la formulación original y resuelva el problema con un paquete computarizado de programación lineal. Interprete sus resultados y compárelos con la respuesta de la parte 2. (*Sugerencia*: formule y resuelva dos modelos individuales, uno de los cuales supone que el proveedor 3 tendrá satisfechas sus propias exigencias y el otro que el proveedor 3 ha retirado sus licitaciones.)

TABLA 6.22

	Producto				
Proveedor	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$5.00	$7.50	$3.00	—	$4.50
2	—	$7.25	$3.20	$8.75	$4.20
3	$4.80	$7.75	$3.10	$9.00	—
Requisito del organismo	20 000	15 000	30 000	25 000	22 000

CAPÍTULO

7 EL MÉTODO SÍMPLEX

7.1 EL PROCEDIMIENTO SÍMPLEX
7.2 FENÓMENOS ESPECIALES
7.3 EL PROBLEMA DUAL
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Lograr que el lector entienda el método símplex de resolver los problemas de programación lineal
- Dar ejemplos de las formas en que se manifiestan los fenómenos de la programación lineal cuando se aplica el método símplex
- Conseguir que el lector entienda el problema dual y la forma en que se formula a partir de un problema primario
- Dar ejemplos de las propiedades primarias-duales que permiten que la solución de un problema se obtenga de la de otro problema

En el presente capítulo se estudiará el *método símplex* aplicado a la solución de problemas de programación lineal. En primer lugar, se dará una explicación general de la naturaleza y condiciones para poder servirse del método símplex. A continuación se describirá la técnica y se darán ejemplos de su aplicación en la solución de problemas de maximización que contienen todas las restricciones de tipo "menor que o igual a". En seguida, se expondrá el procedimiento con que se solucionan los problemas de minimización y los que incluyen otras clases de restricciones. Vendrá luego una explicación de la manera en que los fenómenos especiales de la programación lineal, entre ellos las soluciones óptimas alternativas, se identifican mediante el método símplex. Por último, se explicará el problema *dual* de dicha programación y su importancia.

Antes de iniciar las explicaciones del método símplex, se ofrecerá una formulación generalizada de un modelo de programación lineal. Con las siguientes definiciones

x_j = j-ésima variable de decisión
c_j = coeficiente en la j-ésima variable de decisión dentro de la función objetivo
a_{ij} = coeficiente en la i-ésima restricción de la j-ésima variable
b_i = constante del miembro derecho para la i-ésima restricción

el modelo generalizado de la programación lineal puede formularse así:

Optimice (maximice o minimice)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ (\leq, \geq, =) \ b_1 \quad (1)\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ (\leq, \geq, =) \ b_2 \quad (2)\\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ (\leq, \geq, =) \ b_m \quad (m)\\
x_1 \geq 0\\
x_2 \geq 0\\
\vdots \qquad \vdots\\
x_n \geq 0
\end{aligned}$$

Este modelo generalizado tiene n variables de decisión y m restricciones estructurales. Nótese que cada restricción estructural no contiene más que una de las condiciones de tipo ($\leq$, $\geq$, $=$) asignada a ella. Al describir el método símplex, se utilizará esporádicamente la notación de este modelo.

7.1 EL MÉTODO SÍMPLEX

Panorama general del método símplex

Según se dijo en el capítulo 6, los procedimientos de solución gráfica son aplicables exclusivamente a los problemas de programación lineal con dos variables. No obstante, puede exponerse la geometría de los problemas de tres variables, pero hay pocos que tengan un pleno dominio de la graficación en tres dimensiones. Y más allá de tres variables se carece de un marco de referencia geométrico. Las aplicaciones más realistas de la programación lineal incluyen mucho más de dos variables, y por eso se necesita una técnica de solución que no sea el método gráfico.

El ***método símplex*** es el procedimiento no gráfico de mayor uso. Se trata de una técnica algebraica para resolver los sistemas de ecuaciones en que ha de optimizarse la función objetivo. Es un proceso *iterativo* que identifica la solu-

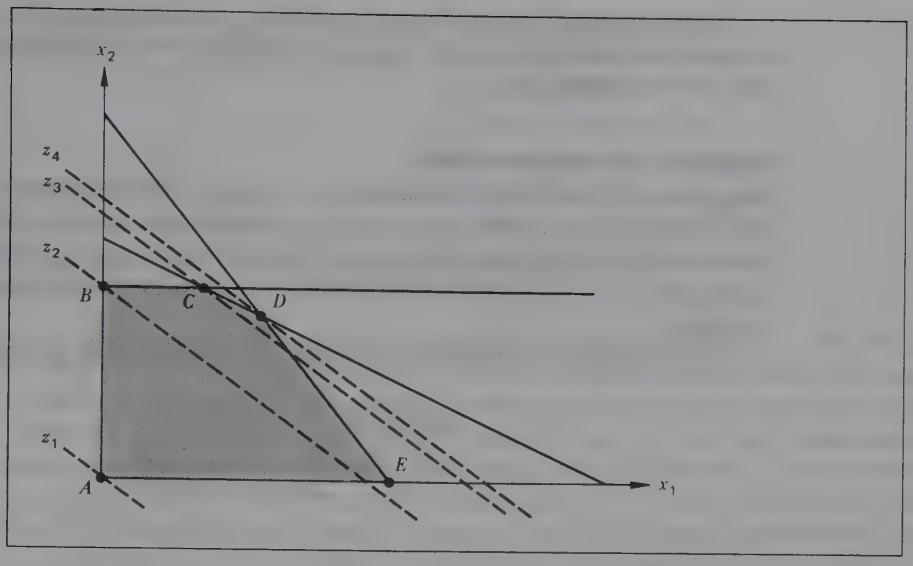


FIGURA 7.1

ción factible inicial. A continuación busca la posible existencia de una mejor solución. "Lo mejor" se mide según que pueda o no mejorarse el valor de la función objetivo. Si se encuentra una solúción más satisfactoria, se reanudará la búsqueda. Para generar cada solución sucesiva se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales. La búsqueda continúa hasta que la función objetivo ya no admite mejoramiento.

En forma gráfica, el procedimiento puede concebirse como la búsqueda de distintos puntos en la esquina dentro del área de soluciones factibles. Las soluciones que se obtengan en cada iteración del método símplex representan esos puntos. Pero no todos ellos se examinan. En la búsqueda se escoge únicamente un conjunto de tales puntos, seleccionando uno nuevo si y sólo si la función objetivo es por lo menos tan buena como el actual punto en la esquina. Esta idea se muestra en la figura 7.1. Si se supone un objetivo de maximización, el método símplex podría pasar de una solución inicial en un punto en la esquina A a los puntos B, C y, finalmente, al punto D. Nótense las líneas de *utilidades iguales* z_1, z_2, z_3 y z_4. Estas líneas se mueven hacia afuera, alejándose del origen, con cada punto sucesivo en la esquina. Se ejemplifica así una situación donde el valor de z aumenta con cada solución sucesiva.

En un problema de minimización las soluciones sucesivas tendrán los valores de la función objetivo que suelen estar disminuyendo.

Recuérdese, según se dijo en el capítulo 6, que existen tres requisitos o condiciones que es preciso cumplir a fin de resolver los problemas de programación lineal con el método símplex, a saber:

1 Todas las restricciones deben formularse como ecuaciones.
2 La constante del miembro derecho no puede ser negativa para una restricción.
3 Todas las variables están restringidas a valores no negativos.

Antes de seguir leyendo esta exposición, se recomienda al lector que repase el significado de los términos *base, variable básica, solución básica* y *solución factible básica* en la página 261

Solución por enumeración

Pongamos el caso de un problema que tenga $m \leq$ restricciones y n variables. Antes de resolverlo aplicando el método símplex, las m restricciones han de ser convertidas en ecuaciones sumando m variables de holgura. Esa reformulación da origen a un conjunto de restricciones que consta de m ecuaciones y $m + n$ variables.

En la sección 6.3 se estudió el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeta a } & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & 4x_1 + 6x_2 \leq 260 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Antes de resolver este problema, el conjunto de restricciones ha de ser transformado en el conjunto equivalente

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + S_1 &= 120 \\ 4x_1 + 6x_2 + S_2 &= 260 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El conjunto de restricciones contiene dos ecuaciones y cuatro variables. Nótese que las variables de holgura, junto con las variables reales, presentan la restricción de ser no negativas.

Entre todas las posibles soluciones del conjunto de restricciones, puede demostrarse que se obtiene una solución óptima cuando dos de las cuatro variables de este problema se hacen iguales a cero y el sistema se resuelve para las otras dos variables. Surge entonces la pregunta: ¿cuáles dos variables deberán hacerse iguales a 0 (*deberían ser variables no básicas*)? En seguida se enumeran las posibilidades. Si S_1 y S_2 se ponen iguales a 0, las ecuaciones de restricciones serán

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 120 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 260 \end{aligned}$$

Al despejar las *variables básicas* correspondientes x_1 y x_2 se obtiene $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$.

Si S_1 y x_1 se hacen igual a 0, el sistema será

$$\begin{aligned} 2x_2 &= 120 \\ 6x_2 + S_2 &= 260 \end{aligned}$$

Si se despejan las variables básicas correspondientes x_2 y S_2, se obtiene $x_2 = 60$ y $S_2 = -100$.

TABLA 7.1

Solución	Variables no básicas	Variables básicas
1	S_1, S_2	$x_1 = 20, x_2 = 30$
*2	x_1, S_1	$x_2 = 60, S_2 = -100$
3	x_1, S_2	$x_2 = 43\frac{1}{3}, S_1 = 33\frac{1}{3}$
4	x_2, S_1	$x_1 = 40, S_2 = 100$
*5	x_2, S_2	$x_1 = 65, S_1 = -75$
6	x_1, x_2	$S_1 = 120, S_2 = 260$

La tabla 7.1 sintetiza las *soluciones básicas* (véase la sección 6.4, página 256); es decir, todas las posibilidades de solución suponen que a dos de las cuatro variables se les asignen valores de 0. Se ha prestado atención especial a las soluciones 2 y 5 (denotadas por asteriscos) porque no son factibles. Cada una contiene una variable que tiene un valor negativo, violando así la restricción de no negatividad. Sin embargo, las soluciones 1, 3, 4 y 6 son *soluciones factibles básicas* del problema de programación lineal y son candidatos a la solución óptima.

La figura 7.2 es la representación gráfica del conjunto de restricciones. En ella los puntos de intersección (A, B, C, D, E, F) entre las líneas de restricciones estructurales y las restricciones de no negatividad (los ejes x_1 y x_2) representan el conjunto de soluciones básicas. Las soluciones 1, 2, 4 y 6 en la tabla 7 son las soluciones factibles básicas y corresponden a los cuatro puntos en la esquina dentro del área de soluciones factibles de la figura 7.2 En concreto, la solución 1 corresponde al punto en la esquina C, la solución 3 al punto en

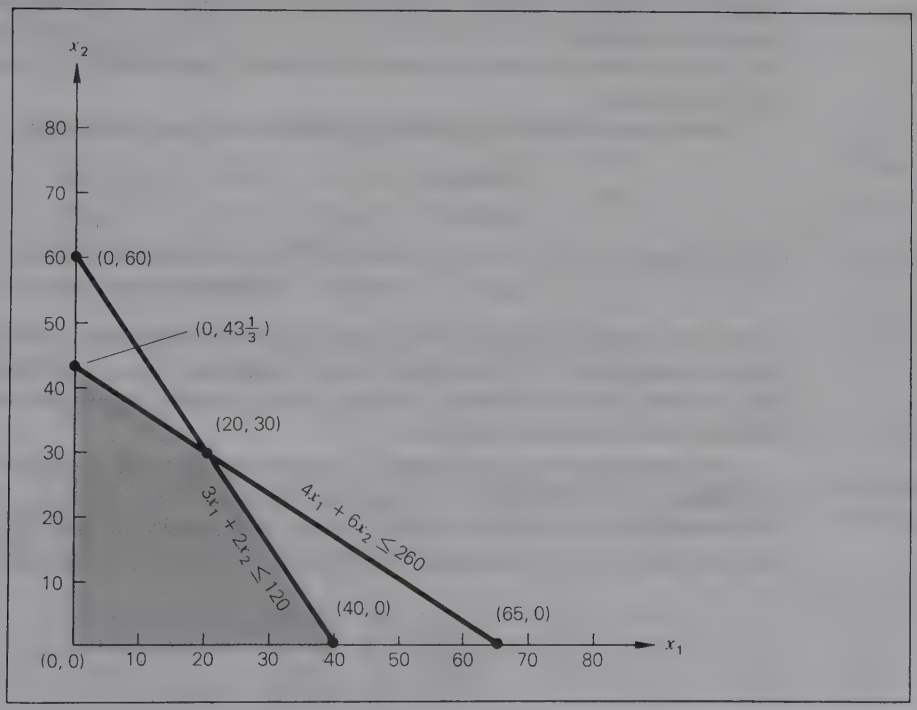


FIGURA 7.2

la esquina B, la solución 4 al punto en la esquina D y la solución 6 al punto en la esquina A. Las soluciones 2 y 5, que no son factibles, corresponden a los puntos E y F de la figura 7.2.

El punto importante que conviene destacar es que, al hacer todas las combinaciones de dos variables diferentes iguales a 0 y al despejar las variables restantes, se identificó un conjunto de posibles soluciones (soluciones básicas) para el problema de programación lineal. Automáticamente se excluyó un subconjunto de estas soluciones por contener soluciones no factibles (2 y 5). No obstante, el resto de las soluciones básicas factibles correspondían a los puntos de esquina dentro del área de las soluciones factibles. Sabemos que habrá una solución óptima por lo menos en uno de esos puntos, por lo cual se obtendrá una solución óptima si se examina más a fondo.

En el caso de un problema de maximización que presente m restricciones $\leq$ y n variables, la adición de m variables de holgura produce m ecuaciones de restricción que contienen $m + n$ variables. *Puede conseguirse una solución óptima a este problema al hacer igual a 0 n de las variables y al despejar para las demás m variables*. En el proceso de seleccionar varias combinaciones de n variables para hacerlas 0, el método símplex 1) *nunca escogerá una combinación que produzca una solución no factible* y 2) *garantizará que cada nueva combinación seleccionada aportará una solución que posea un valor de función objetivo por lo menos tan bueno como el de la solución actual*.

Álgebra del método símplex

Antes de presentar de una manera formal el método símplex, se analizará el álgebra en que se funda. Su aritmética se basa en el método de eliminación gaussiana descrito en la sección 4.3. Se recomienda una relectura de esa parte del libro en caso de que el lector no recuerde muy bien los pormenores de este procedimiento.

Volvamos ahora al siguiente problema de maximización

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 5x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 \\ \text{sujeta a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + S_1 = 120 \\ & 4x_1 + 6x_2 + S_2 = 260 \\ & x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que a las variables de holgura se les asignaron coeficientes de funciones objetivo de 0. *Aunque pueden darse excepciones, a esas variables suelen asignárseles coeficiente de 0 en la función objetivo.* Ello se debe a que rara vez contribuyen al valor de la función objetivo.

En seguida se da un ejemplo de cómo aplicar el método de eliminación gaussiana para identificar el conjunto de soluciones básicas. Si se representa el sistema de ecuaciones de restricciones mostrando tan sólo los coeficientes de las variables y las constantes del miembro derecho, se tendrá

x_1	x_2	S_1	S_2		
3	2	1	0	120	R_1
4	6	0	1	260	R_2

Recuérdese que el método de eliminación gaussiana se sirve de las ***operaciones de renglón*** para transformar el sistema original de ecuaciones en un sistema equivalente. Una vez terminado el procedimiento (suponiendo una solución única), el sistema equivalente posee las propiedades de que sólo una variable queda en cada ecuación y de que el miembro derecho de ellas es igual al valor de esa variable. Al observar los coeficientes de las variables de este sistema de ecuaciones de restricciones ($\boldsymbol{R}_1$ y $\boldsymbol{R}_2$), un adecuado punto de arranque será declarar que x_1 y x_2 son variables no básicas y ponerlas en 0. Los coeficientes de variables para S_1 y S_2 ya tienen la forma deseada. Si x_1 y x_2 son 0, los valores correspondientes de las variables básicas S_1 y S_2 serán $S_1 = 120$ y $S_2 = 260$.

x_1	x_2	S_1	S_2	
3	2	1	0	120
4	6	0	1	260

Supóngase que se desea que x_1 y S_1 sean 0 y despejar x_2 y S_2. En comparación con la solución original, se quiere reemplazar S_1 por x_2 como variable básica. Y entonces nos gustaría que los coeficientes de x_2 y S_2 tuvieran la forma

x_1	x_2	S_1	S_2	
■	①	■	0	■
	⓪		1	

Puesto que los coeficientes de S_2 ya están en la forma deseada, lo único que se necesita es convertir los de x_2 de $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Para producir el ①, se multiplica el renglón 1 por $\frac{1}{2}$, dándonos

x_1	x_2	S_1	S_2		
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	60	$\boldsymbol{R}_1' = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}_1$
4	6	0	1	260	$\boldsymbol{R}_2$

El 6 se transforma en ⓪ al multiplicar el nuevo renglón 1 (R_1') por -6 y al sumarle este múltiplo al renglón 2, o bien

x_1	x_2	S_1	S_2		
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	60	$\boldsymbol{R}_1'$
-5	0	-3	1	-100	$\boldsymbol{R}_2' = \boldsymbol{R}_2 - 6\boldsymbol{R}_1'$

Como se pusieron en 0 x_1 y S_1, los valores de x_2 y S_2 pueden leerse directamente como $x_2 = 60$ y $S_2 = -100$. Si el lector consulta la tabla 7.1, verá que esta solución es la misma que la 2.

x_1	x_2	S_1	S_2	
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	60
-5	0	-3	1	-100

Si S_1 y S_2 se hacen iguales a 0, x_1 sustituirá a S_2 como la variable básica. Para la nueva base nos gustaría que los coeficientes en x_1 y x_2 presentaran la forma

x_1	x_2	S_1	S_2	
⓪	1			
①	0			

Comenzando con la última solución básica, los coeficientes en x_2 se encuentran en la forma deseada, y se debe cambiar los de x_1 de $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El ① se crea multiplicando R_2' por $-\frac{1}{5}$, lo cual nos da

x_1	x_2	S_1	S_2		
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	60	R_1'
1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	20	$R_2'' = -\frac{1}{5}R_2'$

El ⓪ se crea al multiplicar R_1' por $-\frac{3}{2}$ y al sumar este múltiplo a R_1', o sea

x_1	x_2	S_1	S_2		
0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	30	$R_1'' = R_1' - \frac{3}{2}R_2''$
1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	20	R_2''

Una vez que S_1 y S_2 son iguales a 0, los valores de x_1 y x_2 se leen directamente como $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$, lo cual corresponde a la solución 1 de la tabla 7.1.

Incorporación de la función objetivo

Al resolver por medio del método símplex, la función objetivo y las restricciones se combinan para constituir un sistema de ecuaciones. La función objetivo es una de las ecuaciones, y z se convierte en una variable más del sistema. Al rearreglar las variables en la función objetivo para que todas se encuentren en el miembro izquierdo de la ecuación, el problema se representa con un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z - 5x_1 - 6x_2 - 0S_1 - 0S_2 &= 0 && \textbf{(0)} \\ 3x_1 + 2x_2 + S_1 &= 120 && \textbf{(1)} \\ 4x_1 + 6x_2 + S_2 &= 260 && \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Nótese que las funciones objetivo se denotan como ecuaciones (0).

La finalidad es resolver este sistema (3 × 5) de ecuaciones con objeto de maximizar el valor de z. Nos interesa mucho conocer el valor de z y queremos conocer su valor para una solución cualquiera, por lo cual z será siempre una variable básica. Por lo regular las designaciones *variable básica* y *variable no básica* se reservan para otras variables en el problema.

TABLA 7.2

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de renglón
	1	−5	−6	0	0	0	(0)
S_1	0	3	2	1	0	120	(1)
S_2	0	4	6	0	1	260	(2)

Las operaciones del método símplex se efectúan en un formato tabular. La ***tabla inicial*** del problema aparece en la tabla 7.2. Adviértase que hay un renglón para cada ecuación y que la tabla contiene los coeficientes de cada variable en ellas. La ***columna b_i*** contiene las restricciones del miembro derecho de las ecuaciones, b_i es la constante del miembro derecho para la ecuación i o renglón i.

En un problema de maximización que tenga todas las restricciones de tipo $\leq$, la solución inicial tendrá un conjunto de variables básicas integradas por las variables de holgura del problema. Al hacer que x_1 y x_2 sean iguales a 0 en el problema, la solución inicial es $S_1 = 120$, $S_2 = 260$ y $z = 0$. Las variables básicas y los renglones en que sus valores se anotan se indican en la primera columna de la tabla.

Una vez conseguida una solución intermedia, el método símplex compara las variables no básicas con el conjunto de variables básicas. Con ello se pretende determinar si hay que sustituir una variable básica por una no básica. ***Una variable no básica reemplazará a una variable básica sólo si 1) al parecer la función objetivo puede ser mejorada y 2) es factible la nueva solución.***

En una tabla símplex, los coeficientes de renglón (0) de todas las variables (excluida z) representan el cambio en el valor actual de la función objetivo si la variable (en esa columna) aumenta de valor en una unidad. *El signo de los coeficientes de renglón (0) es el contrario de la dirección real del cambio. Es decir, un coeficiente negativo indica un* ***incremento*** *del valor de z; un coeficiente positivo denota un* ***decremento.***

REGLA 1: COMPROBACIÓN DE OPTIMIZACIÓN EN UN PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN
En un problema de maximización, se habrá encontrado la solución óptima si todos los coeficientes en el renglón (0) de las variables son mayores o iguales a 0. Si cualesquiera coeficientes en el renglón (0) son negativos para las variables no básicas, puede obtenerse una mejor solución asignándoles una cantidad positiva.

Puesto que los coeficientes en el renglón (0) para x_1 y x_2 son −5 y −6, respectivamente, la solución óptima no se ha encontrado en la tabla 7.2.

REGLA 2: NUEVA VARIABLE BÁSICA EN EL PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN
En un problema de maximización la variable no básica que sustituirá una variable básica es la que tiene el coeficiente en el renglón (0) ***más negativa***. Los "empates" pueden deshacerse de modo arbitrario.

Al seleccionar una variable no básica para que se convierta en variable básica, el método símplex selecciona la que produzca el mejoramiento *marginal* más grande (por unidad) en z. Dado que un mejoramiento de 6 unidades es mejor que uno de 5 unidades, el método símplex escogerá x_2 para que sea una variable básica en la siguiente solución. *En la tabla símplex se dará el nombre de* ***columna clave*** *a la que representa la nueva variable básica.*

Si z aumenta en 6 unidades por *cada* unidad de x_2, nos gustaría que x_2 fuera lo más grande posible. El método símplex permitirá que aumente de valor hasta que una de las variables básicas actuales alcance un valor de 0 (convirtiéndose así en una variable no básica). Si las ecuaciones (1) y (2) se reescriben en términos de las variables no básicas, podemos observar los efectos que los cambios de x_2 tendrán en los valores de las actuales variables básicas:

$$S_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \qquad (1a)$$

$$S_2 = 260 - 4x_1 - 6x_2 \qquad (2a)$$

La ecuación (1a) indica que S_1 actualmente es 120, pero que su valor disminuirá en 2 unidades por cada unidad que aumente x_2. Si se deja que x_2 alcance un valor de 120/2, o sea 60 unidades, se llevará S_1 a un valor de 0. La ecuación (2a) indica que S_2 es actualmente igual a 260, pero que su valor disminuirá en 6 unidades por cada unidad que aumente x_2. Se llevará S_2 a un valor de 0 si se deja que x_2 alcance un valor de 260/6, es decir $43\frac{1}{3}$ unidades. Se pregunta lo siguiente: ¿cuál variable básica será llevada primero a un valor de 0 (se convertirá en no básica) al permitir que x_2 aumente de valor? La respuesta es S_2, cuando $x_2 = 43\frac{1}{3}$. Si se dejara que x_2 alcanzase un valor de 60, la sustitución en la ecuación (2a) daría por resultado

$$\begin{aligned} S_2 &= 260 - 6(60) \\ &= -100 \end{aligned}$$

Puesto que S_2 sería negativa, esta solución no es factible. La conclusión es que x_2 reemplazará a S_2 como variable básica en la siguiente solución.

Al utilizar la estructura de tabla, se toma la decisión de qué variable básica sustituir centrándose en la columna clave y en la columna b_i. La tabla parcial de la tabla 7.3 muestra una columna que está sobrepuesta para representar la *columna* clave de una solución intermedia. El elemento de la columna clave a_{ik} representa la constante que aparece en el renglón i de la columna clave (k). De manera análoga, los valores b_i representan las contantes del miembro derecho del renglón i.

TABLA 7.3

	↓ Columna clave			Número de renglón
...	x_k	...	b_i	
...	a_{0k}	...	b_0	(0)
...	a_{1k}	...	b_1	(1)
...	...	...	...	...
...	a_{mk}	...	b_m	(m)

TABLA 7.4

Variables básicas	z	x_1	x_2 ↓ Columna clave	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	b_i/a_{ik}
	1	−5	−6	0	0	0	(0)	
S_1	0	3	(2)	1	0	(120)	(1)	120/2 = 60
(Variable de salida) S_2	0	4	(6)	0	1	(260)	(2)	**260/6 = $43\frac{1}{3}$***

Para cualquier columna, los valores a_{ij} ($i = 1$ a m) reciben el nombre de tasas marginales de sustitución. Estos valores indican los cambios requeridos en cada una de las variables básicas actuales si la variable (en la columna clave) aumenta en una unidad. Como en el caso de los coeficientes en el renglón (0), el signo de estas tasas marginales de sustitución es el contrario de la dirección real del cambio. Un valor positivo a_{ij} denota una disminución de la i-ésima variable básica; y un valor negativo a_{ij} indica un aumento de esa variable.

Si nos concentramos en la columna clave de la tabla 7.4, el coeficiente en el renglón (0) señala que el valor actual de z *aumentará* en 6 unidades si el valor de x_2 crece una unidad. Los valores a_{ik} de los renglones (1) y (2) son 2 y 4, respectivamente. Éstos indican que, si el valor de x_2 aumenta una unidad (1), el valor de S_1 *decrecerá* 2 unidades (respecto a su valor actual de 120) y (2) el valor de S_2 *disminuirá* 6 unidades (en relación con su valor presente de 260).

REGLA 3: VARIABLE BÁSICA DE SALIDA
La variable básica que se sustituirá se obtiene determinando el renglón i asociado a

$$\text{mín}\ \frac{b_i}{a_{ik}} \qquad i = 1, \ldots, m$$

donde $a_{ik} > 0$. Además de identificar la variable básica de salida, el valor mínimo b_i/a_{ik} es el número máximo de unidades que pueden introducirse en la variable básica de entrada.

La regla 3 establece que la razón b_i/a_{ik} debería determinarse para los renglones (1) a (m), *donde* $a_{ik} > 0$. Tan sólo se consideran los valores positivos a_{ik} por estar asociados a las variables básicas cuyo valor *disminuye* a medida que se introducen más unidades de la variable de entrada. Hay que identificar la razón mínima y señalar el renglón correspondiente i. La variable básica de salida es aquella cuyo valor se obtiene ahora de este renglón. En la tabla 7.4 las razones b_i/a_{ik} se calculan para los renglones (1) y (2). La razón mínima es $43\frac{1}{3}$, relacionada con el renglón (2). El valor de S_2 se obtiene ahora del renglón (2), por lo cual S_2 será la variable básica de salida.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Por qué, en su opinión, la regla 3 recomienda identificar la razón *mínima* b_i/a_{ik}? En la tabla 7.4 seleccione la variable de salida al identificar la razón máxima y vea lo que sucede.

TABLA 7.5

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	
	1	−1	0	0	1	260	(0)	$R_0' = R_0 + 6R_2'$
S_1	0	$\frac{10}{6}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	(1)	$R_1' = R_1 - 2R_2'$
x_2	0	$\frac{4}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$43\frac{1}{3}$	(2)	$R_2' = \frac{1}{6}R_2$

En la siguiente solución se querrá obtener el valor de la nueva variable básica x_2 del renglón (2). Así pues, se necesita aplicar los métodos de eliminación gaussiana para transformar la columna de coeficientes bajo x_2 de $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se crea el ① multiplicando el renglón (2) por $\frac{1}{6}$. Se crean los ⓪ al multiplicar el *nuevo* renglón (2) por $+6$ y -2 y al sumar esos múltiplos a los renglones (0) y (1), respectivamente. La siguiente solución aparece en la tabla 7.5. Nótese en la tabla 7.5 que una notación abreviada a la derecha de cada renglón indica cómo se calcularon sus elementos. Con la notación $\boldsymbol{R}_j$ se representa el renglón j.

Nótese también, en la tabla 7.5, que x_2 ha sustituido a S_2 en la columna de variables básicas. Pueden obtenerse de la columna b_i los valores de z, S_1 y x_2 como $z = 260$, $S_1 = 33\frac{1}{3}$, y $x_2 = 43\frac{1}{3}$. Puesto que x_1 y S_2 son variables no básicas, sus valores son cero en esta solución.

EJERCICIO
Sustituya otra vez los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = 43\frac{1}{3}$ en la formulación original y verifique *a*) que la primera restricción tiene una holgura de $33\frac{1}{3}$ de unidades, *b*) que la segunda restricción se satisface como una igualdad ($S_2 = 0$) y *c*) que el valor de z es igual a 260.

Con esta nueva solución, lo primero que se hace es comprobar si es óptima. Al aplicar la regla 1, se llega a la conclusión de que la solución no es óptima por el coeficiente -1 para x_1 del renglón (0). Como x_1 tiene el único coeficiente negativo del renglón (0), se convertirá en la nueva variable básica. Para determinar la variable básica de salida, nos centraremos en los elementos de la columna x_1. Como se muestra en la tabla 7.6, la razón mínima b_i/a_{ik} es 20, y esta razón mínima se asocia al renglón (1). El valor de S_1 se obtiene ahora del renglón (1), por lo cual S_1 es identificada como la variable de salida.

TABLA 7.6

Variables básicas	z	↓ Columna clave x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	b_i/a_{ik}
	1	−1	0	0	1	260	(0)	
S_1	0	$\frac{10}{6}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	(1)	$33\frac{1}{3} \div \frac{10}{6} = 20$*
x_2	0	$\frac{4}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$43\frac{1}{3}$	(2)	$43\frac{1}{3} \div \frac{4}{6} = 65$

TABLA 7.7

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	
	1	0	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{24}{30}$	280	(0)	$R_0'' = R_0' + R_1''$
x_1	0	1	0	$\frac{6}{10}$	$-\frac{6}{30}$	20	(1)	$R_1'' = \frac{6}{10}R_1'$
x_2	0	0	1	$-\frac{24}{60}$	$\frac{3}{10}$	30	(2)	$R_2'' = R_2' - \frac{4}{6}R_1''$

En la siguiente solución se querrá obtener del renglón (1) el valor de la nueva variable básica x_1. Por consiguiente, la columna de coeficiente bajo x_1 deberá transformarse de $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{10}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

El (1) se crea al multiplicar el renglón (1) por $\frac{6}{10}$. Los (0) se generan al multiplicar el nuevo renglón (1) por $+1$ y $-\frac{4}{6}$ y sumando estos múltiplos a los renglones (0) y (2), respectivamente. (Véanse las ecuaciones a la derecha de la tabla 7.7.) La nueva solución aparece en la tabla 7.7.

Nótese en esa tabla que x_1 ha sustituido a S_1 en la columna de las variables básicas. Cuando S_1 y S_2 son no básicas, los valores de z, x_1 y x_2 se obtienen de la columna b_i cuando $z = 280$, $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$. El siguiente paso consiste en verificar su optimización. Al aplicar la regla 1, se llega a la conclusión de que esta solución es óptima porque *todos los coeficientes de renglón (0) son mayores o iguales a 0*. Esta respuesta concuerda con la que se consiguió al resolver gráficamente en la sección 6.3. La función objetivo se maximiza en un valor de 280 cuando $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$.

Resumen del método símplex

A continuación se hará una generalización del ***método símplex para los problemas cuyas restricciones son todas de tipo*** $\leq$. En primer lugar, se suman todas las variables de holgura a cada restricción y se ponen en una tabla símplex los coeficientes de las variables y las constantes del miembro derecho. A continuación:

1 Se identifica la solución inicial declarando como variable básica cada una de las variables de holgura. Todas las demás son no básicas en la solución inicial.

2 Se determina si la solución actual es óptima al aplicar la regla 1 (¿**Son todos los coeficientes en el renglón (0)** ≥ 0?) Si es óptima se interrumpe el proceso en esta etapa. Si no lo es, se pasa al paso 3.

3 Se determina la variable no básica que debería convertirse en variable básica en la siguiente solución al aplicar la regla 2 (**el coeficiente en el renglón (0) más negativo**).

4 Se identifica la variable básica que debería ser reemplazada en la siguiente solución y para ello aplique la regla 3 (**la razón mín** b_i/a_{ik} **donde** $a_{ik} > 0$).

5 Se aplican las operaciones de eliminación gaussiana para generar la nueva solución (o nueva tabla). Vaya al paso 2.

EJEMPLO 1

A continuación se resuelve el siguiente problema de programación lineal por medio del método símplex.

$$\begin{aligned} \text{Maximice } z &= 2x_1 + 12x_2 + 8x_3 \\ \text{sujeta a } 2x_1 &+ 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ x_1 &- 2x_2 + 5x_3 \leq 80 \\ 10x_1 &+ 5x_2 + 4x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se reescribe el problema en la forma estándar, introduciendo la variable de holgura y se tiene así:

$$\begin{aligned} \text{Maximice } z &= 2x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\ \text{sujeta a } 2x_1 &+ 2x_2 + x_3 + S_1 = 100 \\ x_1 &- 2x_2 + 5x_3 + S_2 = 80 \\ 10x_1 &+ 5x_2 + 4x_3 + S_3 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

La función objetivo habrá de formularse pasando todas las variables al miembro izquierdo de la ecuación. En la tabla 7.8 se muestra la tabla símplex inicial.

- **Paso 1** En la solución inicial, x_1, x_2 y x_3 son variables no básicas que poseen los valores de 0. Las variables básicas son variables de holgura con $S_1 = 100$, $S_2 = 80$, $S_3 = 300$ y $z = 0$.
- **Paso 2** Todos los coeficientes de renglón (0) *no* son mayores ni iguales a 0, por lo cual la solución inicial no es óptima.
- **Paso 3** El coeficiente más negativo del renglón (0) es -12, por lo cual se asocia a x_2. Por tanto, x_2 se convertirá en una variable básica en la siguiente solución y su columna de coeficientes se transformará en la columna clave.
- **Paso 4** Al calcular las razones b_i/a_{ik}, la razón mínima es 50 y corresponde al renglón (1). En consecuencia, S_1 se convertirá en una variable no básica en la siguiente solución Nótese que no se calculó razón alguna para el renglón (2) porque a_{ik} era negativa.
- **Paso 5** La nueva solución se logra al transformar los coeficientes de la columna x_2 de $\begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

TABLA 7.8

Variables básicas	z	x_1	x_2 ↓ Columna clave	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i	Número de renglón	b_i/a_{ik}
	1	−2	−12	−8	0	0	0	0	(0)	
S_1	0	2	2	1	1	0	0	100	(1)	**100/2 = 50***
S_2	0	1	−2	5	0	1	0	80	(2)	
S_3	0	10	5	4	0	0	1	300	(3)	300/5 = 60

TABLA 7.9

Variables básicas	z	x_1	x_2	x_3 ↓ Columna clave	S_1	S_2	S_3	b_i	Número de renglón		b_i/a_{ik}
	1	10	0	−2	6	0	0	600	(0)	$R_0' = R_0 + 12R_1'$	
x_2	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	50	(1)	$R_1' = \frac{1}{2}R_1$	$50 \div \frac{1}{2} = 100$
S_2	0	3	0	6	1	1	0	180	(2)	$R_2' = R_2 + 2R_1'$	**$180 \div 6 = 30$***
S_3	0	5	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	50	(3)	$R_3' = R_3 - 5R_1'$	$50 \div \frac{3}{2} = 33\frac{1}{3}$

La tabla 7.9 indica la siguiente solución. La notación abreviada a la derecha de cada renglón denota cómo se calcularon sus elementos. En esta solución las variables básicas y sus valores son $x_2 = 50$, $S_2 = 180$, $S_3 = 50$ y $z = 600$. Y para continuar con el método símplex, volveremos ahora al paso 2.

- □ **Paso 2** Puesto que el coeficiente en el renglón (0) para x_3 es negativo, esta solución no es óptima.
- □ **Paso 3** La variable x_3 se convertirá en una variable básica en la siguiente solución ya que tiene el único coeficiente negativo en el renglón (0). La columna x_3 se convierte en la nueva columna clave.
- □ **Paso 4** Al calcular las razones b_i/a_{ik}, la razón mínima es 30, y corresponde al renglón (2). Por tanto, S_2 se transformará en una variable no básica en la siguiente solución.
- □ **Paso 5** La nueva solución se consigue al transformar los coeficientes de la columna x_3 de $\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 6 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

TABLA 7.10

Variables básicas	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i	Número de renglón	
	1	11	0	0	$\frac{38}{6}$	$\frac{2}{6}$	0	660	(0)	$R_0'' = R_0' + 2R_2''$
x_2	0	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	35	(1)	$R_1'' = R_1' - \frac{1}{2}R_2''$
x_3	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	30	(2)	$R_2'' = \frac{1}{6}R_2'$
S_3	0	$\frac{17}{4}$	0	0	$-\frac{11}{1}$	$-\frac{1}{1}$	1	5	(3)	$R_3'' = R_3' - \frac{3}{2}R_2''$

La tabla 7.10 indica la siguiente solución. Las variables básicas y sus valores en la solución son $x_2 = 35$, $x_3 = 30$ y $S_3 = 5$. El valor de z es 660. Retornamos ahora al paso 2.

- □ **Paso 2** Puesto que todos los coeficientes en el renglón (0) son mayores o iguales a 0 en la tabla 7.10, la solución actual es la óptima.

La función objetivo se maximiza en un valor de 660 cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 35$, $x_3 = 30$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ y $S_3 = 5$.

Problemas de maximización con restricciones mixtas

Se ha seleccionado la estructura del problema para ejemplificar el método símplex: un problema de maximización con todas las restricciones de tipo ($\leq$).

En un problema de maximización que tenga una mezcla de restricciones de tipo ($\leq$, $\geq$ y $=$), el método símplex propiamente dicho no cambia. El único cambio consiste en transformar las restricciones en la forma estándar de las ecuaciones, con las variables complementarias correspondientes. Esto se explicó en la sección 6.4 en la página 256. *Para cada restricción ($\geq$) se sustrae una variable de demasía y al lado izquierdo de ellas se le suma una variable artificial. Para cada restricción ($=$), se suma una variable artificial al miembro izquierdo.* Se agrega una columna más a la tabla símplex por cada variable complementaria. Y además a las variables artificiales y de demasía hay que asignarles los coeficientes apropiados de la función objetivo (valores c_j). Como se dijo en el capítulo 6, a las variables de holgura suele asignárseles un coeficiente de 0 en la función objetivo: tratándose de problemas de maximización, a las variables artificiales se les asigna un alto coeficiente negativo, que puede denotarse por $-M$, donde se supone que $|M|$ es mucho mayor que cualquier otro coeficiente.

BASE INICIAL EN EL MÉTODO SÍMPLEX
En cualquier problema de programación lineal, el conjunto inicial de las variables básicas estará constituido por todas las variables de holgura y todas las variables artificiales que aparezcan en el problema.

Problemas de minimización

El método símplex cambia ligeramente cuando se resuelven los problemas de maximización. Además de asignar a las variables artificiales coeficientes de función objetivo de $+M$, la única diferencia se relaciona con la interpretación de los coeficientes en el renglón (0). Las dos reglas siguientes son modificaciones de las reglas 1 y 2. Éstas se aplican a los problemas de maximización.

REGLA 1A: COMPROBACIÓN DE OPTIMIZACIÓN EN UN PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN
En un problema de minimización, se habrá encontrado la solución óptima si todos los coeficientes en el renglón (0) de las variables son menores o igual a 0. Si los coeficientes de un renglón cualquiera (0) son positivos para las variables no básicas, puede obtenerse una mejor solución si se les asigna una cantidad positiva.

REGLA 2A: NUEVA VARIABLE BÁSICA EN UN PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN
En un problema de minimización, la variable no básica que reemplazará a una variable básica actual es la única que tiene el más grande **coeficiente positivo** de renglón (0). Los nexos pueden suprimirse de modo arbitrario.

EJEMPLO 2

Resuelva el siguiente problema de programación lineal por medio del método símplex.

$$\begin{aligned} \text{Minimice } & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeta a } & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Este problema se reescribe primero con las restricciones expresadas en forma de ecuación, así:

$$\begin{aligned} \text{Minimice } & z = 5x_1 + 6x_2 + 0E_1 + 0E_2 + MA_1 + MA_2 \\ \text{sujeta a } & x_1 + x_2 + E_1 + A_1 = 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 - E_2 + A_2 = 24 \\ & x_1, x_2, E_1, E_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si todas las variables en la función objetivo se pasan al miembro izquierdo de la ecuación, la tabla inicial para este problema aparece en la tabla 7.11. Nótese que las variables artificiales son las variables básicas en esta solución inicial. Sin embargo, *en todo problema que contenga variables artificiales los coeficientes en el renglón (0) para las variables artificiales no serán 0 en la tabla inicial.* En consecuencia, no se tienen las columnas deseadas de una matriz identidad en las columnas de las variables básicas. Estos $-M$ coeficientes deben ser convertidos en 0 efectuando las operaciones de renglón si el valor de z debe obtenerse del renglón (0). En la tabla 7.11 puede hacerse esto multiplicando los renglones (1) y (2) por $+M$ y sumando esos múltiplos al renglón (0). La tabla 7.12 contiene la tabla resultante. En esta solución inicial las variables no básicas son x_1, x_2, E_1 y E_2. Las variables básicas son las dos variables artificiales con $A_1 = 10$, $A_2 = 24$ y $z = 34M$.

Al aplicar la regla 1A, se llega a la conclusión de que esta solución no es óptima. Los dos coeficientes en el renglón (0) para x_1 y x_2 son positivos. (Recuérdese que M es un número muy grande.) Al aplicar la regla 2A, x_2 se identifica como la nueva variable básica. La columna x_2 se convierte en la nueva columna clave. El valor mínimo b_i/a_{ik} es igual a 6 y se relaciona con el renglón (2). Por tanto, A_2 será la variable básica de salida. La tabla 7.13 indica la siguiente solución. En la tabla 7.13, las variables no básicas son x_1, E_1, E_2 y A_2. En esta solución $A_1 = 4$, $x_2 = 6$ y $z = 36 + 4M$.

TABLA 7.11

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	b_i	Número de renglón
	1	-5	-6	0	0	$-M$	$-M$	0	(0)
A_1	0	1	1	-1	0	1	0	10	(1)
A_2	0	2	4	0	-1	0	1	24	(2)

Deben ser transformadas en cero

TABLA 7.12

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	b_i	Número de renglón		b_i/a_{ik}
	1	$-5 + 3M$	$-6 + 5M$	$-M$	$-M$	0	0	$34M$	(0)	$R_0' = R_0 + MR_1 + MR_2$	
A_1	0	1	1	-1	0	1	0	10	(1)	R_1	$10/1 = 10$
A_2	0	2	4	0	-1	0	1	24	(2)	R_2	$24/4 = 6^*$

Son transformadas en cero

↓ Columna clave

TABLA 7.13

Variables básicas	z	x_1 ← Columna clave	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	b_i	Número de renglón		b_i/a_{ik}
	1	$-2+\frac{M}{2}$	0	$-M$	$-\frac{3}{2}+\frac{M}{4}$	0	$\frac{3}{2}-\frac{5M}{4}$	$36+4M$	(0)	$R_0''=R_0'+(6-5M)R_2'$	
A_1	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	4	(1)	$R_1'=R_1-R_2'$	$4/\frac{1}{2}=8^*$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	6	(2)	$R_2'=\frac{1}{4}R_2$	$6/\frac{1}{2}=12$

Al aplicar la regla 1A, se ve que esta solución no es óptima. Ambos coeficientes en el renglón (0) para x_1 y E_2 son positivos. Al aplicar la regla 2A, x_1 se identifica como la nueva variable básica. La columna x_1 se convierte en la nueva columna clave. Las razones b_a/a_{ik} son $4 \div \frac{1}{2} = 8$ y $6 \div \frac{1}{2} = 12$ para los renglones (1) y (2). Puesto que la razón mínima se relaciona con el renglón (a), A_1 se identificó como la variable de salida. En la tabla 7.14 se indica la nueva solución. La solución tiene allí $x_1 = 8$, $x_2 = 2$ y $z = 52$.

Al aplicar la regla 1A, se llega a la conclusión de que esta solución es óptima. Todos los coeficientes en el renglón 0 son menores o iguales a 0 para las variables básicas y no básicas. Por consiguiente, z se minimiza en un valor de 52 cuando $x_1 = 8$ y $x_2 = 2$.

Ejercicios de seguimiento de la sección 7.1

1 En el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximice } z &= 14x_1 + 10x_2 \\ \text{sujeta a } 5x_1 &+ 4x_2 \le 48 \\ 2x_1 &+ 5x_2 \le 26 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

a) Transforme las restricciones $\le$ en ecuaciones.
b) Enumere todas las soluciones para las cuales dos variables hayan sido puestas en 0.
c) A partir de la parte *b* identifique las soluciones factibles básicas.
d) Grafique el conjunto original de restricciones y confirme que las soluciones factibles básicas son los puntos en la esquina dentro del área de soluciones factibles.
e) ¿Cuál es la solución óptima?

TABLA 7.14

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	b_i	Número de renglón	
	1	0	0	-4	$-\frac{1}{2}$	$4-M$	$\frac{1}{2}-M$	52	(0)	$R_0''' = R_0'' + \left(2-\frac{M}{2}\right)R_1''$
x_1	0	1	0	-2	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	8	(1)	$R_1'' = 2R_1'$
x_2	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	2	(2)	$R_2'' = R_2' - \frac{1}{2}R_1''$

2 En el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeta a } & 6x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ & 12x_1 + 8x_2 \leq 96 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Transforme las restricciones $\leq$ en ecuaciones.
b) Enumere todas las soluciones para las cuales dos variables hayan sido puestas en 0.
c) A partir de la parte *b* identifique las soluciones factibles básicas.
d) Grafique el conjunto original de restricciones y confirme que las soluciones factibles básicas son los puntos en la esquina dentro del área de soluciones factibles.
e) ¿Cuál es la solución óptima?

Resuelva por el método símplex los ejercicios 3-8.

3
$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeta a } & x_1 + x_2 \leq 50 \\ & 6x_1 \leq 240 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 4x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeta a } & 4x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ & 24x_1 + 16x_2 \leq 96 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 10x_1 + 12x_2 \\ \text{sujeta a } & x_1 + x_2 \leq 150 \\ & 3x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 \\ \text{sujeta a } & x_1 + 2.5x_2 \leq 1\,200 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2\,600 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

7
$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 10x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeta a } & 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 400 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 200 \\ & x_3 \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

8
$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{sujeta a } & 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 80 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

9 *a*) Resuelva el siguiente problema de programación lineal por medio del método símplex.

$$\begin{aligned} \text{Minimice } & z = 3x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeta a } & 4x_1 + x_2 \geq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b)Verifique la solución de la parte *a* mediante la solución gráfica.

10 *a*) Resuelva el siguiente problema de programación lineal por medio del método símplex.

$$\begin{aligned} \text{Minimice } & z = 6x_1 + 10x_2 \\ \text{sujeta a } & x_1 \leq 12 \\ & 2x_2 = 36 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 54 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Compruebe la solución de la parte a con el método gráfico.

7.2 FENÓMENOS ESPECIALES

En la sección 6.3 se expusieron ciertos fenómenos que pueden ocurrir cuando se resuelven problemas de programación lineal. En concreto, se explicaron los fenómenos de ***soluciones óptimas alternativas, solución no factible*** y ***soluciones no acotadas***. En la presente sección se describe cómo se presentan esos fenómenos al resolver un problema con el método símplex. Además, en esta sección se expondrá el uso de una tabla condensada para realizar el método símplex aritmético.

Soluciones óptimas alternativas

En la sección 6.3 se describieron las circunstancias en que un problema de programación lineal puede tener más de una solución óptima. Esta situación, denominada *soluciones óptimas alternativas*, se presenta cuando la función objetivo es paralela a una restricción que impone la dirección de la optimización. En los problemas con dos variables, nos damos cuenta de la existencia de este tipo de solución con el *método de punto en la esquina* cuando se presenta un "empate" en el punto en la esquina óptimo.

Si se aplica el método símplex, las soluciones óptimas alternativas están indicadas cuando:

1 Se ha identificado una solución óptima y
2 El coeficiente en el renglón (0) es cero para una variable no básica.

La primera condición confirma que no existe una solución mejor que la actual. La presencia de un 0 en el renglón (0) para una variable no básica indica que ésta puede convertirse en una variable básica (puede llegar a ser positiva) y el valor presente de una función objetivo (que, según se sabe es óptimo) no cambiará.

EJEMPLO 3

Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeta a } & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

TABLA 7.15

Variables básicas	z	x_1 ↓ Columna clave	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	b_i/a_{ik}
	1	−6	−4	0	0	0	(0)	
S_1	0	1	1	1	0	5	(1)	5/1 = 5
S_2	0	3	2	0	1	12	(2)	12/3 = 4*

La tabla 7.15 presenta la solución inicial símplex donde $S_1 = 5$ y $S_2 = 12$ son las variables básicas; x_1 y x_2 son variables no básicas. De acuerdo con la regla 1 no se advierte que exista una mejor solución. Al aplicar la regla 2, x_1 se escoge como la nueva variable básica y la columna x_1 se transforma en la columna clave. Las razones b_i/a_{ik} se calculan identificando S_2 como la variable de salida. Los elementos de la columna x_1 se transforman de $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ empleando las operaciones de renglón, y el resultado es la tabla símplex que aparece en la tabla 7.16. En esta nueva solución, x_1 tiene sustituida S_2 en la base; las variables básicas son $S_1 = 1$ y $x_1 = 4$, resultando de ello un valor de $z = 4$ para la función objetivo.

Al aplicar la regla 1, se observa que se trata de la solución óptima puesto que todos los coeficientes en el renglón (0) son mayores o iguales a 0. Sin embargo, para la variable no básica x_2, los coeficientes en el renglón (0) son iguales a 0. Ello significa que x_2 podrá adoptar valores positivos (convertirse en una variable básica) y que no cambiará el valor actual (óptimo) de z.

> Cuando el método símplex indica la existencia de soluciones óptimas alternativas, las otras opciones de puntos en la esquina óptimos pueden generarse si la variable no básica con el coeficiente cero se tratan como si fueran una nueva variable básica.

Si en la tabla 7.16 se trata la columna x_2 como la columna clave asociada a la entrada de la nueva variable básica x_2, las razones b_i/a_{ik} se calculan como de costumbre y S_1 se identifica como la variable de salida. En la tabla 7.17 se da la nueva solución. La comprobación de optimización (regla 1) revela que la solución es óptima con $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $z = 24$. Y, en el caso de la variable no básica S_1, el coeficiente de 0 en el renglón (0) indica que existe una solución óptima alternativa en la cual S_1 sería la variable básica. Si la columna S_1 se tratara como la columna clave y se repitiera hasta llegar a una nueva solución, se retornaría a la primera solución óptima encontrada en la tabla 7.16.

TABLA 7.16

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	Indicación de solución óptima alternativa	b_i/a_{ik}
	1	0	(0)	0	2	24	(0)	$R_0' = R_0 + 6R_2'$	
S_1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1	(1)	$R_1' = R_1 - R_2'$	$1/\frac{1}{3} = 3^*$
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4	(2)	$R_2' = \frac{1}{3}R_2$	$4/\frac{2}{3} = 6$

TABLA 7.17

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	
	1	0	0	0	2	24	(0)	$R_0'' = R_0'$
x_2	0	0	1	3	−1	3	(1)	$R_1'' = 3R_1'$
x_1	0	1	0	−2	1	2	(2)	$R_2'' = R_2' - \frac{2}{3}R_1''$

EJERCICIO
Verifique las dos soluciones óptimas alternativas de punto en la esquina que se encontraron en este ejemplo mediante la solución gráfica del problema.

Un problema puede tener múltiples soluciones óptimas alternativas (punto en la esquina). Esta situación puede darse 1) en el caso de que más de una variable no básica tenga un coeficiente 0 en el renglón (0) de una tabla óptima y 2) si durante la producción de soluciones óptimas alternativas sucesivas en que se utiliza el método símplex, aparecen coeficientes 0 en el renglón (0) de las variables no básicas que antes no habían aparecido con carácter óptimo.

Ausencia de solución factible

En la sección 6.3 se dijo que un problema carece de *solución factible* si las variables no tienen valores que cumplan con todas las restricciones. Si bien esa condición puede descubrirse por simples observaciones en los problemas pequeños, es mucho más difícil identificarla en los problemas a gran escala.

La condición de ausencia de solución factible se manifiesta en el método símplex cuando una variable artificial aparece con carácter óptimo en un nivel positivo (valor). En el siguiente ejemplo se ilustra esta condición.

EJEMPLO 4

Resolvamos el siguiente problema de programación lineal que, según se descubre por simple observación, carece de solución factible.

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 10x_1 + 20x_2 \\ \text{sujeta a} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \geq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Las tablas 7.18 a 7.20 presentan las interacciones del método símplex en la solución de este problema. En la tabla 7.20, todos los coeficientes en el renglón (0) son mayores o iguales a 0, lo cual revela la presencia de una solución óptima. Sin embargo, una de las variables básicas es A_2 y posee un valor de 15; es decir, la solución óptima es $x_2 = 5$, $A_2 = 15$ y $z = 15M + 100$. Las variables artificiales carecen de significado en un problema de programación lineal, y la asignación de $A_2 = 15$ no indica que el problema tenga una solución factible.

TABLA 7.18

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	E_2	A_2	b_i	Número de renglón	
	1	−10	−20	0	0	(M)	0	(0)	R_0
S_1	0	1	1	1	0	0	5	(1)	R_1
A_2	0	1	1	0	−1	1	20	(2)	R_2

Hay que igualar a cero las necesidades

TABLA 7.19

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	E_2	A_2	b_i	Número de renglón		b_i/a_{ik}
	1	$-10-M$	$-20-M$	0	M	0	$-20M$	(0)	$R_0' = R_0 - MR_2$	
	0	1	1	1	0	0	5	(1)	R_1	**5/1 = 5***
	0	1	1	0	−1	1	20	(2)	R_2	20/1 = 20

Columna clave

TABLA 7.20

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	E_2	A_2	b_i	Número de renglón	
	1	10	0	$M+20$	M	0	$-15M+100$	(0)	$R_0'' = R_0' + (M+20)R_1'$
x_2	0	1	1	1	0	0	5	(1)	$R_1' = R_1$
A_2	0	0	0	−1	−1	1	15	(2)	$R_2' = R_2 - R_1'$

Soluciones no acotadas

Las soluciones no acotadas existen cuando 1) hay un *espacio de solución no acotada* y 2) el mejoramiento de la función objetivo ocurre con movimiento en dirección de la parte no acotada del espacio de solución.

Si en cualquier iteración del método símplex todos los valores a_{ik} son 0 o negativos para que la variable seleccionada se convierta en la nueva variable básica, el problema de programación lineal tendrá una solución no acotada. ¿Recuerda el lector la explicación relativa a los valores a_{ik} en la sección 7.1? Esos valores indican los cambios marginales en los valores de las actuales variables básicas para cada unidad introducida en la nueva variable básica. Los valores positivos a_{ik} denotan *disminuciones marginales*, en los valores de las correspondientes variables básicas, los valores negativos a_{ik} denotan incrementos marginales y los valores a_{ik} de 0 indican la *ausencia de cambio*. Una vez identificada una nueva variable básica (regla 2), la variable básica de salida se encuentra al calcular el valor mínimo b_i/a_{ik}, donde $a_{ik} > 0$ (regla 3). Cuando se aplica la regla 3, la atención se centra en las variables básicas cuyo valor será disminuido ($a_{ik} > 0$) al introducir la nueva variable básica. Se quiere determinar el número máximo de unidades que se introducirán antes que se haga que la variable básica actual alcance un valor de 0. Si todos los valores a_{ik} son 0 o negativos, ninguna de las variables básicas actuales disminuirá de valor y tampoco tendrá límite el número de unidades de la nueva variable que pueden introducirse. La nueva variable se escogió a partir de un mejoramiento prometido de z y carece de lí-

mite el número de unidades que pueden introducirse; por tanto, tampoco el grado de posible mejoramiento de la función objetivo tendrá un límite y, por lo mismo, hay una solución no acotada.

EJEMPLO 5

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = -2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeta a } & x_1 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En la tabla 7.21 se incluye la tabla símplex inicial. El renglón (0) indica que la variable no básica x_2 producirá un valor mejorado de z. Sin embargo, los valores de a_{ik} son 0 y -1. Éstos sugieren que, por *cada unidad* introducida de x_2, S_1 no cambiará y S_2 *aumentará* en 1 unidad. No se llevará a cero ninguna de estas dos variables básicas. Ello denota la presencia de una solución no acotada.

EJERCICIO

Compruebe que este problema tiene una solución no acotada y para ello resuélvalo por el método gráfico.

Tablas condensadas

El método símplex puede volverse un poco tedioso cuando se resuelven los problemas en forma manual. Los problemas que se han abordado en esta sección han sido pequeños y fáciles de manejar. Hay una manera de reducir la labor del cálculo cuando se recurre al método símplex. Consiste en condensar el tamaño de la tabla. El tamaño de ella puede reducirse debido a que en cada tabla el interés se ha centrado en las variables no básicas. Si se cuenta con una solución intermedia a un problema de programación lineal, el interés se concentra en los efectos relacionados con la introducción de variables no básicas en la base. En consecuencia, ¿por qué incluir en la tabla las columnas de la matriz identidad relacionadas con las variables básicas? Podemos tratar como "fantasma" las columnas de la matriz identidad, recordando que deberían aparecer en la tabla; pero es más fácil (y más eficiente) no volver a calcular estos valores de columna en cada iteración.

TABLA 7.21

			↓ Columna clave			
	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i
Variables básicas	1	2	−3	0	0	0
S_1	0	1	0	1	0	10
S_2	0	2	−1	0	1	30

La tabla condensada que se describirá aquí incluye columnas para cada variable no básica y una columna de la matriz identidad para la variable básica de salida. A fin de dar un ejemplo de este enfoque, se resolverá de nuevo el problema del ejemplo 1. La solución se da en las tablas 7.22 a 7 24. Si el lector las compara con las originales (tablas 7.8 a 7.10), se dará cuenta de que se parecen mucho. Pese a ello se requieren unos cuantos comentarios para aclarar las cosas. En cada tabla, la columna que representa la variable básica de salida se llena sólo después de identificar la razón mínima b_i/a_{ik}. En la tabla 7.22 la razón mínima de 50 identificó S_1 como la variable básica de salida. Puesto que los elementos de columna relacionados con ella cambiarán al generar la siguiente tabla (ya no será una columna de la matriz identidad), se inserta en la tabla esta columna "fantasma" para que pueda realizarse en ella la operación aritmética del método símplex. Obsérvese que en la tabla 7.23 x_2 sustituyó a S_1 como variable básica y la nueva columna S_1 reemplazó la columna x_2 como una de las variables no básicas.

Las operaciones aritméticas del método símplex son exactamente iguales a las de la tabla a escala completa en que se efectúan las operaciones básicas de renglón para transformar los elementos de columna de la variable básica de entrada en la correspondiente columna de la matriz identidad.

TABLA 7.22

		Columna clave ↓		Variable básica de salida ↓			
Variables básicas	x_1	x_2	x_3	S_1	b_i	Número de renglón	b_i/a_{ik}
	−2	−12	−8	0	0	(0)	
S_1	2	2	1	1	100	(1)	**100/2 = 50***
S_2	1	−2	5	0	80	(2)	
S_3	10	5	4	0	300	(3)	300/5 = 60

TABLA 7.23

				Variable básica de salida ↓			
Variables básicas	x_1	x_3	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	b_i/a_{ik}
	10	−2	6	0	600	(0)	
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50	(1)	$50 \div \frac{1}{2} = 100$
S_2	3	6	1	1	180	(2)	**180 ÷ 6 = 30***
S_3	5	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	50	(3)	$50 \div \frac{3}{2} = 33\frac{1}{3}$

TABLA 7.24

Variables básicas	x_1	S_1	S_2		b_i	Número de renglón
	11	$\frac{38}{6}$	$\frac{2}{6}$		660	(0)
x_2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$		35	(1)
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		30	(2)
S_3	$\frac{17}{4}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{4}$		5	(3)

Ejercicios de seguimiento de la sección 7.2

Resuelva los siguientes ejercicios mediante el método símplex.

1 Maximice $z = 4x_1 + 2x_2$
sujeta a $x_1 + x_2 \leq 15$
$2x_1 + x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

2 Minimice $z = 4x_1 + 6x_2$
sujeta a $3x_1 + x_2 \geq 15$
$2x_1 + 3x_2 \geq 17$
$x_1, x_2 \geq 0$

3 Maximice $z = 6x_1 + 3x_2$
sujeta a $x_1 + 2x_2 \leq 20$
$4x_1 + 2x_2 \leq 32$
$x_1 \leq 8$
$x_1, x_2 \geq 0$

4 Maximice $z = 5x_1 + 3x_2$
sujeta a $4x_1 + 3x_2 \leq 24$
$3x_1 + x_2 \geq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

5 Minimice $z = 4x_1 - 3x_2$
sujeta a $2x_1 - 4x_2 \geq 20$
$4x_1 + 3x_2 \leq 12$
$x_1, x_2 \geq 0$

6 Maximice $z = 5x_1 + 3x_2$
sujeta a $-x_1 + 2x_2 \leq 10$
$x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

Resuelva los siguientes problemas por el método símplex sirviéndose para ello de la tabla de condensación.

7 Maximice $z = 25x_1 + 50x_2$
sujeta a $2x_1 + 2x_2 \leq 1000$
$3x_1 \leq 600$
$x_1 + 3x_2 \leq 600$
$x_1, x_2 \geq 0$

8 Minimice $z = 6x_1 + 8x_2 + 16x_3$
sujeta a $2x_1 + x_2 \geq 5$
$x_2 + 2x_3 \geq 4$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

7.3 EL PROBLEMA DUAL

Todo problema de programación lineal tiene un problema relacionado con él, al cual se le llama ***problema dual*** o, simplemente, el ***dual***. En un problema original de programación lineal, denominado ***problema primario*** o, simplemente, ***primario***, el dual puede formularse con la información contenida en el primario. El problema dual es importante por muchas razones teóricas y, además, por motivos prácticos. Una de sus propiedades es que, al ser resuelto, suministra información indispensable sobre la solución del problema primario. De manera análoga, la solución del primario da toda la información esencial relativa a la solución del problema dual. En un problema de programación lineal, su solución puede determinarse resolviendo el problema original *o* su dual. Las propiedades estructurales de los dos problemas pueden provocar una decidida preferencia por cuál problema solucionar. Aun con los métodos computarizados, las eficiencias del cómputo pueden provenir de la solución de una forma de problema.

Formulación del problema dual

Los parámetros y estructura de este problema proporcionan toda la información necesaria para formularlo. La figura 7.3 describe la formulación de un problema de maximización y su dual. A continuación se hacen algunas observaciones acerca de las relaciones entre estos problemas primarios y duales.

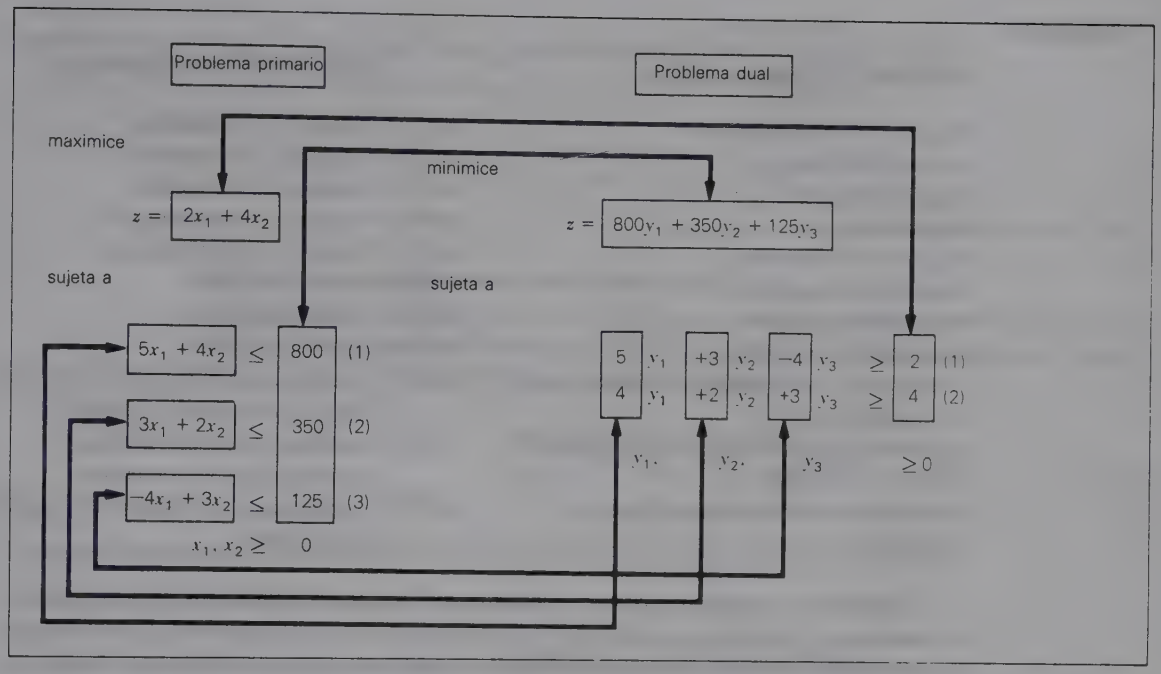


FIGURA 7.3
Algunas relaciones entre problema primario y dual.

1 El problema primario es un problema de maximización y el dual es un problema de minimización. ***El sentido de la optimización es siempre el opuesto de los correspondientes problemas primarios y duales.***

2 El problema primario consta de dos variables y tres restricciones, mientras que el dual tiene tres variables y dos restricciones. ***El número de variables en el primario siempre es igual al de las restricciones que hay en el dual. El número de restricciones en el problema primario siempre es igual al de las variables del dual.***

3 Los coeficientes de la función objetivo para x_1 y x_2 en el problema primario son iguales a las constantes del miembro derecho para las restricciones (1) y (2) en el dual. ***El coeficiente de la función objetivo para la j-ésima variable del problema primario es igual a la constante del miembro derecho para la restricción j-ésima del dual.***

4 Las constantes del miembro derecho para las restricciones (1) -(3) en el problema primario son iguales a los coeficientes de la función objetivo para las variables del dual y_1, y_2 y y_3. ***La constante del miembro derecho para la i-ésima restricción del problema primario es igual al coeficiente de la función objetivo para la i-ésima variable del dual.***

5 Los coeficientes de las variables para la restricción (1) del problema primario son iguales a los de columna para la variable del dual y_1. Los coeficientes de las variables para las restricciones (2) y (3) del problema primario son iguales a los coeficientes de columna de las variables del dual y_2 y y_3. ***Los coeficientes de a_{ij} en el problema primario son la transpuesta de los del dual. Es decir, los coeficientes de renglón del problema primario se convierten en los coeficientes de columna en el dual y a la inversa.***

TABLA 7.25

Problema de maximización		Problema de minimización
Número de restricciones	$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$	Número de variables
Restricción ($\leq$)	$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$	Variable no negativa
Restricción ($\geq$)	$\overset{(3)}{\Longleftrightarrow}$	Variable no positiva
Restricción ($=$)	$\overset{(4)}{\Longleftrightarrow}$	Variable no restringida
Número de variables	$\overset{(5)}{\Longleftrightarrow}$	Número de restricciones
Variable no negativa	$\overset{(6)}{\Longleftrightarrow}$	Restricción ($\geq$)
Variable no positiva	$\overset{(7)}{\Longleftrightarrow}$	Restricción ($\leq$)
Variable no restringida	$\overset{(8)}{\Longleftrightarrow}$	Restricción ($=$)
Coeficiente de la función objetivo para la j-ésima variable	$\overset{(9)}{\Longleftrightarrow}$	Constante del miembro derecho para la restricción j-ésima
Constante del miembro derecho para la i-ésima restricción	$\overset{(10)}{\Longleftrightarrow}$	Coeficiente de la función objetivo para la variable i
Coeficiente en restricción i para la variable j	$\overset{(11)}{\Longleftrightarrow}$	Coeficiente en restricción j para la variable i

Si bien este problema tiene un problema primario que es un tipo de maximización, el primario puede ser un problema de minimización. Las reglas de transformación en realidad deberían enunciarse según la forma de hacer la transformación de un problema de maximización en el correspondiente de minimización o a la inversa. La tabla 7.25 sintetiza la simetría de los dos tipos de problema y sus relaciones.

Las relaciones 4 y 8 indican que una restricción de igualdad en un problema corresponde a una ***variable sin restricción*** en el otro. Esta última puede adoptar un valor positivo, negativo o 0. De manera análoga, las relaciones 3 y 7 denotan que un problema puede tener ***variables no positivas*** (por ejemplo, $x_j \leq 0$). Las variables sin restricción y no positivas violan al parecer la tercera condición del método símplex, la restricción de no negatividad. Aunque eso es cierto, en el caso de problemas que contenga cualquiera de esos tipos especiales de variables se cuenta con métodos que nos permiten ajustar la formulación para cumplir con la tercera condición.

EJEMPLO 6

En el problema primario

$$\begin{aligned} \text{Minimice } & z = 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 12x_4 \\ \text{sujeta a } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 100 \quad (1) \\ & 2x_1 - x_3 + 3x_4 \leq 140 \quad (2) \\ & x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 50 \quad (3) \\ & x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_2 \text{ no restringida} \end{aligned}$$

compruebe que el correspondiente problema dual es

$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 100y_1 + 140y_2 + 50y_3 \\ \text{sujeta a } & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 10 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_1 \qquad + 4y_3 &= 20 \\
y_1 - y_2 \qquad &\leq 15 \\
y_1 + 3y_2 - 2y_3 &\leq 12 \\
y_1 &\geq 0 \\
y_2 &\leq 0 \\
y_3 &\quad \text{no restringida}
\end{aligned}
$$

Soluciones al problema primario y dual

Se indica antes que la solución al problema primario puede obtenerse de la que se dio al problema dual y a la inversa. A continuación se explica esto por medio de un ejemplo. Considérese el problema primario:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximice } z &= 5x_1 + 6x_2 \\
\text{sujeta a } \quad 3x_1 + 2x_2 &\leq 120 \qquad (1) \\
4x_1 + 6x_2 &\leq 260 \qquad (2) \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

El dual correspondiente será

$$
\begin{aligned}
\text{Minimice } z &= 120y_1 + 260y_2 \\
\text{sujeta a } \quad 3y_1 + 4y_2 &\geq 5 \\
2y_1 + 6y_2 &\geq 6 \\
y_1, y_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

La tabla 7.26 contiene la tabla final (óptima) de este problema. Obsérvese en ella que z se minimiza en un valor de 280 cuando $y_1 = \frac{3}{5}$ y $y_2 = \frac{4}{5}$. El problema primario se resolvió antes en el capítulo. Se repitió por motivos de comodidad la tabla 7.7, la cual resume la solución óptima. A continuación se ofrece un ejemplo de cómo la solución de cada problema puede obtenerse de la tabla de soluciones óptimas del problema dual correspondiente.

TABLA 7.26

Variables básicas	z	y_1	y_2	E_1	A_1	E_2	A_2	b_i	Numero de renglón	
	1	0	0	-20	$(20 - M)$	-30	$(30 - M)$	280	(0)	Tabla dual final
y_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	(1)	
y_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$	(2)	

TABLA 7.7

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de renglón	
	1	0	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{24}{30}$	280	(0)	Tabla primaria final
x_1	0	1	0	$\frac{6}{10}$	$-\frac{6}{30}$	20	(1)	
x_2	0	0	1	$-\frac{24}{60}$	$\frac{3}{10}$	30	(2)	

PROPIEDAD 1 DEL PROBLEMA PRIMARIO-DUAL
Si tanto el problema primario como el dual tienen soluciones factibles, entonces ambos problemas tienen una solución óptima para la cual son iguales los valores de la función objetivo. Una relación periférica consiste en que, si un problema tiene una solución no acotada, su problema dual carecerá de solución factible.

En este par de problemas primario y dual, nótese que los valores óptimos de sus respectivas funciones objetivo son iguales a 280.

PROPIEDAD 2 DEL PROBLEMA PRIMARIO-DUAL
Los valores óptimos de las variables de decisión en un problema se obtienen del renglón (0) de la tabla de soluciones óptimas del otro problema.

Los valores óptimos $y_1 = \frac{3}{5}$ y $y^2 = \frac{4}{5}$ se extraen de la tabla 7.7 como los coeficientes en el renglón (0) para las variables de holgura S_1 y S_2. Los valores óptimos $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$ se obtienen de la tabla 7.26 como los negativos de los coeficientes en el renglón (0) para las variables de demasía E_1 y E_2. Estos valores pueden leerse en forma alternativa, bajo sus variables artificiales respectivas, como la parte (término) de los coeficientes en el renglón (0) que *no* contiene a M.

Epílogo

El problema dual constituye un tema difícil, aunque importante, en la programación lineal. El propósito de la explicación aquí dada ha sido familiarizar al lector con él y ofrecerle una idea general de algunas de sus propiedades más importantes. Si el lector opta por tomar un curso en programación lineal o matemática, seguramente recibirá una exposición más pormenorizada del problema dual y de sus implicaciones.

Ejercicios de seguimiento de la sección 7.3

Para los siguientes problemas primarios, formule el correspondiente problema dual.

1 Maximice $z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 45 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &\leq 30 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2 Minimice $z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$
sujeta a
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &\geq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 75 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3 Maximice $z = 20x_1 + 15x_2 + 18x_3 + 10x_4$
sujeta a
$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 4x_4 &\leq 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 25 \\ - x_2 + 4x_3 + 7x_4 &\geq 35 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\text{ unrestrino restringida} \end{aligned}$$

4 Minimice $z = 6x_1 + 4x_2$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 45 \\ 5x_1 - 4x_2 &= 10 \\ -3x_1 + 5x_2 &\geq 75 \\ 3x_1 + 6x_2 &\geq 30 \\ x_1 &\text{ no restringida} \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5 Minimice $z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 45 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_4 &\leq 24 \\ 7x_3 - 5x_4 + 3x_5 &\geq 20 \\ x_1, x_2, x_4 &\geq 0 \\ x_3, x_5 &\text{ no restringida} \end{aligned}$$

6 Maximice $z = x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 40 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 - 3x_6 &= 70 \\ 4x_2 - 5x_3 + 2x_5 - 4x_6 &= 35 \\ x_1, x_3, x_4, x_6 &\geq 0 \\ x_2, x_5 &\text{ no restringida} \end{aligned}$$

7 En el siguiente problema primario

$$\begin{aligned} \text{Maximice } z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeta a } 2x_1 + 4x_2 &\leq 32 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Formule el problema dual correspondiente.
b) Resuelva el problema primario por medio del método símplex.
c) Determine la solución óptima del problema dual a partir de la tabla de soluciones óptimas del problema primario.
d) Resuelva el problema dual mediante el método símplex para verificar el resultado conseguido en la parte (*c*). De la tabla de soluciones óptimas del problema dual obtenga la solución óptima del problema primario.

8 En el siguiente problema primario

$$\begin{aligned} \text{Minimice } z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeta a } 4x_1 + 2x_2 &\geq 80 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Formule el problema dual correspondiente.
b) Resuelva el problema primario mediante el método símplex.
c) Determine la solución óptima del problema dual a partir de la tabla de soluciones óptimas del problema primario.
d) Resuelva el problema dual empleando el método símplex, a fin de comprobar el resultado obtenido en la parte (*c*). De la tabla de soluciones óptimas del problema dual obtenga la solución óptima del problema dual.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

columna clave 281
espacio de la solución no acotada 294
método de eliminación gaussiana 278
método símplex 273
problema dual 296
problema primario 296
solución básica 275
solución factible básica 290
solución no acotada 290
solución no factible 290
solución óptima alternativa 290
solución por enumeración 275
tabla 280
variable básica 275
variable no básica 275
variables no positivas 298
variable no restringida 298

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-8 se relacionan con la sección 7.1. Resuelva los siguientes problemas mediante el método símplex.

1 Maximice $z = 5x_1 + 9x_2$
sujeta a
$$4x_1 + 8x_2 \leq 600$$
$$12x_1 + 8x_2 \leq 960$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2 Minimice $z = 100x_1 + 75x_2$
sujeta a
$$x_1 + x_2 \geq 200$$
$$x_2 \geq 100$$
$$x_1 \geq 80$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3 Maximice $z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3$
sujeta a
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 120$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4 Minimice $z = 4x_1 + 4x_2$
sujeta a
$$2x_1 + 4x_2 \geq 160$$
$$2x_1 \geq 60$$
$$2x_2 \geq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

5 Maximice $z = 6x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 2x_4$
sujeta a
$$3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 1\,100$$
$$8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 1\,400$$
$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 400$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

6 Maximice $z = 5x_1 + 8x_2 + x_3$
sujeta a
$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 70$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 80$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7 Minimice $z = 8x_1 + 4x_2 + 7x_3$
sujeta a
$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 120$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 80$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 80$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8 Maximice $z = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3$
sujeta a $x_1 + 3x_2 + x_3 = 35$
$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$
$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Los ejercicios 9-12 se relacionan con la sección 7.2. Resuelva el siguiente ejercicio por medio del método símplex.

9 Maximice $z = 5x_1 + 10x_2$
sujeta a $4x_1 + x_2 \leq 53$
$x_1 + 2x_2 \leq 22$
$x_1, x_2 \geq 0$

10 Minimice $z = 15x_1 + 25x_2$
sujeta a $5x_1 + 3x_2 \geq 80$
$6x_1 + 10x_2 \geq 160$
$x_1, x_2 \geq 0$

11 Minimice $z = 6x_1 + 4x_2$
sujeta a $3x_1 + 2x_2 \leq 24$
$x_1 + 2x_2 \geq 30$
$x_1, x_2 \geq 0$

12 Maximice $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeta a $-x_1 + 3x_2 \geq 12$
$x_1 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

Los ejercicios 13-17 se relacionan con la sección 7.3. En los siguientes problemas formule el problema dual correspondiente.

13 Minimice $z = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4$
sujeta a $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 125$
$x_1 + x_3 + x_4 = 75$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 150$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$
x_4 no restringida

14 Maximice $z = x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5$
sujeta a $3x_1 + 4x_2 \leq 35$
$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 + x_5 \geq 130$
$x_1 + x_2 + x_3 = 50$
$x_4 + x_5 \leq 20$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

15 Formule el problema dual del problema relativo al mantenimiento de carreteras (ejemplo 2 de la página 231) presentado en el capítulo 6.
16 Formule el problema dual del problema de concesión de subsidios o subvenciones (ejemplo 3 de la página 232) incluido en el capítulo 6.
17 Formule el problema dual del problema de la mezcla de petróleo (ejemplo 4 de la página 234) presentado en el capítulo 6.

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 En el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 \\ \text{sujeta a } & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 25 \\ & x_1 + 3x_2 \geq -10 \\ & 2x_1 + 3x_3 = -20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

transforme el conjunto de restricciones en un sistema equivalente de ecuaciones de restricción adecuadas para el método símplex.

2 Resuelva el siguiente problema de programación lineal aplicando el método símplex.

$$\begin{aligned} \text{Maximice } & z = 20x_1 + 24x_2 \\ \text{sujeta a } & 3x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3 Suponga que debe resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Minimice } & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeta a } & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 - x_2 = 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Establezca la tabla inicial del método símplex y, en caso de necesidad, revísela para que los coeficientes en el renglón (0) sean iguales a 0 para todas las variables básicas.
b) ¿Cuáles variables básicas serán las primeras en salir?
c) ¿Cuáles variables no básicas serán las primeras en entrar?

4 Describa la forma en que se indican las soluciones óptimas alternativas cuando se utiliza el método símplex. ¿Cómo se indica una solución no acotada?

5 En el siguiente problema primario, formule el problema dual correspondiente.

$$\begin{aligned} \text{Minimice } & z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{sujeta a } & x_1 + x_2 + x_3 = 25 \\ & 4x_1 - 5x_2 \geq 10 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 48 \\ & x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_3 \quad \text{no restringida} \end{aligned}$$

CAPÍTULO

8 OTRAS APLICACIONES Y EXTENSIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

8.1 EL MODELO DE TRANSPORTE
8.2 EL MODELO DE ASIGNACIÓN
8.3 PROGRAMACIÓN EN ENTEROS
8.4 PROGRAMACIÓN DE METAS
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
ALGUNOS PAQUETES DE SOFTWARE
EJERCICIOS ADICIONALES
MINICASO: UBICACIÓN DEL EQUIPO PARA INCENDIOS

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Ofrecer una idea general de algunas extensiones del modelo de la programación lineal. Se dará asimismo una explicación de las suposiciones, caracteres distintivos y aplicaciones de:

- El modelo de transporte
- El modelo de asignación
- La programación en enteros
- La programación de metas

Se cuenta con un grupo de modelos de programación matemática que son ampliaciones directas del modelo general de la programación lineal. Ese grupo tiene muchas aplicaciones y comprende, entre otros, el *modelo de transporte*, el *modelo de asignación*, los *modelos de programación en enteros* y los *modelos de programación de metas*. Todos ellos se estudiarán en el presente capítulo. En cada uno se describirá la forma general y las suposiciones. Se darán ejemplos de una o más aplicaciones, y se examinarán los métodos de solución (exceptuados los modelos de transporte). En este capítulo nos proponemos familiarizar al lector con este importante conjunto de modelos y mejorar su experiencia en el ámbito de la formulación de problemas. Se requerirá otro curso para un tratamiento más a fondo de los temas, en particular de los algoritmos de solución.

8.1 EL MODELO DE TRANSPORTE

Todos los modelos de programación lineal pueden resolverse por el método símplex. No obstante, algunas clases de ellos, en virtud de su estructura especial, son susceptibles de resolverse con métodos más eficientes que el método símplex desde el punto de vista de los cálculos. Entre ellos se encuentra el ***modelo de transporte***.

Forma y suposiciones generales

El modelo clásico de transporte incluye el embarque de un ***producto homogéneo*** de un conjunto de ***orígenes*** a un conjunto de ***destinos***. Cada origen representa una fuente de abastecimiento para el producto; y cada destino constituye un punto de demanda del mismo. El ejemplo 2 del capítulo 6 (página 218) es un ejemplo del modelo de transporte. En dicho ejemplo el producto homogéneo eran la sal y la arena que se utilizaban en las carreteras cuando se formaba hielo en ellas y caían nevadas. Los orígenes eran dos reservas (montones) de esos materiales, caracterizada cada una por una capacidad máxima de almacenamiento. Los destinos eran las cuatro zonas de la ciudad, caracterizada cada una por una necesidad esperada (demanda) durante una nevada.

SUPOSICIÓN 1
El modelo general supone la existencia de un producto homogéneo.

Esta primera suposición implica que no hay diferencias significativas en las características del producto disponible en cada origen. Ello significa que, en caso de no haber otras restricciones, cada origen puede aportar unidades a cualquiera de los destinos.

El modelo clásico de transporte tiene por objeto asignar la oferta disponible en cada origen, de modo que se satisfaga la demanda en los destinos. Puede recurrirse a diversos criterios para medir la eficacia de la asignación. Los objetivos comunes son minimizar los costos totales del transporte o alguna medida ponderada de la distancia,* o bien maximizar el margen total de utilidad prove-

*Por ejemplo, el número de unidades distribuidas ponderadas (multiplicadas) por la distancia que recorren.

TABLA 8.1

Reserva (origen)	Zona (destino) 1	2	3	4	Oferta máxima, tons
1	$2.00	$3.00	$1.50	$2.50	900
2	4.00	3.50	2.50	3.00	750
Demanda, tons	300	450	550	350	

niente de la asignación. En el ejemplo del capítulo 6, el objetivo era minimizar el costo total de distribución. En la tabla 8.1 se resume el costo de distribuir una tonelada de sal o arena de cada reserva para las zonas de la ciudad. También se incluyen en ella las capacidades de las reservas y los niveles normales de la demanda (modificados ligeramente a partir del ejemplo original).

Suponiendo que x_{ij} sea el número de toneladas de sal y arena distribuidas de la reserva i en la zona j, la formulación completa de este problema modificado es

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar } z &= 2x_{11} + 3x_{12} + 1.5x_{13} + 2.5x_{14} + 4x_{21} + 3.5x_{22} + 2.5x_{23} + 3x_{24} \\
\text{sujeta a } & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 900 \quad \text{(Reserva 1)} \\
& + x_{14} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 750 \quad \text{(Reserva 2)} \\
& x_{11} + x_{14} + x_{21} = 300 \quad \text{(Zona 1)} \\
& x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{21} + x_{22} = 450 \quad \text{(Zona 2)} \\
& x_{13} + x_{23} + x_{24} = 550 \quad \text{(Zona 3)} \\
& + x_{14} + x_{24} = 350 \quad \text{(Zona 4)} \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0
\end{aligned}$$

SUPOSICIÓN 2
El modelo general supone que la oferta y la demanda totales son iguales.

Un algoritmo especial de solución en este tipo de modelo requiere la segunda suposición. Aun cuando el ejemplo fue modificado para alcanzar el equilibrio entre la oferta y la demanda, esta suposición rara vez se cumple en un problema real. Claro está que existen procedimientos para manejar el desequilibrio cuando ocurre en un problema. Y esos procedimientos se parecen al hecho de agregar variables de holgura y demasía a una formulación de la programación lineal a fin de aplicar el método símplex.

Nótese, en las restricciones estructurales, que todas las variables tienen coeficientes de 0 a 1. Por ejemplo, puede considerarse que la primera restricción presenta la forma

$$1x_{11} + 1x_{12} + 1x_{13} + 1x_{14} + 0x_{21} + 0x_{22} + 0x_{23} + 0x_{24} = 900$$

De manera análoga, la última restricción tiene la forma implícita

$$0x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + 1x_{14} + 0x_{21} + 0x_{22} + 0x_{23} + 1x_{24} = 350$$

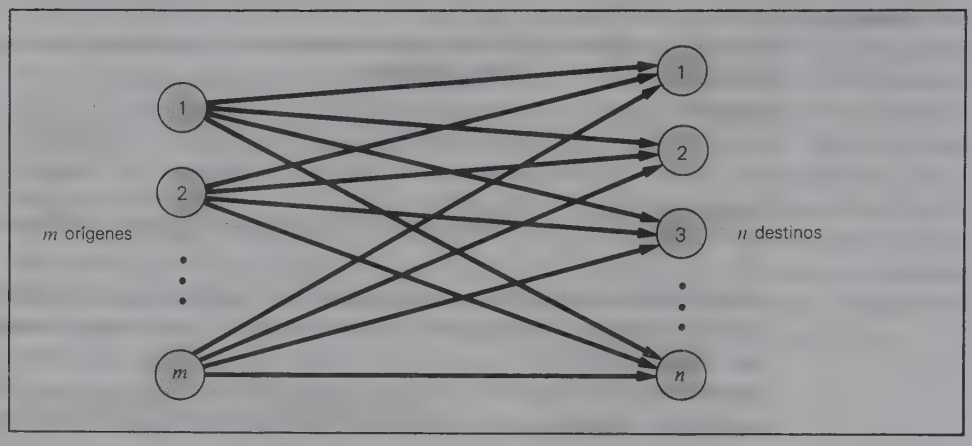


FIGURA 8.1 Modelo generalizado de transporte.

Esta característica, junto con el supuesto equilibrio entre la oferta y la demanda, es importante para distinguir los modelos de transporte y otros modelos de programación lineal. Se han ideado métodos de solución que aprovechan esta estructura y dan importantes eficiencias de cálculo.

A continuación se enuncia el modelo generalizado de transporte asociado a la estructura que aparece en la figura 8.1. Si

x_{ij} = *número de unidades distribuidas del origen i al destino j*
c_{ij} = *contribución a la función objetivo al distribuir una unidad de su origen i al destino j*
s_i = *número de unidades disponibles en el origen i*
d_j = *número de unidades de la demanda en el destino j*
m = *número de orígenes*
n = *número de destinos*

el modelo generalizado puede formularse así:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots \\
\text{(o maximice)} & \qquad + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \\
\text{sujeta a} & \left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = s_1 \\
x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = s_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = s_m
\end{array}\right\} \text{Restricciones de la oferta} \\
 & \left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = d_1 \\
x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = d_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = d_n
\end{array}\right\} \text{Restricciones de la demanda} \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad \text{para todas las } i \text{ y las } j
\end{array}
$$

En el modelo está implícito el equilibrio entre la oferta y la demanda,

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

El modelo de transporte es muy flexible y puede aplicarse a problemas que nada tienen que ver con la distribución de productos. El siguiente ejemplo es un caso que explica lo anterior.

EJEMPLO 1

Procesamiento de solicitudes de empleo Una agencia de empleo trabaja por contrato con las empresas. Una fábrica de computadoras va a inaugurar una planta y la contrató para que procese las solicitudes de los candidatos. Ante la demanda poco uniforme de la carga de trabajo en la agencia, a menudo se sirve de personal a medio tiempo con el fin de procesar las solicitudes. En este contrato en particular, cinco analistas deben ser contratados. Cada uno ha hecho una estimación del número máximo de solicitudes que puede evaluar durante el mes entrante. (La agencia analiza esas estimaciones para asegurarse de que sean razonables.) A los analistas se les paga a destajo, determinándose la tarifa por el tipo de solicitud evaluada y la experiencia del analista.

TABLA 8.2

	Tipo de solicitud de empleo				
	1	2	3	4	
Analista asignado	Ingeniero	Analista/ programador	Empleado calificado	Empleado no calificado	Número máximo de solicitudes
1	$15	$10	$8	$7	90
2	12	8	7	5	120
3	16	9	9	8	140
4	12	10	7	7	100
5	10	7	6	6	110
Número esperado de solicitudes	100	150	175	125	560 / 550

En la tabla 8.2 se da el resumen, hecho por el analista, sobre el costo del procesamiento de cada tipo de solicitud. También se incluye en ella el número máximo de solicitudes que puede procesar cada uno y el de solicitudes que, según las previsiones, habrá en cada categoría. El problema de la agencia estriba en determinar el número de solicitudes de cada tipo de empleo que debe asignar a los analistas, con el propósito de minimizar el costo de procesar el lote esperado de solicitudes. Puede considerarse a cada analista como un origen con una capacidad máxima de procesamiento de solicitudes. Cada categoría de trabajo representa un destino que tiene una demanda para el procesamiento de solicitudes.

Si x_{ij} es el número de solicitudes de trabajo de tipo j asignadas al especialista i, el problema puede formularse en los siguientes términos:

Minimice $Z = 15x_{11} + 10x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + \cdots + 6x_{54}$

sujeta a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 90 \quad (1)$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 120 \quad (2)$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 140 \quad (3)$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 100 \quad (4)$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq 110 \quad (5)$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 100 \quad (6)$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 150 \quad (7)$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 175 \quad (8)$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 125 \quad (9)$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Nótese que la oferta total (el número máximo de aplicaciones que pueden procesar los cinco analistas) rebasa la demanda total (número esperado de solicitudes). De ahí la imposibilidad de formular como desigualdades a las restricciones (1) a (5). Y de acuerdo con la suposición 2, la oferta y la demanda totales deben ponerse en equilibrio, artificialmente, antes de resolver el problema.

Métodos de solución

Según se dijo antes, el modelo de transporte se distingue de otros de la programación lineal porque su estructura se presta a procedimientos más eficientes de solución que el método símplex. Este último *puede* utilizarse para resolver los modelos de transporte. Sin embargo, un método como el ***algoritmo de cruce de río*** y un mejoramiento basado en el problema dual, denominado ***método MODI****, resulta mucho más eficiente.

La mayor eficiencia puede lograrse durante dos etapas de la disolución: 1) determinación de la solución inicial y 2) transición de la solución inicial a la óptima. Con el método símplex la estructura de la restricción determina de antemano la solución inicial. El conjunto originario de variables básicas siempre consta de variables de holgura y artificiales en el problema. En los modelos de transporte, el algoritmo de cruce de arroyo (o bien el método MODI) aceptará cualquier solución factible como punto de partida. En consecuencia, se han propuesto varios métodos para encontrár una buena *solución* de arranque. Entre ellos cabe citar el ***método en la esquina noroeste***, el ***método del menor costo*** y el ***método de aproximación de Vogel.**** Sobre todo en los dos últimos, se confía que un mayor esfuerzo "en el frente" produzca una solución inicial que se aproxime a la óptima. Se espera que con ello se reduzcan el tiempo y el esfuerzo requeridos por el algoritmo del cruce de arroyo, a fin de pasar de la solución inicial a la óptima. Ninguno de los procedimientos anteriores ha resultado ser

*Una descripción de estos métodos se encuentra en Frank S. Budnick, Dennis W. McLeavey y Richard Mojena, *Principles of Operations Research for Management*, 2a. ed., Richard D. Irwin, Homewood, Ill. (1988), cap. 7.

TABLA 8.3

	Destino			
Origen	1	2	3	Oferta
1	5	10	10	55
2	20	30	20	80
3	10	20	30	75
Demanda	70	100	40	210

siempre más eficaz que los demás. Pero, según el problema en cuestión, puede aportar considerables eficiencias.

Examínense detenidamente los datos contenidos en la tabla 8.3, referentes a un problema de transporte que incluye tres orígenes y destinos. Supóngase que los elementos del cuerpo de la tabla representen los costos de enviar una unidad del origen a cada uno de los destinos. También se muestran allí las capacidades de oferta de los tres orígenes y la demanda en cada destino. Y las cosas se facilitan porque la demanda y oferta totales son iguales entre sí. El problema radica en determinar cuántas unidades embarcar de cada origen a los destinos, de modo que la demanda se satisfaga en los tres destinos, sin que se violen las capacidades de los tres orígenes. El objetivo es hacer las asignaciones en una forma tal que se minimicen los costos totales del transporte.

En los dos siguientes ejemplos se resolverá este problema por medio de dos algoritmos especiales. En el ejemplo 2 se recurrirá al método de la esquina noroeste, que puede servir para determinar una solución inicial (de arranque). En el ejemplo 3, se aplicará el algoritmo del cruce de arroyo, el cual puede servir para resolver esos tipos de modelos. Antes de abordar los ejemplos, se comentarán las condiciones o requisitos del algoritmo del cruce de arroyo.

REQUISITOS DEL ALGORITMO DEL CRUCE DE ARROYO

1 La oferta total en el origen ha de ser igual a la demanda total en los destinos. Puesto que esto no suele suceder en las aplicaciones prácticas, el "equilibrio" entre la oferta y la demanda a menudo se crea de manera artificial. Y ello se hace agregando un origen o destino "ficticio" que tenga suficiente oferta (demanda) para crear el equilibrio necesario. Nuestro ejemplo ha sido diseñado de modo que ya exista dicho equilibrio.

2 En un problema dado de transporte con *m* orígenes y *n* destinos (donde *m* y *n* incluyen cualesquiera orígenes o destinos "ficticios" agregados para lograr el equilibrio), el número de variables básicas en cualquier solución debe ser *m* + *n* − 1. En nuestro problema, cualesquier solución debería contener 3 + 3 − 1 = 5 variables básicas.

EJEMPLO 2 (OBTENCIÓN DE UNA SOLUCIÓN INICIAL: EL MÉTODO EN LA ESQUINA NOROESTE)

Cuando se resuelven problemas de transporte en que se recurre al algoritmo del cruce de arroyo, el trabajo se efectúa en un formato tabular como cuando se utilizó el méto-

TABLA 8.4

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	5 x_{11}	10 x_{12}	10 x_{13}	55
2	20 x_{21}	30 x_{22}	20 x_{23}	80
3	10 x_{31}	20 x_{32}	30 x_{33}	75
Demanda	70	100	40	210

do símplex. Según se advierte en la tabla 8.4, el formato tabular del ejemplo se parece a una "hoja de juego de boliche".

Para cada combinación de origen/destino hay una casilla que contiene el valor de la correspondiente variable de decisión x_{ij} y el coeficiente de la función objetivo o el costo unitario del transporte. Conforme se avance en la solución del problema, en la tabla se irán sustituyendo con las x_{ij} los valores reales al ensayar diversas asignaciones.

Según se mencionó antes, se cuenta con varias técnicas para determinar una solución inicial. El método de la esquina noroeste se describe en este ejemplo por su facilidad de uso. Sin importar la técnica con que se obtenga una solución inicial, es preciso que existan las siguientes condiciones: 1) deberá asignarse la oferta en cada origen, 2) debe satisfacerse la demanda en cada destino y 3) tiene que haber exactamente $m + n - 1$ variables básicas (asignaciones).

El *método en la esquina noroeste* es una técnica de gran uso (pero irreflexiva) para llegar a una solución inicial. Comienza en la casilla superior izquierda (esquina noroeste) de la tabla de transporte y asigna unidades del origen 1 al destino 1. Las asignaciones prosiguen en forma tal que la oferta en el origen 1 se asigna por completo antes de pasar al origen 2. La oferta en el origen 2 se asigna por completo antes de pasar al origen 3 y así sucesivamente. De manera parecida, con una asignación secuencial a los destinos se asegura de que la demanda en el destino 1 quede satisfecha antes de realizar asignaciones al destino 2 y así sucesivamente. Este patrón de asignaciones da origen a una especie de arreglo de escalera de las asignaciones en la tabla de transporte. La tabla 8.5 indica la solución inicial del problema a la que se llegó aplicando el método de la esquina noroeste. A continuación se examinarán las asignaciones.

1 Comenzando en la esquina noreste, la demanda en el origen 1 es 55 y en el destino 1 es 70. Por tanto, se asigna toda la oferta disponible en el origen 1 con el propósito de satisfacer la demanda en el destino 1 ($x_{11} = 55$).

2 Cuando toda la oferta en el origen 1 ha sido asignada, la siguiente asignación se hará a partir del origen 2. La asignación en la casilla (1,1) no satisfizo totalmente la demanda en el destino 1. Se requieren 15 unidades adicionales para ello. Al comparar la oferta en el origen 2 y el resto de la demanda en el destino 1, se asignan 15 unidades del origen 2 al destino 1 ($x_{21} = 15$). Con esta asignación se cubren las necesidades del destino 1, y en seguida se aborda la demanda en el destino 2.

3 La última asignación dejó el origen 2 con 65 unidades. La demanda en el destino 2 es 100 unidades. En consecuencia, la oferta restante de 65 unidades se asigna al destino 2 ($x_{22} = 65$). La siguiente asignación provendrá del origen 3.

4 La asignación de 65 unidades del origen 2 dejó el destino 2 con una demanda no cubierta de 35 unidades. Puesto que el origen 3 tiene una oferta de 75 unidades,

TABLA 8.5 SOLUCIÓN OBTENIDA CON EL MÉTODO DE LA ESQUINA NOROESTE

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	5: (55)	10	10	~~55~~
2	20: (15)	30: (65)	20	~~80~~ ~~65~~
3	10	20: (35)	30: (40)	~~75~~ 40
Demanda	~~70~~ ~~15~~	~~100~~ ~~35~~	~~40~~	210

se asignan 35 unidades para completar la demanda de ese destino ($x_{32} = 35$). Así pues, la siguiente asignación se hará al destino 3.

5 La asignación de 35 unidades del origen 3 lo deja con 40 unidades restantes. La demanda en el destino 3 también es de 40; por ello, la asignación final de 40 unidades se realiza del origen 3 al destino 3 ($x_{33} = 40$).

En la tabla 8.5 nótese que las asignaciones se encierran dentro de un círculo en las casillas correspondientes. Éstas representan las variables básicas de la solución. Debería haber cinco variables básicas ($m + n - 1$) para satisfacer la condición del algoritmo del cruce de arroyo. En la tabla 8.6 se compendian las asignaciones recomendadas y los costos conexos de esta solución inicial.

EJEMPLO 3 (Algoritmo del cruce de arroyo)

En la solución inicial generada en la tabla 8.5, el algoritmo del cruce de arroyo realiza un *análisis marginal* que examina los efectos que produce cambiar la solución dada. En concreto, se estudian los efectos secundarios que ocasiona introducir una unidad de una variable no básica, como sucedió con el método símplex.

□ **Paso 1 Determínese el *índice de mejoramiento* para cada variable (casilla).**

Al analizar los efectos que surgen al introducirse una unidad de una variable no básica, la atención se centró en dos efectos marginales o secun-

TABLA 8.6

Del origen	Al destino	Cantidad		Costo unitario	Costo total
1	1	55	×	$ 5.00	$ 275.00
2	1	15	×	20.00	300.00
2	2	65	×	30.00	1 950.00
3	2	35	×	20.00	700.00
3	3	40	×	30.00	1 200.00
					$4 425.00

TABLA 8.7 TRAYECTORIA CERRADA Y AJUSTES POR CELDA (1, 2)

Origen	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Oferta
1	−1 ← 5 → 55	+1 ↑ 10	10	55
2	+1 → 20 → 15	−1 30 65	20	80
3	10	20 35	30 40	75
Demanda	70	100	40	210

darios: 1) *los ajustes que era preciso hacer a los valores de las variables básicas actuales* (a fin de continuar satisfaciendo todas las restricciones de la oferta y de la demanda) y 2) *el cambio resultante en el valor de la función objetivo.*

He aquí un ejemplo: concéntrese el lector en la tabla 8.7. La casilla (1,2) no tiene asignación en la solución inicial y es una casilla no básica. La pregunta que queremos formular es ¿qué compromisos (o ajustes) con las variables básicas actuales se necesitarán si 1 unidad se envía del origen 1 al destino 2? Si se asigna 1 unidad a la casilla (1,2), se enviarán un total de 56 unidades del origen 1, 1 más que su capacidad. Por consiguiente, hay que reducir en 1 unidad los embarques en otras partes desde el origen 1. El único lugar que puede reducirse es la casilla (1,1). Así pues, habrá que hacer ajustes y disminuir en 1 la asignación dentro de esa casilla. Pero esa reducción hará que aminoren los embarques al destino 1. Reducir a 54 los embarques en la casilla (1,1) hace que un total de 69 unidades se asignen al destino 1, o sea 1 menos que la demanda. Por tanto, se realiza una compensación al aumentar de 1 unidad a 16 la asignación a la casilla (2,1). Con este ajuste se logran embarques en exceso del origen 2(16 + 65 = 81). Con objeto de hacer ajustes, se reducen los embarques en la casilla (2,2) de 1 unidad a 64. Con este último ajuste el sistema recobra su equilibrio. En la tabla 8.7 la serie de ajustes requeridos está indicada en la tabla 8.7 por la *trayectoria cerrada* de las flechas dirigidas. En resumen si se desea compensar la incorporación de una unidad a la casilla (2,2), habrá que *disminuir* en 1 unidad los embarques en la casilla (1,1), *incrementar* en 1 unidad los embarques en la casilla (2,1) y *disminuir* en 1 unidad los embarques en la casilla (2,2).

Ahora que se han identificado los ajustes necesarios en las actuales variables básicas, la siguiente cuestión es averiguar el efecto marginal que se opera en el valor de la función objetivo. Para determinarlo, se observa la trayectoria cerrada en la tabla 8.7. Para cada casilla (i,j) que recibe una mayor asignación de 1 unidad, a los costos se les *aumenta* el correspondiente coeficiente de costos (c_{ij}). De manera análoga, los costos *decrecen* en el valor del coeficiente de costo cada vez que las asignaciones han sido reducidas 1 unidad. Esos efectos se resumen en la tabla 8.8.

TABLA 8.8 EFECTOS MARGINALES QUE EN EL VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO SE PRODUCEN AL INTRODUCIR UNA UNIDAD EN LA CASILLA (1, 2)

Casilla ajustada	Ajuste	Cambio del costo
(1, 2)	+1	+$10.00
(1, 1)	−1	− 5.00
(2, 1)	+1	+ 20.00
(2, 2)	−1	− 30.00
Cambio neto		−$ 5.00 (Índice de mejoramiento)

El siguiente efecto neto (marginal) asociado a la asignación de la unidad 1 del origen al destino 2 consiste en reducir en $5.00 el costo total. Este cambio marginal de la función objetivo recibe el nombre de ***índice de mejoramiento*** en la casilla (1,2).

CÁLCULO DEL ÍNDICE DE MEJORAMIENTO

Siga una "trayectoria cerrada" que comience en la casilla de interés que no esté ocupada; desplácese alternativamente en la dirección horizontal y vertical, pivoteando *sólo en las casillas ocupadas*. A la casilla desocupada se le asigna un + 1 (lo cual indica un aumento de 1 unidad) y a los puntos sucesivos en la esquina sobre la trayectoria se les asignan, alternativamente, los valores −1 y +1. Los signos de más y de menos denotan los ajustes necesarios para satisfacer las necesidades de renglón (oferta) y columna (demanda). Nota: carece de importancia la dirección en que se recorra la trayectoria. Se obtiene la misma trayectoria e idénticos ajustes, sin importar si el recorrido se hace en el sentido de las manecillas del reloj o en dirección contraria.

Una vez que la trayectoria cerrada se identifica para una casilla no básica, su índice de mejoramiento se calcula sumando todos los coeficientes de la función objetivo de las casillas en las posiciones de más sobre la trayectoria y restando sus correspondientes coeficientes para las casillas en las posiciones negativas sobre la trayectoria.

La tabla 8.9 contiene la trayectoria cerrada de la casilla (1, 3), que era no básica en la solución inicial. Adviértase que, para agregar una unidad a esa

TABLA 8.9 TRAYECTORIA CERRADA Y AJUSTES POR CASILLA (1, 3)

	Destino			
Origen	1	2	3	Oferta
1	−1 [5] 55	[10]	+1 [10]	55
2	+1 [20] 15	−1 [30] 65	[20]	80
3	[10]	+1 [20] 35	−1 [30] 40	75
Demanda	70	100	40	210

TABLA 8.10 EFECTOS MARGINALES QUE SE PRODUCEN EN EL VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO AL INTRODUCIR UNA UNIDAD EN LA CASILLA (1, 3)

Casilla ajustada	Ajuste	Cambios en el costo
(1, 3)	+1	+$10.00
(1, 1)	−1	− 5.00
(2, 1)	+1	+ 20.00
(2, 2)	−1	− 30.00
(3, 2)	+1	+ 20.00
(3, 3)	−1	− 30.00
Cambio neto		−$15.00 (Índice de mejoramiento)

casilla, hay que hacer ajustes y se producen las consecuencias que aparecen en la tabla 8.10. Adviértase asimismo que, con la incorporación de 1 unidad a la casilla (1,3), se logrará una reducción neta en el valor de la función objetivo equivalente a $15.00.

En la tabla 8.11 se sintetizan las trayectorias cerradas y los índices de mejoramiento de todas las casillas no básicas en la solución inicial. Verifique las trayectorias y valores de los índices, con objeto de cerciorarse de que entiende lo que hemos estado explicando.

□ **Paso 2: Si existe una mejor solución, determínese qué variable (casilla) deberá entrar en la base.** Un examen de los índices de mejoramiento en la tabla 8.11 indica que, con la introducción de tres de las cuatro variables no básicas, se lograría una reducción de los costos totales.

En el caso de los problemas de minimización, existe una mejor solución si hay índices de mejoramiento negativo. Se habrá encontrado una solución óptima cuando *todos* los índices de mejoramiento son no negativos. En los *problemas de maximización* si hay índices de mejoramiento positivo. Y se habrá logrado una solución óptima cuando todos los índices de mejoramiento sean no positivos.

Como en el caso del método símplex, se selecciona la variable (casilla) que produzca el mayor mejoramiento marginal de la función objetivo. En el ejemplo, la casilla (2, 3), o sea x_{23}, se escoge como la *variable de entrada*.

TABLA 8.11 TRAYECTORIAS CERRADAS E ÍNDICES DE MEJORAMIENTO PARA LA SOLUCIÓN INICIAL

Casilla no básica	Trayectoria cerrada	Índice de mejoramiento
(1, 2)	(1, 2) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 2) → (1, 2)	−$ 5.00
(1, 3)	(1, 3) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 2) → (3, 2) → (3, 3) → (1, 3)	−$15.00
(2, 3)	(2, 3) → (2, 2) → (3, 2) → (3, 3) → (2, 3)	−$20.00*
(3, 1)	(3, 1) → (3, 2) → (2, 2) → (2, 1) → (3, 1)	$ 0.00

TABLA 8.12 TRAYECTORIA CERRADA Y AJUSTES POR CASILLA EN ENTRADA (2,3)

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	5 (55)	10	10	55
2	20 (15)	30 (65)	20	80
3	10	20 (35)	30 (40)	75
Demanda	70	100	40	210

Disminución en el valor de x_{23} incrementos

□ **Paso 3: Determínense la variable de salida y el número de unidades para asignar la variable de entrada.** Para llevar a cabo este paso se retorna a la trayectoria cerrada asociada a la casilla de entrada. La tabla 8.12 muestra la trayectoria cerrada de la casilla (2, 3). Dado que el algoritmo del cruce de arroyo es exactamente paralelo al método símplex, hay que determinar el número de unidades que se pueden asignar a la casilla (2, 3) tales que el valor de una de las actuales variables básicas se lleve a 0. En la tabla 8.12 se observa que sólo dos variables básicas disminuyen de valor al asignar más unidades a la casilla (2, 3): las casillas (2, 2) y (3, 3), las cuales se hallan en posiciones de *menos* sobre la trayectoria cerrada. Lo que quiere saberse es cuál de ellas irá a 0 primero al agregarse más unidades a la casilla (2, 3). Trate el lector de llegar a la conclusión de que, cuando se agrega la *cuadragésima unidad* a la casilla (2, 3), el valor de la casilla (2, 2) se reduce a 25, el de la casilla (3, 2) aumenta a 75 y el de la casilla (3, 3) es 0.

VARIABLE DE SALIDA
La variable de salida se identifica como la variable básica más pequeña en una posición de menos sobre la trayectoria cerrada de la variable de entrada.

NÚMERO DE UNIDADES QUE SE ASIGNARÁN A LA VARIABLE DE ENTRADA
El número de unidades es igual al tamaño de la variable de salida (el valor más pequeño en una posición de menos).

□ **Paso 4: Obténgase la nueva solución y retórnese al paso 1.** En relación una vez más con la trayectoria cerrada de la casilla de entrada (2, 3), súmese la cantidad determinada en el paso 3 a todas las casillas en las posiciones de más y réstese esa cantidad a las que se encuentran en las posiciones de menos. Así pues, suponiendo que la variable de entrada $x_{23} = 40$ según el paso 3, se ajustan las casillas sobre la trayectoria cerrada y se consigue así la segunda solución que aparece en la tabla 8.13. Cuando se determina una nueva solución, conviene comprobar las asignaciones a lo largo de cada renglón y columna, a fin de cerciorarse de que se sumen a los

TABLA 8.13 SEGUNDA SOLUCIÓN

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	5 (55)	10	10	55
2	20 (15)	30 (25)	20 (40)	80
3	10	20 (75)	30	75
Demanda	70	100	40	210

Nueva variable básica (casilla)

Variable básica desviada (casilla)

respectivos valores de la oferta y la demanda. Además habrá que asegurarse de que existen $m + n - 1$ variables básicas. Como se observa en la tabla 8.13, ambas condiciones se cumplen en este caso.

Otra información de interés es el nuevo valor de la función objetivo. Se dispone de dos alternativas para calcularlo. Puede multiplicarse el valor de cada variable básica por su correspondiente coeficiente de la función objetivo y sumar el resultado como se hizo en la tabla 8.6. La otra opción es que, sabiendo que el valor original de la función objetivo fue \$4425 y que con cada unidad que se introduzca en la casilla (2, 3) aminora en \$20 el valor de la función objetivo, la introducción de 40 unidades en la casilla (2, 3) da por resultado un nuevo valor del costo total de

$$\begin{aligned} z &= \$4\,425 - (40)(\$20) \\ &= \$4\,425 - \$800 \\ &= \$3\,625 \end{aligned}$$

En las tablas 8.14 y 8.18 se resumen los pasos restantes que se requieren en la solución de este problema. Trate de verificar los pasos y también el resultado final.

Todos los índices de mejoramiento son no negativos en la tabla 8.18, por lo cual se extrae la conclusión de que la solución en la tabla 8.17 es óptima. Es decir, el costo total será minimizado en un valor de \$3350, si 55 unidades se embarcan del origen 1 al destino 2, 40 unidades del origen 2 al destino 1, 40 unidades del origen 2 al destino 3, 30 unidades del origen 3 al destino 1 y 45 unidades del origen 3 al destino 2.

TABLA 8.14 TRAYECTORIAS CERRADAS E ÍNDICES DE MEJORAMIENTO PARA LA SEGUNDA SOLUCIÓN

Casilla no básica	Trayectoria cerrada	Índice de mejoramiento
(1, 2)	(1, 2) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 2) → (1, 2)	−\$ 5.00*
(1, 3)	(1, 3) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 3) → (1, 3)	+\$ 5.00
(3, 1)	(3, 1) → (3, 2) → (2, 2) → (2, 1) → (3, 1)	\$ 0.00
(3, 3)	(3, 3) → (2, 3) → (2, 2) → (3, 2) → (3, 3)	−\$20.00

TABLA 8.15 **TERCERA SOLUCIÓN (z = $3 500 000)**

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	5 (30)	10 (25)	10	55
2	20 (40)	30	20 (40)	80
3	10	20 (75)	30	75
Demanda	70	100	40	210

TABLA 8.16 **TRAYECTORIAS CERRADAS E ÍNDICES DE MEJORAMIENTO PARA LA TERCERA SOLUCIÓN**

Casilla no básica	Trayectoria cerrada	Índice de mejoramiento
(1, 3)	(1, 3) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 3) → (1, 3)	+$ 5.00
(2, 2)	(2, 2) → (1, 2) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 2)	+$ 5.00
(3, 1)	(3, 1) → (3, 2) → (1, 2) → (1, 1) → (3, 1)	−$ 5.00*
(3, 3)	(3, 3) → (2, 3) → (2, 1) → (1, 1) → (1, 2) → (3, 2) → (3, 3)	+$15.00

TABLA 8.17 **CUARTA (Y ÓPTIMA SOLUCIÓN) (Z = $3350.00)**

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	5	10 (55)	10	55
2	20 (40)	30	20 (40)	80
3	10 (30)	20 (45)	30	75
Demanda	70	100	40	210

TABLA 8.18 **TRAYECTORIAS CERRADAS E ÍNDICES DE MEJORAMIENTO PARA LA CUARTA SOLUCIÓN**

Casilla no básica	Trayectoria cerrada	Índice de mejoramiento
(1, 1)	(1, 1) → (3, 1) → (3, 2) → (1, 2) → (1, 1)	+$ 5.00
(1, 3)	(1, 3) → (1, 2) → (3, 2) → (3, 1) → (2, 1) → (2, 3) → (1, 3)	+$10.00
(2, 2)	(2, 2) → (2, 1) → (3, 1) → (3, 2) → (2, 2)	$0.00
(3, 3)	(3, 3) → (2, 3) → (2, 1) → (3, 1) → (3, 3)	+$20.00

La tabla 8.18 también muestra el fenómeno de las *soluciones alternativas óptimas.*

SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS
Si se ha identificado una solución óptima para un modelo de transporte, existen soluciones óptimas alternativas si cualquier índice de mejoramiento es 0. En caso de que se den las condiciones de optimización, la asignación de unidades a casillas que tengan índices de mejoramiento de 0 no producen cambio alguno en el valor (óptimo) de la función objetivo.

En la solución óptima la tabla 8.18 indica que la asignación de unidades a la casilla (2, 2) no causará cambio alguno en el costo total.

Métodos de solución por computadora

Como cabe esperar, hay numerosos paquetes computarizados de transporte para la solución de estos modelos. Casi siempre las características de entrada/salida son más simples que los simples paquetes de programación lineal. En el problema 8.2 se describen la entrada y salida de un programa de computadora* para el problema de transporte que acaba de ser resuelto. Para la parte correspondiente a la entrada de datos, las respuestas del usuario se muestran en negritas para distinguirlas de las de la computadora.

Ejercicios de seguimiento de la sección 8.1

1 En el ejemplo 3, produzca una solución óptima alternativa escogiendo la casilla (2, 2) en la tabla 8.17 como variable de entrada e introduciendo la mayor cantidad posible de unidades.

2 Con los datos de un problema de transporte incluidos en la tabla 8.19:
   a) Aplique el método de la esquina noroeste para determinar una solución inicial.
   b) A continuación resuelva el problema y obtenga la solución mediante el algoritmo del cruce de arroyo.

3 Con los datos relativos al problema del transporte en la tabla 8.20:
   a) Use el método de la esquina noroeste para encontrar una solución inicial.
   b) Proceda a resolver el problema para conseguir la solución óptima empleando el algoritmo del cruce de arroyo.

TABLA 8.19

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	20	30	10	100
2	30	40	25	300
3	35	15	20	100
Demanda	150	125	225	

*"TRANI", según Warren J. Erikson y Owen P. Hall, hijo, *Computer Models for Management Science*, 2a. ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986; disponible en disquete para emplearse en la Apple II Plus y en la IBM PC.

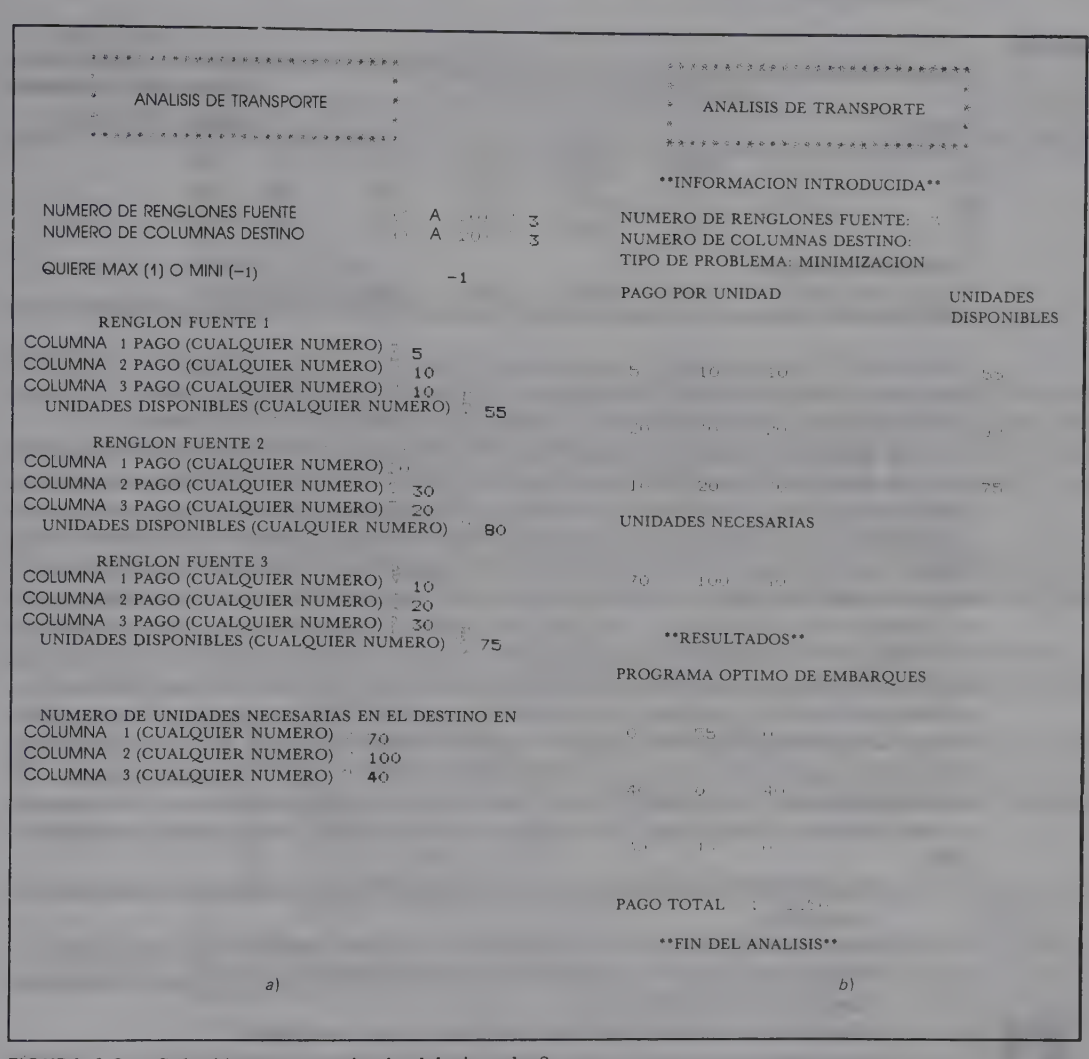


FIGURA 8.2 Solución computarizada del ejemplo 3.

4 La oferta excede la demanda Cuando la oferta total en el modelo de transporte es mayor que la demanda total, se consigue un "equilibrio" agregando un destino "ficticio", que tiene una demanda igual a la diferencia entre la oferta y la demanda. Aunque se dan excepciones, en general los coeficientes de la función objetivo asignados a la columna ficticia son iguales a cero (pues no se enviará embarque alguno a

TABLA 8.20

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	8	6	10	125
2	4	9	8	150
3	7	6	5	95
Demanda	110	85	175	

TABLA 8.21

Planta	Bodega 1	2	3	4	5	Capacidad semanal, cientos de casos
1	$ 20	$ 35	$ 30	$ 40	$ 42	400
2	45	30	42	36	38	350
3	38	40	36	35	50	450
Necesidad semanal, cientos de casos	150	300	200	250	175	

ese destino). En el ejercicio 2, suponga que la oferta total en el origen 1 es de 150. Sume una columna ficticia que tenga una demanda de 50, asigne costos de 0 a cada casilla de la columna y resuelva mediante el algoritmo del cruce de arroyo.

5 **La demanda excede la oferta** Cuando la demanda total es mayor que la oferta total, se obtiene el "equilibrio" agregando un origen "ficticio" que tenga una capacidad de oferta igual a la diferencia entre la oferta y demanda totales. Como en el ejercicio anterior, a las casillas en el renglón ficticio suelen asignárseles coeficientes de la función objetivo iguales a 0. En el ejercicio 3, suponga que la demanda en el destino 3 sea igual a 225. Agregue un renglón ficticio que tenga una oferta de 50 unidades, asigne costos de 0 a cada casilla y resuelva por medio del algoritmo del cruce de arroyo.

6 Una cervecería tiene tres plantas que embotellan cerveza de marca genérica. La cerveza se distribuye desde tres plantas a cinco bodegas. La tabla 8.21 sintetiza los costos de distribución y también las capacidades mensuales de las plantas y las necesidades en cada bodega, expresadas unas y otras en cientos de cajas. El cuerpo principal de la tabla contiene los costos de distribución en dólares por centenares de cajas. El problema consiste en calcular el número de cajas que deben distribuirse a la semana de cada planta a cada bodega, con objeto de minimizar los costos totales de distribución.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones de este modelo de transporte.

b) Por tanteo (ensayo y error), o algún otro medio, estime lo que en su opinión es una buena solución. (*Sugerencia*: una solución óptima no requerirá más que siete variables positivas.)

c) Resuelva sirviéndose del algoritmo del cruce de arroyo.

d) Si se cuenta con un paquete computarizado de transporte (o bien un paquete de programación lineal), resuelva el problema y encuentre la solución óptima.

7 Una compañía de renta de automóviles necesita reasignarlos para el mes entrante. Se proyecta que tres de sus ciudades dispongan de un excedente de vehículos, y se espera que cuatro ciudades muestren escasez. En la tabla 8.22 se incluye el costo

TABLA 8.22

Ciudad con excedente	Ciudad con escasez 1	2	3	4	Excedente de automóviles
1	$30	$45	$26	$28	20
2	32	40	28	24	18
3	27	38	30	32	32
Número de automóviles faltantes	10	15	12	20	

TABLA 8.23

Planta	Proyecto de construcción 1	2	3	4	Capacidad diaria, cargas de camión
1	$ 80	$100	$60	$ 70	120
2	40	80	75	60	100
3	100	120	90	110	80
Demanda diaria, cargas de camión	50	40	75	60	

de reasignar cada automóvil de una ciudad con exceso a una ciudad con escasez. También se incluyen allí la escasez y los excedentes proyectados de las ciudades. El problema radica en calcular el número de vehículos que deben reasignarse de cada ciudad con excedente a las ciudades con escasez, de modo que se minimicen los costos totales de la reasignación.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones.
b) Por tanteo, o algún otro medio, estime lo que en su opinión es una buena solución. (*Sugerencia*: una solución óptima no requerirá más que seis variables positivas.)
c) Resuelva el problema por medio del algoritmo del cruce de arroyo.
d) Si cuenta con un paquete de computación, encuentre la solución óptima del problema.

8 Si un problema de tipo transporte incluye 30 orígenes y 50 destinos, y la oferta y la demanda totales son iguales.

a) ¿Cuántas variables de decisión aparecerán en la formulación de la programación lineal?
b) ¿Cuántas restricciones?
c) ¿Y cuántas variables totales cuando el problema sea convertido en la forma general del método símplex?

9 Una compañía ha firmado un contrato para suministrar asfalto destinado a cuatro proyectos de construcción de carreteras. La compañía cuenta con tres plantas de asfalto que pueden proporcionar este material a cualquiera de los proyectos o bien a todos ellos. En la tabla 8.23 se incluyen las capacidades diarias de cada planta en cargas de camión, la demanda diaria de los proyectos de construcción y el margen de utilidad por cada carga enviada de cada planta a los proyectos.

La compañía desea determinar el número de camiones que debe asignar de cada planta a cada proyecto, con el propósito de maximizar la utilidad total diaria conseguida con el contrato.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones.
b) Por tanteo, o algún otro medio, estime lo que en su opinión es una buena solución. (*Sugerencia*: una solución óptima no requiere más de seis variables positivas.)
c) Resuelva por medio del algoritmo del cruce de arroyo.
d) Si se dispone de un paquete de computación, encuentre la solución óptima.

10 Buscadores de jugadores de baloncesto Un servicio de búsqueda de buenos jugadores de baloncesto a nivel nacional suministra informes sobre los jugadores más destacados en las escuelas de nivel medio. Esos informes se venden a las universidades y colegios que desean reclutarlos. El servicio tiene contrato con cinco coordinadores de búsqueda para que la efectúen y envíen informes escritos sobre los jugadores desde ocho regiones del país. El coordinador cobra cierta cantidad por cada jugador, y sus

TABLA 8.24 HONORARIOS A LOS BUSCADORES POR JUGADOR

Coordinador	Región 1	2	3	4	5	6	7	8	Número máximo de jugadores
1	$ 30	$ 40	$ 25	$ 45	$ 35				300
2	45	55		25	30	$ 40	$ 50		350
3	60		40		50	20	45	$ 30	325
4	40	40		30	50	35	40	25	250
5	50	60	30	40	80	35	25	45	400
Número de jugadores que deben buscarse	150	100	250	175	225	200	180	220	

honorarios varían según la región del país donde habite el jugador descubierto. Para el año entrante el servicio de búsqueda ha identificado a 1500 jugadores que tienen posibilidades de enrolarse en el baloncesto colegial. En la tabla 8.24 se resumen los honorarios que se cobran por informe de búsqueda, el número de jugadores de cada región y la cantidad máxima de jugadores que pueden ser asignados a cada coordinador. (*Nota*: cada coordinador subcontrata a buscadores independientes.) Los coordinadores no necesariamente realizan la búsqueda en todas las regiones. Ello se indica en la tabla 8.24 por la ausencia de honorarios.

El servicio de búsqueda de jugadores desea determinar cuántos jugadores en cada región deberían asignarse a los coordinadores a fin de minimizar el costo de obtener 1500 informes de los buscadores.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones.

b) Por tanteo estime lo que en su opinión es una buena solución. (*Sugerencia*: una solución óptima requerirá sólo 12 variables positivas.)

c) Si cuenta con un programa de computadora, obtenga la solución óptima. (*Sugerencia*: si utiliza un paquete de transporte, tendrá que asignar honorarios de búsqueda extremadamente altos [por ejemplo, $1000] a las casillas vacías de la tabla 8.24. Con ello se asegurará de que a los coordinadores no les hayan asignado jugadores fuera de sus regiones).

8.2 EL MODELO DE ASIGNACIÓN

Un caso especial del modelo de transporte lo constituye el ***modelo de asignación***. Este modelo es apropiado en problemas que incluyen la asignación de recursos a tareas (por ejemplo, asignar n personas a n tareas o trabajos distintos). Del mismo modo que la estructura especial del modelo de transporte tiene en cuenta los procedimientos de solución que son más eficientes que el método símplex, también la del modelo de asignación admite métodos de solución más eficientes que el método de transporte.

Forma y suposiciones generales

En el problema general de asignación se asignan n recursos (orígenes) a n tareas (destinos). Los ejemplos más usuales de estos problemas son la asignación de vendedores a territorios de ventas, tripulaciones de vuelos en líneas aéreas,

cuadrillas de limpieza de nieve en las zonas de una ciudad, unidades de ambulancia que acuden a llamadas de servicio, árbitros y oficiales de acontecimientos deportivos y abogados de bufetes que defienden a sus clientes en los casos judiciales o que les dan asesoría. El objetivo al efectuar las asignaciones puede ser lograr la minimización o la maximización (por ejemplo, minimizar el tiempo total necesario para realizar n tareas o maximizar la utilidad total que se consigue al asignar los vendedores a los territorios de ventas). Las siguientes suposiciones son importantes al formular modelos de asignación.

SUPOSICIÓN 1
Cada fuente es asignada a una tarea exclusivamente.

SUPOSICIÓN 2
A cada tarea se asigna exactamente un recurso.

SUPOSICIÓN 3
En lo tocante a la solución, el número de recursos disponibles para la asignación ha de ser igual al de las tareas que deben ejecutarse.

Si

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el recurso } i \text{ es asignado a la tarea } j \\ 0 \text{ si el recurso } i \text{ no es asignado a la tarea } j \end{cases}$$

c_{ij} = *contribución de la función objetivo si el recurso* i *se asigna a la tarea* j

n = *número de recursos y de tareas*

el modelo generalizado de asignación es

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximice} & z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{nn}x_{nn} & \\
\text{(o minimice)} & & \\
\text{sujeta a} & x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = 1 \quad (1) & \left.\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Cada recurso}\\ \text{asignado a}\\ \text{una tarea}\end{array} \\
 & + x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = 1 \quad (2) & \\
 & \vdots \qquad\qquad \vdots & \\
 & x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} = 1 \quad (n) & \\
 & x_{11} + \quad x_{21} + \cdots \quad + x_{n1} = 1 \quad (n+1) & \left.\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{A cada tarea}\\ \text{se le asigna}\\ \text{un recurso}\end{array} \\
 & x_{12} + \quad x_{22} + \cdots \quad + x_{n2} = 1 \quad (n+2) & \\
 & \vdots \qquad\qquad \vdots & \\
 & x_{1n} + \quad x_{2n} + \cdots \quad + x_{nn} = 1 \quad (n+n) & \\
 & x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \text{ para todas las } i \text{ y } j &
\end{array}$$

Adviértase en este modelo que las variables están restringidas a los dos valores de 0 (no asignación del recurso) o 1 (asignación del recurso). Esta restricción de los valores es muy diferente a los otros modelos de programación lineal que hemos examinado. Por otra parte, las restricciones (1) a (n) garantizan que cada recurso sea asignado a una tarea solamente. Las restricciones (n + 1) a (n + n) aseguran que a cada tarea se le asigne exactamente un recurso. Conforme a la suposición 3, el número de recursos deberá ser igual al de las tareas por lo que respecta a la solución del problema. Como en el caso del modelo

de transporte, esta condición podría ser impuesta artificialmente para determinado problema. Por último, nótese que todas las constantes del miembro derecho, que son equivalentes a los valores s_i y d_j en el modelo de transporte, son iguales a 1. La oferta de cada recurso es 1 unidad y la demanda de cada tarea es 1 unidad.

EJEMPLO 4

Asignación de los árbitros de la NCAA Se ha iniciado el torneo de baloncesto en la división I de la National Collegiate Athletic Association (NCAA). Al preparar los cuatro torneos regionales, el comité seleccionó cuatro equipos de árbitros que han sido considerados los más idóneos y aptos para el torneo del presente año. Cada equipo de oficiales está integrado por tres árbitros titulares y un sustituto, quien viaja al torneo regional por si alguna enfermedad, lesión u otras circunstancias impiden la participación de los árbitros titulares. El comité seleccionó los equipos de modo que cada árbitro pertenezca a una conferencia atlética diferente. (Con ello se pretende lograr un arbitraje lo más imparcial posible.)

A los oficiales se les paga un estipendio normal del torneo y además los gastos de viaje. Los viáticos varían según el sitio del torneo a que se les envíe. En la tabla 8.25 se resumen los gastos estimados de viaje de cada equipo según el torneo regional a que sea asignado. El comité quiere asignar los cuatro equipos de oficiales en una forma que reduzca al mínimo los gastos.

Este problema puede formularse como un modelo de asignación. Sea

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el equipo } i \text{ es asignado al torneo } j \\ 0 \text{ si el equipo } i \text{ no es asignado al torneo } j \end{cases}$$

He aquí la formulación del problema:

$$\text{Minimice } z = 2\,600x_{11} + 3\,200x_{12} + 2\,750x_{13} + 3\,050x_{14} + 2\,400x_{21} + \cdots + 3\,000x_{44}$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 && (1)\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 && (2)\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 && (3)\\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 && (4)\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 && (5)\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 && (6)\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 && (7)\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 && (8)\\
x_{ij} &= 0 \text{ o } 1 \text{ para todas las } i \text{ las } j
\end{aligned}$$

TABLA 8.25

Equipo de oficiales	Asignación al torneo regional (1) Oriental	(2) Oeste medio	(3) Lejano oeste	(4) Suroeste
1	$2 600	$3 200	$2 750	$3 050
2	2 400	2 800	3 250	3 400
3	2 950	3 000	3 400	2 950
4	3 600	2 900	3 300	3 000

Las restricciones (1) a (4) aseguran que cada equipo de oficiales sea asignado a un lugar de torneo solamente; las restricciones (5) a (8) garantizan que a cada sitio se le asigne exactamente un equipo de oficiales.

Métodos de solución

Los modelos de asignación pueden resolverse mediante diversos procedimientos, a saber: *enumeración total de todas las soluciones, métodos de programación binaria*, el *método símplex*, los *métodos de transporte (cruce de arroyo)* y *algoritmos de propósito especial*. Estas técnicas se enumeran en un orden que refleja una eficiencia *creciente*. Se distingue entre los modelos de asignación y los modelos de programación estándar y de transporte por su estructura especial. También esos modelos se prestan a procedimientos más eficientes de solución por medio de algoritmos de propósito especial, los cuales están diseñados para sacar partido de esta estructura singular. Uno de los más conocidos es el ***método húngaro***. Aunque no se explica aquí, los lectores que deseen información más pormenorizada al respecto pueden consultar otras fuentes.*

La figura 8.3 contiene un paquete computarizado para resolver los problemas de asignación.† El problema resuelto es la formulación de la asignación de árbitros mencionada en el ejemplo 4. Como en el caso del paquete computarizado de los modelos de transporte, las respuestas del usuario a la entrada de datos vienen en negritas para distinguirlas de las de la computadora. Adviértase que los gastos de viaje están minimizados en un valor de $11 000, cuando el equipo 1 es asignado al torneo regional del Lejano Oeste, el equipo 2 al torneo regional oriental, el equipo 3 al torneo regional suroriental y el equipo 4 al torneo regional del medio oeste.

Ejercicios de seguimiento de la sección 8.2

1 Programación de los tribunales El administrador de un tribunal de distrito quiere asignar cinco jueces a cinco listas de causas judiciales. Ha hecho estimaciones del número de días que necesitaría cada uno para terminar cada causa. Las estimaciones se incluyen en la tabla 8.25 y se basan en la composición de los tipos de caso en cada lista y en el análisis del registro de cada juez, así como en su experiencia para ventilar diversos tipos de casos.

a) Formule una función objetivo y el conjunto de restricciones.

TABLA 8.26

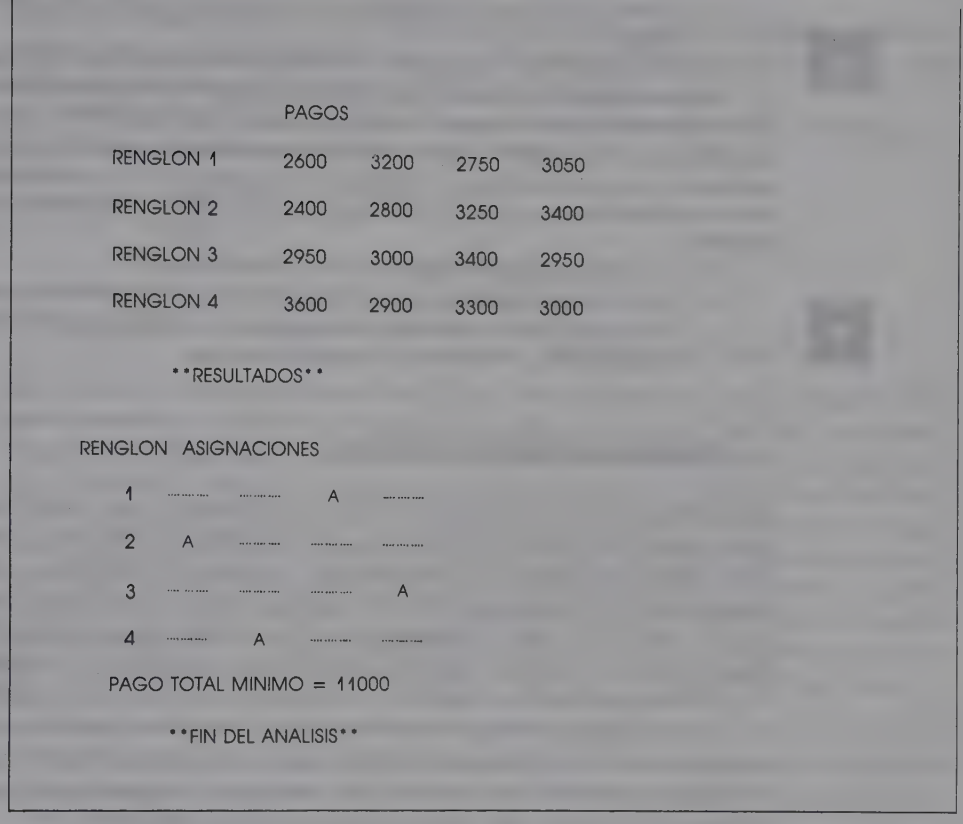
	Lista de causas				
Juez	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	20	18	22	24	21
2	18	21	26	20	20
3	22	26	27	25	19
4	25	24	22	24	18
5	23	20	25	23	22

*Véase a Richard I. Levin, Charles A. Kirkpatrick y David S. Rubin, *Quantitative Approaches to Management*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1982, pp. 486-492.

†"ASGT1", según Warren J. Erikson y Owen P. Hall, hijo, *Computer Models for Management Science*, 2a. ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.

```
**************************
*                        *
*   ANALISIS SEGUN EL MODELO   *
*        DE ASIGNACION     *
*                        *
**************************

TAMAÑO DEL MODELO
   NUMERO DE RENGLONES (1 A 25)          4

   TIPO DE PROBLEMA  (1=MAX, -1=MIN) ? -1

ENTRADA DEL MODELO POR RENGLON
    RENGLON 1
COLUMNA  1    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 2600
COLUMNA  2    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3200
COLUMNA  3    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 2750
COLUMNA  4    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3050

    RENGLON 2
COLUMNA  1    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 2400
COLUMNA  2    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 2800
COLUMNA  3    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3250
COLUMNA  4    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3400

    RENGLON 3
COLUMNA  1    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 2950
COLUMNA  2    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3000
COLUMNA  3    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3400
COLUMNA  4    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 2950

    RENGLON 4
COLUMNA  1    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3600
COLUMNA  2    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 2900
COLUMNA  3    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3300
COLUMNA  4    PAGO (CUALQUIER NUMERO)  ? 3000


**************************
*                        *
*   ANALISIS SEGUN EL MODELO   *
*        DE ASIGNACION     *
*                        *
**************************

 **INFORMACION INTRODUCIDA**


NUMERO DE RENGLONES:  4
NUMERO DE COL:  4
```

FIGURA 8.3 Solución computarizada al modelo de asignación de árbitros (ejemplo 4).



PAGOS

RENGLON 1	2600	3200	2750	3050
RENGLON 2	2400	2800	3250	3400
RENGLON 3	2950	3000	3400	2950
RENGLON 4	3600	2900	3300	3000

RESULTADOS

RENGLON	ASIGNACIONES			
1	.....	.....	A	.....
2	A	.....	.....	.....
3	.....	.....	.....	A
4	.....	A	.....	.....

PAGO TOTAL MINIMO = 11000

FIN DEL ANALISIS

FIGURA 8.3 Solución computarizada al modelo de asignación de árbitros (ejemplo 4).

b) Sírvase de su propio método para identificar lo que, a su juicio, es la solución óptima.

c) Si se dispone de un paquete computarizado de asignación (o de un paquete de transporte o programación lineal), encuentre la solución óptima.

2 Asignación de vuelos de flete Una aerolínea tiene cinco aviones disponibles para vuelos de flete en la presente semana. Siete organizaciones han solicitado el uso de un avión. Basándose en un análisis de los ingresos esperados con cada flete pedido y de los gastos de operación estimados, la compañía ha llegado a cifras de utilidades esperadas resultantes de la asignación de los cinco aviones al flete propuesto. Dichas cifras se dan en la tabla 8.27

Si el objetivo es asignar los cinco aviones a cinco de los vuelos de flete,

a) Formule la función objetivo y las restricciones.

TABLA 8.27

	Solicitud de viaje de flete						
Avión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	$2 500	$3 000	$1 000	$2 800	$3 200	$3 500	$2 400
2	1 800	3 500	2 800	4 300	2 700	3 400	3 000
3	2 300	4 000	1 800	4 000	2 800	3 600	3 600
4	3 000	3 600	2 100	2 000	2 500	3 000	3 200
5	2 800	3 800	2 500	2 700	3 000	2 500	3 700

b) Sírvase de su propio método para identificar lo que a su juicio es la solución óptima.

c) Si se dispone de un paquete de computación, encuentre la asignación óptima.

3 **Asignación de la fuerza de ventas** Un editor de libros universitarios desea asignar cinco representantes de ventas a cinco territorios. La dirección ha estimado las ventas anuales (en miles de dólares) que cada representante generará si es asignado a diversos territorios. Las estimaciones se resumen en la tabla 8.28. La dirección quiere asignar cinco representantes a cinco territorios de modo que se maximicen las ventas totales anuales.

a) Formule la función objetivo y las restricciones.

b) Use su propio método para identificar lo que a su juicio es la solución óptima.

c) Si se dispone de un paquete de computación (programación lineal, transporte o asignación), encuentre la solución óptima.

8.3 PROGRAMACIÓN EN ENTEROS

En la explicación de la programación lineal que se dio en los capítulos 6 y 7, una suposición implícita fue que a las variables de decisión x_j podían asignárseles valores no enteros o fraccionarios. La solución óptima a un problema de programación lineal podría recomendar la producción de unidades fraccionarias de los productos, la asignación de números fraccionarios de personas a diversas tareas o bien la selección de partes de proyectos de inversión de capital. En algunos problemas puede tener escasa importancia la asignación de enteros. Los ajustes correspondientes a una solución obtenida con el método símplex, como el "redondeo" de los valores no enteros, podrían dar origen a una solución óptima en enteros. Sin embargo, los ajustes podrían producir soluciones en enteros que disten mucho de ser óptimas.

La identificación de la solución óptima en enteros puede ser difícil en extremo y muchas aplicaciones requieren variables de decisión con valores enteros; por tanto, se ha desarrollado un acervo de conocimientos denominado ***programación en enteros*** y este tema se explicará en la presente sección.

Forma y suposiciones generales

La programación en enteros es un caso especial de la programación lineal en el cual todas (o algunas) variables tienen que ser enteros. Cuando todas deben ser enteros, al modelo matemático se le llama ***modelo de programación en enteros puros***. Y cuando sólo algunos han de serlo, recibe el nombre de ***modelo de programación de enteros mixtos***. El modelo de asignación constituye un ejemplo

TABLA 8.28 VENTAS ANUALES ESTIMADAS, EN MILES DE DÓLARES

	Distrito de ventas				
Representante de ventas	1	2	3	4	5
1	125	140	90	150	110
2	180	190	160	175	200
3	140	250	240	265	210
4	220	200	240	250	225
5	275	300	260	290	310

de la clase especial de modelos de programación en enteros denominados ***modelos de programación binaria***. En estos últimos, todas las variables o algunas, están restringidas a los valores de dos enteros de 0 a 1.

Para explicar con un ejemplo algunas consideraciones de la programación en enteros, examínese el siguiente problema:

$$\text{Maximice } z = 60x_1 + 20x_2$$

sujeta a

$$6x_1 + 4x_2 \leq 40$$
$$6x_1 + 13.5x_2 \leq 54$$
$$x_1, x_2 = \text{enteros no negativos}$$

La figura 8.4 muestra la solución del problema; presenta algunos aspectos interesantes de los problemas de programación en enteros. Primero, en un problema de este tipo, el área de las soluciones factibles es un subconjunto del área que existiría si no hubiera ninguna condición de enteros. Toda el área sombreada de la figura 8.4 representa el área de las soluciones factibles, si x_1 y $x_2$pudieran adoptar valores continuos. Las soluciones factibles del problema en enteros consta del conjunto finito de 23 puntos denotado por las marcas de látice (+) dentro del área sombreada. En otras palabras, los valores de x_1 y x_2 deben satisfacer las dos restricciones, pero sólo se permiten valores enteros. A partir de la observación anterior podría llegarse a la siguiente conclusión.

□ *El conjunto de soluciones factibles en un problema de programación en enteros es un subconjunto del equivalente no entero del problema. Es decir, el área de las soluciones factibles en un problema de esta clase no puede ser mayor que el de la versión del problema en programación lineal recta.*

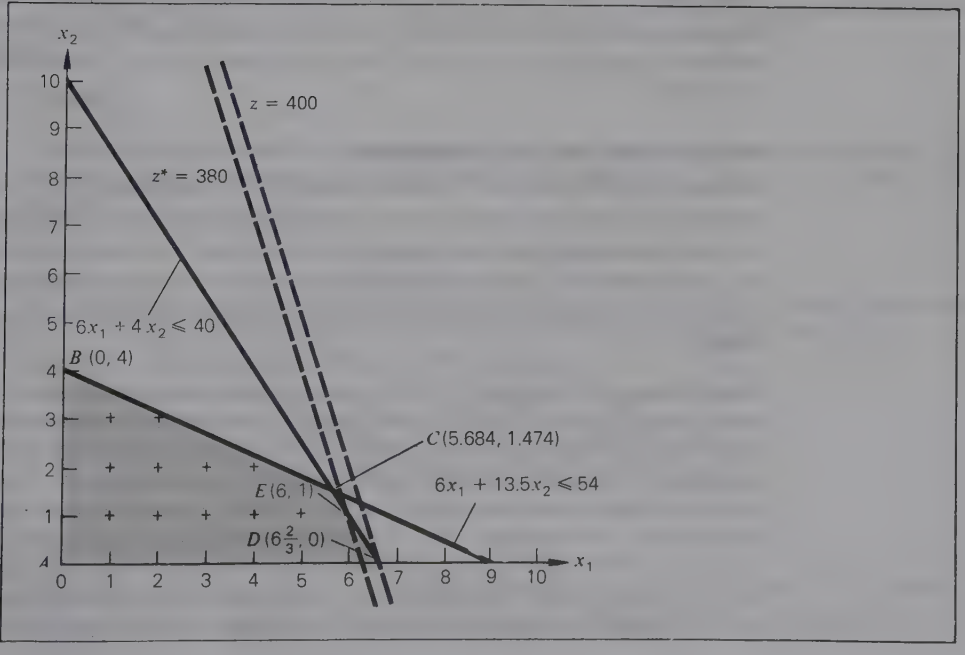


FIGURA 8.4

Reflexionemos sobre las implicaciones de lo anterior en lo tocante a la solución óptima. Se hará evidente que:

□ *El valor óptimo de la función objetivo no podrá ser mejor en el problema de programación en enteros que el valor óptimo en el problema de programación lineal recta.*

A continuación observe en la figura 8.4 que el valor óptimo de z en el problema de programación lineal recta es 400. Ello ocurre en el punto D donde $x_1 = 6\frac{2}{3}$ y $x_2 = 0$, lo cual no cumple con la restricción de enteros. Si la función objetivo es desplazada en dirección paralela a sí misma hacia el origen, el primer punto tocado es E, que ocurre en $x_1 = 6$ y $x_2 = 1$. Es el punto donde z se maximizará, y su valor óptimo será 380. Esta solución ejemplifica que la restricción de enteros es una restricción adicional que suele afectar al valor óptimo de la función objetivo. La diferencia entre los valores óptimos de z en las versiones entera y no entera de un problema recibe el nombre de ***costo de la indivisibilidad***. La diferencia, que en este problema es $400 - 380 = 20$, representa el costo de oportunidad de no poder asignar valores no enteros a todas las variables en la solución óptima.

Por último, este problema muestra la dificultad que conlleva resolver un problema de programación en enteros por medio del método símplex y redondear cualquiera valores no enteros para conseguir la solución óptima en enteros. Suponiendo que el método símplex eligiera el punto en la esquina D como el valor óptimo, se redondearía el valor de x_1 hacia arriba y hacia abajo, obteniéndose los puntos enteros (7, 0) o bien (6, 0). En la figura 8.4 es evidente que (7, 0) no es factible. El punto (6, 0) es factible, pero no óptimo, pues tiene un valor z de 360. El hecho de poder *errar* el punto en la esquina óptimo por el redondeo en un problema tan pequeño indica las dificultades de esta técnica. Pongamos el caso de un problema más grande que tenga una base óptima formada por 100 variables de valores enteros y 100 variables de valores no enteros. Imagínese el número de combinaciones de redondeo que podrían ensayarse.

Formulación de los problemas

Muchos problemas son intrínsecamente de programación en enteros. Otros podrían ser de otra índole, pero poseen características especiales susceptibles de modelarse mediante las variables de enteros. Los ejemplos 5 a 8 son un caso del modelado de las características comunes de los problemas.

EJEMPLO 5

(Restricciones de tipo y-o [≤] En algunos problemas pueden existir restricciones mutuamente excluyentes; es decir, sólo uno de un conjunto de restricciones puede ser *aplicable*. Así, supóngase que una aerolínea está tratando de decidir cuál de dos tipos de aviones de propulsión a chorro debe emplear en un contrato de flete que ha firmado y cómo cargar el avión escogido. Un problema es la capacidad de volumen en el área de carga de cada aparato. Los dos tipos de aviones tienen capacidades de almacenamiento de 3000 y 3600 metros cúbicos, respectivamente. Las cajas que se usarán para enviar la carga tienen capacidades de volumen de 10, 15, 20 o 30 metros cúbicos. Así pues, el modelo de este problema deberá incluir restricciones de la forma general

volumen cargado en el avión $\leq$ volumen disponible

Si x_j es el número de cajas de tamaño j cargadas en el avión seleccionado, las restricciones correspondientes serían

$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 \leq 3\,000 \quad \text{si se selecciona el avión 1}$$

o bien

$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 \leq 3\,600 \quad \text{si se selecciona el avión 2}$$

Sólo una de las restricciones debería ser operacional (según el plano que se escoja); de ahí que para asegurar esto se introduzca una variable y 0 − 1 y se modifiquen ambas restricciones como sigue:

$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 \leq 3\,000 + My$$
$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 \leq 3\,600 + M(1 - y)$$

Se supone que M es una constante positiva extremadamente grande y que y debe declararse una variable 0 − 1.

El efecto de esta modificación es que a y se le asigna un valor de 0 si el tipo de avión 1 se escoge y un valor de 1 en caso de que se seleccione el tipo de avión 2. Si $y = 0$, el miembro derecho de la segunda restricción se torna muy grande (lo cual la hace redundante), mientras que el miembro derecho de la primera restricción se convierte en 3000, lo cual sucede cuando se selecciona el avión 1. Si $y = 1$, el miembro derecho de la primera restricción adopta un valor extremadamente grande; en cambio, el miembro derecho de la segunda restricción se vuelve 3600. En el segundo caso, $y = 1$ implica la selección del avión 2, y la restricción correspondiente del volumen se vuelve operativa. En uno y otro caso, la constante del miembro derecho para una de las restricciones se hace muy grande. Con ello se elimina cualquier efecto que pudiera haber tenido la restricción original. Los valores que se ajusten a todas las demás restricciones del problema satisfarán fácilmente esta restricción modificada.

El tratamiento de las restricciones disyuntivas varía según los tipos de las restricciones. El siguiente ejemplo es un caso de dos restricciones ($\leq$).

EJEMPLO 6

***p* restricciones mutuamente excluyentes ($\leq$).** Si sólo una de las p restricciones ($\leq$) debe ser operacional, pueden introducirse p variables 0 − 1 junto con la restricción agregada.

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_p = p - 1$$

Así, supóngase en el ejemplo anterior que se cuenta con un tercer tipo de avión que posee una capacidad efectiva de volumen de 4000 metros cúbicos. Esta situación es susceptible de modelado mediante las restricciones.

$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 \leq 3\,000 + My_1$$
$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 \leq 3\,600 + My_2$$
$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 \leq 4\,000 + My_3$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 2$$
$$y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ o } 1$$

En esta formulación, la última restricción garantiza que dos de las tres 0 − 1 variables deben ser iguales a 1, lo cual hace redundantes las dos restricciones correspondientes.

A la variable restante 0 − 1 ha de asignársele un valor de 0, siendo operativa la restricción correspondiente y asumiendo su forma original en el problema. También aquí este tratamiento se aplica sólo a un conjunto de restricciones p mutuamente excluyentes ($\leq$). Por lo demás, las variables y_i deben ser declaradas como variables 0 − 1 en alguna parte de la formulación del problema.

EJEMPLO 7

***p* restricciones (≤), *k* de las cuales deben ser operativas** Si un problema contiene p restricciones ($\leq$) y de ellas k deben ser operativas, pueden agregarse p 0 − 1 variables como en el ejemplo 6 y se suma una restricción de la forma

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_p = p - k$$

Por ejemplo, para asegurarse de que tres de las cuatro restricciones siguientes sean operativas,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 15 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 65 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 45 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 36 \end{aligned}$$

puede modificarse así:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 15 + My_1 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 65 + My_2 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 45 + My_3 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 36 + My_4 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 1, \end{aligned}$$

con y_i como variable 0 − 1. Para ilustrar el efecto de este tratamiento, si $y_2 = 1$ y $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, las constantes del miembro derecho para las restricciones 1, 3 y 4 asumen sus valores originales. Las constantes del miembro derecho para la restricción 2 se vuelven muy grandes y la hacen redundante.

EJEMPLO 8

Variables interdependientes En algunos problemas puede haber una interdependencia entre las variables. En el problema de inversión de capital supóngase que

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ si se escoge el proyecto } j \\ 0 \text{ si no se escoge el proyecto } j \end{cases}$$

Supóngase que una condición es que no puedan aceptarse simultáneamente los proyectos 2 y 3. Ello puede garantizarse por medio de la restricción

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

Si no se selecciona ninguno de los dos proyectos, x_2 y x_3 serán iguales a cero y la restricción queda satisfecha como una desigualdad estricta ($0 < 1$). Si se acepta uno de los proyectos, la restricción se cumple como una igualdad ($1 = 1$). Obsérvese que la restricción del miembro derecho impide seleccionar los dos proyectos ($1 + 1 \not\leq 1$).

Supóngase, en el mismo problema, que los proyectos 3 y 4 se relacionan entre sí y que, en caso de escoger uno, también hay que seleccionar el otro. Esta condición puede modelarse con la restricción

$$x_3 = x_4$$

o bien

$$x_3 - x_4 = 0$$

En el mismo problema, supóngase que el proyecto 7 no puede seleccionarse a menos que se escoja también el proyecto 6. Quizá este último requiere la creación de una empresa dedicada a la investigación de la energía solar y el proyecto 7 exige una ampliación de la empresa. Sin duda, no puede conseguirse una expansión si la empresa nunca se forma. Es posible que se funde sin que ocurra la expansión. Esta condición se modela con la restricción

$$x_7 \leq x_6$$

o bien

$$-x_6 + x_7 \leq 0$$

Los ejemplos 9 y 10 son aplicaciones muy completas de la programación en enteros.

EJEMPLO 9

Programación de empleados Un restaurante que sirve comidas de preparación rápida está planeando su programa de verano. Cuenta con un núcleo de empleados permanentes, pero se basa principalmente en los de medio tiempo (sobre todo estudiantes). Tras un análisis de los volúmenes de clientes en varias horas del día, se han hecho estimaciones de las necesidades de empleados de medio tiempo por intervalos de 2 horas durante el día. En la tabla 8.29 se incluyen esas necesidades.

La dirección diseñó varios turnos de trabajo para los empleados a medio tiempo, entre los que ellos pueden elegir. Los turnos se muestran en la tabla 8.30. El problema radica en determinar el número de empleados de medio tiempo que deben ser asignados a cada turno, con objeto de asegurarse de que en cada periodo de trabajo se disponga de la cantidad mínima de ellos. El objetivo es minimizar el número total de *horas-hombre* trabajadas diariamente.

Para formular este problema, *primero se define la variable entera x_j como el número de empleados asignado al turno j.* La función objetivo tiene la forma general

$$z = h_1x_1 + h_2x_2 + \cdots + h_{10}x_{10}$$

donde h_j es el número de horas trabajadas por cada empleado durante el turno j. Para el problema

$$z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 5x_9 + 4x_{10}$$

TABLA 8.29 PROGRAMA DE LAS NECESIDADES DE EMPLEADOS

Periodo	Hora	Número mínimo de empleados a medio tiempo
1	7 A.M.–9 A.M.	9
2	9 A.M.–11 A.M.	4
3	11 A.M.–1 P.M.	14
4	1 P.M.–3 P.M.	9
5	3 P.M.–5 P.M.	6
6	5 P.M.–7 P.M.	16
7	7 P.M.–9 P.M.	10
8	9 P.M.–11 P.M.	12

TABLA 8.30 POSIBLES TURNOS DE TRABAJO

Turno	Horas trabajadas
1	7 A.M.–9 A.M.
2	7 A.M.–11 A.M.
3	8 A.M.–12 Noon
4	10 A.M.–2 P.M.
5	11 A.M.–3 P.M.
6	2 P.M.–6 P.M.
7	4 P.M.–8 P.M.
8	5 P.M.–8 P.M.
9	5 P.M.–10 P.M.
10	7 P.M.–11 P.M.

Las únicas restricciones del problema pertenecen a la cobertura requerida en cada uno de los ocho periodos de trabajo. Para cada periodo, la forma general de la restricción es

> Número de empleados que trabajan durante el periodo i
> $\geq$ número mínimo de empleados que se necesitan en el periodo i

Una suposición es que se cuentan las personas sólo cuando están disponibles para todo el periodo. Por ejemplo, las que son asignadas al turno 3 no pueden contarse cuando se consideran las necesidades del periodo 1 (aun cuando estarán disponibles durante una parte del mismo).

Para formular las restricciones, es preciso identificar cuáles de los 10 turnos dan cobertura cada uno de los ocho periodos. En el periodo 1 (7 de la mañana a 9 de la mañana), ofrecen cobertura a los empleados que trabajan en los turnos 1 y 2. Así pues, el número *total* de los asignados durante los dos turnos debe ser por lo menos 9, o bien

$$x_1 + x_2 \geq 9$$

La formulación completa del problema es

Minimice $z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 5x_9 + 4x_{10}$.

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 9 && \text{(Periodo 1)}\\
x_2 + x_3 &\geq 4 && \text{(Periodo 2)}\\
x_4 + x_5 &\geq 14 && \text{(Periodo 3)}\\
x_5 &\geq 9 && \text{(Periodo 4)}\\
x_6 &\geq 6 && \text{(Periodo 5)}\\
x_7 + x_8 + x_9 &\geq 16 && \text{(Periodo 6)}\\
x_9 + x_{10} &\geq 10 && \text{(Periodo 7)}\\
x_{10} &\geq 12 && \text{(Periodo 8)}\\
x_j &\text{ enteros no negativos para todas las } j
\end{aligned}$$

Trate de verificar las restricciones de los periodos 2 a 8.

TABLA 8.31

Bodega	Sucursal al menudeo 1	2	3	4	5	6	Capacidad mensual, cientos de galones	Costo mensual del arrendamiento
1	$20	$22	$ 20	$25	$23	$ 18	250	$ 800
2	24	26	20	25	28	22	400	1 400
3	28	24	30	25	20	26	350	1 150
4	16	36	25	23	32	20	275	925
Necesidades mensuales, cientos de galones	80	60	100	75	90	120		

EJEMPLO 10

Bodegas de distribución Una nueva compañía está estableciendo canales de distribución para su producto: agua mineral embotellada. Está estudiando cuatro posibles bodegas de distribución para un almacenamiento intermedio antes de distribuirla a sus seis sucursales al menudeo. Puede arrendarse espacio dentro de las bodegas actuales por mes. La tabla 8.31 resume la información pertinente para los encargados de la toma de decisiones. En el cuerpo principal de ella se incluyen las cifras de costos para distribuir 100 galones de cada bodega a cada sucursal. También se dan las capacidades mensuales disponibles en cada bodega y las necesidades mensuales en las seis sucursales al menudeo.

Formule el modelo de este problema, el cual una vez resuelto determinará en qué bodega hay que rentar espacio y el número (en cientos) de galones que se distribuirán de cada bodega a cada sucursal, en forma tal que se minimice la suma de los costos mensuales de la distribución y el arrendamiento.

SOLUCIÓN

Este problema es una modificación del modelo clásico de transporte. Existen cuatro posibles orígenes que están siendo estudiados como fuentes de abastecimiento para seis destinos. Hay que determinar cuáles orígenes seleccionar y cuántas unidades deberán distribuirse desde cada origen a cada destino. Para formular el problema, sea

$$x_{ij} = \textit{número de galones (en cientos) distribuidos de la bodega } i \textit{ a la sucursal al menudeo } j$$

$$y_i = \begin{cases} 1 \textit{ si se renta la bodega } i \\ 0 \textit{ si no se renta la bodega } i \end{cases}$$

La función objetivo representa el costo total mensual, o bien

$$z = (\text{costos mensuales de distribución}) + (\text{costos mensuales de arrendamiento})$$
$$= (20x_{11} + 22x_{12} + 20x_{13} + \cdots + 20x_{46}) + (800y_1 + 1\,400y_2 + 1\,150y_3 + 925y_4)$$

Obsérvese que un costo mensual de arrendamiento se suma si se escoge un almacén ($y_i = 1$). Si no se escoge, la correspondiente y_i es cero y no se suma el costo de arrendamiento.

Hay dos tipos de restricciones que es preciso tener presentes. Primero, existen capacidades mensuales en cada posible lugar de las bodegas. Sin embargo, tales restricciones se cumplirán sólo si el lugar correspondiente se selecciona. Para la bodega 1 la restricción apropiada es

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 250y_1$$

Nótese que la constante del miembro derecho se multiplica por y_1. Si $y_1 = 1$, se selecciona el sitio 1 y la capacidad en este lugar es de 250. Si $y_1 = 0$, no se selecciona el lugar 1 y la constante del miembro derecho es 0, lo cual refleja ausencia de capacidad. Así pues, $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{16}$ deben ser igual a cero, lo cual indica ausencia de embarques desde ese lugar. La formulación debería incluir una restricción de este tipo para cada lugar de las bodegas.

Se satisfarán las necesidades de cada sucursal al menudeo, si en las sucursales se incluye la restricción adecuada. He aquí un ejemplo: la restricción relacionada con la sucursal 1 es

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 80$$

A continuación se da la formulación completa del problema. Hay cuatro restricciones de la oferta en las bodegas y seis restricciones de la demanda en las sucursales dentro de este modelo de programación lineal en enteros mixtos.

$$\text{Minimice } z = 20x_{11} + 22x_{12} + 20x_{13} + \cdots + 20x_{46} + 800y_1 + 1400y_2 + 1150y_3 + 925y_4$$

sujeta a

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} &\leq 250y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} &\leq 400y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} &\leq 350y_3 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} &\leq 275y_4 \end{aligned}\right\} \text{Restricciones de las existencias en la bodega}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 80 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 100 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 75 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 90 \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} &= 120 \end{aligned}\right\} \text{Restricciones de la demanda al menudeo}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para todas las } i \text{ y } j$$

$$y_i = 0 \text{ o } 1 \text{ para todas las } i$$

Métodos de solución

Se cuenta con abundantes métodos para resolver los problemas de programación en enteros. Algunos se generalizan y aplican a todas las clases de esos problemas. Otros son más especializados, pues están diseñados para abordar la estructura de ciertos tipos de problemas como los modelos de enteros mixtos o los modelos binarios.

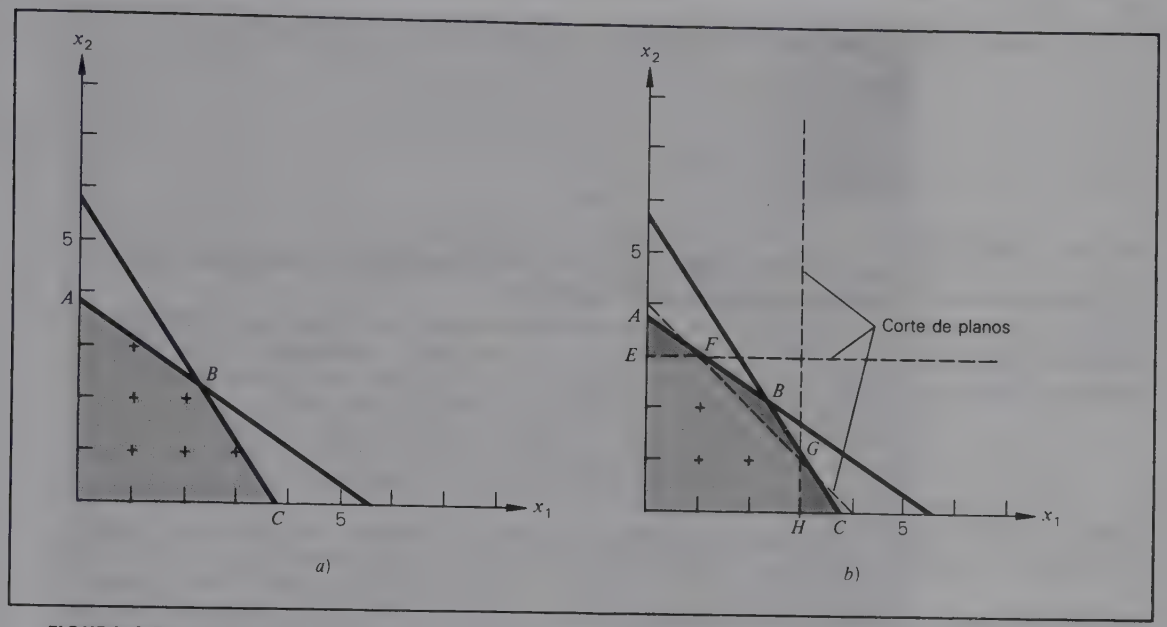


FIGURA 8.5
Principio del corte de plano *a)* Área original de las soluciones factibles. *b)* Área reducida de las soluciones factibles.

Dos de las técnicas más conocidas son los ***algoritmos de rama y frontera*** y los ***algoritmos de corte de plano***. Los primeros suelen comenzar con la solución de la programación lineal por el método símplex. Si esta solución no satisface las condiciones del modelo de programación en enteros, el problema original se divide sucesivamente en subconjuntos de problemas que tienen más restricciones que el inicial. Ciertos subproblemas se seleccionan por medio de procedimientos especiales de búsqueda y se resuelven mediante el método símplex. Al comparar las soluciones de ellos, en particular con las mejores soluciones de que se dispone en el momento presente, con el tiempo llega a encontrarse la solución óptima. Una ventaja de estos algoritmos es que se sirven del método símplex.

Los métodos de corte de plano operan de tal manera que usan e introducen por fuerza puntos en la esquina "enteros" dentro del área de soluciones factibles. Según se dijo al hablar de la programación lineal, una solución óptima ocurre en ese punto de las soluciones factibles. Puesto que todos los puntos en la esquina difícilmente son enteros, los métodos de corte de plano "se desprenden" en el área de las soluciones factibles y con ello reducen su tamaño, pero sin suprimir ningún punto entero. El corte de planos se manifiesta en las restricciones que se agregan de modo secuencial al problema. La finalidad es hacer que el punto óptimo quede en una posición de punto en la esquina, de manera que el método símplex lo identifique como óptimo. En la figura 8.5 se describe este principio. La figura 8.5*a* muestra el área original de las soluciones factibles. La figura 8.5*b* contiene el área "desprendida hacia abajo", con los puntos en la esquina enteros resultantes, *E, F, G,* y *H*. Las regiones sombreadas representan las partes del área original suprimidas por los tres planos de corte que se agregaron al problema. Si el método símplex se usa para resolver este problema modificado, se encontrará la solución óptima en enteros.

UNA APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN EN ENTEROS A LA INDUSTRIA DE LA AERONÁUTICA*

La Flying Tiger Line es una de las compañías de transporte aéreo más importantes del mundo. En 1977, implantó un sistema de planeación de la tripulación sirviéndose de los métodos de la programación en enteros. El sistema se usó para planear los programas en forma mensual. Por esa época cada tripulación estaba integrada por tres pilotos. Debido a las necesidades de descanso de la tripulación cada avión requería en promedio ocho tripulantes para realizar diariamente su servicio.

El proceso de planeación de la tripulación comienza con la determinación de un programa de vuelo y luego viene la asignación de la tripulación a él. Con el modelo de programación en enteros se han conseguido beneficios directos e indirectos para la aerolínea. Uno de los beneficios indirectos fue su capacidad para generar programas de vuelo con mucha mayor rapidez que en dos años anteriores. Y eso le permitió disponer de más tiempo para hacer ajustes especiales cuando surgen conflictos. Entre los beneficios directos se cuenta ahorros por más de $300 000 al año en los costos de la tripulación.

*Roy E. Marsten, Michael R. Muller, y Christine L. Killion, "Crew Planning at Flaying Tiger: A Successful Application of Integer Programming," *Management Science,* vol. 25, núm. 12, diciembre de 1977, pp. 1175-1183.

Ejercicios de seguimiento de la sección 8.3

1 En el siguiente problema de programación en enteros

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 7x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeta a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \text{ enteros no negativos} \end{aligned}$$

a) Resuelva por el método gráfico.
b) Resuelva por el método gráfico sin la restricción de enteros.
c) ¿Cuál es el costo de la indivisibilidad?

2 En el problema planteado en el ejercicio 1, suponga que x_1 debe ser entera pero que x_2 puede ser continua (no negativa).
a) Dibuje el área de las soluciones factibles.
b) Obtenga la solución óptima.

3 Modifique las siguientes restricciones si son mutuamente excluyentes.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 175 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 110 \\ x_1 + 2x_3 &\leq 200 \\ 3x_2 - x_3 &\leq 180 \end{aligned}$$

4 Modifique las restricciones en el ejercicio 3 si tres de las cuatro deben cumplirse en la solución óptima.

5 El director de un torneo de tenis está preparando una lista de un grupo selecto de profesionales a quienes invitar al torneo de fin de semana. La variable x_j es igual a 1 si el jugador j es invitado y a 0 si no se le invita. Suponga que se está estudiando la conveniencia de invitar a 20 jugadores. Formule las restricciones con las cuales el director del torneo se asegura de que:

a) Se invitará a 8 jugadores.
b) Se invitará a los jugadores 1 y 5.
c) Si se invita al jugador 7, también habrá que invitar al jugador 13.
d) Los jugadores 9 y 12 serán invitados o bien no se invitará a ninguno de ellos. (Son personas casadas y aceptan jugar sólo si ambos cónyuges se incluyen en el torneo.)
e) Los jugadores 4 y 15 no pueden ser invitados. (Sienten un gran odio uno por el otro.)

6 Asignaciones para la redada El FBI planea asestar el golpe final a una pandilla de miembros del grupo "pantera gris". Según sus informantes, la pandilla está escondida en cierta sección de la ciudad. Con el propósito de capturar a esos delincuentes, el comandante desea organizar una redada. Hay 15 probables puntos de acceso y de salida en el lugar sospechoso de la ciudad. El comandante ha identificado ocho posibles lugares de la redada desde donde es posible vigilar los puntos de acceso. En la tabla 8.32 se incluyen los puntos de acceso que pueden observarse desde cada lugar. El comandante quiere determinar el número mínimo de lugares de la redada o ataque final para poder observar todos los puntos de acceso.

a) Formule el modelo de programación binaria para este problema, si x_j es 1 en el caso de que se utilice la ubicación de la redada j y 0 en caso contrario.
b) Aplicando cualquier razonamiento que desee, trate de encontrar la solución óptima.
c) Si se dispone de un paquete computarizado apropiado, encuentre la solución óptima.

TABLA 8.32

Ubicación de la redada	Puntos de acceso observables
1	1, 3, 5, 6
2	1, 2, 7, 9
3	4, 6, 8, 11
4	10, 14, 15
5	9, 10, 11, 12
6	1, 13, 14, 15
7	4, 13, 15
8	5, 6, 7, 12

8.4 PROGRAMACIÓN DE METAS

Todos los modelos de programación metamática analizados hasta ahora suponen que existe una sola meta o criterio susceptible de cuantificarse y expresarse con una función objetivo. La suposición de una sola meta simplifica demasiadas soluciones. En realidad, los que toman decisiones tienen a menudo múltiples criterios que pueden considerar al momento de adoptar una determinación. Los criterios pueden presentarse distintas dimensiones (maximizar utilidades o maximizar la participación en el mercado), y éstas pueden entrar en conflicto entre sí (minimizar el costo de la atención médica o maximizar el nivel de ella). Otra cuestión que se estudiará aquí es que algunos criterios no son fácilmente cuantificables; por ejemplo, maximizar la satisfacción del paciente o la sensación de una buena salud.

Un modelo matemático de programación, denominado ***programación de metas***, se explica en la presente sección. Nos concentraremos en la programación *lineal* de metas, que constituye una extensión de la programación lineal. Este modelo se aplica a problemas que tengan objetivos múltiples y cuantificables.

Forma y suposiciones generales

Los modelos de programación de metas tienen en cuenta la consideración de metas individuales o múltiples. En el segundo caso, pueden ser 1) metas antagónicas, 2) metas contrarias y 3) metas de diferentes dimensiones. A diferencia de otros modelos matemáticos de programación, que optimizan un solo objetivo y que ya hemos descrito, la programación de metas trata de encontrar el punto que cumpla *mejor* con la meta o metas del problema.

Una suposición de este modelo consiste en que cada meta es cuantificable. Además, se requiere una clasificación ordinal por rangos de las metas cuando haya objetivos múltiples. Y eso se logra generalmente discutiendo con los encargados finales de tomar las decisiones que tratan de valorar la importancia *relativa* de cada meta. Con esta clasificación por rangos, el método de solución en la programación de metas opera de modo que se aborden las metas de menor prioridad sólo después de alcanzar las de más alta prioridad en una forma óptima. Con metas múltiples, es poco probable que todas las metas puedan lograrse con precisión. La programación de metas trata de minimizar las *desviaciones* respecto a ellas, teniendo en cuenta la estructura de las prioridades establecidas.

A continuación se explica la representación de metas dentro de un contexto de la programación lineal y dentro de un contexto de la programación de metas. Supóngase que una aerolínea tiene la meta de comprar 20 nuevos aviones en el año entrante y otra de mantener en menos de $400 millones los gastos de capital no permite la compra de 20 aviones nuevos, la programación lineal esas medidas pueden expresarse en forma de restricciones. Y si el presupuesto de capital no permite la compra de 20 aviones nuevos, la programacion lineal indicará que no hay una solución factible. En cambio, el tratamiento de este mismo problema a partir de la programación de metas ofrecerá una solución, aun cuando no sea posible alcanzar ambos objetivos. La solución que reduce

al mínimo la desviación respecto a las dos metas será identificada, y se dará información sobre la magnitud de las desviaciones.

El siguiente ejemplo es una buena introducción a la estructura de estos modelos.

EJEMPLO 11

Mezcla de productos: meta individual La siguiente formulación de la programación lineal requiere seleccionar una mezcla adecuada de dos productos. En esta formulación,

x_1 = *número de unidades fabricadas (y vendidas) del producto 1*
x_2 = *número de unidades fabricadas (y vendidas) del producto 2*

Las tres restricciones reflejan las capacidades de horas de trabajo en dos departamentos, junto con una necesidad mínima de fabricación para el producto 1. El objetivo es maximizar la contribución total a la utilidad.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Maximice} & z = 7x_1 + 5x_2 & & & \text{(Utilidad)} \\
\text{sujeta a} & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 72 & \text{(Departamento 1)} \\
& 4x_1 + 3x_2 & \leq & 102 & \text{(Departamento 2)} \\
& x_1 & \geq & 8 & \text{(Producción mínima)} \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

La solución óptima obtenida con la programación lineal maximiza la contribución a la utilidad en un nivel de 174, cuando se producen 12 unidades del producto 1 y se fabrican y venden 18 unidades del producto 2.

Supóngase ahora que, en el mismo problema, la gerencia haya establecido que tiene la meta de lograr una contribución total a las utilidades de 200 por lo menos. Esto puede tenerse en cuenta en la formulación de la programación lineal si se incluye la restricción

$$7x_1 + 5x_2 \geq 200$$

Sin embargo, sabemos por la solución anterior que existen pocos recursos para alcanzar ese nivel de utilidades (174 es el nivel máximo).

He aquí la formulación de este problema hecha a partir de la programación lineal:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Minimice} & z = d^- & & & \\
\text{sujeta a} & 7x_1 + 5x_2 + d^- - d^+ & = & 200 \quad (1) & \text{(Restricción de metas)} \\
& 3x_1 + 2x_2 & \leq & 72 \quad (2) & \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{(Restricciones del sistema)} \\
& 4x_1 + 3x_2 & \leq & 102 \quad (3) & \\
& x_1 & \geq & 8 \quad (4) & \\
& x_1, x_2, d^-, d^+ & \geq & 0 &
\end{array}
$$

En seguida se hacen algunas observaciones sobre la formulación anterior. En primer lugar, hay dos tipos de restricciones en el problema. Se incluye una ***restricción de metas*** para tener en cuenta el objetivo de utilidades fijado por la dirección. También hay ***restricciones del sistema*** que formaron parte de la formulación de la programación lineal. Se trata de restricciones que es preciso cumplir en el proceso de la realización

de los objetivos. En segundo lugar, se introdujeron ***variables desviacionales*** no negativas en la restricción de las metas:

d^- = grado en que *no se alcanza* la meta de utilidades de 200

d^+ = grado en que *se rebasa* la meta de utilidades de 200

Estas variables miden hasta qué punto no se logran las metas. Se comportan como un par de variables de holgura y de demasía, y *ambas* están comprendidas en la restricción de metas. Y se incluyen porque, en cualquier aplicación, el objetivo se alcanza en forma deficiente *o* excesiva. Por último, la función objetivo consta sólo de la variable desviacional d^-. Dado que la dirección quiere conseguir una utilidad mínima de 200, es posible reformular su objetivo y decir que desea minimizar la no obtención de esa meta de utilidades.

Ahora se examinará la solución óptima de este problema según la versión de la programación lineal. Esa solución recomendaba 12 unidades del producto 1 ($x_1 = 12$) y 18 unidades del producto 2 ($x_2 = 18$). Si esos valores se sustituyen en la restricción de metas, el miembro izquierdo posee un valor de utilidad de 174. A fin de mantener en equilibrio ambos miembros de la ecuación, se deberá asumir un valor de 26. Ello constituye un logro deficiente de la meta de utilidades de 26. Cuando los valores de x_1 y x_2 se sustituyen en las restricciones del sistema, se descubre que se satisfacen como ecuaciones las dos restricciones de capacidad departamental; es decir, en la producción de esas cantidades se aprovecha al máximo la capacidad de los dos departamentos. La restricción mínima de producción para el producto 1 se cumple con un exceso de 4 unidades (se requería un mínimo de 8 unidades y se recomendaban 12 unidades).

Ésta es la mejor solución al problema de la programación de metas. Con el conjunto de las restricciones del sistema, la mejor estrategia mostrará un déficit de 26 unidades (dólares) en la consecución de la meta de utilidades. Es importante señalar que los métodos de programación de metas indicarán si es posible alcanzarlas; y en caso de que no sea posible, los resultados señalarán cuánto faltó para conseguir los objetivos. Esta información se limitará a indicar la "ausencia de una solución factible", lo cual significa que es imposible alcanzar las metas.

EJEMPLO 12

Mezcla de productos: metas múltiples En el ejemplo 11 suponga que la dirección ha establecido las siguientes metas:

- *Primer prioridad* Lograr una utilidad mínima de 200.
- *Segunda prioridad* Minimizar las horas extras que se necesitan en el departamento 1.
- *Tercera prioridad* Utilizar exactamente 102 horas en el departamento 2.

En esta situación modificada existen metas múltiples que, según se requería, han sido clasificadas por prioridades. A continuación se da la formulación de metas del problema.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimice} & z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^- + d_3^+) & \\
\text{sujeta a} & 7x_1 + 5x_2 + d_1^- - d_1^+ = 200 \quad (1) & \left.\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}\right\} \text{Restricciones de metas} \\
& 3x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 72 \quad (2) & \\
& 4x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 102 \quad (3) & \\
& x_1 \geq 8 \quad (4) & \text{Restricción del sistema} \\
& x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 &
\end{array}
$$

Nótese que hay tres restricciones de metas en la formulación anterior, una por cada meta, y una restricción del sistema. En cada restricción de metas se incluyen dos variables desviacionales. En comparación con la formulación hecha en el ejemplo 11, dos de las restricciones originales del sistema se han convertido en restricciones de metas. Examine las siguientes definiciones de las variables desviacionales y compruebe si tienen sentido.

d_1^- = *grado en que no se alcanza una utilidad de 200*
d_1^+ = *grado en que se rebasa la utilidad de 200*
d_2^- = *grado en que no se aprovechan bien las 72 horas en el departamento 1*
d_2^+ = *grado en que se rebasan las 72 horas en el departamento 1*
d_3^- = *grado en que no se aprovechan las 102 horas en el departamento 2*
d_3^+ = *grado en que se rebasan las 102 horas en el departamento 2*

En la función objetivo, las variables desviacionales se ponderan por los coeficientes P_k. Estos ***factores de prioridad*** de las metas múltiples sirven para identificar el nivel de prioridad de cada meta y "ponderar" las variables desviacionales relacionadas con determinada meta. *Se define P_k como el factor de prioridad para la k-ésima meta más importante (donde $k = 1$ corresponde a la prioridad más alta).* Estos factores se relacionan entre sí en forma tal que $P_k >>> P_{k+1}$, donde $>>>$ *implica que* P_k es "mucho mayor" que P_{k+1}. El efecto de los pesos relativos es garantizar que la meta asociada a P_k se obtenga en la mejor forma posible antes que la meta ligada a P_{k+1} se tenga en cuenta. En el ejemplo se supone que $P_1 >>> P_2 >>> P_3$. Con un objetivo de minimización (que siempre lo es en el caso de la programación de metas), el método de solución procurará primero hacer lo más pequeña posible d_1 (grado en que la utilidad de 200 es deficiente); después tratará de hacer d_2^+ (cantidad en que se rebasan las 72 horas en el departamento 1) lo más pequeña posible. Por último el método intentará hacer la suma $d_3^- + d_3^+$ (grado en que el número de horas utilizadas en el departamento 2 se desvía respecto a 102) lo más pequeña posible. Un aspecto muy importante de este proceso es que una meta nunca se consigue a costa de otra de mayor prioridad.

Adviértase en la función objetivo que la segunda meta procura minimizar d_2^+, grado en que se exceden las 72 horas en el departamento 1. La tercera meta es aquella en que se desea el *logro exacto*; es decir, la dirección considera que deben evitarse los extremos de una utilización escasa o excesiva del departamento 2. Así pues, el objetivo es minimizar tanto d_3^- como d_3^+.

Para sintetizar algunos puntos fundamentales en relación con la estructura de los problemas de programación de metas, podemos afirmar lo siguiente:

1 *Un problema de programación de metas puede incluir dos tipos de restricciones:* **las restricciones de metas,** *que se relacionan con cada meta establecida del problema, y* **las restricciones del sistema,** *que no guardan relación directa con las metas pero que son capaces de influir en su obtención.*

2 *Dos tipos de variables deberían aparecer en todo problema:* **las variables de decisión (x_j) y las variables desviacionales (d_i^- y d_i^+).**

3 *Cada restricción de metas se formula como una ecuación y deberá incluir dos variables desviacionales, una para la obtención deficiente y otra para la obtención excesiva.*

4 *Cuando existan metas múltiples, cada una deberá clasificarse según su prioridad en relación con las otras.*

5 *La función objetivo siempre será un tipo de minimización y deberá contener variables desviacionales exclusivamente. Éstas serán "ponderadas" mediante factores de prioridad cuando haya metas múltiples.*

Métodos de solución

En el caso de problemas que contengan dos variables de decisión (aun cuando existan muchas variables desviacionales), es posible aplicar un procedimiento gráfico de solución. Tratándose de problemas más extensos se cuenta con un algoritmo especializado en la solución de la programación de metas. Se basa en una modificación del método símplex. Aunque no se dispone de paquetes computarizados para este tipo de problemas en igual número que de otros paquetes de modelos matemáticos, se han ido desarrollando en forma creciente. Entre otras cosas ello se debe a la relativa novedad de la técnica comparada con otros métodos de programación matemática.

American Red Cross

UNA APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DE METAS EN LA ADMINISTRACIÓN DE UN BANCO DE SANGRE PARA HOSPITALES*

Los métodos de programación lineal dieron buenos resultados al ser aplicados al establecimiento de políticas para la región del oeste medio de la American Red Cross, con sede en Omaha (Nebraska). El centro regional de bancos de sangre de Omaha da servicio a 105 hospitales en las zonas urbanas y rurales del estado de Nebraska, Iowa, Kansas y South Dakota. La sangre humana es un producto perecedero y debe distribuirse (rotarse) entre los bancos de sangre para aumentar la posibilidad de que se utilice en los hospitales. Hay varios objetivos que es preciso tener presentes al fijar las políticas de rotación de la sangre. Entre ellas figuran las siguientes: 1) minimizar la cantidad de sangre vieja, 2) conservar una alta calidad de la sangre, 3) reducir al mínimo la frecuencia de la escasez de ella en los hospitales, 4) minimizar las posibilidades de exceso de sangre y 5) mantener un costo razonable de la operación de obtención de sangre, control de inventarios, distribución y rotación.

Un buen análisis de programación de metas demostró que 1) el porcentaje de sangre vieja podría reducirse de 14.9% a 9.2% sin elevar la frecuencia de la escasez en los hospitales; 2) casi podría eliminarse por completo el exceso de sangre en los bancos de los hospitales, y 3) la cantidad de sangre que debe obtenerse en la región podría disminuirse en más de 5%, con sólo aminorar los costos en $115 000 por año.

*Kenneth E. Kendall y Sang M. Lee, "Formulating Blood Rotation Policies with Multiple Objectives", *Management Science*, vol. 26, núm. 12, noviembre de 1980, pp. 1145-1157.

Ejercicios de seguimiento de la sección 8.4

1 Modifique la formulación del ejemplo 12 si la tercera meta de prioridad consiste en minimizar las horas extras que se necesitan en el departamento 2, una cuarta meta es producir por lo menos 8 unidades del producto 1 y una quinta meta es fabricar no más de 20 unidades del producto 2.

2 Dieta balanceada La dietista de un centro de atención diurna está preparando el menú para la comida. Pueden servirse tres alimentos en ella. La dietista quiere asegurarse de atender ciertas necesidades nutricionales. La tabla 8.33 resume el contenido vitamínico por onza de cada alimento, la ración mínima diaria de cada vitamina y el costo por onza de cada alimento.

El tamaño combinado de la porción para los tres tipos de alimentos debería ser de 6 onzas por lo menos, pero no más de 8 onzas. El problema radica en determinar el número de onzas de cada tipo de alimento que ha de incluirse en la comida, si existen las siguientes metas por orden de prioridad:

a) El costo de una comida no deberá ser mayor que \$0.50.
b) Incluir un mínimo de 25 mg de la vitamina 1.
c) Incluir exactamente 22 mg de la vitamina 2.
d) Incluir no más de 40 mg de la vitamina 3.

Formule el modelo de la programación de metas para este problema.

3 Decisión de inversión Un individuo dispone de \$200 000 para invertir. Están analizándose diversas alternativas, cada una caracterizada por una tasa de rendimiento esperado y por un factor que expresa el riesgo relativo. El factor de riesgo puede fluctuar entre 0 y 1, donde un valor de 0 no implica riesgo alguno y un valor de 1 significa la certidumbre completa de que la inversión se perderá. La tabla 8.34 sintetiza esas características.

El problema es determinar cuánto invertir en cada alternativa. Se han especificado las siguientes metas:

a) El riesgo promedio (promedio ponderado por dólar) no debería ser mayor que 0.05.
b) El rendimiento promedio deberá ser de 0.20 por lo menos.
c) La inversión combinada en las alternativas 3 y 5 no deberá exceder los \$30 000.

Formule el modelo de programación de metas para este problema.

TABLA 8.33

Vitamina	Tipo de alimento 1	2	3	Ración mínima diaria
1	3 mg/oz	4 mg/oz	2 mg/oz	25 mg
2	5 mg/oz	3 mg/oz	4 mg/oz	22 mg
3	4 mg/oz	6 mg/oz	5 mg/oz	40 mg
Costo por onza	\$0.05	\$0.04	\$0.06	

TABLA 8.34

Inversión	Rendimiento esperado	Factor de riesgo
1	0.18	0.05
2	0.15	0.04
3	0.25	0.30
4	0.12	0.00
5	0.20	0.10

TABLA 8.35

Producto	Peso por caja, libras	Volumen por caja, CFT
1	300	20
2	500	50
3	250	24
4	400	45
5	350	60

4 Carga de flete Un vagón de ferrocarril debe cargarse con una combinación de varios productos. Cada uno, al ser empacado en una caja, se caracteriza por determinado peso y volumen. En la tabla 8.35 se resumen esas características de cada producto. La capacidad de volumen del vagón es de 6000 pies cúbicos, y la de peso es de 10 000 libras.

El problema consiste en determinar el número de cajas de cada producto que deben cargarse en el vagón. Se especifican las siguientes metas por orden de prioridad:

a) El número de cajas del producto 1 no deberá ser mayor que 5.
b) El número combinado de las cajas de los productos 3 y 5 deberá ser de 12 por lo menos.
c) El volumen total de los productos 1, 2 y 3 no deberá ser mayor que 2500 pies cúbicos.
d) Aun cuando existe una capacidad adicional de peso, el peso total de los productos no deberá rebasar las 8000 libras.

Formule el modelo de programación de metas para este problema.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

algoritmo del cruce de arroyo 344
algoritmos de corte de plano 339
algoritmos de rama y frontera 339
costo de la indivisibilidad 333
destino 308
factores de paridad 345
índice de mejoramiento 315
método de la esquina noroeste 313
modelo de asignación 325
modelo de programación binaria 331
modelo de programación en enteros mezclados 331
modelo de programación en enteros puros 331
modelo de transporte 308
origen 308
programación de metas 342
programación en enteros 331
restricción de las metas 344
restricción del sistema 344
variables desviacionales 344
solución óptima alternativa 321

ALGUNOS PAQUETES DE PROGRAMAS

Modelos de transporte*

□ **TRAN 1.** Es uno de los programas que Warren J. Erikson y Owen P. Hall, hijo, incluyeron en su libro *Computer Models for Management Science*,

*Los modelos de transporte y asignación, por ser tipos especiales de los modelos de programación lineal, siempre pueden formularse y resolverse empleando software ordinario de programación lineal (como el que se menciona en la página 262.) Los paquetes especializados de software para estos dos tipos de modelos no son tan comunes como el software generalizado de programación lineal. Cuando se cuenta con programas especializados, es bastante fácil especificar la estructura e introducirla en la computadora.

- Addison-Wesley (2a. ed.), Reading, Mass., 1986. Está disponible para sistema de microcomputación Apple II Plus que tengan una memoria de 48K, Applesoft BASIC, una unidad de disco y el sistema operativo DOS 3.3. También está disponible para la IBM PC que tenga 64K de memoria, BASICA, una unidad de disco y la versión 1.1 del sistema operativo IBM DOS. Maneja problemas que contengan hasta 20 renglones y 20 columnas.

- **TRANSPO**. Es un programa interactivo escrito en FORTRAN que escribió el autor de este libro. Maneja problemas que tengan un máximo de 50 renglones y 50 columnas.
- **TRANSPORTATION.** Es uno de los problemas incluidos por Laurie B. Dennis y Terry L. Dennis en su obra *Microcomputer Models por Management Decisio*, West Publishing Company, St. Paul, 1986. Maneja problemas que tengan un máximo de 20 renglones y 20 columnas.

Modelos de asignación*

- **ASGTI.** Es uno de los problemas que figuran en el libro *Computer Models for Management Science* (Cf. TRAN1). Maneja problemas que tengan un máximo de 25 renglones y 25 columnas.
- **ASSIGNMENT.** Es uno de los problemas incluidos en el software de Larie B. Dennis y Terry L. Dennis (Cf. TRANSPORTATION). Maneja problemas que tengan un máximo de 20 renglones y 20 columnas.

Modelos de programación en enteros

- **LINDO/PC.** Puede obtenerse de The Scientific Press, 540 University Avenue, Palo Alto, CA. 94301, para usar en la IBM PC o microcomputadoras compatibles con ella y provistas de 192K de memoria. Maneja problemas que tengan un máximo de 60 renglones y 120 variables.
- **SUPER LINDO/PC.** Se obtiene de la The Scientific Press para usarse en una IBM PC o con microcomputadoras compatibles con ella y provista de 256K de memoria. Maneja problemas que tengan un máximo de 120 renglones y 300 variables.
- **MPSX-MIP.** Puede obtenerse de la IBM Corporation para usarse en una IBM o en macrocomputadoras compatibles con ella. Maneja problemas que sean de enteros puros o de enteros mixtos, y su capacidad le permite resolver problemas muy extensos.
- **ILP 2.** Se obtiene de la Control Data Corporation para resolver problemas de programación en enteros puros.

Modelos de programación de metas

- **MLPP.** Se obtiene de Computing and Systems Consultans, Inc., P. O. Box 1551, Binghamton, NY 13902. Es un paquete independiente de la

máquina y escrito en FORTRAN. Se ha instalado exitosamente en los sistemas de cómputo de la IBM, Control Data Corporation, Burrouhgs y Digital Equipment Corporation.

- Un listado de un programa de computación viene en S. M. Lee *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach, Filadelfia, 1972, pp. 126-157.
- Se encuentran listados de dos programas de programación de metas en J. P. Ignizio, *Goal Programming and Extensions*, Lexington Books, Lexington, Mass., 1976, pp. 227-247.

EJERCICIOS ADICIONALES

1 Con los datos referentes al problema de transporte en la tabla 8.36:
   a) Use el método de la esquina noroeste para determinar una solución inicial.
   b) Empiece a resolver el problema para encontrar la solución óptima sirviéndose del algoritmo del cruce de arroyo.

TABLA 8.36

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	50	80	60	250
2	30	70	40	350
3	90	40	80	400
Demanda	400	250	350	

2 Con los datos relativos al problema de transporte en la tabla 8.37:
   a) Use el método de la esquina noroeste para encontrar una solución inicial.
   b) Empiece a resolver el problema para encontrar la solución óptima sirviéndose del algoritmo del cruce de arroyo.

TABLA 8.37

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	10	15	5	350
2	30	10	25	500
3	20	30	15	650
Demanda	600	400	500	

3 **Problemas de maximización** Si la función objetivo de maximizarse en un problema de transporte, el algoritmo del cruce de arroyo se aplica de la misma manera que en los problemas de minimización. La única diferencia estriba en la interpretación del índice de mejoramiento. En un problema de maximización se cuenta con una mejor solución que la actual si los índices de mejoramiento son positivos. En caso de que más de uno de ellos sea positivo, la casilla de entrada se identifica por medio del índice más positivo de mejoramiento. Se ha descubierto una solución óptima cuando todos los índices son no positivos.

En el ejercicio 1, suponga que la función objetivo tiene que ser maximizada. Obtenga la solución óptima mediante el algoritmo del cruce de arroyo.

4 Resuelva el ejercicio 2 si hay que maximizar la función objetivo.

TABLA 8.38 PRECIO DE OFERTA POR SÁBANA

Compañía de lencería	Asilo 1	2	3	4	5	Capacidad semanal, sábanas
1	$0.25	$0.28	$0.20	$0.30	$0.24	4 000
2	$0.24		$0.25	$0.28		3 000
3		$0.25	$0.23	$0.30	$0.26	2 800
Necesidades semanales, sábanas	1 500	2 000	1 200	2 400	1 000	

5 Administración de asilos Una empresa se encarga de administrar cinco asilos de la región. Una de las ventajas de este tipo de administración es el ahorro de costo en la compra centralizada de los suministros de los cinco asilos. La empresa ha solicitado licitaciones (ofertas) para la adquisición de ropa de cama destinada a los asilos. La tabla 8.38 resume las ofertas hechas por tres compañías que se dedican a ese negocio. El precio por sábana incluye los gastos de recoger y entregar la ropa de cama. Dos de las compañías no han presentado licitaciones para los cinco asilos. Los asilos excluidos están situados fuera de sus zonas de reparto.

Las compañías pueden obtener contratos para atender algunas o todas las necesidades de cualquier asilo. El problema radica en determinar el número de sábanas que semanalmente deben entregar al asilo, a fin de minimizar el costo total semanal.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones.

b) Por tanteo estime lo que, a su juicio, es una buena solución.

c) Si se dispone de un paquete computarizado de transporte (de programación lineal) encuentre la solución óptima.

6 Reasignación de gasolina Una gran empresa petrolera está haciendo planes para afrontar el incremento habitual del tráfico vacacional que ocurre cada verano. Con el propósito de satisfacer mejor las necesidades de los conductores, la compañía ha hecho una encuesta entre sus distribuidores regionales. La encuesta reveló que cuatro regiones esperan tener un excedente en el abastecimiento de gasolina, en tanto que seis regiones no podrán cubrir sus necesidades. La compañía desea elaborar un plan para reasignar el suministro de las regiones con excedente a las que tendrán escasez. En la tabla 8.39 se indican las cantidades de excendente y de escasez por región y los costos (en cientos de dólares) por cada 100 000 galones que se envíen de una región a otra. El problema radica en determinar cuánta gasolina reasignar de cada región a una región de escasez, con objeto de reducir al mínimo el costo total.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones para este modelo.

TABLA 8.39 COSTOS DE REASIGNACIÓN, EN CIENTOS DE DÓLARES

Región de excedente	Región de escasez 1	2	3	4	5	6	Excedente de 100 000 galones
1	25	18	20	30	15	12	40
2	20	25	30	28	26	18	25
3	16	20	25	15	24	30	60
4	18	23	20	10	15	25	100
Escasez, 100 000 galones	15	20	40	30	10	25	

TABLA 8.40 DÍAS ESTIMADOS POR TAREA DE PROGRAMACIÓN

	Tarea de programación			
Programador	1	2	3	4
1	45	50	38	56
2	42	53	34	60
3	50	48	40	62
4	48	47	36	58

TABLA 8.41 PORCENTAJE ESPERADO DE CRÍMENES RESUELTOS

Equipo de	Grupo de crímenes sin resolver				
detectives	1	2	3	4	5
1	0.30	0.40	0.25	0.30	0.20
2	0.40	0.35	0.40	0.25	0.30
3	0.35	0.50	0.40	0.40	0.45
4	0.50	0.55	0.30	0.20	0.40
5	0.45	0.30	0.50	0.50	0.35

b) Si dispone de un paquete computarizado de transporte (o de programación lineal), encuentre la solución.

7 Desarrollo de software El director del procesamiento de datos de una empresa de asesoría quiere asignar cuatro trabajos de programación a cuatro de sus programadores. Ha estimado el número total de días que cada uno tardaría en realizarlo si se le asignara cada programa. En la tabla 8.40 se resumen las estimaciones.

Si el objetivo es asignar un programador por tarea (o trabajo) de modo que se minimice el número total de días necesarios para llevar a cabo las tareas:

a) Formule la función objetivo y las restricciones.

b) Por tanteo identifique lo que, en su opinión es la solución óptima.

c) Si se dispone de un paquete de computación, encuentre la asignación óptima.

8 Asignación de detectives Un jefe de policía quiere asignar cinco equipos de detectives a cuatro grupos que investigan crímenes o delitos no resueltos. Los cinco equipos difieren en el número de detectives, años de experiencia y métodos de trabajo. Luego de analizar los tipos de casos en cada grupo, el jefe estimó el porcentaje de casos que cada detective resolvería si era asignado a cada grupo. Las estimaciones aparecen en la tabla 8.41. El número de delitos sobresalientes en los cinco grupos es 40, 30, 25, 50 y 20, respectivamente. Si el objetivo es asignar los cinco equipos de modo que se maximice el *total de delitos resueltos:*

a) Formule la función objetivo y las restricciones.

b) Por tanteo determine lo que, a su juicio, es la asignación óptima.

c) Si cuenta con un paquete de computación, encuentre la asignación óptima.

9 Un fabricante está estudiando la conveniencia de comprar cierta maquinaria. Analiza cuatro tipos de máquinas. La información referente a cada una aparece en la tabla 8.42. El presupuesto total para la adquisición es de $750 000.

Los costos anuales de mantenimiento no deberían ser mayores que $40 000. La dirección desea asimismo limitar el número de empleados a un máximo de 20. Ha especificado que habrán de comprarse al menos dos máquinas del tipo 4, pero no más de tres del tipo 2. Si el objetivo es maximizar las utilidades totales anuales generadas con las nuevas máquinas:

TABLA 8.42

	Tipo de máquina			
	1	2	3	4
Costo por máquina	$40 000	$60 000	$30 000	$75 000
Costo anual de mantenimiento	$ 2 000	$ 4 500	$ 2 500	$ 8 000
Número requerido de nuevos empleados por máquina	2	2	1	4
Utilidad anual por máquina	$10 000	$12 000	$ 6 000	$15 000

a) Formule el modelo de programación en enteros para este problema.
b) Si cuenta con un paquete computarizado idóneo, encuentre la solución óptima

10 Administración de desechos sólidos Una gran ciudad necesita una nueva capacidad para guardar los desechos sólidos. En el momento actual la basura se recoge de cinco zonas de recolección y se lleva a un vaciadero central. Éste está a punto de saturar su capacidad y se cerrará en el plazo de un año. Se comprarán dos nuevos lugares de cuatro que están siendo examinados.

El contralor del municipio ha hecho estimaciones sobre los costos de la compra y operación de los cuatro lugares propuestos. En la tabla 8.43 se sintetiza el costo por tonelada de transportar la basura de cada zona de recolección a uno de los sitios de vaciado. Además, para cada sitio se ha estimado un costo mensual de amortización (basado en el precio previsto de compra y la vida útil). También se incluyen las capacidades mensuales de cada lugar y el volumen de basura producido al mes en cada zona de recolección.

El objetivo es determinar los dos lugares que deben comprarse y el número de toneladas que se transportarán mensualmente de un área de recolección a cada lugar, de modo que se minimice la suma de los costos mensuales de transporte y amortización.

a) Formule el modelo de programación en enteros mixtos para este problema.
b) Si cuenta con un paquete idóneo de computación, encuentre la solución óptima.

11 Presupuesto de capital Un grupo de coinversión de capital está analizando la inversión en un conjunto de opciones. En la tabla 8.44 se compendian los datos relativos a esas opciones. El grupo dispone de $60 millones para hacer la inversión. Las

TABLA 8.43 COSTOS DE TRANSPORTE POR TONELADA

Zona de colección	Lugar del vaciadero				Colecciones estimadas, toneladas por mes
	1	2	3	4	
1	$40	$20	$50	$60	2 000
2	$30	$40	$40	$40	1 000
3	$25	$30	$55	$45	1 500
4	$45	$60	$35	$50	1 200
5	$35	$50	$70	$35	1 600
Capacidad, toneladas por mes	4 500	3 500	4 000	3 800	
Costos de amortización, dólares por mes	$6 000	$4 000	$5 000	$4 500	

TABLA 8.44

	Opción de inversión					
	1	2	3	4	5	6
Cantidad de inversión, millones de dólares	10	25	20	15	18	30
Rendimiento anual esperado de la inversión	12%	14%	10%	16%	12.5%	15.5%

TABLA 8.45

	Producto			Capacidad semanal, horas
	1	2	3	
Horas requeridas por unidad (Departamento 1)	2	4	3	100 (Departamento 1)
Horas requeridas por unidad (Departamento 2)	3	2.5	3.5	120 (Departamento 2)
Material requerido por unidad, libras	10	12	8	
Utilidad por unidad, dólares	15	12	13.5	

opciones 2 y 3 son empresas de riesgo compartido en la exploración petrolera. La dirección ha establecido que no debe seleccionarse más de una de esas dos alternativas. Además, las opciones 1 y 4 están relacionadas entre sí. La dirección ha recomendado no escoger la opción 4 a menos que se seleccione la opción 1. Las opciones 5 y 6 son, en realidad, dos partes de un gran programa de inversión. Por tanto, si se escoge una, habrá que escoger también la otra.

El problema radica en determinar cuáles opciones deberían seleccionarse para maximizar el rendimiento total anual sobre la inversión (medida en dólares).

a) Formule el modelo de programación binaria para el problema.

b) Por tanteo determine la solución óptima.

c) Si cuenta con un paquete de computación, encuentre con él la solución óptima.

12 Una compañía fabrica tres productos que se procesan en dos departamentos. En la tabla 8.45 se compendia información acerca de las exigencias de tiempo en cada departamento, su capacidad semanal, las necesidades de materiales y el margen de utilidad por unidad. La disponibilidad de materiales a la semana es de 300 libras.

La dirección quiere determinar el número de unidades de cada producto que debe fabricar a la semana. En la toma de estas decisiones, se han especificado las siguientes metas por orden de prioridad,

a) Lograr una utilidad de $500 por lo menos.

b) Conseguir la utilización completa del departamento 1.

c) Conseguir la utilización completa del departamento 2.

d) La fabricación combinada de los productos 1 y 3 deberá ser por lo menos de 18 unidades.

Formule el modelo de programación de metas para este problema, definiendo con cuidado cada variable.

13 **Reclutamiento de personal** Una agencia de reclutamiento de profesionistas ha sido llamada para que colabore en la localización y contratación de profesionistas que necesita una empresa consultora. Esta empresa está tratando de contratar programadores, analistas de sistemas e ingenieros de sistemas. El sueldo inicial de esos tres puestos es en promedio de $20 000, $24 000 y $ 30 000, respectivamente. La agencia recibe como estipendio 20% del sueldo del primer año. Los sueldos totales de esos puestos

no exceden los $750 000 al año. Además, el número total de personas contratadas no deberá ser mayor que 30.

La compañía ha establecido las siguientes metas por orden de prioridad:

a) Contratar por lo menos a 12 programadores.

b) Contratar por lo menos a 8 analistas de sistemas.

c) Contratar un mínimo de 6 ingenieros de sistemas.

d) Minimizar el margen en que los costos de reclutamiento rebasan los $100 000.

Formule el modelo de programación de metas para este problema, definiendo con mucho cuidado cada variable.

***14 Concesión de contratos** Un fabricante de microcomputadoras desea conceder contratos para el suministro de tres componentes que se utilizarán en su computadora de mayor venta. Cuatro contratistas han presentado ofertas. En la tabla 8.46 se resumen los precios de las ofertas por unidad. Cuando no se da ninguna cifra, ello significa que el contratista no hizo oferta alguna.

El contratista 1 no puede proporcionar más de 100 000 unidades del componente 1; el contratista 3 no puede más de 150 000 unidades del componente 3; el contratista 4 no puede más de 75 000 unidades del componente 2.

La demanda de un componente cualquiera no debe ser cubierta enteramente por un solo contratista. Por otra parte, no se ha estipulado que el contrato deba otorgarse al que haga la oferta más baja.

El fabricante de computadoras quiere determinar cuántas unidades de cada componente conceder a un contratista. En la toma de tales decisiones, se han establecido las siguientes metas por orden de prioridad:

a) Minimizar el margen en quel las concesiones de los contratistas rebasan los $6 millones.8 analistas de sistemas.

b Debido a los antecedentes de los negocios realizados con el contratista 1, se le asignará un mínimo de $1.5 millones

c Minimice el margen en que las concesiones combinadas de los contratistas 2 y 4 exceden los $3 millones.

Formule el modelo de programación de metas aplicable a este problema, definiendo con rigor cada variable.

TABLA 8.46 PRECIOS DE OFERTA POR UNIDAD

	Componente		
Contratista	**1**	**2**	**3**
1	$10.00	$15.00	$12.00
2	—	13.50	12.50
3	11.50	—	11.00
4	11.00	14.00	13.00
Demanda (unidades)	200 000	150 000	250 000

MINICASO

UBICACIÓN DEL EQUIPO PARA INCENDIOS

Una ciudad de tamaño mediano tiene 11 estaciones de bomberos, que atienden a 18 distritos. En la figura 8.6 se observan las localizaciones relativas de las estaciones y distritos de incendios. Tras un análisis de los datos históricos concernientes al tiempo de respuesta, se han logrado identificar las estaciones que responden a los incendios de cada distrito en un tiempo promedio máximo aceptable que ha sido fijado de antemano. Los ramales de la figura 8.6 indican los distritos a que cada estación atiende en ese lapso. La ausencia de un ramal significa que la estación no puede responder en ese tiempo promedio.

Los funcionarios del departamento de bomberos quieren saber si la ciudad podría prescindir de algunas estaciones. Un criterio que podría aplicarse consiste en determinar el número mínimo de estaciones que se necesitan para cubrir todos los distritos de incendios. "Cubrir" significa en este caso que *por lo menos* una estación deberá ser capaz de responder a todos los distritos dentro del tiempo promedio máximo de respuesta. Si el objetivo es minimizar el número de estaciones que se requieren para cubrir los cinco distritos,

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones para este problema de programación binaria. *Sugerencia*: sea

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{Si el equipo contra incendios está situado en la estación } j \\ 0 & \text{Si el equipo contra incendios no está situado en la estación } j \end{cases}$$

b) Varias restricciones son redundantes en esta formulación (esto es, quedan satisfechas de manera automática si se cumple con otra restricción). Identifíquelas y elimínelas del conjunto de restricciones.

c) Encuentre la solución óptima. (Tal vez como resultado de un procedimiento de tanteo.)

d) ¿Cómo cambiaría el modelo si, ante la incidencia más elevada de incendios en los distritos 10, 6 y 5, al menos dos estaciones debieran ser capaces de responder a los distritos? ¿Y cómo cambiaría si por lo menos dos debieran ser capaces de responder al distrito 4?

e) Explique algunos de los problemas de las suposiciones hechas en este modelo. ¿Parece razonable el criterio? Como habitante de esta ciudad, ¿qué críticas haría a este análisis?

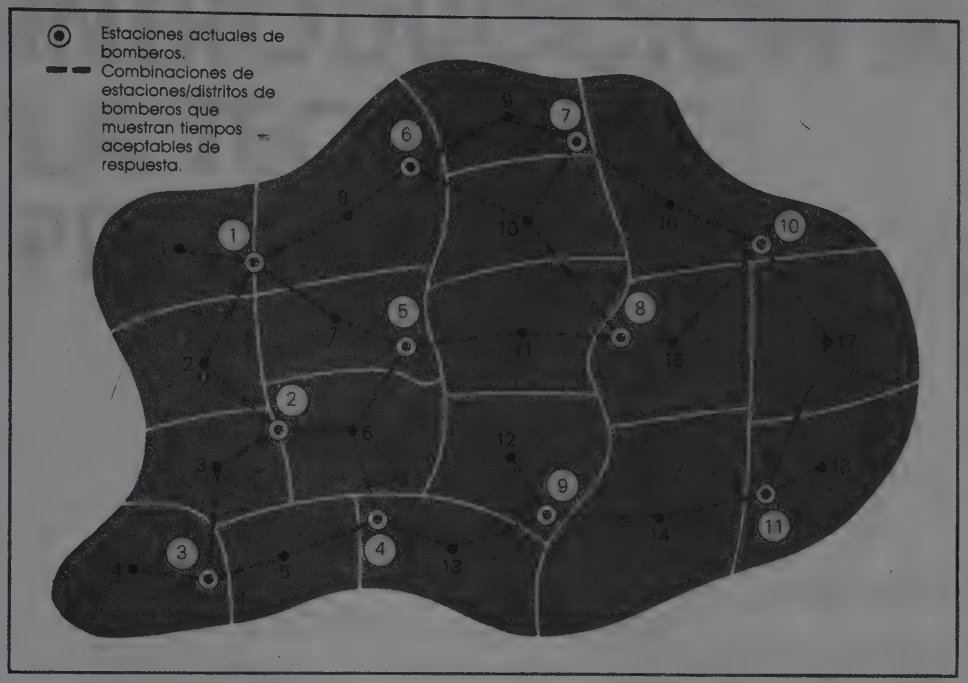


FIGURA 8.6
Estación de bomberos y ubicación de los distritos de incendios.

CAPÍTULO

9 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PROBABILIDAD

383-414

9.1 INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS Y OPERACIONES CON CONJUNTOS
9.2 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES
9.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD
9.4 ESTADOS DE INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA

ESTADÍSTICAS
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: EL PROBLEMA DEL CUMPLEAÑOS

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ofrecer un repaso de los aspectos fundamentales de la teoría de conjuntos y las operaciones con conjuntos.
- Lograr que el lector comprenda los métodos básicos del conteo, entre ellos las permutaciones y combinaciones.
- Dar una introducción al concepto de probabilidad y al cálculo de las probabilidades para algunos ambientes estadísticos.

Gran parte de la vida del hombre se caracteriza por la incertidumbre. Muchos fenómenos del mundo parecen estar dominados por el comportamiento aleatorio. Casi todas las decisiones se toman en un entorno caracterizado por la ausencia de un conocimiento completo de la situación. Así, una decisión acerca de la cantidad de unidades a fabricar se basa en las *estimaciones* del número de unidades que se espera vender. Si se conociera este último con anticipación,

TABLA 9.1

Personas que reciben el medicamento, número	Personas que no tienen recidivas de ataques cardiacos, número	Personas que no tienen recidivas, porcentaje
100	64	64
300	196	65.3
500	317	63.4
1 000	636	63.6
5 000	3 177	63.54
10 000	6 351	63.51

la decisión sería elaborar exactamente esa cantidad, sin que hubiera ni escasez ni excedentes. Con todo, en las situaciones concretas de la toma de decisiones rara vez puede recabarse información tan precisa.

Los conceptos de probabilidad pueden resultar de suma utilidad cuando nos hallamos frente a la incertidumbre que caracteriza a la mayor parte de los ambientes en que se adoptan las decisiones. La teoría de probabilidad se funda en el hecho de que, en muchos fenómenos inciertos, existen patrones "a largo plazo". Por ejemplo, cuando se lanza una moneda no se sabe con certidumbre si saldrá uno u otro lado de ella (cara o cruz). No obstante, en muchos lanzamientos de la misma moneda, y a la larga, aproximadamente la mitad de los resultados deberá corresponder a cara (lado A) o a cruz (lado B).

La investigación médica se basa principalmente en las observaciones a largo plazo para generalizar los resultados. En la tabla 9.1 se dan los resultados de un estudio que examinó la eficacia con que un nuevo medicamento reduce la frecuencia de los ataques cardiacos. Se les administró durante 5 años a las pacientes que lograron sobrevivir al primer ataque. En la tabla 9.1 se resumen los resultados del estudio al ir aumentando la muestra de esos individuos. Adviértase cómo el *porcentaje*, o proporción, que no sufrió una recidiva fluctúa pero tiende a estabilizarse a medida que crece el tamaño de la muestra. La incertidumbre de la eficacia del medicamento hace imposible saber lo que sucederá a cada paciente en particular. No obstante, al cabo de 10 000 observaciones la evidencia señala que aproximadamente 63.5% de las víctimas de ataques cardiacos que usen el medicamento no padecerán otro en los 5 años posteriores al primer ataque. Tales resultados tienen mayor significado cuando se comparan con las experiencias de una segunda muestra de pacientes a quienes no se administró el medicamento. Fue de 45.26% el porcentaje de 10 000 personas pertenecientes a ese segundo grupo que no mostraron recidiva. Los resultados comparativos son alentadores en lo tocante a las posibilidades del nuevo fármaco.

Este capítulo tiene por objeto dar una introducción a los aspectos fundamentales de la teoría de probabilidad. La *teoría de conjuntos* es un medio muy útil para presentar y explicar los conceptos de probabilidad; de ahí que en la primera sección del capítulo se incluya una breve reseña o repaso de ellos y también de las operaciones con conjuntos. La segunda sección estudia los métodos especiales de conteo (recuento) que son de extrema utilidad en la teoría de probabilidad. En la siguiente sección se explican los conceptos fundamenta-

les de probabilidad y del cálculo de probabilidades. En la última sección se trata del cálculo de probabilidades en condiciones de *independencia estadística* y de *dependencia estadística*.

9.1 INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS Y OPERACIONES CON CONJUNTOS

Aunque antes se ha utilizado una notación de conjuntos al hablar de los *conjuntos solución* en el caso de las ecuaciones lineales, ahora se proporcionará un repaso más formal de los conceptos de conjuntos y de las operaciones con conjuntos. Ambos temas constituyen un medio excelente para exponer la teoría de probabilidad.

Conjuntos

El *conjunto* es una colección de objetos. Entre los ejemplos se encuentra el *conjunto* de estudiantes que están inscritos en un curso de historia en una universidad, el *conjunto* de ciudadanos de un país que tenga 65 años de edad o más, el *conjunto* de jugadores de una liga de baloncesto que anoten más de 20 puntos y consigan más de 12 rebotes por juego durante una temporada, el conjunto de ciudades que pueden ser sede de las próximas Olimpiadas y el *conjunto* de los números reales. A menudo los objetos pertenecen a un conjunto por poseer ciertos atributos o algunas cualidades que se requieren para formar parte del mismo. Para que un estudiante sea miembro del conjunto antes mencionado, es necesario que esté inscrito en el curso de historia. Para que un jugador de la liga sea miembro del conjunto citado, debe haber obtenido un promedio superior a los 20 puntos y más de 12 rebotes por juego durante la temporada especificada. Los objetos que pertenecen a un conjunto son ***elementos*** de él.

La pertenencia a un conjunto suele definirse en dos formas. El ***método de enumeración*** se limita a listar todos los elementos que se encuentran en un conjunto. Si con una mayúscula se denota un nombre del conjunto, podría definirse el conjunto de los enteros positivos impares que tengan un valor menor que 10 del modo siguiente:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Nótese el empleo de *llaves* o *corchetes* para agrupar los elementos o miembros del *conjunto A*.

El método de enumeración es idóneo cuando el número de elementos de un conjunto es pequeño o bien cuando no resulta fácil o posible formular una propiedad que defina la pertenencia a él. Otro método con el cual se definen los conjuntos es el ***método de propiedad descriptiva***. En este caso, para definir el conjunto se enuncia la propiedad indispensable de pertenencia al conjunto. El conjunto A, definido en el ejemplo precedente, puede redefinirse así:

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero positivo impar menor que } 10\}$$

Expresado lo anterior con palabras la traducción de la ecuación es "*A es un conjunto integrado por todos los elementos x 'tales que' (la línea vertical) x es un entero positivo impar cuyo valor es menor que 10*". La x situada a la izquierda de la línea vertical indica la notación general de un elemento del conjunto; la expresión a la derecha de la línea expresa la condición o condiciones requeridas para que un elemento pertenezca al conjunto.

Si se quiere indicar que un objeto e es miembro de un conjunto S, se emplea la notación

$$e \in S$$

En forma verbal, la notación anterior se traduce "e es miembro (o elemento) del conjunto S". En el conjunto A antes definido puede decirse:

$$9 \in A$$

la notación $e \notin S$ significa que un objeto e no es miembro del conjunto S.

El número de elementos contenidos dentro de un conjunto B se denota por

$$n(B)$$

Así pues, para el conjunto A, $n(A) = 5$.

Conjuntos especiales

Existen ciertos conjuntos especiales a los que se alude frecuentemente al tratar del álgebra de conjuntos.

DEFINICIÓN: CONJUNTO UNIVERSAL
El ***conjunto universal*** $\mathcal{U}$ es el que contiene todos los posibles elementos dentro de una aplicación particular.

EJEMPLO 1

Si se toma un sondeo de opinión efectuado en una muestra aleatoria de habitantes de la Ciudad de Nueva York, pueden identificarse varios conjuntos de personas. Uno podría estar integrado por los incluidos en la muestra; otro podría componerse de los que *no* figuran en ella. Es esa aplicación, el conjunto universal $\mathcal{U}$ podría definirse como todos los habitantes de la Ciudad de Nueva York.

DEFINICIÓN: COMPLEMENTO
El ***complemento*** de un conjunto S es el conjunto constituido por todos los elementos del conjunto universal que no son miembros del conjunto S. El complemento del conjunto S se denota como $\boldsymbol{S}$.

EJEMPLO 2

En el ejemplo 1, si A representa el conjunto de los habitantes incluidos en la encuesta, el complemento de A, indicado A', es el conjunto de todos los neoyorquinos que no participaran en la encuesta.

EJEMPLO 3

Si el conjunto S está integrado por todos los enteros positivos y el conjunto universal se define como todos los enteros, entonces S' se compone de todos los enteros negativos y el cero.

EJEMPLO 4

Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, el complemento del conjunto A contiene todos los elementos que son miembros de $\mathcal{U}$ pero no de A, o sea $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

DEFINICIÓN: CONJUNTO NULO
El ***conjunto vacío***, o ***nulo***, Φ es el que no contiene elemento alguno.

EJEMPLO 5

Pongamos el caso del sistema de ecuaciones

$$4x + 3y = 10$$
$$4x + 3y = -5$$

No hay valores de x y y que satisfagan a ambas ecuaciones, por lo cual el conjunto solución S del sistema de ecuaciones es el conjunto vacío, o sea

$$S = \varnothing$$

Expresado lo anterior de modo diferente.

$$S = \{(x, y) \mid 4x + 3y = 10 \text{ y } 4x + 3y = -5\}$$
$$= \varnothing$$

DEFINICIÓN: SUBCONJUNTO
El conjunto A es un ***subconjunto*** de un conjunto B, si y sólo si todos los elementos del conjunto A son además elementos del conjunto B. Esta relación de subconjuntos se denota como $\boldsymbol{A \subset B}$, lo cual se lee "A es un subconjunto de B".

EJEMPLO 6

En los siguientes subconjuntos,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad C = \{x \mid x \text{ es un número real}\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \qquad D = \{z \mid z - 1 = 4\}$$

pueden identificarse estas relaciones de subconjuntos: $A \subset C$, $B \subset C$, $D \subset C$, $B \subset A$, $D \subset A$ y $D \subset B$. Verifíquelas por usted mismo; ¿se dan otras relaciones de subconjunto?

NOTA
Por definición, el conjunto nulo es subconjunto de todos los conjuntos. En consecuencia, en el ejemplo precedente $\Phi \subset A$, $\Phi \subset B$, $\Phi \subset C$ y $\Phi \subset D$.

Representación mediante diagramas de Venn

Los ***diagramas de Venn*** son un medio muy adecuado de visualizar las relaciones de conjuntos. He aquí un ejemplo: la figura 9.1 describe un conjunto universal $\mathcal{U}$ dentro del cual se halla otro conjunto A, representado por un área circular. El valor primordial de estas figuras es la información que suministran respecto a las relaciones entre conjuntos. Por ejemplo, si un conjunto B es subconjunto de otro conjunto A, la representación del conjunto B por medio de un diagrama de Venn debería estar contenido dentro del conjunto A. En la figura 9.2, los conjuntos A y B son subconjunto del conjunto universal, y el conjunto B se representa como un subconjunto de A.

En la figura 9.3 se observa la relación con el complemento.

FIGURA 9.1 (izquierda) Diagrama de Venn.

FIGURA 9.2 (centro) Representación de una relación de subconjuntos mediante el diagrama de Venn.

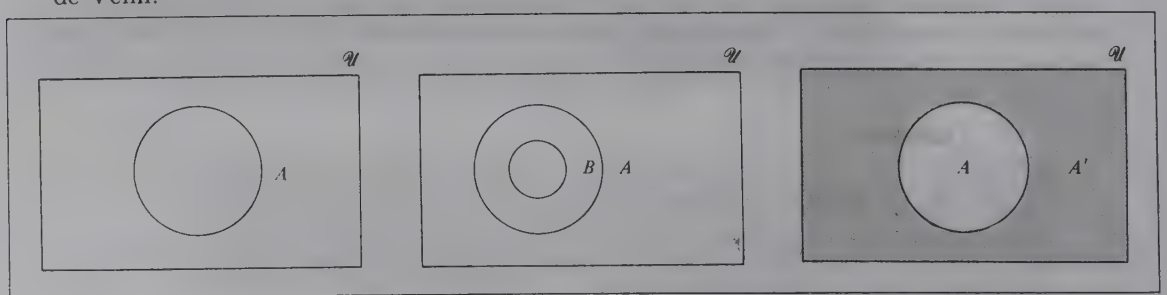
FIGURA 9.3 (derecha) Representación del complemento por medio del diagrama de Venn.

Operaciones con conjuntos

Del mismo modo que hay operaciones aritméticas que constituyen el fundamento del álgebra, la trigonometría y otras áreas de las matemáticas, existe una aritmética de la teoría de conjuntos que permite desarrollar un álgebra de conjuntos.

DEFINICIÓN: IGUALDAD DE CONJUNTOS
Dos conjuntos A y B son iguales, si y sólo si todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de A. Expresado esto con símbolos:

$$A = B \quad \text{si } A \subset B \quad \text{y} \quad B \subset A$$



EJEMPLO 7

En los siguientes conjuntos, determine si hay conjuntos iguales.

$$A = \{1, 2\} \qquad C = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{x \mid (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\} \qquad D = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

SOLUCIÓN

El conjunto B puede definirse equivalentemente como $B = \{1, 2, 3\}$. Hecho esto, puede hacerse la afirmación de que el conjunto B es igual al conjunto C o sea $B = C$. Las raíces de la ecuación cuadrática en el conjunto D son $x = 1$ y $x = 2$. Así pues, el conjunto D puede redefinirse así:

$$D = \{1, 2\}$$

y podemos hacer la afirmación de que el conjunto A es igual al conjunto D, es decir, $A = D$.

DEFINICIÓN: UNIÓN DE CONJUNTOS
La ***unión*** de dos conjuntos A y B, indicada por $A \cup B$, es un conjunto formado por todos los elementos contenidos en el conjunto A o el conjunto B o bien por ambos.

La representación de $A \cup B$ por medio del diagrama de Venn aparece en la figura 9.4.

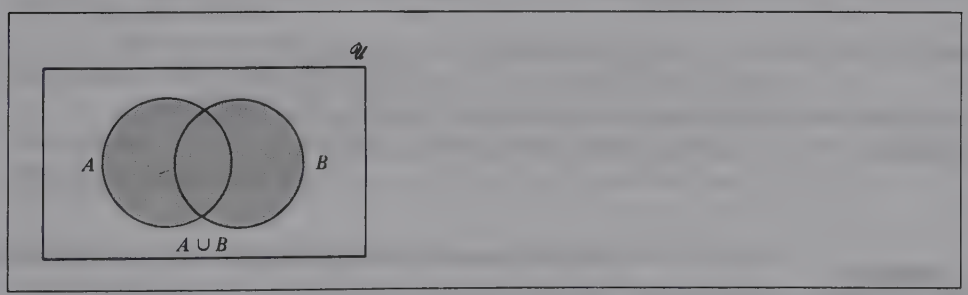


FIGURA 9.4 Unión de los conjuntos A y B.

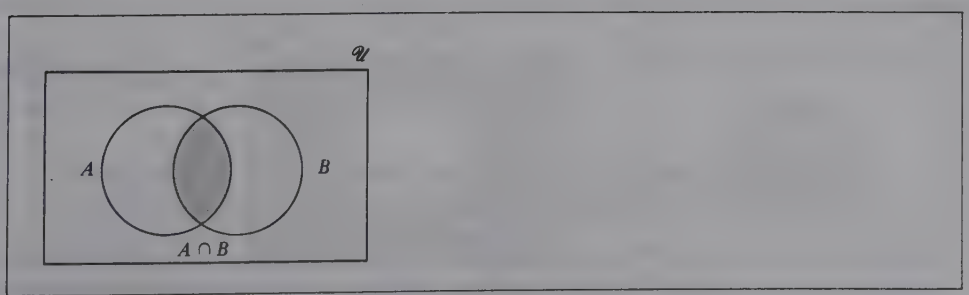


FIGURA 9.5 Intersección de los conjuntos A y B

EJEMPLO 8

En los siguientes conjuntos,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
c) $B \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

NOTA
La unión de cualquier conjunto A y su complemento da por resultado el conjunto universal $\mathcal{U}$, o sea $A \cup A' = \mathcal{U}$.

DEFINICIÓN: INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS
La ***intersección*** de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es un conjunto que consta de todos los elementos pertenecientes a A y B.

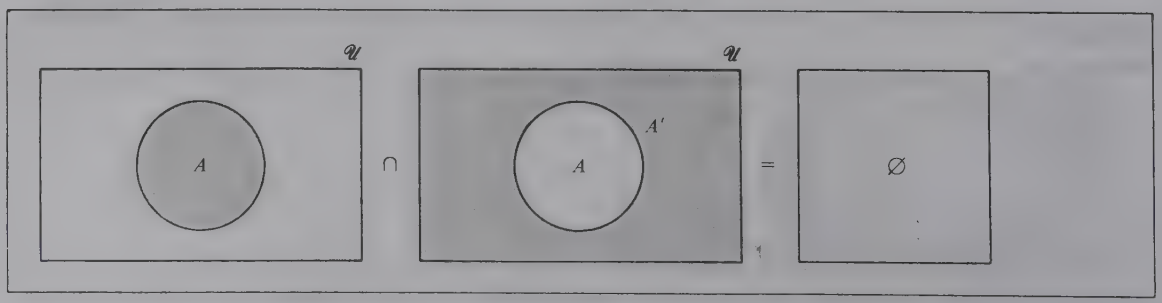
La representación de la intersección de dos conjuntos A y B mediante el diagrama de Venn es el área sombreada de la figura 9.5. Nótese en él que la intersección es el área *común* a los dos conjuntos.

EJEMPLO 9

En los conjuntos A, B y C definidos en el último ejemplo,

a) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 3, 5\}$
b) $A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{2, 4\}$
c) $B \cap C = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \varnothing$
d) $A \cap A' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10\} = \varnothing$
e) $B \cap \mathcal{U} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

FIGURA 9.6
$A \cap A' = \Phi$



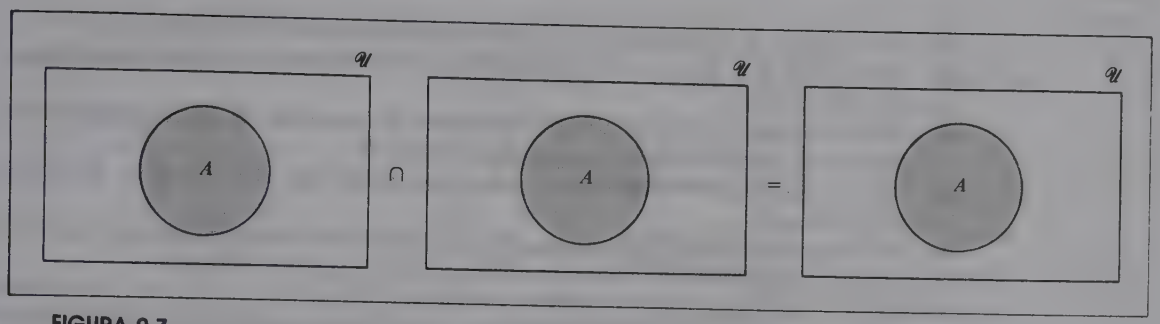


FIGURA 9.7
$A \cap A = A$.

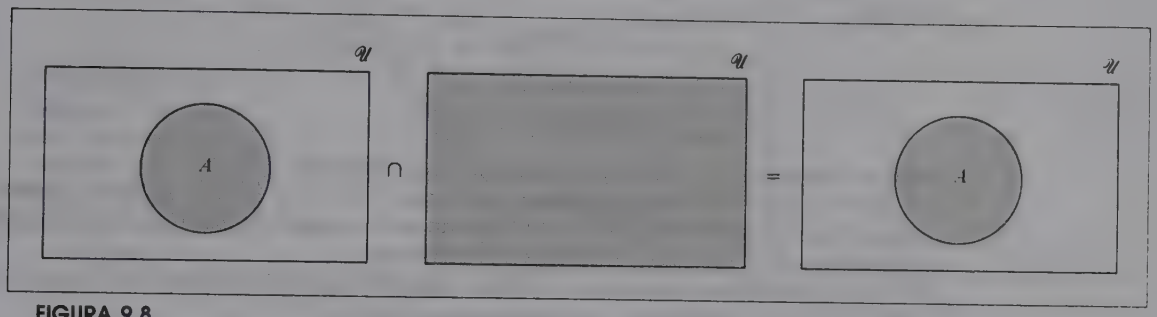


FIGURA 9.8
$A \cap \mathcal{U} = A$.

He aquí algunas otras propiedades generales de los conjuntos:

1 ***La intersección de cualquier conjunto A y su complemento A' es el conjunto nulo.*** En forma gráfica esto se muestra en la figura 9.6. El resultado se da en el ejemplo 9*d*.

2 ***La intersección de un conjunto cualquiera A consigo mismo es el mismo conjunto A.*** En forma gráfica, esto se muestra en la figura 9.7.

3 ***La intersección de cualquier conjunto A con el conjunto universal $\mathcal{U}$ es el conjunto A.*** Éste se muestra gráficamente en la figura 9.8. Y este resultado se explicó en el ejemplo 9*e*.

Ejercicios de seguimiento de la sección 9.1

En los ejercicios 1-5 redefina cada conjunto aplicando el método de la propiedad descriptiva.

1 $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
2 $S = \{-5, +5, -4, +4, -3, +3, -2, +2, -1, +1, 0\}$
3 $V = \{a, e, i, o, u\}$
4 $S = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$
5 $C = \{1, 8, 27, 64\}$

En los ejercicios 6-10 redefina cada conjunto por enumeración.

6 $A = \{a \mid a$ es un entero negativo impar mayor que $-12\}$
7 $B = \{b \mid b$ es un entero positivo menor que $5\}$
8 $C = \{c \mid c$ es el nombre de un día de la semana$\}$
9 $B = \{b \mid$ cuando $a = 2,\ a + 3b = -7\}$

10 $M = \{m \mid m$ es la cuarta potencia de un entero positivo menor que $5\}$

11 Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $B = \{b \mid b$ es un entero positivo impar menor que $8\}$, defina B'.

12 Si $\mathcal{U}$ es igual al conjunto de los estudiantes de una clase de matemáticas y P es el conjunto de los que reprueban el curso, defina P'.

13 Si $\mathcal{U} = \{x \mid x$ es un entero mayor que 5 pero menor que $15\}$ y si $S' = \{7, 9, 10, 12, 13\}$, defina S.

14 Si $\mathcal{U}$ es el conjunto universal que contiene todos los enteros positivos y si T' es el conjunto constituido por todos los enteros positivos pares, defina T.

15 Si $\mathcal{U} = \{x \mid x$ es un entero positivo menor que $20\}$, $A = \{1, 5, 9, 19\}$, $B = \{b \mid b$ es un entero positivo impar menor que $11\}$ y $C = \{c \mid c$ es un entero positivo impar menor que $20\}$, defina todas las relaciones con subconjuntos que existan entre $\mathcal{U}$, A, B y C.

16 En

$$\mathcal{U} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$
$$A = \{4, 8, 16\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

trace un diagrama de Venn que represente los conjuntos.

17 Si $\mathcal{U} = \{x \mid x$ es un entero negativo mayor que $-11\}$, $A = \{a \mid a$ es un entero negativo impar mayor que $-10\}$ y si $B = \{b \mid b$ es un entero negativo mayor que $-6\}$, trace un diagrama de Venn que represente los conjuntos.

18 En los siguientes conjuntos, *a*) señale cuáles conjuntos (si los hay) son iguales y *b*) defina todas las relaciones de subconjuntos entre A, B, C y D.

$$A = \{3, -4\} \qquad C = \{x \mid x^3 + x^2 - 12x = 0\}$$
$$B = \{x \mid (x - 3)(x + 4) = 0\} \qquad D = \{0, -4, -3\}$$

19 En los siguientes conjuntos, *a*) señale cuáles conjuntos (si los hay) son iguales y *b*) defina todas las relaciones de subconjuntos entre A, B, C y D.

$$A = \{0, 1, -1\} \qquad C = \{1, 0, -1\}$$
$$B = \{b \mid b^3 - b = 0\} \qquad D = \{d \mid -d + d^3 = 0\}$$

20 En los conjuntos

$$A = \{-1, -3, -5, -7, -9\}$$
$$B = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9\}$$
$$C = \{-2, -4, -6, -8\}$$

encuentre

a) $A \cup B$ *b*) $A \cup C'$
c) $B \cup C$ *d*) $A \cap B$
e) $A \cap C$ *f*) $B \cap C$

21 Si el ejercicio 20 $\mathcal{U} = \{x \mid x$ es un entero negativo mayor que $-12\}$, encuentre

a) $A \cap A'$ *b*) $A' \cap B'$
c) $B' \cup C$ *d*) $A \cap C'$
e) $B' \cup A$ *f*) $C' \cap A'$

22 En un conjunto cualquiera A,

a) $A \cup \mathcal{U} =$ *b*) $A' \cap \mathcal{U} =$
c) $A \cup \varnothing =$ *d*) $A' \cup \varnothing =$
e) $\mathcal{U}' =$

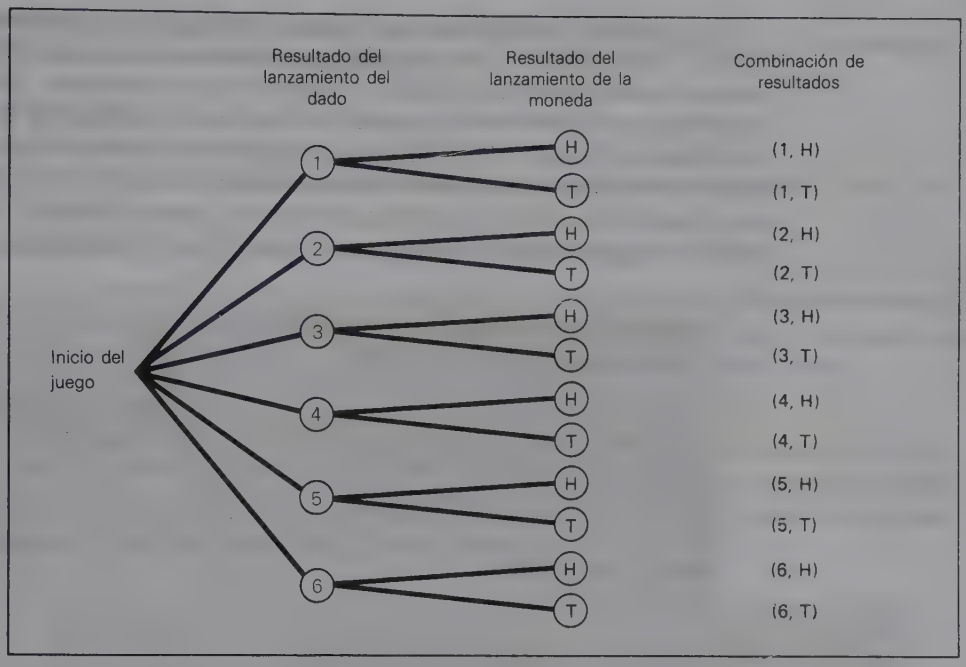


FIGURA 9.9
Diagrama de árbol para el ejemplo del lanzamiento de la moneda y del dado.

9.2 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

En la presente sección, nos concentraremos en varios arreglos de conteo de los elementos de un conjunto. Esta exposición se iniciará examinando el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 10

Supóngase que estamos jugando un juego en que cada jugada consiste en lanzar un dado y luego una moneda. Cuando se lanza el dado, hay 6 posibles resultados (1, 2, 3, 4, 5 y 6). Si se arroja una moneda, los dos resultados son cara (H) y cruz (T). Supóngase que nos interesa determinar todos los posibles resultados de este juego. Una manera de abordar el problema es construir un ***diagrama de árbol*** como el de la figura 9-9.

El primer resultado del juego es el de lanzar el dado. El diagrama de árbol representa los 6 posibles resultados con 6 ramas que nacen de izquierda a derecha. En cualquiera 1 de esos resultados, existen 2 posibles resultados en la segunda parte del juego. Éstos están representados en el diagrama por los pares de ramas que nacen de cada una de las 6 ramas originales. Lo que en el diagrama se enumera son los 12 posibles resultados combinados del juego.

EJERCICIO
Construya el diagrama de árbol que enumere todos los posibles resultados en el juego anterior, si la moneda se lanza primero y luego el dado. ¿Cuántos son los posibles resultados?

El diagrama de árbol puede ser muy eficaz para representar y contar los posibles resultados de una serie de experimentos o eventos. Pero tiene limitaciones cuando crece el número de los posibles resultados. Si se trazase un diagrama correspondiente a todos los resultados posibles en la extracción de un número de lotería de seis dígitos, imagine el tamaño y el número de las ramas. Sin embargo, quizá quisiéramos evaluar el número de los resultados posibles a fin de determinar las probabilidades de ganar la lotería. Por fortuna, se cuenta con medios más eficientes de calcular las posibilidades.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO
(Principios de multiplicación)

I Si dos experimentos se realizan en orden y si hay n_1 resultados posibles en el primero y n_2 en el segundo, entonces habrá $n_1 \cdot n_2$ resultados posibles combinados. Una suposición implícita es que el resultado del primer experimento no influye de modo alguno en el del segundo experimento.

II Si N experimentos se llevan a cabo en orden, con $n_1, n_2, \ldots, n_N$ como resultados posibles para N experimentos, entonces habrá

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_N$$

resultados posibles combinados.

EJEMPLO 11

Si nos referimos al ejemplo 10, el primer experimento fue el lanzamiento de un dado y hubo seis resultados posibles ($n_1 = 6$). El segundo experimento arrojó dos resultados posibles ($n_2 = 2$). Si se aplica el principio fundamental del conteo, el número de los posibles resultados combinados en la serie de experimentos se calcula así:

$$n_1 \cdot n_2 = (6)(2) = 12$$

EJEMPLO 12

Si nos referimos a la extracción de un número de lotería de 6 dígitos, la extracción de cada dígito es un experimento con 10 posibles resultados. El número de los posibles resultados combinados (o la cantidad de los números posibles de lotería) se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \\ &= 1\,000\,000 \end{aligned}$$

EJEMPLO 13

Equipo de cirujanos El jefe de cirugía que encabezará una inminente operación de trasplante está preparándose para seleccionar al grupo de apoyo. Se necesitarán un ayudante del cirujano, un cirujano residente, un anestesista, una enfermera quirúrgica, una enfermera ayudante y un asistente. La fecha de la operación permite al jefe de cirugía escoger entre tres colegas asistentes, siete cirujanos residentes, cinco aneste-

sistas, seis enfermeras quirúrgicas, diez enfermeras ayudantes y cinco asistentes. ¿Cuántos grupos de apoyo puede elegir?

SOLUCIÓN

Si se aplica el principio fundamental del conteo, el número de equipos o grupos posibles será

$$3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5 = 31\,500$$

Una vez expuesto el principio fundamental del conteo, a continuación se aplicará al describir otros dos métodos muy importantes de conteo.

Permutaciones

La ***permutación*** es un arreglo ordenado de un conjunto de elementos. Pongamos el caso de tres números 1, 2 y 3. Una permutación de ellos es 123. Otra es 132. He aquí todas las permutaciones que pueden efectuarse con los tres:

123 132 213 231 312 321

CONTEO DE PERMUTACIONES: REGLA 1
El número de permutaciones de n elementos diferentes tomados n a la vez se denota mediante ${}_nP_n$ donde

$$ {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \qquad (9.1)$$

El fundamento lógico en que se basa la ecuación (9.1) es que, al seleccionar el primero de n elementos, se cuenta con n elecciones. Una vez escogido el primer elemento, quedan $n - 1$ opciones para el segundo elemento, o sea $n(n - 1)$ posibles elecciones en los dos primeros elementos. Después de escoger el segundo elemento habrán $n - 2$ opciones para el tercer elementos, es decir, $n(n - 1)(n - 2)$ posibles opciones para los tres primeros elementos. Este razonamiento nos lleva a la conclusión de que, una vez seleccionados los primeros $n - 1$ elementos, no queda más opción que el n-ésimo elemento. La ecuación (9.1) puede reescribirse empleando la ***notación factorial*** como

$$\boxed{{}_nP_n = n!} \qquad (9.2)$$

La notación $n!$ (léase "n factorial") es una forma abreviada de representar el producto del miembro derecho de la ecuación (9.1). Por ejemplo, "5 factorial" se expresa como

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

y

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por definición

$$0! = 1$$

El número de permutaciones diferentes de los tres números 1, 2 y 3, tomados tres a la vez, es ${}_3P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Nótese que este producto es igual al número de las permutaciones enumeradas antes.

EJEMPLO 14

Seis equipos de futbol americano compiten en una conferencia. Suponiendo que no haya empates, ¿cuántas clasificaciones por rango de fin de temporada son posibles en la conferencia?

SOLUCIÓN

El número de clasificaciones es

$$
\begin{aligned}
{}_6P_6 &= 6! \\
&= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720
\end{aligned}
$$

CONTEO DE PERMUTACIONES: REGLA 2
El número de permutaciones de n objetos diferentes, *tomados r veces a la vez*, se denota por medio de ${}_nP_r$ donde

$$
{}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r.\ factores} \tag{9.3}
$$

El fundamento lógico en que se basa la ecuación (9.3) se parece al de la ecuación (9.1). Sin embargo, una vez seleccionados $r-1$ elementos, el número de las opciones diferentes para el r-ésimo elemento es $n-(r-1)$, o sea $n-r+1$.

Una formulación alternativa de la ecuación (9.3) se obtiene al multiplicar el miembro derecho de la ecuación (9.3) por $(n-r)!/(n-r)!$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot\frac{(n-r)!}{(n-r)!} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 1
\end{aligned}
$$

o bien

$$
\boxed{{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}} \tag{9.4}
$$

EJEMPLO 15

Una persona desea hacer una apuesta y seleccionar los tres primeros caballos que ocuparán los tres primeros lugares al finalizar la carrera. Si en ella participan ocho caballos, ¿cuántas posibilidades existen para los tres primeros caballos (suponiendo que no haya empates)?

SOLUCIÓN

El número de posibilidades es

$$
{}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336
$$

o, conforme a la ecuación (8.4)

$$
\begin{aligned}
{}_8P_3 &= \frac{8!}{(8-3)!} \\
&= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336
\end{aligned}
$$

El fundamento lógico en que se basa el cálculo anterior es que hay ocho posibilidades para el primer lugar. Con ese número quedan siete posibilidades para el segundo lugar; y, si se seleccionan los dos primeros lugares, habrá seis opciones para el tercer lugar.

EJEMPLO 16

A un candidato presidencial de Estados Unidos le gustaría visitar siete ciudades antes de las elecciones primarias. Sin embargo, tan sólo podrá visitar tres de ellas. ¿Cuántos itinerarios pueden estudiar él y sus ayudantes?

SOLUCIÓN

Puesto que el "orden de las visitas" es importante al momento de planear un itinerario, el número de itinerarios posibles es igual al de las permutaciones de siete ciudades tomadas tres a la vez, o sea

$$
\begin{aligned}
{}_7P_3 &= \frac{7!}{(7-3)!} \\
&= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \\
&= 7 \cdot 6 \cdot 5 \\
&= 210
\end{aligned}
$$

Combinaciones

En las permutaciones el interés se centra en conocer el número de maneras en que puede arreglarse un conjunto de elementos. Muchas veces se quiere determinar la cantidad de formas en que es posible seleccionar un conjunto de elementos, sin que importe en absoluto el orden o arreglo de los mismos. Así, podemos desear determinar el número de comités de tres personas que pueden formarse con seis candidatos. En este ejemplo, el comité compuesto por $\{A, B, C\}$ es el mismo que el integrado por $\{B, A, C\}$, donde A, B y C representan a tres de los candidatos. El orden de la selección no es importante al determinar el número de comités diferentes.

La ***combinación*** es un conjunto de elementos, sin que se preste atención al orden ni a su arreglo. Una combinación de r elementos escogidos en un conjunto de n elementos es un *subconjunto* del conjunto de n elementos. Pongamos el caso del conjunto de cuatro letras $\{A, B, C, D\}$. Supóngase que se desea calcular el número de combinaciones de las cuatro letras cuando se toman tres a la vez. Comencemos enumerando todas las permutaciones posibles de las cuatro letras cuando se toman tres a la vez. En la figura 9.10 se observan esas permu-

taciones. De acuerdo con la ecuación (9.4) debería haber, y de hecho hay, en la figura 9.10.

$$
\begin{aligned}
{}_4P_3 &= \frac{4!}{(4-3)!} \\
&= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} \\
&= 24
\end{aligned}
$$

permutaciones distintas. Adviértase que cada renglón de la figura representa las permutaciones de tres de las cuatro letras; es decir, con tres letras existen $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ arreglos de las tres letras. Puesto que una combinación de ellas prescinde del orden, en realidad cada renglón representa apenas una combinación. Por consiguiente, hay sólo cuatro combinaciones diferentes de las cuatro letras si se toman tres a la vez.

En general, la relación entre permutaciones y combinaciones es

$$ {}_nP_r = {}_nC_r \cdot r! $$

o bien, al despejar ${}_nC_r$,

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \tag{9.5} $$

Al sustituir el miembro derecho de la ecuación (9.4) en la ecuación (9.5), se obtiene

$$ {}_nC_r = \frac{n!/(n-r)!}{r!} $$

o bien

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

REGLA PARA EL CONTEO DE COMBINACIONES
El número de combinaciones de r elementos que pueden seleccionarse de n elementos está denotado por ${}_nC_r$, donde

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{9.6} $$

ABC	*ACB*	*BAC*	*BCA*	*CAB*	*CBA*
ABD	*ADB*	*BAD*	*BDA*	*DAB*	*DBA*
ACD	*ADC*	*CAD*	*CDA*	*DAC*	*DCA*
BCD	*BDC*	*DBC*	*DCB*	*CDB*	*CBD*

FIGURA 9.10 Permutaciones de las letras {A, B, C, D} tomadas tres a la vez.

Para retornar al ejemplo del comité, el número de combinaciones de seis personas tomadas tres a la vez es de

$$
\begin{aligned}
{}_6C_3 &= \frac{6!}{3!(6-3)!} \\
&= \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 17

Los organizadores del Super Bowl están escogiendo a los árbitros del partido. Entre 12 árbitros elegibles, se seleccionarán 5. ¿Cuántos equipos de 5 árbitros pueden formarse con los 12?

SOLUCIÓN

El número de equipos de árbitros es

$$
\begin{aligned}
{}_{12}C_5 &= \frac{12!}{5!(12-5)!} \\
&= \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} \\
&= 792
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 18

Si nos referimos al candidato presidencial del ejemplo 16, ¿cuántas combinaciones de tres ciudades podrían visitar él y su equipo de la campaña?

SOLUCIÓN

En este problema no es importante el *orden* de las visitas. Lo que se busca es determinar el número de diferentes conjuntos de tres ciudades que podrían tenerse en cuenta. Se trata de un problema de combinaciones en que

$$
\begin{aligned}
{}_7C_3 &= \frac{7!}{3!(7-3)!} \\
&= \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} \\
&= 35
\end{aligned}
$$

Algunos problemas de conteo requieren combinaciones de los métodos de conteo, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 19

Planeación nutricional Los nutriólogos recomiendan que cada adulto consuma diariamente un mínimo de *a*) cuatro porciones del grupo de lácteos, *b*) dos porciones del

grupo de carne, *c*) cuatro porciones del grupo de verduras y frutas, y *d*) cuatro porciones del grupo de pan y cereales. Supóngase que un chef tiene seis alimentos del grupo de lácteos, cinco del grupo de carne, siete del grupo de verduras y frutas, y ocho del grupo de pan y cereales. Si no debe dar más de una ración de cada elemento durante el día, ¿cuántas agrupaciones diferentes de alimentos puede considerar para preparar un menú de un día?

SOLUCIÓN

El problema exige utilizar la regla de conteo de combinaciones y el principio fundamental de conteo. Para encontrar la solución, primero se calcula el número de combinaciones de cada grupo de alimentos que pueden ofrecerse en un día cualquiera. Por ejemplo, el número de combinaciones de los alimentos pertenecientes al grupo de lácteos es

$$ {}_6C_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = 15 $$

De manera parecida, los números de las diferentes combinaciones de los otros tres alimentos son, respectivamente,

(carne) $$ {}_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10 $$

(verduras y frutas) $$ {}_7C_4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 35 $$

(pan y cereales) $$ {}_8C_4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 70 $$

Conocido el número de las opciones que pueden seleccionarse de cada grupo de alimentos, es posible servirse del principio fundamental de conteo para calcular el número total de los distintos grupos alimentarios.

$$ \begin{aligned} \text{Agrupaciones totales posibles de los alimentos} &= {}_6C_4 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_7C_4 \cdot {}_8C_4 \\ &= (15)(10)(35)(70) \\ &= 367\,500 \end{aligned} $$

Ejercicios de seguimiento de la sección 9.2

1 Un juego consiste en lanzar una moneda dos veces. Dibuje un diagrama de árbol que enumere todas las combinaciones posibles de los resultados del juego.

2 Un juego consiste en lanzar una moneda tres veces consecutivas. Dibuje un diagrama de árbol que numere todas las combinaciones posibles de los resultados del juego.

3 Control de emisiones Una estación de inspección de automóviles revisa el nivel de emisiones contaminantes de los vehículos. Éstos pasan (P) o no pasan (NP) la inspección. Trace un árbol de decisión que enumere todos los posibles resultados que se obtienen con cuatro inspecciones consecutivas de los automóviles.

4 Perfil médico Un proyecto de investigación del cáncer clasifica a las personas en cuatro categorías: varones y mujeres; fumadores excesivos, fumadores moderados y no fumadores; programa de ejercicio regular o ausencia de programa regular; exceso de peso o no exceso de peso. Trace un diagrama de árbol que enumere todas las clasificaciones posibles de personas.

Aplique el principio fundamental del conteo para resolver los ejercicios 5-8.

5 Una placa de licencia se compone de dos letras seguidas por tres números de un solo dígito. Determine el número de códigos de las placas de licencia que puede haber.

6 Admisiones en la universidad La oficina de admisión de una universidad clasifica a los solicitantes en varones o mujeres; en residentes del estado o residentes de otro estado; los que prefieren ciertas carreras que ofrece la universidad (ingeniería, administración de empresas, artes liberales, pedagogía, farmacología); candidatos superiores al promedio, candidatos en el nivel promedio o solicitantes por debajo del promedio en las calificaciones de la prueba de aptitudes académicas; y petición de ayuda económica o no petición de ayuda económica. Determine el número de posibles clasificaciones de los solicitantes.

7 Un estudiante está planeando su programa para el otoño. Está considerando que para los cinco cursos hay cuatro posibles profesores de inglés, cinco profesores de sociología, tres de matemáticas, siete de historia y cuatro de ciencias políticas. Determine el número de los conjuntos de posibles profesores para el programa de otoño del estudiante.

8 Determine la cantidad de posibles números telefónicos de siete dígitos si los tres primeros no pueden ser cero y

a) pueden emplearse cualesquiera dígitos para el resto de los números.
b) el primer dígito debe ser impar, alternándose después entre pares e impares.
c) todos los dígitos tienen que ser pares
d) no puede repetirse ningún dígito

Evalúe las siguientes expresiones factoriales.

9 $6!$
10 $8!$
11 $10!$
12 $(12 - 7)!$
13 $\dfrac{8!}{3!}$
14 $\dfrac{10!}{3!}$
15 $\dfrac{8! \cdot 4!}{5!}$
16 $\dfrac{12! \cdot 6!}{10!}$
17 $\dfrac{9!}{4! \cdot 5!}$
18 $\dfrac{6!}{2! \cdot 4!}$
19 $\dfrac{5!}{0! \cdot 5!}$
20 $\dfrac{7!}{3! \cdot 4!}$

En los ejercicios 21-28, evalúe cada símbolo.

21 ${}_5P_5$
22 ${}_6P_3$
23 ${}_8P_4$
24 ${}_{10}P_3$
25 ${}_5C_5$
26 ${}_6C_3$
27 ${}_{10}C_4$
28 ${}_5C_3$

29 Hay que poner 12 caballos dentro de la jaula de arranque en una gran competencia hípica. ¿Cuántos diferentes arreglos de arranque pueden hacerse?

30 Un candidato político desea visitar a seis estados. ¿En cuántos órdenes puede hacerlo?

31 El candidato político del ejercicio anterior sólo tiene fondos y tiempo para visitar cinco ciudades. ¿Cuántas combinaciones de ellas podrá visitar?

32 Una compañía de tarjetas de crédito emite tarjetas que contienen prefijos de tres letras como parte del número de tarjeta. El número de una tarjeta muestra es ABC1234.

a) Si cada letra del prefijo debe ser distinta, ¿cuántos prefijos son posibles?
b) Si cada uno de los cuatro números después del prefijo debe ser diferente, ¿cuántas secuencias de cuatro dígitos son posibles?

33 Se están considerando 10 astronautas para formar la tripulación del próximo vuelo. Si la tripulación constara de tres miembros, ¿cuántas combinaciones de astronautas pueden realizarse?

34 Un experto en la administración de carteras (portafolios) está analizando 20 acciones para invertir en ellas. Sólo se escogerán 10 acciones para incluirlas en una cartera. ¿Cuántas combinaciones de ellas pueden tenerse en cuenta?

35 Hay que seleccionar a cuatro personas para el consejo de administración de un hospital. Si se han seleccionado 10 candidatos, ¿cuántos grupos de 4 pueden escogerse para el consejo?

36 En un comité compuesto por 8 personas, ¿en cuántas formas pueden seleccionarse un presidente, un vicepresidente y un secretario?

37 Cinco aerolíneas han presentado solicitudes para operar una nueva ruta internacional. Sólo tres de las compañías conseguirán permiso para hacerlo. ¿Cuántos conjuntos diferentes de aerolíneas es posible escoger?

38 Investigación médica Una gran fundación de investigación está estudiando la conveniencia de financiar un conjunto de 8 proyectos de investigación. Han sido presentadas 20 solicitudes, pero sólo se financiarán 8. ¿Cuántos conjuntos de proyectos podrá financiar?

39 Una mano de bridge consta de 13 naipes. ¿Cuántas manos pueden darse de un mazo compuesto por 52 naipes?

***40 Equipo de diseño** El presidente de una gran corporación ha decidido iniciar el desarrollo de un nuevo producto muy importante que le dará a la empresa una considerable ventaja competitiva. El presidente quiere asignar un equipo especial al diseño del producto, el cual estará integrado por tres ingenieros, un analista de investigación de mercados, un analista financiero y dos supervisores de producción. Están siendo considerados para integrar el equipo 6 ingenieros, 3 analistas de investigación de mercados, 4 analistas financieros y 5 supervisores de producción. ¿Cuántos equipos de diseño es posible formar?

***41 Educación** El presidente de un departamento de matemáticas en un plantel de enseñanza media quiere seleccionar a 4 estudiantes del último año, 3 del penúltimo año, 2 del segundo año y 2 del primer año para formar el equipo de matemáticas. De los alumnos, 10 del último año, 8 del penúltimo año, 8 del segundo año y 6 del primer año han hecho solicitudes para formar parte del equipo y fueron admitidos con base en las calificaciones obtenidas en matemáticas. ¿Cuántos equipos podrá seleccionar el presidente en este grupo?

9.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA PROBABILIDAD

En la presente sección se dará una introducción de la noción de probabilidad y algunos conceptos fundamentales de ella.

Experimentos, resultados y eventos

El concepto de probabilidad se relaciona con ***procesos aleatorios***, llamados también ***experimentos aleatorios***. El ***experimento aleatorio*** (o, más simplemente, ***experimento***) es un proceso que produce uno de varios ***resultados*** posibles. Los experimentos aleatorios clásicos son el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, la extracción de una tarjeta en un mazo bien barajeado y la selección de una bola en una urna que contenga cierto número de bolas. En la vida diaria existen muchos procesos aleatorios menos obvios. Algunos procesos de manufactura originan productos defectuosos en una forma aleato-

ria. Se ha dado este nombre también a los tiempos que transcurren entre la llegada de las llamadas telefónicas a una central telefónica, a los automóviles en las casetas de cobro y a los clientes de un supermercado. A la misma categoría pertenece el proceso en virtud del cual se decide el sexo de un niño.

Cada repetición de un experimento puede concebirse como un ***ensayo*** (intento) que tiene un resultado observable. Si en el experimento del lanzamiento de la moneda suponemos que ésta no puede caer de canto, los dos resultados posibles de un ensayo son la ocurrencia (aparición) de cara. o bien la ocurrencia de cruz. El conjunto que incluye todos los resultados posibles de un experimento recibe el nombre de ***espacio muestral***. El espacio muestral de un experimento es el conjunto de resultados S tal que cualquier realización del experimento (ensayo) producirá un y sólo un elemento de S. A los elementos de S se les llama ***resultados simples.***

En el ejemplo del lanzamiento de la moneda, el espacio muestral S se define como

$$S = \{\text{cara, cruz}\}$$

En un experimento que mida el tiempo transcurrido entre las llegadas de las llamadas telefónicas a una central telefónica, el espacio muestral podría definirse así:

$$S = \{t \mid t \text{ se mide en segundos y } t \geq 0\}$$

En el experimento del lanzamiento de la moneda hay un ***espacio muestral finito*** porque existe un número finito de posibles resultados. En el experimento de las llamadas telefónicas hay un ***espacio muestral infinito*** porque existe un número infinito de resultados posibles.

En un experimento dado, los resultados a menudo se clasifican en ***eventos***. El evento E de un experimento es un subconjunto del espacio muestral, como se aprecia en la figura 9.11. La forma de definir los eventos depende del conjunto de resultados para los cuales se calculan las probabilidades. En el experimento del lanzamiento de una moneda, seguramente los eventos y resultados serán definidos en forma idéntica, como se muestra en la figura 9.12. En ella hay una correspondencia uno a uno entre cada evento y cada resultado simple en el espacio muestral.

Si un evento E consta de sólo un resultado posible en S, recibe el nombre de *evento simple.*

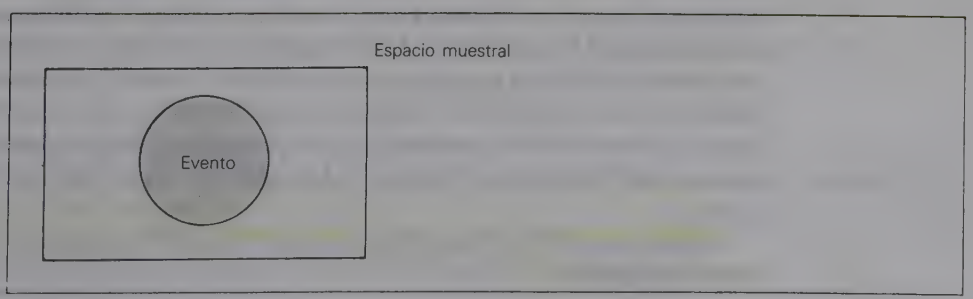


FIGURA 9.11
El evento es un subconjunto del espacio muestral.

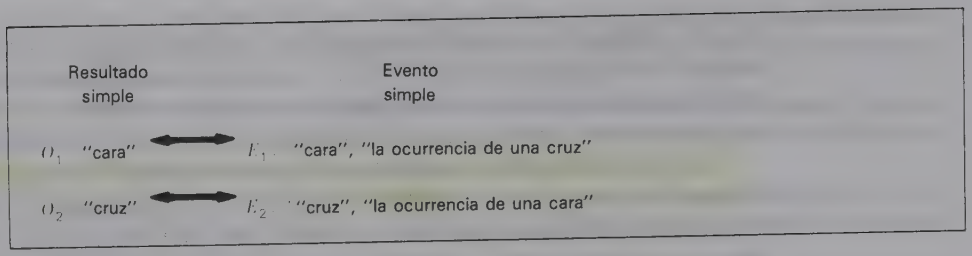


FIGURA 9.12 Mapeo de resultados/eventos para el experimento del lanzamiento de la moneda.

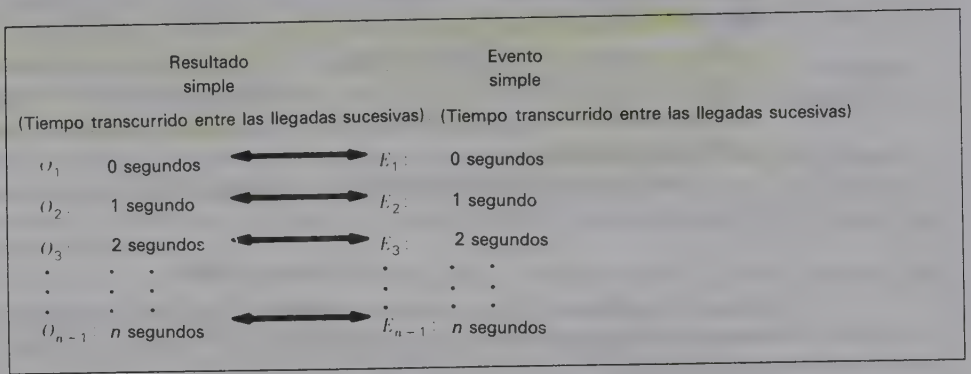


FIGURA 9.13 Mapeo de resultados/eventos para el experimento de las llamadas telefónicas.

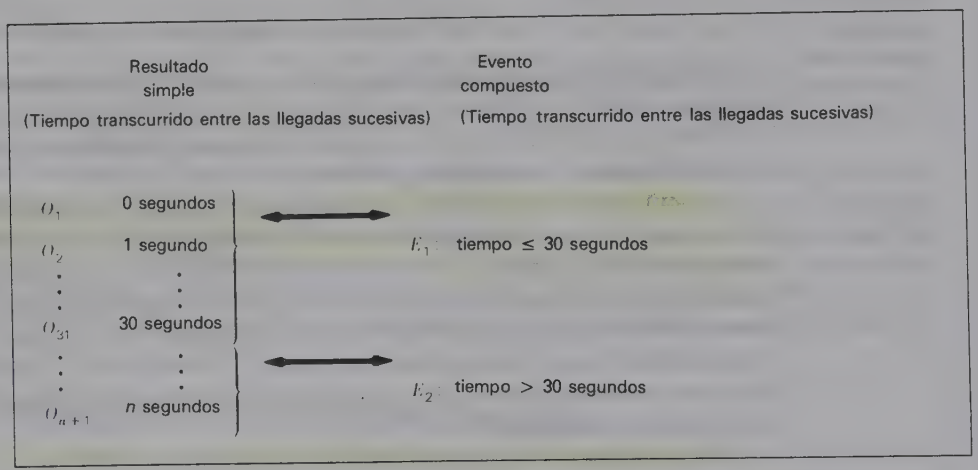


FIGURA 9.14 Mapeo de resultados/eventos para el experimento de las llamadas telefónicas.

La relación entre un resultado y un evento puede ejemplificarse mejor al estudiar el experimento que incluye el tiempo transcurrido entre las llegadas de las llamadas telefónicas. Los eventos se definen de distinta manera según la finalidad del experimento. En la figura 9.13, el espacio muestral infinito ha sido transformado en un conjunto infinito de eventos, empleando para ello un mapeo de uno a uno de los resultados simples en eventos también simples. La figura 9.14 muestra un mapeo del espacio muestral infinito en dos eventos. Así pues, es posible que un evento se defina de modo que abarque resultados múltiples.

Si un evento *E* consta de más de un resultado simple en *S*, se le llama *evento compuesto*

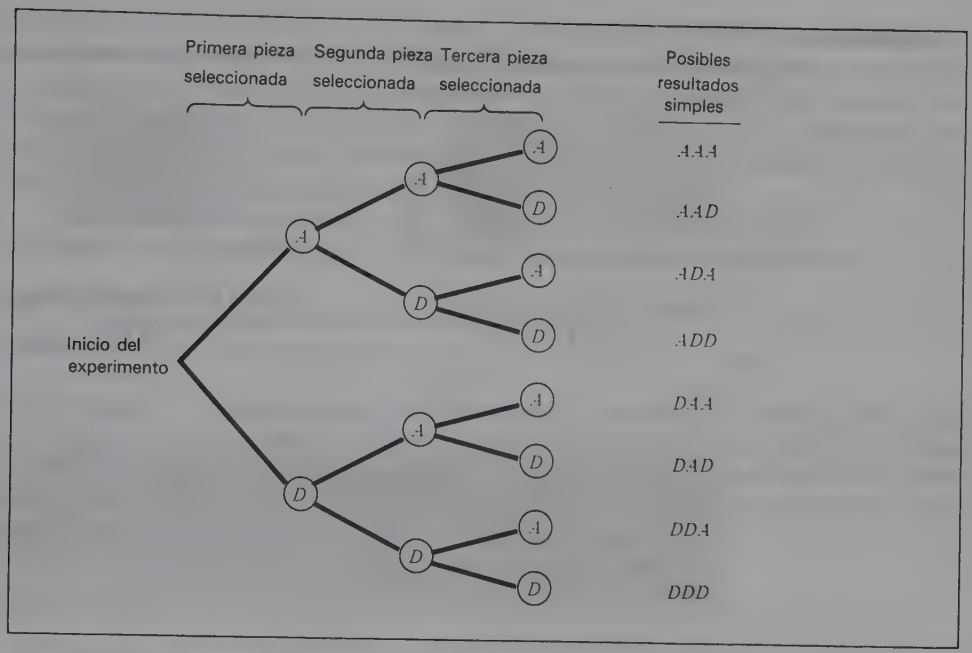


FIGURA 9.15 Diagrama de árbol para el ejemplo 20.

EJEMPLO 20

Supóngase que un experimento consiste en seleccionar tres partes fabricadas en un proceso de producción y en observar si son *aceptables* (o sea que cumplen con las especificaciones de producción) o *defectuosas* (no cumplen con las especificaciones).

a) Determine el espacio muestral S.

b) ¿Qué resultados se incluyen en el evento "exactamente dos partes aceptables"?

c) ¿Qué resultados se incluyen en el evento "por lo menos una parte defectuosa"?

SOLUCIÓN

a) Si "aceptable" se denota con A y "defectuoso" con D, el resultado de cualquier ensayo se indicará por una secuencia de tres A y D. La figura 9.15 es un diagrama de árbol que genera los resultados posibles de este experimento. Los posibles resultados de él se representan mediante el espacio solución

$$S = \{AAA, AAD, ADA, ADD, DAA, DAD, DDA, DDD\}$$

donde los elementos de S son los resultados simples del experimento.

b) El evento "exactamente dos partes aceptables" es el subconjunto de S

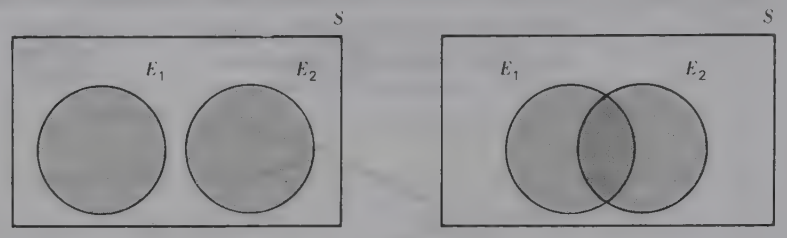
$$E = \{AAD, ADA, DAA\}$$

Nótese que este evento es compuesto.

c) El evento "por lo menos una parte defectuosa" es un evento compuesto. Es el subconjunto de S

$$E = \{AAD, ADA, DAA, ADD, DAD, DDA, DDD\}$$

FIGURA 9.16



a)
Eventos mutuamente excluyentes
$E_1 \cap E_2 = \phi$

b)
Eventos no mutuamente excluyentes
$E_1 \cap E_2 \neq \phi$

DEFINICIÓN: EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES
Se dice que un conjunto de eventos es *mutuamente excluyente* si la ocurrencia de cualquiera de ellos excluye la posibilidad de que ocurra otro cualquiera. En concreto, los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son mutuamente excluyentes si $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n = \phi$.

En el lanzamiento de una moneda, dos resultados simples posibles son cara y cruz. Puesto que la ocurrencia de una cara excluye la posibilidad de cruz y a la inversa, los eventos "cara" y "cruz" son mutuamente excluyentes. Supóngase, en el lanzamiento de un dado, que dos eventos se definen como E_1 ("uno") y E_2 ("un valor menos que tres"). E_1 y E_2 no son mutuamente excluyentes porque la aparición de un evento no necesariamente excluye la posibilidad del otro. En un solo ensayo o intento, el resultado "uno" implica que tanto E_1 como E_2 han ocurrido. La figura 9.16 es una representación, mediante el diagrama de Venn, de eventos mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes en un espacio muestral S.

EJEMPLO 21

Pongamos el caso de una encuesta donde se selecciona una muestra aleatoria de electores empadronados. En cada elector escogido, se apuntan su sexo y su partido político. Los eventos "demócrata" y "mujer" no son mutuamente excluyentes, ya que la selección de un demócrata no excluye la posibilidad de que se trate de una mujer. Los dos eventos "varón" y "mujer" serán mutuamente excluyentes, lo mismo que "demócrata", "republicano" e "independiente".

DEFINICIÓN: EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS
Se dice que un conjunto de eventos es ***colectivamente exhaustivo***, si su unión explica todos los resultados posibles de un experimento.

Los eventos "cara" (H) y "cruz" (T), que se obtienen al lanzar una moneda, son colectivamente exhaustivos pues su unión comprende todos los resultados posibles de un experimento. En un experimento que consista en lanzar una moneda dos veces, los eventos H_1H_2, H_1T_2 y T_1T_2 describen los resultados posibles. Este conjunto de eventos no es colectivamente exhaustivo, ya que su unión no incluye el resultado T_1H_2.

En el mismo experimento, el conjunto de eventos H_1H_2, H_1T_2, T_1T_2, y T_1H_2 es *a la vez* mutuamente excluyente y colectivamente exhaustivo.

EJEMPLO 22

Admisiones en la universidad La tabla 9.2 indica algunas características del grupo de primer año en una universidad. Supóngase que vamos a seleccionar a un alumno aleatoriamente en el grupo. Los eventos del experimento pueden definirse en diversas formas. El espacio muestral S se compone de resultados simples que describen el sexo y la materia principal del alumno. Por tanto,

$$S = \{MB, ML, ME, FB, FL, FE\}$$

TABLA 9.2

Sexo \ Materia principal	(*B*) Administración	(*L*) Artes liberales	(*E*) Preingeniería	Total
Varón (*M*)	350	300	100	750
Mujer (*F*)	250	450	50	750
Total	600	750	150	1 500

Podríamos también definir los eventos por sexo o materia principal. Así, el evento "estudiante varón" (M) es un evento compuesto que consta de los resultados simples MB, ML y ME, o sea

$$M = \{MB, ML, ME\}$$

De manera análoga, el evento "estudiante de ingeniería" (E) es el evento compuesto

$$E = \{ME, FE\}$$

Determine, en cada uno de los siguientes conjuntos de eventos, si son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos o ambas cosas.

a) $\{M, F\}$
b) $\{B, L, E\}$
c) $\{MB, ML, ME, B\}$

SOLUCIÓN

a) Los dos eventos M (varón) y F (mujer) son mutuamente excluyentes porque la ocurrencia de un estudiante de sexo masculino excluye la posibilidad de un estudiante de sexo femenino y a la inversa. Los dos eventos son asimismo colectivamente exhaustivos puesto que todos los resultados en el espacio muestral pueden hacerse corresponder a esos eventos.

b) Los tres eventos B (administración), L (artes liberales) y E (preingeniería) son mutuamente excluyentes. Ello se debe a que la ocurrencia de una materia principal excluye la posibilidad de las otras dos materias principales. Los tres eventos son además colectivamente exhaustivos porque todos los resultados del espacio muestral pueden hacerse corresponder a esos eventos.

c) Los eventos MB, ML, ME y B no son mutuamente excluyentes, pues la ocurrencia de un varón en administración de empresas (MB) no excluye la ocurrencia de una materia principal de administración (B). Esos eventos no son colectivamente exhaustivos, pues no incluyen a las mujeres cuya materia principal son las artes liberales o la preingeniería.

EJERCICIO

Determine si los siguientes eventos son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos o ambas cosas.*

(*a*) $\{M, F, B, L, E\}$
(*b*) $\{FB, FL, FE, M\}$
(*c*) $\{FB, FL, FE, B, L\}$

Probabilidades

Aunque podemos hacer conjeturas respecto al resultado de un experimento aleatorio, es imposible que sepamos con seguridad el que se presentará. Podemos adivinar si saldrá cara (H) o cruz (T), pero no lo sabemos con certidumbre. En cambio, en el caso de multitud de procesos aleatorios, se observa una regularidad a largo plazo. Según se mencionó antes, las expectativas a largo plazo cuando se arroja una moneda es que aproximadamente la mitad de los resultados corresponderán a cara y la otra a cruz. Cuando se lanza un dado, las expectativas a largo plazo son que cada cara caerá aproximadamente una sexta parte de las veces. Tales valores reflejan la expectativa de la ***frecuencia relativa*** de un evento. La frecuencia relativa de un evento es la proporción de las veces que cada evento ocurre. Se calcula dividiendo el número de veces m que se presente el evento entre las veces n que se lleva a cabo el experimento. ***La probabilidad de un evento puede concebirse como la frecuencia relativa m/n de un evento a largo plazo.***

Si se conoce la naturaleza de la frecuencia relativa de un evento, puede enunciarse la siguiente regla de probabilidad.

REGLA 1

La probabilidad de un evento E, denotada por $P(E)$, es un número comprendido entre 0 y 1 incluso, o bien

$$0 \leq P(E) \leq 1 \tag{9.7}$$

---

* Respuesta: *a*) no mutuamente excluyentes pero colectivamente exhaustivos, *b*) mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, *c*) ni mutuamente excluyentes ni colectivamente exhaustivos.

Dos casos especiales de la ecuación (9.7) son $P(E) = 0$ y $P(E) = 1$. ***Si P(E) = 0, es seguro que el evento E no ocurra.*** Por ejemplo, si una moneda tiene dos lados con cara, P(cruz) = 0 en un solo lanzamiento de ella. ***Si P(E) = 1, es seguro que ocurra el evento E.*** Con la misma moneda, P(cara) = 1. Si $0 < P(E) < 1$, hay incertidumbre ante la realización del evento E. Por ejemplo, si $P(E) = .4$, puede afirmarse que existe una probabilidad de 40% de que ocurra el evento E.

EJEMPLO 23

Admisiones en la universidad (continúa) En la tabla 9.2 (del ejemplo 22) se incluyeron algunas características de una universidad. Suponga que un estudiante escogido al azar (en forma aleatoria) del grupo de alumnos de primer año y que cada uno tiene las mismas posibilidades de que lo seleccionen. Aplicando el concepto de probabilidad basado en la frecuencia relativa, es posible estimar la probabilidad de que el estudiante seleccionado reúna ciertas características. Por ejemplo, la probabilidad de que ese alumno sea seleccionado es

$$P(M) = \frac{\text{número de varones}}{\text{número total de estudiantes de primer año}} = \frac{750}{1\,500} = .50$$

La probabilidad de que el alumno seleccionado lleve como materia principal la preingeniería es

$$P(E) = \frac{\text{número de estudiantes de preingeniería}}{\text{número total de estudiantes de primer año}} = \frac{150}{1\,500} = .10$$

TABLA 9.3

Sexo \ Materia principal	(*B*) Administración	(*L*) Artes liberales	(*E*) Preingeniería	Total
Varón (*M*)	.233	.200	.067	.500
Mujer (*F*)	.167	.300	.033	.500
Total	.400	.500	.100	1.000

La probabilidad de que el estudiante sea una mujer que estudia la carrera de administración es

$$P(FB) = \frac{250}{1\,500} = .167$$

En la tabla 9.3 se resumen las probabilidades de los diversos eventos relacionados con la selección de un estudiante. Nótese que la suma de las probabilidades de los eventos M y F es igual a 1. De manera semejante, la suma de las probabilidades de los eventos B, L y E es 1.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Por qué las probabilidades de los dos conjuntos de eventos {*M*, *F*} y {*B*, *L*, *E*} dan un total de 1?

Las probabilidades son clasificables de diversas maneras. Una clasificación es la distinción entre ***probabilidades objetivas*** y ***subjetivas***. Las primeras están basadas en la experiencia histórica o en el conocimiento general que no admite la menor duda. Por ejemplo, las probabilidades asignadas a los eventos relacionados con el lanzamiento de una moneda o un dado se basan en una larga experiencia pasada y generalmente conocida. Otras probabilidades objetivas se asignan a partir de experimentos concretos. Por ejemplo, si se nos ha dicho que un dado está "cargado", un método de calcular las probabilidades de que caiga uno de los lados consiste en lanzar el dado muchas veces, llevando al mismo tiempo un control de la frecuencia relativa de cada cara.

Las probabilidades subjetivas son asignadas cuando se carece de experiencia pasada. Se fundan en las experiencias e intuición del sujeto. En realidad son expresiones del juicio personal. Una probabilidad subjetiva sería la de que el lector se asignaría respecto a la obtención de un 10 en este curso de matemáticas aplicadas. Tal estimación reflejaría su valoración personal de factores como los siguientes: su aptitud en esta clase de cursos, su percepción del grado de dificultad del curso, su opinión del profesor y la forma en que él dirige el curso y evalúa el aprovechamiento.

Algunas reglas más de probabilidad

REGLA 2
Si $P(E)$ representa la probabilidad de que ocurra un evento E, la probabilidad de que no ocurra, denotada por $P(E')$, será

$$P(E') = 1 - P(E) \tag{9.8}$$

Si la probabilidad de que una empresa logre utilidades durante su primer año de operaciones se estima en 0.85, la probabilidad de que no logre utilidades durante el primer año es de $1 - 0.85 = 0.15$. Si se tiene un dado "legal", la probabilidad de que caiga un "uno" es 1/6. La probabilidad de que no caiga un "uno" es $1 - 1/6 = 5/6$.

REGLA 3
Si los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra E_1 o E_2 es

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \tag{9.9}$$

EJEMPLO 24

Obras públicas El departamento de obras públicas de una localidad está preparándose para el invierno. Está planeando sus necesidades de sal y arena para dar mantenimiento a las carreteras durante las nevadas y después de ellas. El análisis de los inviernos pasados ha producido las siguientes estimaciones de las probabilidades respecto al número previsto de grandes nevadas. ¿Qué probabilidades hay de que caigan tres o más nevadas en el año entrante?

TABLA 9.4

n (Número de grandes nevadas)	$P(n)$
0	.10
1	.25
2	.30
3	.20
Más de 3	.15

SOLUCIÓN

Los eventos simples de la tabla 9.4, los cuales corresponden al evento compuesto "3 o más" grandes nevadas, son $n = 3$ y $n =$ más de 3. Esos dos eventos simples son mutuamente excluyentes. Por tanto, la probabilidad de tres o más grandes nevadas será

$$P(3 \text{ o más}) = P(3) + P(\text{más de } 3)$$
$$= .20 + .15 = .35$$

REGLA 4
En los n eventos mutuamente excluyentes $E_1, E_2, \ldots, E_n$, las probabilidades de que ocurran $E_1, E_2, \ldots,$ o E_n es

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) \qquad (9.10)$$

EJEMPLO 25

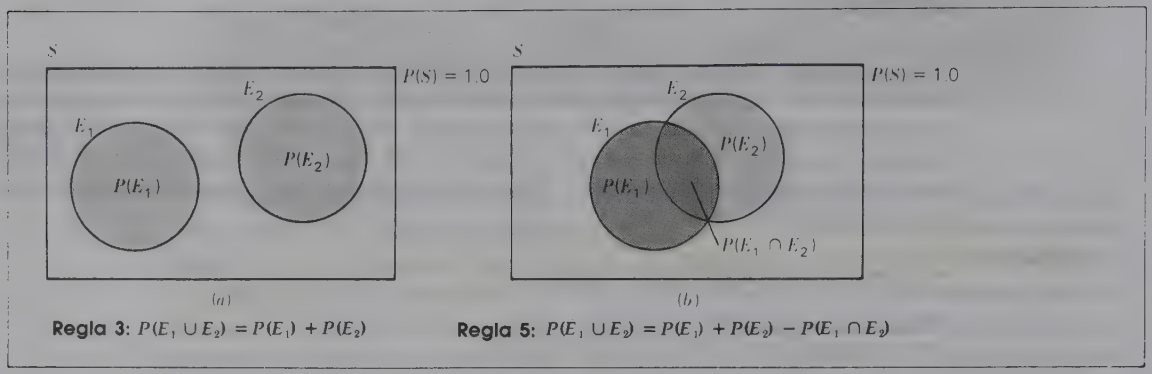
Teniendo presente la información del ejemplo 24, ¿cuál es la probabilidad de que haya ~~más~~ menos de tres grandes nevadas?

SOLUCIÓN

Los eventos simples correspondientes a "menos de tres" nevadas son 0, 1 y 2 nevadas. Se trata de eventos simples mutuamente excluyentes, por lo cual se aplica la regla 4 y se obtiene

$$P(\text{menos de } 3) = P(0) + P(1) + P(2) = .10 + .25 + .30 = .65$$

FIGURA 9.17



Regla 3: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ **Regla 5:** $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

NOTA
Este problema podría haber sido resuelto empleando el resultado del ejemplo 24 y aplicando la regla 2. Es decir,

$$P(\text{menos de 3}) = 1 - P(3 \text{ o más})$$
$$= 1 - .35 = .65$$

Cuando un conjunto de eventos no es mutuamente excluyente, la regla 3 debe modificarse para que refleje la posibilidad de que dos eventos no sucedan al mismo tiempo.

REGLA 5
La probabilidad de la ocurrencia de los eventos E_1 y E_2 o de ambos a la vez es

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \qquad (9.11)$$

Nótese que el operador de intersección se utiliza para denotar la ocurrencia conjunta o simultánea de los eventos E_1 y E_2.

La regla 3 es un caso especial de la regla 5, donde $P(E_1 \cap E_2) = 0$. Ello se debe a que se supone que E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes en la regla 3, lo cual significa que los eventos nunca pueden tener lugar en forma simultánea. La figura 9.17 describe gráficamente estas reglas por medio de los diagramas de Venn. En ellos las áreas representan las probabilidades, suponiendo que el área del espacio muestra S sea 1.0.

EJEMPLO 26

En un experimento que consiste en seleccionar aleatoriamente una baraja en un mazo de 52 naipes, los eventos "rey" y "espadas" no son mutuamente excluyentes. La pro-

babilidad de escoger un rey, un naipe de espadas o un rey y un naipe con espadas a la vez se calcula aplicando la regla 5, o sea

$$\begin{aligned} P(\text{Rey} \cup \text{espadas}) &= P(\text{rey}) + P(\text{espadas}) - P(\text{rey} \cap \text{espadas})1 \\ &= P(\text{rey}) + P(\text{espadas}) - P(\text{rey de espadas}) \\ &= \tfrac{4}{52} + \tfrac{13}{52} - \tfrac{1}{52} \\ &= \tfrac{16}{52} = \tfrac{4}{13} \end{aligned}$$

Nótese que P(rey ∩ espadas) debe restarse para compensar el conteo doble del evento (rey ∩ espadas). Cuando se calcula *P*(rey), queda incluido el rey de espadas; y cuando se calcula *P*(espadas), sucede lo mismo. Así pues, se ha realizado un conteo doble, y hay que sustraer *P*(rey de espadas).

EJEMPLO 27

Conservación de la energía Un grupo de 2000 personas fue entrevistado respecto a las políticas que podrían implantarse para conservar el petróleo. De ellas, 1000 dijeron que estarían dispuestas a aceptar el racionamiento de la gasolina, 500 dijeron que un impuesto adicional de $0.25 por galón sería aceptable para ellas y 275 indicaron que estarían dispuestas a aceptar tanto el racionamiento como el impuesto adicional. Si se escoge a una persona aleatoriamente en este grupo, ¿qué probabilidades habrá de que:

a) considere aceptable el impuesto adicional?
b) juzgue aceptable el impuesto adicional pero no el racionamiento de gasolina?
c) considere aceptable una o ambas alternativas?
d) juzgue inaceptables las dos?

SOLUCIÓN

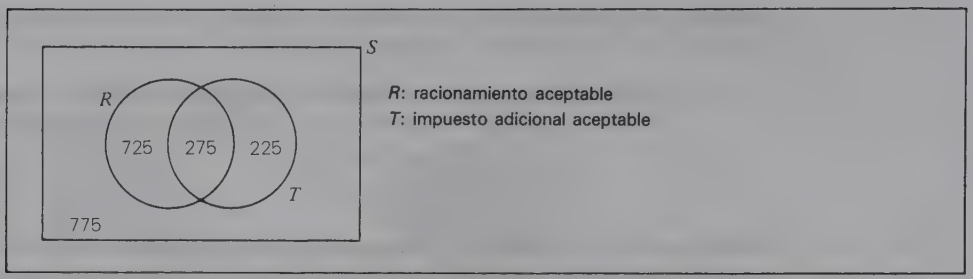
El diagrama de Venn es útil para sintetizar los resultados de la encuesta. En la figura 9.18 se incluye el diagrama de Venn relativo a la encuesta. Adviértase que las 275 personas que juzgan aceptables las dos políticas están representadas por la intersección de los conjuntos *R* y *T*. El grupo de 1000 personas en el conjunto *R* consta de dos tipos de entrevistados: 275 que consideran aceptables ambas políticas y 725 para quienes es aceptable el racionamiento, no así el impuesto adicional. De manera parecida, en las 500 personas del conjunto *T* hay 275 que juzgan aceptables ambas políticas y 225 que aprueban el impuesto adicional pero no el racionamiento. Al sumar a las que aceptan una o las dos políticas, se obtiene un total de 1225. Los entrevistados restantes (775) son aquellos que no aprueban ninguna de las dos políticas.

a) Puesto que 500 personas aceptaron el impuesto adicional, las probabilidades de que una persona la acepte serán

$$P(T) = \frac{\begin{array}{c}\text{número de personas} \\ \text{que aprueban el} \\ \text{impuesto}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{número de} \\ \text{personas entrevistadas}\end{array}} = \frac{500}{2\,000} = 0.25$$

b) 225 personas manifestaron su aprobación del impuesto adicional, no así del racionamiento. Por consiguiente, la probabilidad de seleccionar a una de ellas es de 225/2000 = 0.1125.

FIGURA 9.18



c) Podemos contestar esta parte del ejemplo en dos formas. La manera más sencilla consiste en sumar el número de entrevistados que aceptaron una o ambas políticas, y dividir el resultado entre el total, es decir,

$$P(R \cup T) = \frac{725 + 275 + 225}{2\,000} = \frac{1\,225}{2\,000} = 0.6125$$

O bien puede aplicarse la regla 5.

$$P(R \cup T) = P(R) + P(T) - P(R \cap T)$$

Se calculó $P(T)$ en la parte *a*). Verifique que $P(R) = 0.50$ y que $P(R \cap T) = 0.1375$. En consecuencia.

$$\begin{aligned} P(R \cup T) &= 0.50 + 0.25 - 0.1375 \\ &= 0.6125 \end{aligned}$$

d) Si se recurre al método de la frecuencia relativa, esta probabilidad es igual a 775/2000 = 0.3875. O bien puede utilizarse la respuesta en la parte *c*) como sigue:

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix}\text{ninguna de las dos}\\ \text{políticas aceptable}\end{pmatrix} &= P[(R \cup T)'] = 1 - P(R \cup T) \\ &= 1 - 0.6125 \\ &= 0.3875 \end{aligned}$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 9.3

1 Vigilancia (monitoreo) de la contaminación Un inspector de la calidad del agua está efectuando un experimento en el que muestrea el agua de varios pozos, a fin de comprobar si presenta los niveles *aceptables* (*A*) o *inaceptables* (*I*) de los contaminantes. Suponga que el inspector va a inspeccionar cuatro pozos, uno después de otro, y que registrará la calidad del agua en cada uno de ellos.

a) Determine el espacio muestral *S* de este experimento.
b) Construya un diagrama de árbol que enumere los resultados posibles.
c) ¿Qué resultados simples quedan incluidos en el evento "exactamente dos pozos aceptables"?
d) ¿Qué resultados simples quedan incluidos en el evento "por lo menos un pozo aceptable"?

2 Reincidencia Un investigador de justicia criminal está estudiando la tasa de reincidencia (cometer el mismo delito varias veces) en la seducción de menores de edad. Está llevando a cabo un experimento en que examina el registro criminal de los condenados por haber cometido este delito. Si una persona ha sido condenada más de una vez, se le clasifica como "reincidente" (*R*). Si no ha sido condenada más de una vez, se le clasifica como "no reincidente" (*N*) en el experimento. Si el investigador exami-

TABLA 9.5

Sexo \ Grado más alto	Grado universitario (*C*)	Diploma de enseñanza media (*H*)	Sin grado (*N*)	Total
Varón (*M*)	250	100	40	390
Mujer (*F*)	225	110	25	360
Total	475	210	65	750

na los registros de cuatro transgresores, *a*) determine el espacio muestral *S* del experimento, *b*) construya un diagrama de árbol que enumere los posibles resultados del experimento, *c*) determine el conjunto de resultados simples incluidos en el evento "dos o menos reincidentes" y *d*) determine el conjunto de resultados simples comprendidos en el evento "un reincidente por lo menos".

3 La tabla 9.5 indica algunas características de un grupo de 750 solicitantes de un puesto administrativo. Se les clasifica por sexo y por el grado académico más alto que hayan recibido. Supóngase que uno de ellos debe seleccionarse aleatoriamente en un experimento. El espacio muestral *S* de este experimento se compone de resultados simples $S = \{MC, MH, MN, FC, FH, FN\}$.

a) Determine el conjunto de resultados simples que sirven para definir el evento compuesto "solicitante varón" (*M*).

b) Determine el conjunto de resultados simples que sirven para definir el evento compuesto "el grado académico más alto del solicitante es el obtenido en la universidad" (*C*).

4 En el ejercicio 3, determine para cada uno de los siguientes conjuntos de eventos si son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos o ambas cosas a la vez.

a) $\{M, F, H\}$

b) $\{C, H, N, M, F\}$

c) $\{MC, MH, MN, F\}$

d) $\{MC, FC, C, H, N\}$

e) $\{M, FC, FH\}$

5 En el ejercicio 3, suponga que se selecciona de modo aleatorio a un solicitante (todos tienen igual probabilidad de ser escogidos). ¿Cuál es la probabilidad de que el solicitante seleccionado *a*) sea una mujer, *b*) posea un diploma de enseñanza media como su grado académico más alto, *c*) sea un varón sin grado académico alguno, *d*) sea una mujer con un grado universitario?

6 En la tabla 9.6 se muestran algunas características de 10 000 de los que reciben préstamos de una gran institución financiera. Se les clasifica atendiendo al tipo de préstamo (personal o mercantil) y al grado de riesgo. Supóngase que va a efectuarse un experimento en que se escoge en forma aleatoria la cuenta de uno de los que obtienen préstamos. El espacio muestran *S* de este experimento consta de todos los resultados simples $S = \{PL, PA, PH, BL, BA, BH\}$.

TABLA 9.6

Tipo de préstamo promedio \ Riesgo de crédito	Poco riesgo (L)	Riesgo (A)	Alto riesgo (H)	Total
Personal (*P*)	2 250	4 000	1 200	7 450
Administración (*B*)	750	1 200	600	2 550
Total	3 000	5 200	1 800	10 000

a) Determine el conjunto de resultados simples con que se define el evento compuesto "préstamo personal" (*P*).

b) Determine el conjunto de resultados simples que sirven para definir el evento compuesto "préstamo de riesgo promedio" (*A*).

7 En el ejercicio 6 determine, para cada uno de los siguientes conjuntos de eventos, si son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos o ambas cosas a la vez.

a) $\{P, L, A, H\}$

b) $\{PL, BL, PA, BA, H\}$

c) $\{P, B, H\}$

d) $\{B, PL, PH, BL, BH\}$

e) $\{PL, BL, PA, BH\}$

8 En el ejercicio 6, suponga que se escoge aleatoriamente una cuenta (cada una tiene igual probabilidad de que la escojan). ¿Qué probabilidades hay de que la cuenta escogida se encuentre *a*) en la categoría de riesgo promedio, *b*) sea un préstamo personal, *c*) sea un préstamo mercantil en la categoría de alto riesgo, *d*) sea un préstamo personal de poco riesgo?

9 Cuidados intensivos para cardiacos Con objeto de fundamentar su solicitud de una unidad de cuidados intensivos para cardiacos, la sala de urgencias de un gran hospital urbano recabó datos sobre el número de víctimas de ataques cardiacos a quienes ha atendido. En la tabla 9.7 se indican las probabilidades de que diferentes números de esos pacientes sean atendidos en la sala de urgencias durante un día normal. En un día cualquiera, ¿qué probabilidades hay de que *a*) sean atendidos cinco o menos enfermos, *b*) cinco o más víctimas, *c*) no más de siete víctimas?

10 Protección contra incendios El número de alarmas de incendios que se activan cada hora fluctúa en una ciudad. Unos analistas han estimado la probabilidad de varios números de alarmas por hora, según se observa en la tabla 9.8. En una hora cualquiera, ¿qué probabilidades hay de que *a*) se activen más de 10 alarmas, *b*) se activen entre 10 y 12 alarmas (inclusive), *c*) no se activen más de 11 alarmas?

11 Hay que sacar un naipe de un mazo bien barajado. ¿Qué probabilidades hay de que el naipe sea *a*) un rey o una sota, *b*) un naipe con figura humana (sota, reina, rey), *c*) un 7 o espadas, *d*) un naipe rojo o un naipe de las figuras humanas rojas?

12 Una encuesta hecha a 1500 consumidores se llevó a cabo para averiguar su conducta de compra en relación con dos refrescos de mucha venta. Se descubrió que, el mes pasado, 600 personas habían comprado la marca A, 400 habían comprado la mar-

TABLA 9.7

Número de víctimas tratadas (n)	$P(n)$
Menos de 5	.08
5	.16
6	.30
7	.26
Más de 7	.20

TABLA 9.8

Número de alarmas activadas (n)	$P(n)$
Menos de 10	.20
10	.24
11	.26
12	.18
Más de 12	.12

ca B y 150 habían adquirido ambas marcas. Si en este grupo se selecciona aleatoriamente a un consumidor (suponiendo que cada uno tenga iguales posibilidades de que lo seleccionen), ¿qué probabilidades hay de que esa persona:

a) haya comprado la marca A en el mes pasado?
b) haya comprado la marca B y no la marca A?
c) haya comprado la marca A, la marca B o ambas?
d) no haya comprado ninguna de las dos marcas?

13 Investigación sobre la vitamina C En los últimos años ha surgido una gran controversia en torno a los posibles beneficios que aportan las dosis suplementarias de vitamina C. Según afirman los defensores de ella, las dosis suplementarias reducirán la frecuencia del resfriado común y de la influenza. A un grupo experimental de 1000 personas se le administraron dosis suplementarias de vitamina C para un periodo de 1 año. En este periodo, se descubrió que 300 de ellas tuvieron uno o más resfriados, 100 sufrieron influenza y 80 tuvieron resfriados e influenza a la vez. Si de este grupo experimental se selecciona una persona en forma aleatoria (suponiendo una probabilidad idéntica de selección), ¿qué probabilidades hay de que una persona:

a) haya sufrido uno o más resfriados, pero no la influenza?
b) haya sufrido resfriados e influenza?
c) haya tenido uno o más resfriados pero no la influenza, o bien haya sufrido influenza pero ningún resfriado?
d) no haya sufrido ni resfriados ni influenza?

14 El espacio muestral de un experimento consta de cinco eventos simples E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5. Estos eventos son mutuamente excluyentes. Las probabilidades de ocurrencia de estos eventos son $P(E_1) = 0.20$, $P(E_2) = 0.15$, $P(E_3) = 0.25$, $P(E_4) = 0.30$ y $P(E_5) = 0.10$. Para este experimento pueden definirse:

$$F = \{E_1, E_2, E_3\} \qquad G = \{E_1, E_3, E_5\} \qquad H = \{E_1, E_5\}$$

Determine *a*) $P(F)$, *b*) $P(G)$, *c*) $P(H)$, *d*) $P(G')$, *e*) $P(F \cup G)$, *f*) $P(G \cup H)$, *g*) $P(F \cap H)$, *h*) $P(F \cap G)$.

15 El espacio muestral de un experimento consta de cuatro eventos simples E_1, E_2, E_3 y E_4, los cuales son mutuamente excluyentes. Las probabilidades de realización de estos eventos son $P(E_1) = 0.2$, $P(E_2) = 0.1$, $P(E_3) = 0.4$ y $P(E_4) = 0.3$. Para este experimento pueden definirse varios eventos compuestos, a saber:

$$A = \{E_1, E_2, E_3\} \qquad B = \{E_2, E_4\} \qquad C = \{E_1, E_3, E_4\}$$

Determine *a*) $P(A)$, *b*) $P(A')$, *c*) $P(B)$, *d*) $P(C)$, *e*) $P(C')$, *f*) $P(A \cup B)$, *g*) $P(B \cup C)$, *h*) $P(A \cap C)$.

9.4 ESTADOS DE INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Independencia estadística

Además de las clasificaciones anteriores, los eventos pueden clasificarse en ***independientes*** y ***dependientes***.

DEFINICIÓN: EVENTOS INDEPENDIENTES
Dos eventos son independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de un evento de ninguna manera afecta a la posibilidad o probabilidad de ocurrencia del otro evento.

Los resultados de los lanzamientos consecutivos de una moneda legal constituyen un ejemplo de eventos independientes. El hecho de que salga cara o cruz en un lanzamiento cualquiera no influye de ningún modo en la probabilidad de que salga uno u otro lado en el siguiente lanzamiento o en los siguientes. La extracción de naipes de una baraja o de bolas de una urna *con reposición* es un experimento caracterizado por eventos independientes. *"Con reposición"* significa que el elemento seleccionado vuelve a ponerse en la baraja o en la urna antes de escoger el siguiente. En el caso de la baraja, la probabilidad de sacar un corazón en cada extracción es de 13/52 a condición de que se reemplace en la baraja el naipe extraído antes.

Otro ejemplo lo encontramos en la generación aleatoria de *productos aceptables* o *defectuosos*. En tal proceso, se supone que la probabilidad de generar una unidad aceptable (o defectuosa) permanezca inalterada durante un ensayo cualquiera, cualesquiera que hayan sido los resultados anteriores.

Con frecuencia se le da el nombre de ***probabilidad marginal*** *a la simple probabilidad de un evento.* La probabilidad marginal de que caiga la cara es 0.5 cuando se lanza una moneda legal. Si se supone una extracción aleatoria, la probabilidad marginal de escoger espadas en una baraja es de 13/52. Muy a menudo se desea calcular la probabilidad de que dos o más eventos tengan lugar al mismo tiempo o en sucesión. Así, quizá se quiera conocer la probabilidad de arrojar un par de dados y que salga un 5 en un dado y 2 en el otro; o bien tal vez se desee averiguar la probabilidad de que caiga 5 veces cara al lanzar cinco veces consecutivas una moneda. *La probabilidad de la ocurrencia simultánea de dos o más eventos recibe el nombre de* ***probabilidad conjunta.***

REGLA 6

La probabilidad conjunta de que dos eventos independientes E_1 y E_2 acontezcan al mismo tiempo o en sucesión es igual al producto de las probabilidades marginales de ambos, o sea

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \qquad (9.12)$$

EJEMPLO 28

La probabilidad de que una máquina produzca una unidad defectuosa es 0.05. Se supone que el proceso de producción se caracteriza por la independencia estadística. En otras palabras, la probabilidad de que una unidad sea defectuosa es de 0.05, prescindiendo de la calidad de las unidades anteriores. Suponga que queremos determinar la probabilidad de que sean defectuosas dos piezas consecutivas. Si el evento D representa la aparición de una unidad defectuosa, entonces conforme a la regla 6,

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1)P(D_2) \\ &= (.05)(.05) = .0025 \end{aligned}$$

EJEMPLO 29

Recaudación de fondos Una universidad ha comenzado a servirse de telefonemas como el medio principal de recabar fondos entre los alumnos. El vicepresidente de de-

sarrollo estima que la probabilidad de que un alumno, contactado por teléfono, haga una aportación es de 0.24. En dos contactos sucesivos, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) El primer alumno a quien se contacte por teléfono dé un donativo y el segundo no?
b) El primero no dé un donativo y en cambio el segundo sí?
c) Ambos hagan una aportación?
d) Ninguno de los dos dé un donativo?

SOLUCIÓN

Si el evento C representa la ocurrencia de un donativo, el evento C' representa la no ocurrencia de él.

$$\begin{aligned}
a)\quad P(C_1 \cap C_2') &= P(C_1) \cdot P(C_2') \\
&= (0.24)(1 - 0.24) \\
&= (0.24)(0.76) \\
&= 0.1824 \\
b)\quad P(C_1' \cap C_2) &= P(C_1') \cdot P(C_2) \\
&= (0.76)(0.24) \\
&= 0.1824 \\
c)\quad P(C_1 \cap C_2) &= P(C_1) \cdot P(C_2) \\
&= (0.24)(0.24) \\
&= 0.0576 \\
d)\quad P(C_1' \cap C_2') &= P(C_1') \cdot P(C_2') \\
&= (0.76)(0.76) \\
&= 0.5776
\end{aligned}$$

EJERCICIO
Trace un diagrama de árbol para enumerar todos los posibles resultados relacionados con la realización de dos contactos sucesivos con los alumnos. ¿Se enumeraron todos los posibles resultados en el ejemplo? Sume las cuatro probabilidades que se calcularon en él. ¿Tiene sentido el resultado?

REGLA 7
La probabilidad conjunta de que n eventos independientes $E_1, E_2, \ldots E_n$ tengan lugar al mismo tiempo o en sucesión es

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2)\cdots P(E_n) \qquad (9.13)$$

EJEMPLO 30

Oficina de hacienda La oficina de hacienda de un país estima que la probabilidad de un error en las declaraciones del impuesto sobre la renta es de 0.4. Suponga que se efectúe un experimento en el cual tres declaraciones se seleccionan aleatoriamente con fines de auditoría; y se quieren determinar todos los resultados posibles y las probabilidades de estos últimos.

Una herramienta de gran utilidad en problemas de esta índole es un ***árbol de probabilidad.*** Se trata de un diagrama de árbol que enumera todos los resultados posibles de un experimento y las probabilidades de que se obtengan. En la figura 9.19 se incluye un árbol de probabilidad para el experimento. Supongamos que E_i representa el

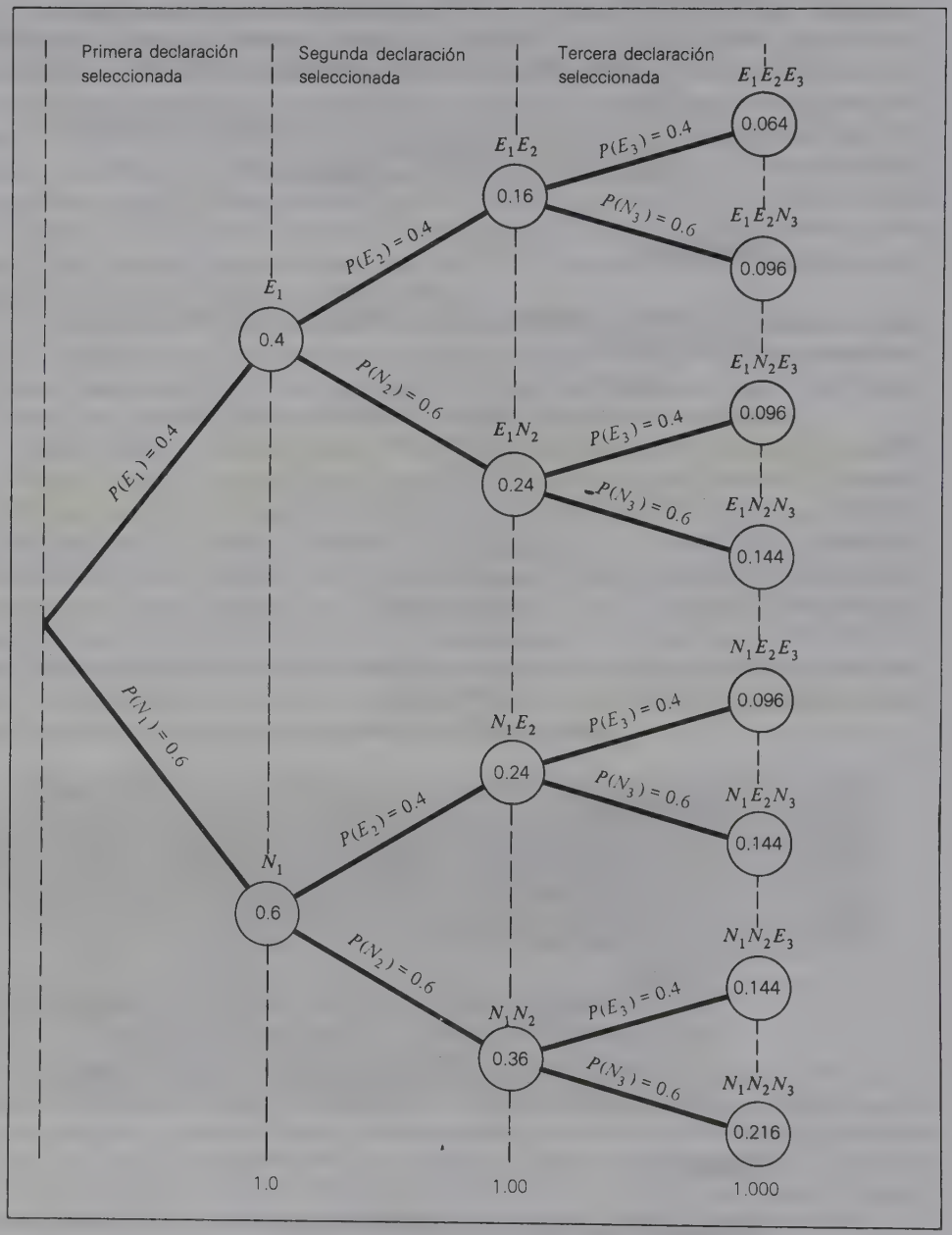


FIGURA 9.19 Árbol de probabilidades para el ejemplo de la oficina de hacienda.

resultado "error" en el i-ésimo ensayo y N_i el resultado "ausencia de error". En la primera declaración de impuestos seleccionada, ambos criterios indican las probabilidades marginales de los dos eventos simples que son posibles.

En la segunda declaración, los cuatro círculos representan las probabilidades conjuntas de los diferentes resultados posibles al elegir cuatro declaraciones. Si se supone

que los resultados de las selecciones consecutivas (ensayos) son independientes, las probabilidades de los diferentes eventos conjuntos para las dos declaraciones seleccionadas pueden calcularse por medio de la regla 6. Por ejemplo,

$$P(E_1 \cap N_2) = P(E_1)P(N_2)$$
$$= (.4)(.6) = .24$$

Para la tercera declaración, los 8 círculos denotan las probabilidades conjuntas de los distintos resultados posibles cuando se escogen tres declaraciones. Estas probabilidades pueden calcularse aplicando la regla 7. Por ejemplo,

$$P(E_1 \cap N_2 \cap E_3) = P(E_1)P(N_2)P(E_3)$$
$$= (.4)(.6)(.4) = .096$$

En la figura 9.19 nótese que en cada ensayo la suma de las probabilidades conjuntas es 1. Ello obedece a que el conjunto de los eventos identificados es colectivamente exhaustivo *y* mutuamente excluyente.

EJERCICIO
Por medio del árbol de probabilidad en la figura 9.19, determine la probabilidad de que 1) dos de las tres declaraciones contengan errores y 2) las tres declaraciones de impuestos contengan un error por lo menos.*

Además de las probabilidades marginal y conjunta, hay otro tipo de probabilidad: la ***probabilidad condicional.*** *La notación $P(E_1|E_2)$ representa la probabilidad condicional del evento E_1, suponiendo que haya tenido lugar el evento E_2.* La probabilidad de que caiga cara en el tercer lanzamiento de una moneda, si los dos primeros produjeron cara, es una probabilidad condicional.

Sin embargo, por definición los eventos independientes tienen la propiedad de que la ocurrencia o no ocurrencia de un evento no influye en la probabilidad de otro.

REGLA 8
En el caso de dos eventos independientes E_1 y E_2, la probabilidad condicional del evento E_1, suponiendo que haya tenido lugar el evento E_2, es la probabilidad marginal de E_1, es decir,

$$P(E_1|E_2) = P(E_1) \qquad (9.14)$$

La probabilidad condicional de que salga un 6 al lanzar un dado es 1/6, suponiendo que no haya salido ningún 6 en los últimos 20 lanzamientos. En el ejemplo de la oficina de hacienda, la probabilidad de que la siguiente declaración de impuestos contenga un error es de 0.4, sin importar los resultados de las declaraciones anteriores que hayan sido examinadas.

---

* Respuesta: *a*) 0.288, *b*) 0.784.

Dependencia estadística

En contraste con el estado de independencia estadística, a muchos eventos se les caracteriza como ***estadísticamente dependientes.***

DEFINICIÓN: EVENTOS DEPENDIENTES
Dos eventos son ***dependientes*** si la probabilidad de la ocurrencia de uno es afectada por la ocurrencia o no ocurrencia del otro.

Entre los ejemplos de experimentos que incluyen eventos dependientes figura la extracción de naipes de una baraja o de bolas de una urna *sin reposición.* Si se selecciona un naipe que no sea corazones y si se conserva fuera de la baraja o mazo, la probabilidad de sacar un naipe de corazones en la siguiente ocasión no es la misma que en la primera extracción. En los siguientes eventos relacionados con las condiciones climatológicas:

Evento E_1 = nevará
Evento E_2 = la temperatura estará por debajo del punto de congelación

en la probabilidad del evento E_1 influye por la ocurrencia o no ocurrencia del evento E_2. En los siguientes ejemplos se explica el cálculo de las probabilidades en condiciones de dependencia estadística.

EJEMPLO 31

Una encuesta a nivel nacional sobre 10 000 hombres de edad madura arrojó los datos que aparecen en la tabla 9.9. Se piensa que los resultados de esta encuesta son representativos de los atributos o cualidades del hombre promedio de edad madura en ese país. Podemos estimar las probabilidades referentes a la cardiopatía y a los hábitos de ejercicio físico, basándonos para ello en las frecuencias relativas de ocurrencia en la encuesta. Así, la probabilidad de que un hombre de edad madura no practique el ejercicio físico es

$$P(NE) = \frac{\text{número de entrevistados que no hacen ejercicio}}{\text{número de varones entrevistados}}$$
$$= \frac{2\,000}{10\,000} = .20$$

La probabilidad de que un hombre de edad madura sufra una cardiopatía es

$$P(HD) = \frac{\text{número de entrevistados que sufren cardiopatía}}{\text{número de varones entrevistados}}$$
$$= \frac{1\,100}{10\,000} = .11$$

La probabilidad conjunta de que un hombre de edad madura haga ejercicio regularmente y sufra una cardiopatía es

$$P(HD \cap RE) = \frac{100}{10\,000} = .01$$

TABLA 9.9

	Sin ejercicio (*NE*)	Un poco de ejercicio (*SE*)	Ejercicio regular (*RE*)	Total
Cardiopatía (HD)	700	300	100	1 100
Ausencia de cardiopatía (~~HD~~)	1 300	6 600	1 000	8 900
Total	2 000	6 900	1 100	10 000

Suponga que deseamos conocer la probabilidad condicional de que un hombre sufra una cardiopatía, suponiendo que no haga ejercicio físico. La información *dada* centra nuestra atención en la primera columna de la tabla 9.9, o sea en los encuestados que no realizan ejercicio físico. De los 2000 hombres encuestados que no hacen ejercicio, 700 sufren una cardiopatía. Por tanto, la probabilidad condicional se calcula como

$$P(HD \mid NE) = \frac{\text{número de entrevistados que no hacen ejercicio } y \text{ sufren cardiopatía}}{\text{número de entrevistados que no hacen ejercicio}}$$

$$= \frac{700}{2\,000} = .35$$

La probabilidad condicional de que un hombre haga ejercicio regularmente, suponiendo que sufra una cardiopatía, es

$$P(RE \mid HD) = \frac{\text{número de entrevistados que hacen ejercicio regularmente } y \text{ sufren cardiopatía}}{\text{número de respondientes que sufren cardiopatía}}$$

$$= \frac{100}{1\,100} = .09$$

Las probabilidades condicionales en situación de dependencia estadística pueden calcularse aplicando la siguiente regla.

REGLA 9
La probabilidad condicional del evento E_1, si ocurre el evento E_2, es

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \tag{9.15}$$

La probabilidad condicional se obtiene dividiendo la probabilidad conjunta de los eventos E_1 y E_2 entre la probabilidad marginal de E_2.

En forma indirecta estábamos sirviéndonos de la ecuación (9.15), cuando calculamos las probabilidades condicionales en el ejemplo 31. Al aplicar la ecuación (9.15) en él, obtenemos

$$P(HD \mid NE) = \frac{P(HD \cap NE)}{P(NE)}$$

$$= \frac{700/10\,000}{2\,000/10{,}000} = \frac{.07}{.20} = .35$$

y

$$P(RE \mid HD) = \frac{P(RE \cap HD)}{P(HD)}$$

$$= \frac{100/10\,000}{1\,100/10\,000} = \frac{.01}{.11} = .09$$

EJEMPLO 32

Suponga que una persona escoge una carta aleatoriamente en un mazo de 52 naipes y nos dice que extrajo un naipe con figuras rojas. La probabilidad de que la carta sea un rey de corazones, *suponiendo* que sea un naipe con figuras rojas, puede determinarse mediante la ecuación (9.15).

$$P(\text{rey de corazones rojo}) = \frac{P(\text{rey de corazones} \cap \text{rojo})}{P(\text{rojo})}$$

$$= \frac{1/52}{26/52} = \frac{1}{26}$$

Si ambos miembros de la ecuación (9.15) se multiplican por $P(E_2)$, la ecuación resultante da una expresión para calcular la probabilidad conjunta $P(E_1 \cap E_2)$, o sea

$$\boxed{P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1 \mid E_2)} \qquad \textbf{(9.16)}$$

EJEMPLO 33

La probabilidad conjunta de seleccionar dos ases consecutivamente en un mazo sin reponer el primer naipe puede calcularse por medio de la ecuación (9.16) en la forma siguiente:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(\text{as en la primera extracción}) \cdot P(\text{as en la segunda extracción } \textit{si} \text{ en la primera se sacó un as})$$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2\,652}$$

EJEMPLO 34

En un jarrón hay ocho bolas rojas, seis amarillas y seis azules. Hay que escoger dos bolas aleatoriamente del jarrón. Suponga que cada una tenga iguales probabilidades de ser seleccionada y que la primera que se extraiga no será puesta de nuevo en el jarrón.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda sea amarilla?
b) ¿Qué probabilidades hay de que ambas sean azules?
c) ¿Qué probabilidades existen de que ninguna de las dos sea roja?

SOLUCIÓN

Seleccionar bolas de un jarrón *sin reposición* es un experimento que se caracteriza por la dependencia estadística.

a) Usando la ecuación (9.16)

$$P(R_1 \cap Y_2) = P(R_1) \cdot P(Y_2 | R_1)$$
$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{48}{380} = \frac{12}{95}$$

b)
$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1)$$
$$= \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{30}{380} = \frac{3}{38}$$

c) Si con R_j se representa el evento "selección de bolas no rojas en la j-ésima extracción",

$$P(R_1' \cap R_2') = P(R_1') \cdot P(R_2' | R_1')$$
$$= \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{132}{380} = \frac{34}{95}$$

EJEMPLO 35

Actividades terroristas Un grupo de terroristas que opera en un país extranjero amenazó con destruir ciertos aviones si no se satisfacen sus demandas. Dicen haber puesto bombas en 3 de 20 aviones que actualmente se encuentran en un aeropuerto muy importante. Se evacuó a los pasajeros y a las tripulaciones, y una escuadra de especialistas en desarmar bombas está a punto de iniciar su búsqueda en los aviones. Es importante la probabilidad de que los 3 primeros aviones en ser escudriñados sean los que tienen las bombas (los afectados).

Si A denota la selección de un avión afectado y N la selección de un avión no afectado, nos interesa $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. La probabilidad de que los dos primeros aviones estén afectados se calcula así:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$$
$$= \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} = \frac{6}{380} = \frac{3}{190}$$

La probabilidad de que los tres primeros aviones sean los afectados se obtiene como

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{3}{190} \cdot \frac{1}{18} = \frac{3}{3\,420}$$

EJERCICIO

¿Qué probabilidades hay de que con una selección aleatoria de cuatro aviones se logre el resultado $A_1 N_2 A_3 A_4$?*

* Respuesta: $\frac{102}{116\,280} = \frac{1}{1\,140}$.

EJEMPLO 36

Simulación con módulos espaciales Mientras se preparaban los vuelos espaciales, una de las contingencias previstas fue la sustitución de los componentes defectuosos al estar en el espacio. Un escenario simulado sugería que de las 10 celdas de combustible de un tipo especial usado en una misión 3 se habían deteriorado durante el vuelo. Suponga que es imposible saber cuáles tres están defectuosas. La única manera de descubrirlas consiste en extraerlas y probarlas con equipo a bordo. Si las celdas se escogen de modo aleatorio, *a*) construya un árbol de probabilidad que resuma los posibles resultados obtenidos al seleccionar tres celdas y probarlas. *b*) ¿Qué probabilidades hay de que ninguna de ellas quede incluida en la muestra de tres? ¿De que una sea incluida? ¿Y de que las tres queden incluidas?

SOLUCIÓN

a) Si con D_j y N_j se representan los resultados defectuosos y no defectuosos de la j-ésima celda escogida, la figura 9.20 contiene el árbol de probabilidad que resume los resultados que pueden conseguirse al seleccionar tres celdas. Nótese que los eventos descritos en el problema son estadísticamente dependientes. Nótese asimismo que la suma de las probabilidades referentes a todos los resultados asociados a cada ensayo son 1. Por último, en un experimento que conste de tres ensayos (intentos) (tres celdas de combustible seleccionadas) existen ocho resultados posibles.

b) La probabilidad de que ninguna de las celdas defectuosas sea seleccionada corresponde al resultado $N_1N_2N_3$, que tiene una probabilidad de 210/720. La probabilidad de seleccionar una celda defectuosa corresponde a los resultados $D_1N_2N_3$, $N_1D_2N_3$ y $N_1N_2D_3$. La suma de las probabilidades de estos resultados es 3(126/720) = (378/720). La probabilidad de escoger dos celdas defectuosas corresponde al resultado $D_1D_2N_3$, $D_1N_2D_3$ y $N_1D_2D_3$. La suma de las probabilidades de esos resultados es 3(42/720) = 126/720. Por último la probabilidad de descubrir las tres celdas defectuosas corresponde al resultado $D_1D_2D_3$, que tiene una probabilidad de 6/720.

Ejercicios de seguimiento de la sección 9.4

1 La probabilidad de que una máquina produzca una pieza defectuosa es de 0.12. Si el proceso se caracteriza por la independencia estadística, ¿qué probabilidades habrá de que *a*) dos piezas consecutivas no sean defectuosas, *b*) las tres primeras no sean defectuosas y la cuarta lo sea; *c*) cinco piezas consecutivas no sean defectuosas?

2 Una declaración de impuestos puede ser analizada por el gobierno federal, por el gobierno estatal o por ambos. La probabilidad de que sea analizada por el gobierno estatal es de 0.05. Suponga que las decisiones relativas a la auditoría se toman en forma independiente una de otra en los niveles federal y estatal.

a) ¿Qué probabilidades hay de que la auditoría la realicen ambas entidades?

b) ¿Cuál es la probabilidad de una auditoría estatal pero no de una auditoría federal?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no se efectúe la auditoría?

3 Una moneda se pesa de modo que $P(H) = 0.3$ y $P(T) = 0.7$. Construya un árbol de probabilidad que denote todos los resultados posibles si la moneda se lanza tres veces. ¿Qué probabilidades hay de que salga dos cruces (T) en tres lanzamientos? ¿Y de que salga la cara (H) dos veces?

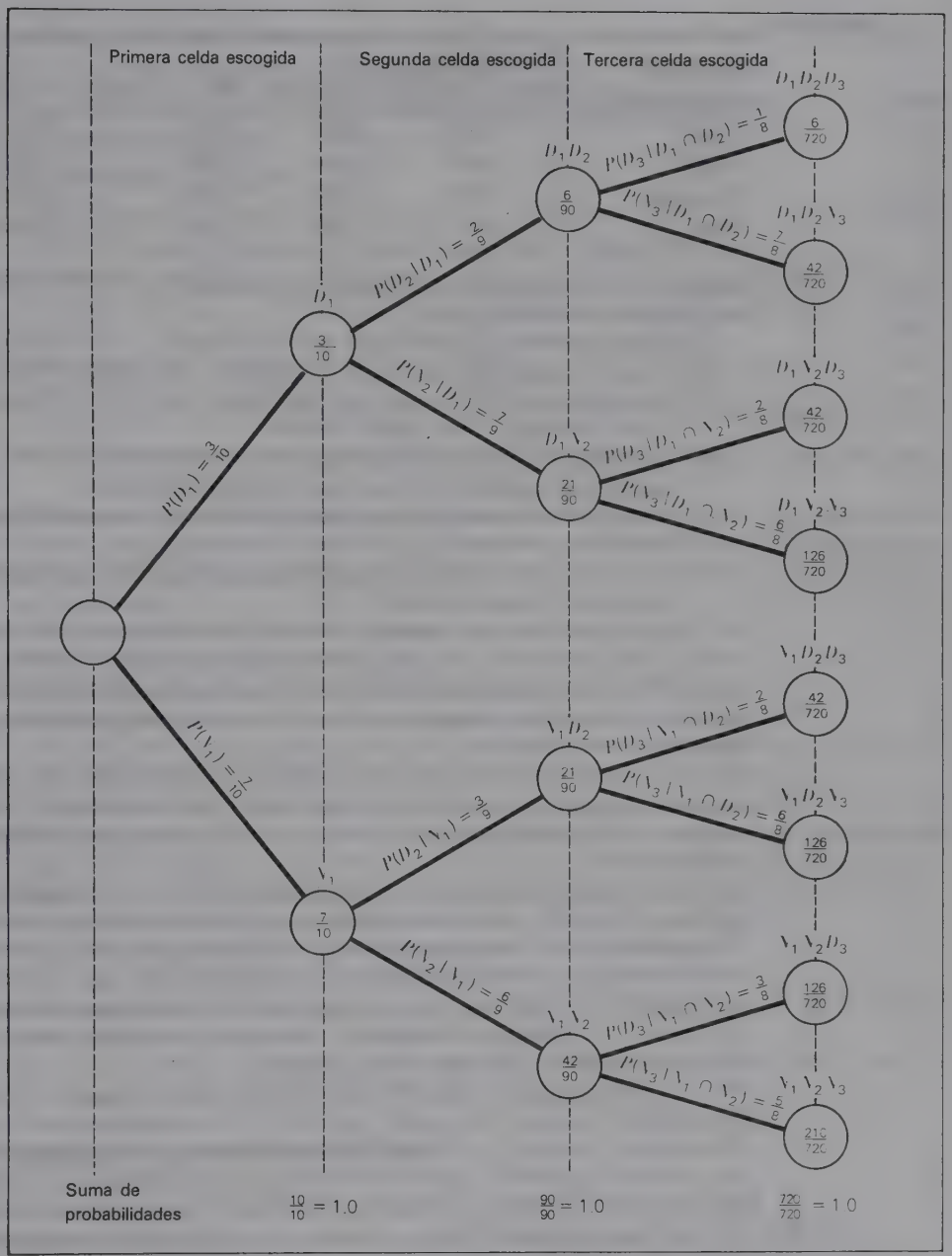


FIGURA 9.20 Árbol de probabilidad para el ejemplo de módulo espacial.

4 Cinco naipes se seleccionan aleatoriamente en un mazo de 52 barajas. Si los naipes sacados no se reponen en el mazo, ¿qué probabilidades habrá de escoger un as, un rey, un as, una sota y un as en ese orden?

5 La tabla 9.10 resume los resultados de una encuesta reciente dedicada a las actitudes ante la guerra nuclear. La pregunta que se formuló fue "¿Qué posibilidades hay, en su opinión, de que estalle una guerra nuclear en los próximos 10 años?" Si se selec-

TABLA 9.10

Edad del entrevistado	Respuesta			
	Muy probable	Probable	Poco probable	Total
20–29	650	1 400	250	2 300
30–39	550	1 000	350	1 900
40 o más	200	400	1 200	1 800
Total	1 400	2 800	1 800	6 000

ciona a un entrevistado aleatoriamente en una muestra de 6000 personas. ¿cuáles son las siguientes probabilidades?

a) El entrevistado tiene 30 años de edad o más.
b) El entrevistado piensa que es ''probable'' una guerra nuclear.
c) El entrevistado tiene una edad que oscila entre 30 y 39 años, y cree que es ''muy probable'' una guerra nuclear.
d) El entrevistado tiene una edad que fluctúa entre 20 y 39 años, y piensa que una una guerra nuclear es ''muy poco probable''.
e) El entrevistado cree que una guerra nuclear es ''improbable pues su edad oscila entre 20 y 29 años.
f) El entrevistado tiene 40 años de edad o más, puesto que piensa que la guerra nuclear es ''poco probable''.

6 Un participante en un juego de televisión ganó la oportunidad de obtener algunos premios. Se le muestran 10 cajas, 6 de las cuales contienen premios. Si se le permite escoger 4 de ellas, ¿qué probabilidades hay de que *a*) cuatro premios sean seleccionados, *b*) no se seleccione ninguno y *c*) las 3 primeras cajas escogidas no contengan premios pero sí la cuarta?

7 En el ejercicio anterior, dibuje un árbol de probabilidad que resuma los resultados posibles cuando se seleccionan cuatro cajas de modo aleatorio y sus probabilidades conexas. ¿Qué probabilidades existen de que por lo menos se gane un premio? ¿Exactamente uno?

8 Con los datos del ejemplo 34 construya un árbol de probabilidad que sintetice todos los resultados y sus probabilidades para la selección de dos bolas.

9 Suponiendo que los naipes se escojan en forma aleatoria, y sin reposición, de un mazo normal de 52 barajas, determine la probabilidad de que *a*) los 2 primeros naipes sean espadas, *b*) el primero sea una figura de espadas, el segundo sea trébol, el tercero un corazón y el cuarto un diamante, *c*) se seleccionen cuatro ases consecutivamente y *d*) no haya ases en las primeras 5 barajas.

10 Un grupo que va a graduarse consta en un 45% de mujeres y en un 55% de hombres. De los varones, 15% estudia ingeniería. Si a un graduado se le selecciona aleatoriamente en el grupo, ¿qué probabilidades hay de que sea un alumno de sexo masculino y estudie ingeniería? ¿Sea un varón que estudie alguna otra materia?

11 La tabla 9.11 resume los resultados de una reciente encuesta médica. A personas que sufrían cardiopatía, cáncer o diabetes se les preguntó si en su familia había antecedentes de esas enfermedades.

Si a una persona se le elige aleatoriamente de esta muestra de 2000, ¿qué probabilidades existen de que

a) Sufra cáncer?
b) Tenga antecedentes familiares de una enfermedad en particular?
c) Sufra cáncer pero no tenga antecedentes familiares de ese padecimiento?
d) Sufra diabetes, si la persona seleccionada muestra antecedentes familiares de la enfermedad.

TABLA 9.11

	Enfermedad actual			
	Cardiopatía	Cáncer	Diabetes	Total
Antecedentes familiares	80	40	280	400
Sin antecedentes familiares	720	460	420	1,600
Total	800	500	700	2,000

TABLA 9.12

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Total
Aceptable	96	220	144	460
Inaceptable	4	20	16	40
Total	100	240	160	500

e) No tenga antecedentes familiares de la enfermedad, en el caso de que sufra una cardiopatía.

12 Una muestra de 500 piezas se escogió de tres líneas de productos y fue inspeccionada por el departamento de control de calidad. La tabla 9.12 resume los resultados de la inspección. Si se escoge una parte aleatoriamente en la muestra, ¿qué probabilidades hay de que

a) La pieza sea del tipo de producto 1?
b) La pieza sea inaceptable?
c) La pieza sea una unidad aceptable del producto 3?
d) La pieza sea una unidad inaceptable del producto 1?
e) La pieza es aceptable, si la que se selecciona es una unidad del producto 2?
f) La pieza es el producto 1, si la parte seleccionada es aceptable?
g) La pieza es el producto 3, si la parte seleccionada es inaceptable?

13 Un grupo de solicitantes de un trabajo de soldador está integrado por mujeres en un 40% y por varones en un 60%. De las mujeres, 30% tienen grados universitarios. De los varones, 60% poseen grados universitarios. ¿Qué probabilidades existen de que un solicitante aleatoriamente seleccionado sea

a) Una mujer con un grado universitario?
b) Un varón con un grado universitario?

14 Suponga que E y F son eventos en los que $P(E) = 0.4$, $P(F) = 0.3$ y $P(E \cup F) = 0.6$. Determine *a*) $P(E \cap F)$, *b*) $P(E|F)$, *c*) $P(F|E)$.

15 Suponga que G y H sean eventos en que $P(G) = 0.25$, $P(H) = 0.45$ y $P(G \cup H) = 0.55$. Determine *a*) $P(G \cap H)$, *b*) $P(G|H)$, *c*) $P(H|G)$.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

árbol de probabilidad 411
combinación 389
complemento 378
conjunto 377
conjunto nulo (vacío) 379
conjunto universal 378
dependencia estadística 409
diagrama de árbol 385
diagrama de Venn 380
elemento 377
espacio muestral 395
espacio muestral finito 395
espacio muestral infinito 395
experimento aleatorio 394
frecuencia relativa 400
eventos mutuamente excluyentes 398
eventos colectivamente exhaustivos 398
igualdad de conjuntos 380

independencia estadística 409
intersección de conjuntos 382
método de propiedad descriptiva 377
método por enumeración 377
notación factorial 387
principio fundamental de conteo 386
permutación 387
probabilidad 400
probabilidad condicional 412
probabilidad conjunta 410
probabilidad marginal 410
probabilidad objetiva 402
probabilidad subjetiva 402
resultados 394
subconjunto 379
unión de conjuntos 380

■ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$ {}_nP_n = n! \tag{9.2}$$

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{9.3}$$

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{9.4}$$

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{9.6}$$

$$ 0 \le P(E) \le 1 \tag{9.7}$$

$$ P(\overline{E}) = 1 - P(E) \tag{9.8}$$

$$ P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad \text{(mutuamente excluyentes)} \tag{9.9}$$

$$ P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) $$
(mutuamente excluyentes) (9.10)

$$ P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \tag{9.11}$$

$$ P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) \quad \text{(independencia)} \tag{9.12}$$

$$ P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2)\cdots P(E_n) \quad \text{(independencia)} \tag{9.13}$$

$$ P(E_1|E_2) = P(E_1) \quad \text{(independencia)} \tag{9.14}$$

$$ P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad \text{(dependencia)} \tag{9.15}$$

$$ P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1|E_2) \tag{9.16}$$

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-10 se relacionan con la sección 9.1.

1 Redefina el conjunto A por medio del método de la propiedad descriptiva si

a) $A = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$
b) $A = \{3, 9, 27, 81, 243\}$
c) $A = \{-1, 4, -9, 16, -25, 36, -49, 64\}$
d) $A = \{10\ 100, 1\ 000, 10\ 000, 100\ 000\}$

2 En

$$\mathcal{U} = \{x \mid x \text{ es un entero mayor que } -6 \text{ pero menor que } +11\}$$
$$A = \{a \mid a \text{ es un entero positivo par menor que } 12\}$$
$$B = \{b \mid b \text{ es un entero impar mayor que } -4 \text{ pero menor que } +6\}$$

a) Defina A'.
b) Defina B'.

3 Si está integrado por todos los estudiantes inscritos en los cursos en una universidad, A se compone de todos los estudiantes de sexo masculino, B de todos los alumnos de 35 años o más y C de todos los estudiantes de ingeniería, *a*) defina el conjunto de A', *b*) defina el conjunto B' y *c*) defina el conjunto C'.

4 Si $\mathcal{U}$ está constituido por las diferentes puntuaciones totales posibles al lanzar un par de dados y B' se compone de las puntuaciones de 5, 7 y 9, defina B.

5 Si

$$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$A = \{1, 5, 9\} \qquad C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

defina todas las relaciones de subconjuntos que existan para estos conjuntos.

6 Dibuje un diagrama de Venn que represente todos los conjuntos del ejercicio 5.

7 Diez residentes de una ciudad fueron entrevistados respecto a su utilización del transporte público en ella. Se les preguntó si habían viajado en el tren subterráneo (S), en autobús (B) o en ninguno de esos medios de transporte (N) en el año pasado. He aquí las respuestas:

Residente	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Respuesta	N	N	B	B, S	S	B, S	B, S	B, S	B	S

Dibuje un diagrama de Venn que muestre cómo contestó cada residente a la entrevista.

8 En los siguientes conjuntos, determine si hay conjuntos iguales.

$$A = \{x \mid x^3 + 6x^2 + 9x = 0\} \qquad B = \{x \mid x^2 + 3x = 0\}$$
$$C = \{-3, 0]\} \qquad D = \{-3, 0, 3\}$$

9 En los conjuntos

$$\mathcal{U} = \{x \mid x \text{ 1 es un entero positivo menor que } 20\} \qquad A = \{5, 10, 15\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \qquad C = \{1, 5, 9, 15, 17\}$$

encuentre

a) $A \cap B$
b) $A \cup B \cup C$
c) $A' \cap B'$
d) $A' \cup C'$
e) $A \cap B \cap C$
f) $A' \cup B$
g) $A' \cap B$
h) $(A \cap B \cap C)'$

10 En la figura 9.21, los números representan la cantidad de elementos contenidos en los diversos subconjuntos. Determine

a) $n(A)$
b) $n(A \cup B)$
c) $n(A \cup B \cup C)$
d) $n(\mathcal{U})$
e) $n(A' \cup B)$
f) $n(B' \cap C')$
g) $n(B \cap C)$
h) $n(A' \cap B' \cap C')$

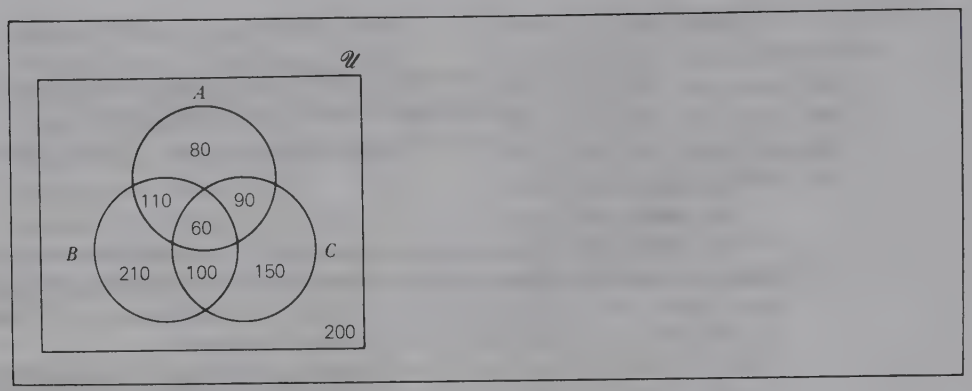


FIGURA 9.21

Los ejercicios 11-39 se relacionan con la sección 9.2.

11 Un juego consiste en lanzar una moneda, luego en lanzar un solo dado y después otra moneda. Trace un diagrama de árbol que enumere todas las posibles combinaciones de resultados del juego.

12 Análisis del mercado accionario Una compañía de corretaje analiza las tendencias del mercado y para ello selecciona muestras de acciones de varias industrias; basándose en el movimiento de los días anteriores determina si *no hubo cambio* en el precio, una disminución de precio o un incremento de precio de la acción. Si se escogen tres acciones, dibuje un árbol de decisión que enumere todos los resultados posibles.

13 Un mayorista de automóviles usados tiene agentes que localizan los vehículos y los valoran con vistas a su compra y reventa. Los clasifican por tamaño (grandes, medianos, compactos y subcompactos), edad (0-2 años, 2-4 años, 4-6 años y más de 6 años), kilometraje en relación con la edad del automóvil (muy grande, grande, promedio, menor al promedio) y estado de la carrocería (excelente, buena, regular y mala). Aplicando el principio fundamental del conteo, calcule el número de posibles clasificaciones de los automóviles.

14 El jefe del servicio de vinos de un restaurante muy elegante está preparándose para seleccionar vinos destinados a un banquete. Durante la noche se servirán cuatro vinos. Uno se servirá junto con el aperitivo. Se dispone de cinco opciones en este vino. Se está estudiando la conveniencia de servir seis vinos con la ensalada. Se piensa emplear ocho vinos para el entremés y seis después del banquete. ¿Cuántas posibles combinaciones de vinos podrían considerarse para esta comida?

Evalúe las siguientes expresiones factoriales:

15 $\dfrac{10!}{3! \cdot 6!}$

16 $\dfrac{9!}{4! \cdot (5-4)!}$

17 $\dfrac{6!}{6! \cdot 0!}$

18. $\dfrac{4! \cdot 6!}{3! \cdot 2! \cdot 5!}$

19 $\dfrac{8!\,4!}{6!\,3!\,0!}$

20 $\dfrac{10!\,8!\,3!}{12!\,4!}$

21 $\dfrac{0!\,7!\,4!}{4!\,5!}$

22 $\dfrac{20!}{15!\,10!}$

23 ${}_8P_6 =$

24 ${}_6P_2 =$

25 ${}_7P_4 =$

26 ${}_8P_3 =$

27 ${}_6P_3 =$

28 ${}_8P_2 =$

29 ${}_5C_2 =$

30 ${}_6C_2 =$

31 ${}_8C_5 =$

32 ${}_7C_3 =$

33 ${}_7C_2 =$

34 ${}_8C_6 =$

35 Un entrenador de baloncesto se ha sentido frustrado por no poder encontrar a los 5 mejores jugadores para incluirlos en su alineación inicial. El equipo consta de 12 jugadores. Si suponemos que cualquiera de ellos puede ser seleccionado para una de las cinco posiciones de la alineación inicial, ¿cuántas alineaciones pueden formarse?

36 Un candidato político desea visitar ocho ciudades. ¿En cuántos órdenes puede visitar las ciudades?

37 ¿Cuántos números telefónicos pueden marcarse con un código de área de tres dígitos y con un número regional de siete dígitos? (Suponga que cada dígito tiene 10 números posibles.)

38 Un vendedor de automóviles tiene 10 modelos. Puede mostrar sólo 5 en la sala de exhibición. ¿Cuántas combinaciones de automóviles podrá seleccionar para la sala?

***39 Pruebas selectivas para los Juegos Olímpicos** El comité de selección de baloncesto para los Juegos Olímpicos redujo el equipo a 30 jugadores. El entrenador en jefe ha decidido que su equipo final de 12 jugadores está integrado por 3 centros, 5 atacantes y 4 defensas. De los 30 jugadores restantes, 8 son centros, 13 son atacantes y 9 son defensas. ¿Cuántas escuadras de 12 jugadores pueden considerarse?

Los ejercicios 40-48 se relacionan con la sección 9.3.

40 La tabla 9.13 contiene algunos datos reunidos sobre un grupo de 2000 víctimas de robo, robo de casa o ambos tipos de delitos. A las víctimas se les clasifica como víctimas residenciales o comerciales y por el tipo de delito (o delitos) cometidos. Suponga que seleccionamos una aleatoriamente entre las 2000. El espacio muestral S de este experimento se compone de los resultados simples $S = \{R/RV, R/BV, R/RB/, B/RV, B/BV, B/RB\}$.

a) Determine el conjunto de resultados simples con que se definió el evento compuesto "víctima de robo en casa, solamente".

b) Determine el conjunto de resultados simples con que se definió el evento compuesto "víctima de robo en su domicilio".

41 En el ejercicio 40 determine, para cada uno de los siguientes conjuntos de eventos si son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos o ambas cosas.

(*a*) $\{R/RV, B/RV, BV, RB\}$

(*b*) $\{B/RV, B/BV, B/RB, RV, BV\}$

(*c*) $\{R, B, RV, RB\}$

(*d*) $\{R/RV, B/RV, R/BV, RB\}$

42 En el ejercicio 40, suponga que una víctima se selecciona aleatoriamente en este grupo. ¿Qué probabilidades hay de que sea *a*) una víctima residencial, *b*) una víctima de robo solamente y *c*) sea una víctima de robo y de robo en su domicilio?

43 La probabilidad de que un solicitante sea admitido en una escuela para pilotos es de 0.4. Si se selecciona aleatoriamente a tres solicitantes, ¿qué probabilidades existen de que *a*) los tres sean admitidos, *b*) no se admita a ninguno y *c*) se admita sólo a uno de ellos?

44 Un estudiante estima en 0.2 la probabilidad de obtener un 10 en un curso y en 0.4 la probabilidad de recibir un 8. ¿Qué probabilidades hay de que *a*) no reciba un 10, *b*) no reciba un 8 y *c*) no reciba ni un 10 ni un 8?

TABLA 9.13

	(*RV*) Víctima de robo	(*BV*) Víctima de robo en casa	(*RB*) Víctima de robo y de robo en casa	Total
Residencia (*R*)	100	1 000	200	1 300
Negocio (*B*)	300	150	250	700
Total	400	1 150	450	2 000

45 Una urna contiene cuatro bolas de puntos verdes, seis con franjas verdes, ocho con puntos azules y dos con franjas azules. Si aleatoriamente se extrae una bola de la urna, ¿qué probabilidades existen de que la bola sea *a*) verde o con franjas, *b*) con puntos y *c*) azul o con puntos?

46 Clasificaciones de crédito Una agencia de este tipo clasifica el estado de crédito de una persona en "excelente", "bueno", "regular" o "deficiente". La probabilidad de que un individuo reciba una clasificación de excelente es de 0.25. La probabilidad de obtener una buena clasificación es de 0.30. ¿Qué probabilidades hay de que una persona *a*) no reciba una clasificación de excelente? *b*) No obtenga por lo menos una clasificación de bueno? *c*) Reciba a lo sumo una clasificación de bueno?

47 Se llevó a cabo una encuesta entre 2000 consumidores, a fin de determinar su comportamiento de compra en relación con dos de los enfriadores de vino de mayor demanda en el mercado. Se averiguó que, en el último verano, 500 habían adquirido la marca *A*, 350 habían comprado la marca *B* y 125 habían adquirido ambas marcas. Si en este grupo se escoge aleatoriamente una persona, ¿qué probabilidades hay de que

a) Haya comprado la marca *A*?
b) Haya adquirido la marca *A* pero no la marca *B*?
c) Haya comprado la marca *A*, la marca *B* o las dos?
d) No haya adquirido ninguna de las dos marcas?

48 En la tabla 9.14 se muestran algunos datos recabados por la oficina del comisionado de béisbol. En ella se incluyen los cuadrangulares bateados en un partido y la probabilidad de que se logre ese número de cuadrangulares.
Si se escoge un partido en forma aleatoria, ¿qué probabilidades hay de que

a) No se bateen más de tres cuadrangulares?
b) Se batee por lo menos un cuadrangular?
c) Se bateen menos de cinco cuadrangulares?
d) Se bateen entre uno y tres cuadrangulares (inclusive)?

Los ejercicios 49-53 se relacionan con la sección 9.4.

49 La probabilidad de que un cliente entre en una tienda determinada es 0.30. Si dos clientes entran en ella, ¿qué probabilidades existen *a*) de que los dos hagan una compra, *b*) de que ninguno haga una compra, *c*) de que exactamente uno de los dos haga una compra?

50 Se lanza un solo dado y ambos lados tienen iguales probabilidades de salir. ¿Qué probabilidades existen de que el 6 caiga cuatro veces consecutivas?

51 Se selecciona una bola aleatoriamente de una urna que contiene tres bolas con franjas rojas, ocho bolas rojas sólidas, seis bolas con franjas amarillas, cuatro bolas amarillas sólidas y cuatro bolas con franjas azules.

a) ¿Qué probabilidades hay de que la bola sea amarilla, si tiene franjas?
b) ¿Qué probabilidades existen de que la bola tenga franjas, si es roja?
c) ¿Qué probabilidades hay de que la bola sea azul, si es de color sólido?

TABLA 9.14

Cuadrangulares/partido, (n)	$P(n)$
0	.08
1	.24
2	.20
3	.15
4	.12
Más de 4	.21

52 Las probabilidades de que el precio de una acción particular aumente durante un día de transacciones es de 0.4. Si la naturaleza del cambio de precio en una jornada cualquiera es independiente de lo sucedido en los días anteriores, ¿qué probabilidades hay de que el precio *a*) aumente 4 días seguidos, *b*) permanezca inalterado o disminuya 3 días consecutivos y *c*) aumente 2 días en un periodo de 3 días?

53 Suponga que E y F sean eventos $P(E) = 0.2$, $P(F) = 0.5$ y $P(E \cup F) = 0.60$. Determine *a*) $P(E \cap E)$, *b*) $P(E|F)$ y *c*) $P(F|E)$.

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 En los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ y $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, determine los conjuntos

(*a*) $A \cap B$
(*b*) $A \cap B \cap C$
(*c*) $A \cup B \cap C$

2 ¿Qué diferencia hay entre los estados de independencia y de dependencia estadística?

3 Un tendero tiene espacio para exhibir tres productos. Pero cuenta con seis productos que le gustaría exhibir.

a) ¿Cuántos arreglos diferentes pueden hacerse con los tres productos?
b) ¿Cuántas combinaciones pueden hacerse de los seis productos que puede exhibir?

4 ¿Qué probabilidades hay de extraer tres naipes, sin reposición, en una baraja y sacar tres reyes?

5 Una urna contiene 18 bolas rojas, 14 bolas con franjas rojas, 16 bolas amarillas y 12 bolas con franjas amarillas.

a) Si una bola sacada de la urna tiene franjas, ¿qué probabilidades existen de que sea amarilla?
b) Si una bola extraída de la urna no tiene franjas, ¿qué probabilidades hay de que sea roja?

MINICASO

EL PROBLEMA DEL CUMPLEAÑOS

Una aplicación clásica de la teoría de probabilidad relaciona la posibilidad, dentro de un grupo de personas, de que dos o más de ellas tengan el mismo cumpleaños. La probabilidad de que ello ocurra depende evidentemente del tamaño del grupo de personas que se considera. Cuanto mayor sea el grupo, más probabilidades habrá. Hagamos algunas suposiciones respecto a este problema. Supongamos que existen 365 posibilidades de cumpleaños (sin tener en cuenta el año bisiesto) y que, para una persona cualquiera, cualquiera de esos días puede ser su cumpleaños.

Si se quiere determinar la probabilidad de que dos o más personas de un grupo tengan el mismo cumpleaños, es más fácil calcular la de que no cumplan años el mismo día. Reflexionemos sobre ello unos momentos. El evento "dos o más personas tienen el mismo cumpleaños" consta de muchas posibilidades. Estas han de explicar los eventos "tres o más", "cuatro o más", etc. Deben explicar asimismo los subconjuntos de personas que tienen el mismo cumpleaños (o sea dos personas nacieron el 5 de junio y tres nacieron en 26 de abril). Por consiguiente, si puede calcularse la probabilidad p de que no hay dos personas que cumplan años el mismo día, la probabilidad deseada puede obtenerse como $1 - p$.

En un grupo de n personas, seleccionado aleatoriamente, el número de resultados de cumpleaños es

$$T = \overbrace{(365)(365)(365)\cdots(365)}^{n} = (365)^n$$

Si dentro de este grupo de n personas, no hay dos que cumplan años el mismo día, habrá n fechas diferentes de cumpleaños. El número de resultados que satisfacen este evento se calcula como

$$O = (365)(364)(363)\cdots(365 - n + 1)$$

Así pues, la probabilidad de que en un grupo de personas *no haya dos personas que cumplan años el mismo día* es igual a

$$p = \frac{O}{T} = \frac{(365)(364)(363)\cdots(365 - n + 1)}{(365)^n}$$

Se pide:

a) Explicar el fundamento lógico de la obtención de T.
b) Explicar el fundamento lógico del cálculo de O.
c) Calcular la probabilidad de que dos o más personas tengan el mismo cumpleaños en un grupo de cinco personas elegidas aleatoriamente.
d) Calcular la misma probabilidad para grupos de 10, 20, 30, 40 y 50 personas.
e) ¿Cuál es el grupo más pequeño de personas para el que la probabilidad de que dos o más de ellas cumplan años en el mismo día excede de 0.50? ¿O rebasa los 0.75?

CAPÍTULO

10 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

429.463

10.1 VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD
10.2 LA MEDIA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR
10.3 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE PROBABILIDAD
10.4 DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDAD
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Dar una introducción sobre el concepto de variable aleatoria
- Lograr que el lector entienda la distribución de probabilidad y sus atributos
- Familiarizar a los lectores con las características y uso de la distribución binomial de probabilidad
- Familiarizar a los lectores con las características y aplicación de la distribución de probabilidad

Una rama de las matemáticas recibe el nombre de *estadística*. Ésta se ocupa de la obtención, organización, descripción y análisis de datos. La finalidad de esas actividades suele ser llegar a conclusiones que estén basadas en los datos. En el presente capítulo se ofrece una breve introducción a la estadística. En las dos primeras secciones, se explicarán las nociones de *variables aleatorias, distribuciones de frecuencia, distribuciones de probabilidad* y algunos atributos especiales de las distribuciones de probabilidad. En las dos últimas secciones se describen las dos distribuciones de probabilidad que más se emplean: las *distribuciones binomial* y *normal*.

10.1 VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

En esta primera sección se expondrán los conceptos de *variables aleatorias, distribuciones de frecuencia* y *distribuciones de probabilidad.*

Variables aleatorias

El director de un banco de sangre de la localidad está preocupado por la sangre que se pierde a causa del deterioro. La sangre es un producto perecedero, y su vida útil legal es de 21 días en este banco. Todos los días el personal debe identificar las unidades de sangre que tengan más de 21 días y quitarlas de los estantes. El número de unidades que es preciso desechar fluctúa diariamente, según las tasas de adquisición y las del uso de la sangre. Para conocer mejor el problema, el director quiere efectuar un experimento en el cual se lleve un registro diario del número de unidades extraídas del inventario. En el experimento, los eventos simples son las unidades que se sacan todos los días del inventario. Si X representa esas unidades, el espacio muestral constará de los valores 0, 1, 2, 3, $\cdots$. X es un ejemplo de una *variable aleatoria* puesto que su valor fluctúa de modo impredecible.

DEFINICIÓN: VARIABLE ALEATORIA
La ***variable aleatoria*** es una función que asigna un valor numérico a cada evento simple en un espacio muestral.

EJEMPLO 1

Reconsideración del caso de la oficina de hacienda En el ejemplo 30 del capítulo 9 (página ~~382~~ 383) se estudió la probabilidad de que se cometiera un error en la declaración de impuestos. Se estimó que en una declaración escogida aleatoriamente la probabilidad es de 0.4. En el ejemplo se explicó un experimento donde se seleccionaron de modo aleatorio tres experimentos y se analizaron en busca de errores. La figura 9.9 (pág. ~~393~~ 419) describe el árbol de probabilidad de este experimento.

El espacio muestral S del experimento se compone de un conjunto de eventos simples

$$S = \{EEE, EEN, ENE, ENN, NEE, NEN, NNE, NNN\}$$

donde cada evento simple representa un resultado posible del análisis de tres declaraciones de impuestos. La tabla 10.1 ofrece un resumen de los eventos junto con sus probabilidades de ocurrencia. En el experimento quizá haya menor interés por la serie de hallazgos y mayor interés por el número de declaraciones que contienen error. Las que contienen error en una muestra de tres declaraciones son 0, 1, 2 o 3. Así pues, podría definirse una variable aleatoria X para el experimento, donde X representa la cantidad de declaraciones que contienen errores. La variable aleatoria X asigna a cada evento simple dentro del espacio muestral un número: 0, 1, 2 o 3. Estas asignaciones se observan en la tabla 10.1.

Desde el punto de vista técnico, una variable aleatoria es una *función* (véase la explicación que se da en el capítulo 1). Sin embargo, muchos tienden a con-

cebirla en una forma más conceptual. Piensan que es una medida o cantidad, capaz de asumir distintos valores a consecuencia de los resultados de un proceso aleatorio o experimental.

Si una variable aleatoria puede adoptar sólo un reducido número de valores bien diferenciados, se le da el nombre de ***variable aleatoria discreta***. Los resultados de un experimento que mida el número de unidades de la demanda diaria de un producto puede ser representado mediante una variable aleatoria discreta. Y los resultados de un experimento que mida la cantidad de automóviles que pasan por una caseta de cobro cada hora puede representarse del mismo modo.

Variable aleatoria continua es el nombre que recibe una variable aleatoria que puede asumir cualquiera de la infinidad de valores comprendidos dentro de un intervalo de números reales. En un experimento que selecciona aleatoriamente a un grupo de personas y registra atributos como estatura o peso, los resultados pueden representarse por medio de una variable aleatoria continua. Y lo mismo sucede en el caso de los resultados de un experimento en que se mida el tiempo que un transistor operará antes de que se deteriore por el uso.

Distribuciones de frecuencia

Cuando se realizan experimentos y se hacen observaciones acerca de los valores de variables aleatorias, podemos estudiar los datos para determinar si es posible llegar a conclusiones significativas. Una herramienta de gran uso en tales estudios es la ***distribución de frecuencia***. Por medio de ella se resume cada valor posible de una variable aleatoria, así como el número de ocurrencias, o ***frecuencia,*** de ese valor. Para explicar mejor esto pongamos el caso del banco de sangre mencionado antes. Para entender mejor el problema del deterioro de la sangre, el director llevó a cabo un experimento en un periodo de 80 días. Al final de cada día se anotaba el *número de unidades que se eliminaban del inventario por haberse deteriorado*, representado por X. Ésta es la variable aleatoria del experimento. La tabla 10.2 es una distribución de frecuencia que resume los resultados del experimento. Esta distribución de frecuencia muestra en forma adecuada los datos tabulados del experimento.

Luego de estudiar los datos, el director implantó un nuevo programa de administración de la sangre, introduciendo cambios en los programas destina-

TABLA 10.1

Eventos simples en S	Variable aleatoria (número de declaraciones que contienen errores), X	Probabilidad
EEE	3	$(.4)(.4)(.4) = 0.064$
EEN	2	$(.4)(.4)(.6) = 0.096$
ENE	2	$(.4)(.6)(.4) = 0.096$
ENN	1	$(.4)(.6)(.6) = 0.144$
NEE	2	$(.6)(.4)(.4) = 0.096$
NEN	1	$(.6)(.4)(.6) = 0.144$
NNE	1	$(.6)(.6)(.4) = 0.144$
NNN	0	$(.6)(.6)(.6) = 0.216$

TABLA 10.2

Unidades extraídas del inventario (X)	Ocurrencias
0	2
1	6
2	8
3	8
4	10
5	16
6	14
7	10
8	6
	80

dos a obtener sangre y los procedimientos de intercambio de ese producto con otros bancos de sangre que participaban en una cooperativa regional de bancos de sangre. Con objeto de determinar si con las nuevas políticas se había logrado reducir las tasas de pérdida, un experimento similar se efectuó durante un periodo de 50 días. Los resultados se compendian en la distribución de frecuencia de la tabla 10.3.

Aunque las tablas 10.2 y 10.3 contienen los datos reunidos respecto a la misma variable aleatoria, no es fácil comparar directamente los resultados de ambos experimentos debido a la diferente duración de ellos (80 y 50 días, respectivamente). A fin de hacer más comparables los datos, puede obtenerse en cada experimento la ***frecuencia relativa*** de cada valor de la variable aleatoria. Esto se hace dividiendo el número de ocurrencias (la frecuencia) entre el número total de observaciones del experimento. En las tablas 10.4 y 10.5 se incluyen los resultados de los experimentos en que se usan frecuencias relativas.

TABLA 10.3

Unidades extraídas del inventario (X)	Ocurrencias
0	3
1	5
2	8
3	12
4	9
5	5
6	4
7	3
8	1
	50

TABLA 10.4

Unidades extraídas del inventario (X)	Frecuencia relativa
0	2/80 = .025
1	6/80 = .075
2	8/80 = .100
3	8/80 = .100
4	10/80 = .125
5	16/80 = .200
6	14/80 = .175
7	10/80 = .125
8	6/80 = .075
	80/80 = 1.000

TABLA 10.5

Unidades extraídas del inventario (X)	Frecuencia relativa
0	3/50 = .060
1	5/50 = .100
2	8/50 = .160
3	12/50 = .240
4	9/50 = .180
5	5/50 = .100
6	4/50 = .080
7	3/50 = .060
8	1/50 = .020
	50/50 = 1.000

No nos detendremos a tratar de sacar conclusiones concernientes a los resultados de los dos experimentos. Una ojeada rápida nos da la impresión de que, con las nuevas políticas, se podrían haber aminorado las pérdidas (basándonos en el experimento de 50 días de duración). En la presente explicación, lo que se pretende es dar ejemplos de la aplicación de las distribuciones de frecuencia como herramientas para tabular y presentar los resultados de estudios de procesos aleatorios.

Distribuciones de probabilidad

La ***distribución de probabilidad*** es una lista completa de todos los valores posibles de una variable aleatoria junto con las probabilidades de cada uno. Si una variable aleatoria discreta X puede asumir n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ que tengan las respectivas probabilidades de ocurrencia $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, en la tabla 10.6 se indica la correspondiente ***distribución discreta de probabilidad.*** Todos los valores posibles de una variable aleatoria quedan incluidos en una distribución

TABLA 10.6

Valor de la variable aleatoria ($X = x_i$)	Probabilidad $P(x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
.	.
.	.
.	.
x_n	p_n
	1.0

de probabilidad; de ahí que la suma de las probabilidades siempre nos dé 1. Las frecuencias relativas que se dan en las tablas 10.4 y 10.5 puede interpretarse como probabilidades. En consecuencia, las dos tablas ofrecen ejemplos de dos distribuciones de probabilidad.

EJEMPLO 2

En el ejemplo 1 se explicó un experimento donde se seleccionaban aleatoriamente y se analizaban tres declaraciones de impuestos, con el propósito de determinar si contenían errores. La tabla 10.1 mostró la asignación de valores de la variable aleatoria a cada evento simple del espacio muestral. Una vez conocidas las probabilidades de cada evento simple y hecha la definición de variable aleatoria, el siguiente paso lógico consiste en construir la correspondiente distribución de probabilidad.

Los posibles valores de la variable aleatoria "número de declaraciones que contienen error" son 0, 1, 2 y 3. Para construir la distribución de probabilidad, basta identificar todos los eventos simples relacionados con cada valor específico de la variable aleatoria y sumar las probabilidades de que los eventos alcancen la probabilidad de ese valor aleatorio. Así, los eventos simples asociados al valor $X = 2$ son *EEN, ENE* y *NEE*. Al sumar las probabilidades de los tres eventos se llega a la conclusión de que $P(X = 2) = 0.288$. Si se aplica un proceso análogo a los otros valores de X, el resultado es la distribución de probabilidad de la tabla 10.7.

TABLA 10.7 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA EL EJEMPLO DE LA OFICINA DE HACIENDA

Número de declaraciones que contienen error (X)	Probabilidad
0	0.216
1	0.432
2	0.288
3	0.064
	1.000

Las siguientes propiedades generales deberían tenerse presentes en relación con las distribuciones de probabilidad:

En una variable aleatoria discreta X que puede adoptar n valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n,

1 Sólo una probabilidad ($PX = x_i$) deberá asignarse a cada valor de la variable aleatoria.

2 $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ para toda x_i.

3 $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \cdots + P(X = x_n) = 1.0$

Histogramas

Los ***histogramas*** son una excelente representación gráfica de las distribuciones de frecuencia y de las distribuciones discretas de probabilidad. El histograma puede ser un tipo de gráfica de barras que consta de un conjunto de rectángulos, uno para cada posible resultado o valor de la variable aleatoria. El ancho de los rectángulos es 1, y la altura es la probabilidad (o frecuencia relativa) del resultado particular. La figura 10.1 muestra histogramas de las dos distribuciones de probabilidad en el ejemplo del banco de sangre. Los histogramas proporcionan un perfil de las dos distribuciones y con ello facilitan la comparación de los resultados conseguidos en los dos experimentos. Sin realizar un análisis formal, los histogramas parecen sugerir que las políticas recién instituidas posiblemente hayan contribuido a reducir las pérdidas atribuibles al deterioro o descomposición de la sangre.

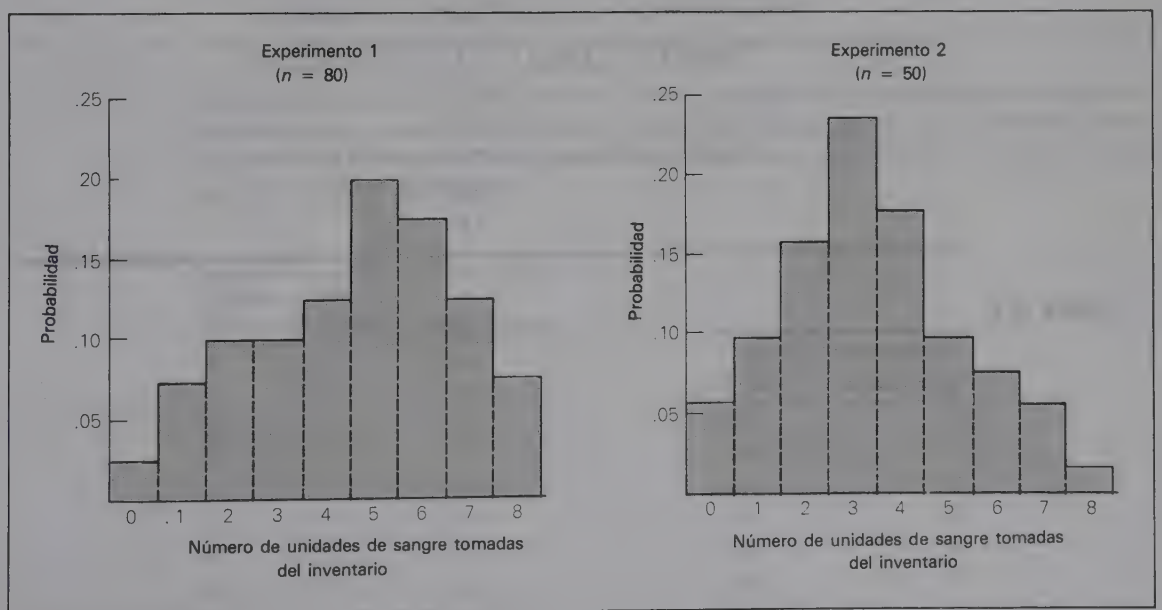


FIGURA 10.1

Hay que hacer otra aclaración en lo tocante a los histogramas. Cuando se usan para representar distribuciones discretas de probabilidad, el área de cada rectángulo es igual a la probabilidad de ocurrencia del valor correspondiente de la variable aleatoria. Ello se debe a que el ancho de un rectángulo es 1 y su altura es la probabilidad. Así pues, si se calcula el área de cada rectángulo y se suman las de todos ellos, el área total será de 1.0.

EJEMPLO 3

Filas de espera ante las cajas de los bancos A un banco de la localidad le preocupa el tiempo que los clientes deben esperar para que los atiendan los cajeros. Un estudio hecho a 500 clientes dio origen a la distribución de probabilidad que aparece en la tabla 10.8. El tiempo de espera (en minutos) por cliente constituye la variable aleatoria.

a) ¿Qué probabilidad hay de que un cliente espere a que lo atienda un cajero?
b) ¿Qué probabilidad existe de que un cliente espere menos de 2 minutos? ¿Y más de 3 minutos?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} a)\ P(\text{espera}) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= .24 + .18 + .12 + .09 + .05 \\ &= .68 \end{aligned}$$

Este resultado se podría haber determinado así:

$$\begin{aligned} P\,(\text{espera}) &= 1 - P\,(\text{sin espera}) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - .32 \\ &= .68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\qquad P(\text{espera} < 2 \text{ min}) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= .32 + .24 \\ &= .56 \\ P(\text{espera} > 3 \text{ min}) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= .09 + .05 \\ &= .14 \end{aligned}$$

TABLA 10.8

Tiempo de espera, minutos X	$P(X)$
0	.32
1	.24
2	.18
3	.12
4	.09
5	.05
	1.00

TABLA 10.9

Número de tormentas	Frecuencia
0	1
1	3
2	8
3	10
4	9
5	14
6	5
	50

Ejercicios de seguimiento de la sección 10.1

1 En las siguiente variables aleatorias para una serie de experimentos, ¿cuáles son discretas y cuáles son continuas?

a) Los pesos de los alumnos de una escuela de enseñanza media
b) El número de cigarros que se fuman diariamente
c) La temperatura corporal de una persona en cierto momento
d) La talla de un recién nacido
e) El número de solicitudes de asistencia social que todos los días recibe una oficina
f) La cantidad de agua que una comunidad consume al día
g) El número de granos de arena que todos los días hay en una playa
h) La vida útil de una batería grande

2 El director de obras públicas de una ciudad ha verificado los registros del municipio para averiguar el número de nevadas que han caído en los últimos 20 años. La tabla 10.9 contiene una distribución de frecuencia que resume los resultados.

a) Construya la distribución de probabilidad para este estudio.
b) Dibuje un histograma para esta distribución.
c) ¿Qué probabilidad hay de que caigan dos grandes nevadas en un año determinado? ¿Y de que caigan tres o menos?

3 Protección contra incendios El jefe de bomberos de un pequeño departamento de voluntarios recopiló datos sobre el número de falsas alarmas que recibieron diariamente en los últimos 360 días. La tabla 10.10 presenta una distribución de frecuencia que sintetiza los resultados.

TABLA 10.10

Número de falsas alarmas	Frecuencia
0	24
1	40
2	75
3	77
4	80
5	16
6	20
7	28
	360

a) Construya la distribución de probabilidad para este estudio.
b) Dibuje un histograma de la distribución.
c) ¿Qué probabilidad hay de que en un día determinado haya menos de cuatro alarmas falsas? ¿Y de que haya tres o más?

4 Control de calidad Las series de producción para un producto en particular se realizan en tamaños de lote de 100 unidades. Cada unidad se inspecciona para cerciorarse de que no tenga ningún defecto en absoluto. El número de unidades defectuosas por serie parece ser aleatoria. Un ingeniero de control de calidad ha reunido datos relativos a la cantidad de unidades defectuosas en las últimas 50 series de producción. En la tabla 10.11 se da una distribución de frecuencia que resume los resultados.

a) Construya la distribución de probabilidad para este estudio.
b) Dibuje un histograma de la distribución.
c) ¿Qué probabilidad hay de que una serie de producción dé por resultado 10 unidades defectuosas? ¿Y de que dé más de 10?

5 Conductores en estado de ebriedad La policía de una localidad ha establecido un programa de bloqueo, con el propósito de verificar la sobriedad de los conductores. Los automóviles son seleccionados en forma aleatoria y se examinan en busca de signos de excesiva ingestión de bebidas alcohólicas. Si se sospecha que un conductor ha ingerido demasiado alcohol, se le aplican pruebas estándar de sobriedad. Al valorar la eficacia del programa, un teniente de policía recabó datos sobre las actividades en 150 bloqueos de calles. Quiere determinar el número de conductores a quienes se ha sorprendido en estado de ebriedad por cada bloqueo de calles. En la tabla 10.12 se compendian los resultados.

a) Construya la distribución de probabilidad de este estudio.
b) Dibuje un histograma de la distribución.
c) ¿Qué probabilidad hay de que un bloque de calles identifique a conductores ebrios? ¿Y de que identifique cinco o más?

6 Construya la distribución discreta de probabilidad que corresponde al experimento consistente en lanzar una moneda *legal* tres veces. Suponga que la variable aleatoria X sea el número de veces que cae cara en tres lanzamientos. ¿Qué probabilidad hay de que dos o más veces caiga cara?

7 Construya una distribución discreta de probabilidad que corresponda al experimento consistente en lanzar una sola vez un *par* de dados. Suponga que haya igual probabilidad de que caiga cada lado o cara del dado y que la variable aleatoria X sea la suma de puntos que aparecen en el par.

TABLA 10.11

Número de unidades defectuosas	Frecuencia
5	1
6	3
7	5
8	7
9	10
10	11
11	8
12	4
13	0
14	1
	50

TABLA 10.12

Número de conductores ebrios	Frecuencia
0	20
1	16
2	26
3	28
4	26
5	14
6	10
7	8
8	2
	150

8 Desempleo Las estadísticas del desempleo en un estado occidental de la Unión Americana indican que 8% de las personas elegibles para trabajar carecen de empleo. Suponga que se lleva a cabo un experimento y en él se seleccionan aleatoriamente tres personas y se apunta si tienen empleo o no. Si la variable aleatoria de este experimento se define como el número de desempleados, *a*) construya la distribución de probabilidad de este experimento y determine la probabilidad de que *b*) ninguna de las tres estén desempleada y *c*) dos o más estén desempleadas.

9 La tabla 10.13 es una distribución de probabilidad para la variable aleatoria X.

a) Determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X^2.

b) Determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $X + 1$.

10 Suponiendo que una variable aleatoria pueda adoptar valores de 0, 1, 2 y 3, ¿cuáles de los siguientes casos satisfarán las condiciones para ser distribuciones de probabilidad?

a) $P(X = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X = 1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 2) = 0$, $P(X = 3) = \frac{1}{2}$

b) $P(X = 0) = 0.2$, $P(X = 1) = 0.3$, $P(X = 2) = 0.2$, $P(X = 3) = 0.1$

c) $P(X = 0) = 0.1$, $P(X = 1) = 0.25$, $P(X = 2) = 0.15$, $P(X = 3) = 0.2$, $P(X = 4) = 0.3$

d) $P(X = 0) = 0.18$, $P(X = 1) = 0.23$, $P(X = 2) = 0.26$, $P(X = 3) = 0.33$

10.2 LA MEDIA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

La media

Cuando se dispone de un grupo de datos reunidos durante algún experimento, con frecuencia se desea describirlos por medio de una sola medida o número.

TABLA 10.13

X	$P(X)$
1	0.20
2	0.25
3	0.35
4	0.15
5	0.05

El número que se escoja dependerá del atributo o cualidad particular que se quiera describir. En ciertos experimentos se querrá describir los extremos de los valores de los datos. En tales casos podía encontrarse el más pequeño, el mayor o ambos en el conjunto de datos. Así, un estudio dedicado a los partos múltiples en ratones debido a la administración de un fármaco que aumente la fertilidad podría concentrarse en el número más alto de partos en un ratón cualquiera. En otro experimento, tal vez se desee conocer el total o la suma de los valores de un conjunto de datos. En un experimento que registre la cantidad de puntos encestados por Larry Bird o Magic Johnson en determinada temporada, se querrán describir los datos calculando el total de puntos conseguidos en la temporada.

En la mayor parte de los experimentos se busca describir el centro, o medio, del conjunto de datos. Se cuenta con varias medidas para describir ese atributo, y se les da el nombre de ***medidas de tendencia central***. Entre ellas la ***media aritmética*** o, más simplemente, la ***media*** es la de mayor uso. En el lenguaje común se le conoce con el nombre de ***promedio. La media*** $(\bar{x})$ ***de un conjunto de valores*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ***es la suma de los valores divididos entre el número total de valores*** (n) ***en el conjunto,*** o bien

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \qquad \textbf{(10.1)}$$

EJEMPLO 4

Un estudiante ha realizado cinco exámenes en un curso de matemáticas en la universidad. Las calificaciones que obtuvo en ellos fueron 78, 96, 82, 72 y 92. La calificación media de esos exámenes es

$$\bar{x} = \frac{78 + 96 + 82 + 72 + 92}{5}$$

$$= \frac{420}{5} = 84.0$$

Nótese que la media no es igual a ninguna de las calificaciones reales. Sin embargo, nos da una medida de la calificación "promedio" del estudiante en los cinco exámenes.

EJEMPLO 5

La nómina quincenal de los 3225 empleados de una gran compañía de manufactura es de \$3 100 000. Determine el sueldo quincenal promedio de la empresa.

SOLUCIÓN

En este ejemplo, no se dan las observaciones individuales (sueldos quincenales) de cada empleado. Sin embargo, se proporciona el total de las observaciones y el número de empleados. Por tanto, el sueldo quincenal promedio se calcula como

$$\bar{x} = \frac{\$3\ 100\ 000}{3\ 225}$$

$$= \$961.24 \text{ (redondeado al centavo más cercano)}$$

Tratándose de grandes conjuntos de datos en que varios resultados ocurren con distinta frecuencia, es posible modificar la ecuación (10.1) y reducir así el número de cálculos. **En un conjunto de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, que ocurren con las respectivas frecuencias, $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, la media se calcula así:**

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \cdots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n} \qquad (10.2)$$

EJEMPLO 6

En la tabla 10.2 (página 432) se indicó la distribución de frecuencia del experimento del banco de sangre que duró 80 días. Por medio de la ecuación (10.2) puede determinarse el número medio de unidades que diariamente se extraen del inventario.

$$\bar{x} = \frac{(0)(2) + (1)(6) + (2)(8) + (3)(8) + (4)(10) + (5)(16) + (6)(14) + (7)(10) + (8)(6)}{2 + 6 + 8 + 8 + 10 + 16 + 14 + 10 + 6}$$

$$= \frac{368}{80}$$

$$= 4.6$$

En el experimento de 80 días de duración, el número promedio de unidades eliminadas del inventario por descomposición o deterioro fue de 4.6 al día.

En un conjunto de datos, los valores extremos de él pueden ejercer un profundo efecto en la media. Supóngase que cinco personas participaron en un pequeño torneo de golf y sus respectivas puntuaciones fueron 72, 76, 80, 78 y 140. La puntuación media del grupo es 89.2; sin embargo, la alta calificación de 140 produce un efecto significativo al momento de calcular la media. La puntuación media de los otros cuatro jugadores es 76.5. En grupos de datos como éste, conviene recurrir a otras clases de medidas para describir la posición central.

Otra de esas medidas es la *mediana*. ***La mediana es el elemento medio cuando los datos individuales se disponen por orden creciente o decreciente.*** En el ejemplo del juego de golf, la puntuación mediana se obtiene colocando primero las puntuaciones en orden creciente o decreciente. Como se aprecia, el elemento de la mitad es 78, y es la mediana del conjunto de datos.

72 76 (78) 80 140

Cuando el número total de datos individuales es par, la mediana es la media de los dos que ocupen la posición intermedia dentro del conjunto de datos.

EJEMPLO 7

Audubon Society Una filial local de esta sociedad dedicó el fin de semana a realizar una encuesta de población sobre una especie particular de aves. En ella participaron

20 miembros de la sociedad y sus observaciones totales confirmadas se incluyen a continuación, dispuestas por orden creciente de magnitud. En un número par de elementos individuales, los dos miembros de la mitad son los que ocupan las posiciones 10 y 11. En este conjunto de datos, los números en esas posiciones son "9" y "10". Hay 10 elementos individuales menores (o iguales) que "9"; y existen 9 elementos individuales mayores que "10". Por consiguiente, la mediana es la media de esos dos elementos de la mitad, o sea que es igual a (9 + 10)/2 = 9.5.

4, 5, 5, 6, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 12, 13, 15, 15, 17, 20, 25, 26, 30

Otra medida que, algunas veces, se usa para describir la mitad de un conjunto de datos es la ***moda (o modo)***. ***La moda es el valor de los datos que ocurre con mayor frecuencia***. La utilización de la moda como medida de posición central ofrece dos ventajas: 1) no exige cálculos y 2) puede servir para describir datos cuantitativos y cualitativos (por ejemplo, color, sexo y calificaciones literales en un curso).

EJEMPLO 8

En el último ejemplo, la moda es 9. Es decir, el número de observaciones que tuvo una frecuencia más alta fue 9. Cuatro miembros de la Audubon Society dijeron haber hecho nueve observaciones. La segunda frecuencia más alta fue 2 y ésta se relacionó con tres valores en el conjunto de datos: "5", "7" y "15".

EJEMPLO 9

Una nueva aerolínea regional efectuó una encuesta entre sus primeros 20 000 pasajeros a fin de conseguir retroalimentación en lo tocante al servicio que da. A cada pasajero se le pidió valorar la calidad global del servicio. En la tabla 10.14 se da un resumen de las respuestas.

TABLA 10.14

Respuesta	Entrevistados
Excelente	4 532
Muy bueno	8 849
Bueno	5 953
Deficiente	531
Muy malo	135

Nótese que las respuestas en el experimento son de carácter cualitativo, no cuantitativo. No obstante, podemos afirmar que la moda, o "respuesta modal", en el experimento es "muy buena". Más pasajeros dieron esta respuesta y no las otras.

Media de una distribución discreta de probabilidad

MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE PROBABILIDAD
Si una variable discreta aleatoria X puede adoptar n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que tengan las respectivas probabilidades de ocurrencia $p_1, p_2, \ldots, p_n$, el ***valor medio*** μ(my) de la variable aleatoria es

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \qquad (10.3)$$

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
La ecuación (10.3) se deduce directamente de la ecuación (10.2). ¿Puede demostrar esto?

EJEMPLO 10

Las tablas 10.4 y 10.5 (página ~~414~~ 433) presentaron las distribuciones de probabilidad para el número de unidades de sangre que se descomponen en un día determinado en el ejemplo del banco de sangre. Calculemos las medias de las dos distribuciones.

$$\mu_1 = 0(.025) + 1(.075) + 2(.100) + 3(.100) + 4(.125) + 5(.200) + 6(.175) + 7(.125) + 8(.075)$$
$$= 4.60 \text{ unidades por día}$$
$$\mu_2 = 0(.060) + 1(.100) + 2(.160) + 3(.240) + 4(.180) + 5(.100) + 6(.080) + 7(.060) + 8(.020)$$
$$= 3.42 \text{ unidades por día}$$

Así pues, antes de instituir el nuevo programa de la administración de sangre, el número medio de unidades de sangre deterioradas fue de 4.6 (el mismo valor que el calculado en el ejemplo 5). Después de implantar las nuevas políticas, la media fue 3.42 unidades por día. *En promedio*, parece haber habido una disminución en el porcentaje de descomposición.

EJEMPLO 11

Número telefónico para drogadictos Una ciudad ha establecido un número telefónico a fin de ofrecer ayuda a quienes desean asistencia para superar sus problemas de

TABLA 10.15

Llamadas por día (X)	$P(X)$
5	0.08
6	0.14
7	0.18
8	0.24
9	0.16
10	0.10
11	0.08
12	0.02
	1.00

drogadicción. El director del programa reunió datos sobre la cantidad de llamadas recibidas cada día. La tabla 10.15 contiene la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria. ¿Cuál es el número medio de llamadas por día?

SOLUCIÓN

Si se utiliza la ecuación (10.3), el número medio de llamadas por día es

$$\mu = 5(.08) + 6(.14) + 7(.18) + 8(.24) + 9(.16) + 10(.10) + 11(.08) + 12(.02)$$
$$= 7.98$$

La desviación estándar

En las distribuciones de probabilidad, la media ofrece una medida de la posición central de los datos. Pero éste no es más que uno de los atributos del conjunto de datos. Con objeto de describir en forma más completa los datos, conviene estudiar otros atributos. Uno muy importante que no describe la media es la *dispersión* o variabilidad de los datos. Considérense las dos distribuciones de probabilidad en la tabla 10.16. Ambas tienen la misma media $\mu = 50$. Sin embargo, la variación en los valores de las dos variables aleatorias es muy diferente.

TABLA 10.16

X_1	$P(X_1)$	X_2	$P(X_2)$
49	.05	0	.05
50	.90	50	.90
51	.05	100	.05

A fin de describir la variabilidad que existe dentro de un conjunto de datos, puede recurrirse a alguna ***medida de variación***. Una manera de medir la variación en un conjunto de datos es señalar los extremos de ella. El ***intervalo*** (rango) de un conjunto de datos es la diferencia entre los valores más grande y más pequeño del conjunto. Recordemos ahora los cinco jugadores de golf y sus puntuaciones de 72, 76, 78, 80 y 140. La puntuación más baja de este grupo fue de 72 y el más alto de 140. La puntuación más baja del grupo fue 72 y la más alta 140. En consecuencia, el intervalo en este conjunto de datos es $140 - 72 = 68$. Si se considera este resultado como una medida de la variación de las puntuaciones, se advierte una considerable variabilidad en ellos. En el conjunto de datos la realidad es que cuatro de las puntuaciones muestran relativamente poca variación entre sí. La puntuación de 140 es atípica. Este ejemplo muestra que el intervalo es una medida fácil de calcular y entender. Sin embargo, no suministra información sobre los valores de los datos que se encuentran entre los extremos.

Una cualidad importante de una medida de variación es que deberá ser pequeña cuando los valores de los datos se agrupan estrechamente en torno a la media y deberán ser grandes cuando se distribuyen ampliamente alrededor de la media. Así pues, una manera de medir la variación podría ser determinar la distancia a que cada punto de datos se encuentra respecto de la media. Si

el conjunto de datos consta de n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y si la media de este conjunto de datos es $\bar{x}$, las distancias de n puntos de datos respecto a la media se representaría con $(x_1 - \bar{x})$, $(x_2 - \bar{x})$,..., $(x_n - \bar{x})$. A estas diferencias se les llama ***desviaciones respecto a la media***. Si sumamos estas desviaciones y las dividimos entre n, el resultado será la ***desviación promedio respecto a la media.*** Por desgracia, siempre resulta que la suma de las desviaciones respecto a la media es cero. (Véase el ejercicio de seguimiento 18.) La suma de todas las desviaciones positivas respecto a la media siempre es igual a la suma de las desviaciones negativas; en consecuencia, se compensan mutuamente. De ahí que la desviación promedio respecto a la media invariablemente sea cero. Por ello, no es una buena medida de variación.

Aun cuando la *suma* de las desviaciones respecto a la media es cero, cada desviación *individual* es una medida útil de variación. Al elevarlas al cuadrado y al dividir el resultado entre n se obtiene la *media de los cuadrados de las desviaciones*. Y esa media suele recibir el nombre de ***varianza (variancia). Si un conjunto de datos se compone de n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y la media de este conjunto es $\bar{x}$, la variancia (varianza) del conjunto de datos será***

$$\text{Var}(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \tag{10.4}$$

Se elevan al cuadrado las desviaciones respecto de la media a fin de obtener la varianza, por lo cual esta medida de variación no refleja exactamente la magnitud verdadera de la variación en el conjunto de datos. Para corregir esto, puede definirse otra medida de la variación tomando la raíz cuadrada de la varianza. A esa medida de variación se le llama ***desviación estándar*** y se representa con la letra griega σ (sigma). Por tanto,

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \tag{10.5}$$

La desviación estándar es la medida más usual de variación para un conjunto de números aleatorios.

EJEMPLO 12

En el ejemplo 4, se determinó la puntuación promedio de un estudiante que había realizado cinco exámenes durante un curso de matemáticas a nivel universitario. La puntuación promedio, si las calificaciones en los cinco exámenes fueron 96, 82, 72 y 92, fue $\bar{x} = 84.0$. He aquí la variancia de este conjunto de datos:

$$\text{Var}(x) = \frac{(78 - 84)^2 + (96 - 84)^2 + (82 - 84)^2 + (72 - 84)^2 + (92 - 84)^2}{5}$$

$$= \frac{36 + 144 + 4 + 144 + 64}{5}$$

$$= \frac{392}{5} = 78.4$$

La desviación estándar es igual a la raíz cuadrada de la varianza, o sea

$$\sigma = \sqrt{78.4} = 8.85$$

Hay algunas relaciones importantes que incluyen la desviación estándar y que pueden ser útiles para llegar a conclusiones respecto a un conjunto de datos. En particular, se explicará una de ellas en la sección 10.4. Si bien podríamos dedicar mucho más tiempo a analizar esta y otras medidas de variación, en este capítulo el tema central lo constituyen las distribuciones de probabilidad. Por eso, terminamos esta sección explicando la desviación estándar como una medida de variación para las distribuciones discretas de probabilidad.

DESVIACIÓN ESTÁNDAR: DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE PROBABILIDAD
En una variable aleatoria discreta X que pueda adoptar n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con las respectivas probabilidades de ocurrencia $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la ***desviación estándar*** de la variable aleatoria es

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n} \qquad (10.6)$$

EJEMPLO 13

A continuación se calcularán las desviaciones estándar de las dos distribuciones de la tabla 10.16. Para la primera distribución,

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{(49 - 50)^2(.05) + (50 - 50)^2(.90) + (51 - 50)^2(.05)} \\ &= \sqrt{.05 + 0 + .05} = \sqrt{.10} = 0.3162\end{aligned}$$

para la segunda distribución,

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{(0 - 50)^2(.05) + (50 - 50)^2(.90) + (100 - 50)^2(.05)} \\ &= \sqrt{125 + 0 + 125} = \sqrt{250} = 15.81\end{aligned}$$

EJERCICIO
Calcule la desviación estándar de las distribuciones de probabilidad (tablas 10.4 y 10.5) en el ejemplo del banco de sangre.*

Ejercicios de seguimiento de la sección 10.2

En los siguientes conjuntos de datos, calcule *a*) la media, *b*) la mediana, *c*) la moda, *d*) el intervalo (rango) y *e*) la desviación estándar.

1 {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}

2 {5, 10, 40, 20, 35, 20, 50, 0, 5, 15, 25, 30, 20, 40, 45}

3 {50, 55, 48, 52, 49, 50, 51, 52, 53, 52}

4 {100, 500, 800, 400, 600, 500, 700, 800, 700, 400, 800, 200}

* Respuestas: $\sigma_1 = 2.107$, $\sigma_2 = 1.919$.

5 $\{0, -25, 40, -20, 25, -40, 20, 0, 0\}$
6 $\{60, 63, 45, 57, 75, 105, 15, 60, 40, 80\}$

7 Determine la media, la mediana y la moda de las siguientes distribuciones de frecuencia.

Valor de X	10	20	30	40	50
Frecuencia	5	12	8	10	6

8 Determine la media, la mediana y la moda de las siguientes distribuciones de frecuencia.

Valor de X	100	200	300	400	500
Frecuencia	10	5	1	5	10

9 Control de incendios forestales La tabla 10.17 resume los datos de un experimento en que el departamento de control ambiental llevó un registro de los incendios forestales comunicados a las autoridades diariamente durante un periodo de 60 días.

TABLA 10.17

Número de incendios forestales por día	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	5	4	8	12	10	7	6	5	3

Determine la media, la mediana y la moda de estos datos e interprete el significado de cada una.

10 Ausentismo A una empresa le preocupa mucho el ausentismo de sus empleados. Las relaciones entre sindicato y empresa han sido tensas durante los últimos meses por la imposibilidad de llegar a un acuerdo respecto al nuevo contrato de los 25 empleados afiliados al sindicato. En la tabla 10.18 se sintetizan los datos que la compañía ha reunido sobre el ausentismo en los últimos 30 días laborales.

TABLA 10.18

Número de ausencias	6	8	9	10	12
Frecuencia	4	6	8	9	3

Determine la media, la mediana y la moda de estos datos, e interprete el significado de esas medidas.

11 La tabla 10.19 presenta una distribución discreta de probabilidad relacionada con la demanda diaria de un producto.

TABLA 10.19

Número de demanda diaria (X)	$P(X)$
10	.05
20	.18
30	.32
40	.30
50	.15
	1.00

TABLA 10.20

Número de componentes que fallan	$P(X)$
0	.04
1	.12
2	.18
3	.30
4	.30
5	.06
	1.00

a) Determine la media de la demanda diaria.
b) ¿Cuál es la desviación estándar de la demanda diaria?

12 Un producto manufacturado consta de cinco componentes eléctricos. Cada una posee una vida útil limitada. La compañía sometió el producto a pruebas para medir la confiabilidad de los componentes. La tabla 10.20 es una distribución de probabilidad donde la variable aleatoria X indica el número de componentes que tienen alguna falla en las primeras 100 horas de operación.

a) ¿Cuál es el número promedio de componentes que presentan fallas durante las primeras 100 horas de operación?
b) ¿Cuál es la desviación estándar de la variable aleatoria X?
c) Si el producto sigue operando en caso de que no tengan fallas más de dos componentes, ¿qué porcentaje de las partes manufacturadas seguirá operando en las primeras 100 horas?

13 Calcule las respectivas medias y las desviaciones estándar de las dos distribuciones en la tabla 10.21.

14 En el ejercicio 2 de la sección 10.1 calcule *a*) el número promedio de grandes nevadas por año y *b*) la desviación estándar de la distribución de probabilidad.

15 En el ejercicio 3 de la sección 10.1, calcule *a*) el número promedio de alarmas falsas por día y *b*) la desviación estándar.

16 En el ejercicio 4 de la sección 10.1 calcule *a*) el número promedio de unidades defectuosas por serie de producción y *b*) la desviación estándar.

17 En el ejercicio 5 de la sección 10.1 calcule *a*) el número promedio de conductores en estado de ebriedad descubiertos en los bloqueos de calles y *b*) la desviación estándar.

***18** En un conjunto de datos formado por n elementos $x_1, x_2 \cdots x_n$ con la media x, demuestre que la suma de la desviación respecto a la media es cero.

TABLA 10.21

X_1	$P(X_1)$	X_2	$P(X_2)$
500	1	0	.050
		100	.125
		300	.200
		500	.250
		700	.200
		900	.125
		1,000	.050
			1.000

10.3 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE PROBABILIDAD

En la presente sección se explica una de las distribuciones discretas de probabilidad de mayor uso: la ***distribución binomial de probabilidad.*** En primer lugar se da una explicación de las características de los procesos aleatorios que pueden representarse por medio de ella. Luego viene una descripción de la distribución binomial y de sus aplicaciones.

El proceso de Bernoulli

Muchos procesos aleatorios se caracterizan por ensayos (intentos) en que hay sólo dos resultados posibles mutuamente excluyentes. Las partes manufacturadas pueden muestrearse para determinar si tienen una calidad aceptable o son defectuosas; el lanzamiento de una moneda puede producir cara o cruz; los pacientes que llegan a una sala de emergencia son clasificables en varones y mujeres; puede juzgarse que un cuestionario enviado a los posibles encuestados en una prueba de opción múltiple se contestó de modo correcto o incorrecto.

A menudo los dos resultados posibles en estos casos se caracterizan como "exitosos" o "no exitosos". El hecho de que caiga cara al lanzar una moneda puede declararse un resultado exitoso. Esta asignación de calificativos es, a pesar de todo, completamente arbitraria. El hecho de que, al lanzar la moneda, caiga cruz podría calificarse de éxito con la misma facilidad y propiedad (según el lado de la moneda a que estemos apostando).

Los experimentos aleatorios como el lanzamiento de una moneda legal son ejemplos de los *procesos de Bernoulli*. Éstos presentan las siguientes características:

CARACTERÍSTICAS DE LOS PROCESOS DE BERNOULLI

I Existen n ensayos, cada uno de los cuales tiene dos resultados mutuamente excluyentes que pueden clasificarse como *éxito* o *fracaso*.

II La probabilidad de un *éxito* p permanece fijo en cada ensayo.

III La probabilidad de *fracaso* q permanece fija en cada ensayo y $q = 1 - p$.

IV La variable aleatoria X es el número total de éxitos en n ensayos.

EJEMPLO 14

Un dado se lanza 25 veces. Un resultado exitoso es la ocurrencia de un 6. Éste es un ejemplo de un proceso de Bernoulli. Si se supone que el dado sea legal, la probabilidad de éxito en cada ensayo es 1/6, o sea $p = 1/6$. Si la probabilidad de éxito es 1/6, la de un fracaso q es $q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6$. Los sucesivos lanzamientos de un dado son estadísticamente independientes. La variable aleatoria X es el número de veces que sale un seis en 25 lanzamientos.

EJEMPLO 15

En un proceso de manufactura se seleccionarán 100 piezas, y se juzga que el proceso producirá piezas defectuosas en forma aleatoria y con una probabilidad de 0.05. El

proceso se caracteriza por independencia estadística. La probabilidad de una pieza no defectuosa, cuya producción se considera un resultado exitoso, es $p = 0.95$. La probabilidad de un fracaso (pieza defectuosa) es $q = 1 - 0.95 = 0.05$. La variable aleatoria X es la cantidad de piezas no defectuosas identificadas en 100 ensayos.

Distribución binomial

Pongamos el ejemplo de un estudiante que esté realizando un examen con 5 preguntas de verdadero-falso (alternativa constante). Suponga que la probabilidad de contestar acertadamente cualquiera de las preguntas es de 0.8. Suponga además que se desea conocer la probabilidad de que el estudiante conteste correctamente cuatro preguntas. Éste es un caso del proceso de Bernoulli en que la probabilidad de éxito en un intento cualquiera es $p = 0.8$, la probabilidad de fracaso es $q = 0.2$, el número de ensayos es $n = 5$ y la variable aleatoria X es el número de preguntas contestadas correctamente.

Una manera de contestar bien cuatro preguntas consiste en responder las primeras cuatro correctamente y la última incorrectamente; o, dicho en función del éxito (S) o fracaso (F), la secuencia de resultados es $S_1S_2S_3S_4F_5$. La probabilidad de este *evento conjunto* se calcula aplicando la regla 7 explicada en la sección 9.4, o sea

$$\begin{aligned} P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap F_5) &= (.8)(.8)(.8)(.8)(.2) \\ &= .08192 \end{aligned}$$

Otra manera de obtener cuatro respuestas es la secuencia $F_1S_2S_3S_4S_5$ y

$$\begin{aligned} P(F_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5) &= (.2)(.8)(.8)(.8)(.8) \\ &= .08192 \end{aligned}$$

que es la misma probabilidad calculada para el evento conjunto $S_1S_2S_3S_4F_5$. De hecho, hay cinco formas de contestar correctamente las cuatro preguntas, a saber: $S_1S_2S_3S_4F_5$, $S_1S_2S_3F_4S_5$, $S_1S_2F_3S_4S_5$, $S_1F_2S_3S_4S_5$ y $F_1S_2S_3S_4S_5$. Nótese que, al aplicar la regla 7 para calcular la probabilidad de cada una de las secuencias, la probabilidad de éxito, $p = 0.8$, será un factor 4 veces y la probabilidad de fracaso será un factor una vez. La única diferencia estriba en el orden de multiplicación, el cual no ejerce efecto alguno sobre el producto. Así pues, la probabilidad de responder correctamente cuatro preguntas es

$$\begin{aligned} p(X = 4) &= \left(\begin{array}{c}\text{número de formas en que}\\ \text{cuatro preguntas pueden ser}\\ \text{contestadas correctamente}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{probabilidad de responder}\\ \text{correctamente cuatro}\\ \text{preguntas en cualquier}\\ \text{orden}\end{array}\right) \\ &= 5(.08192) = .4096 \end{aligned}$$

Otra manera de enumerar las formas distintas en que pueden ocurrir éxitos en cinco intentos consiste en reconocer que se trata de una pregunta de combinaciones. La cantidad de formas en las cuales los éxitos k pueden presentarse en n ensayos se obtiene aplicando la ecuación (9.7), o sea

$$_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

El número de formas en que cuatro éxitos pueden ocurrir en cinco ensayos es

$$
\begin{aligned}
{}_5C_4 &= \frac{5!}{4!(5-4)!} \\
&= \frac{5!}{4!\,1!} = 5
\end{aligned}
$$

La ***distribución binomial de probabilidad*** sirve, entre otras cosas, para representar experimentos que son procesos de Bernoulli. La siguiente regla de cálculo es indispensable para determinar las ***probabilidades binomiales.***

CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES BINOMIALES

En un proceso de Bernoulli en que la probabilidad de éxito en un ensayo es p y la probabilidad de un fracaso es q, la probabilidad de k éxitos en n ensayos en

$$P(k,n) = C_k(\overbrace{p \cdot p \cdot p \cdots p}^{k \text{ multiplicada por}})(\overbrace{q \cdot q \cdot q \cdots q}^{n-k \text{ multiplicado por}})$$

o bien

$$P(k,n) = {}_nC_k p^k q^{n-k} \qquad (10.7)$$

Si continuamos con el ejemplo del examen de universitarios, los posibles resultados del examen son cero, dos, tres, cuatro o cinco respuestas correctas a las preguntas (éxitos). A continuación se calcularán las probabilidades de otros resultados. La probabilidad de cero éxitos (respuestas correctas) en cinco ensayos es

$$
\begin{aligned}
P(0,5) &= {}_5C_0(.8)^0(.2)^5 \\
&= \frac{5!}{0!(5-0)!}(.00032) = 1(.00032) = .00032
\end{aligned}
$$

La probabilidad de un éxito en cinco ensayos es

$$
\begin{aligned}
P(1,5) &= {}_5C_1(.8)^1(.2)^4 \\
&= \frac{5!}{1!(5-1)!}(.00128) = 5(.00128) = .0064
\end{aligned}
$$

La probabilidad de dos éxitos en cinco ensayos es

$$
\begin{aligned}
P(2,5) &= {}_5C_2(.8)^2(.2)^3 \\
&= \frac{5!}{2!(5-2)!}(.00512) = 10(.00512) = .0512
\end{aligned}
$$

La probabilidad de tres éxitos en cinco ensayos es

$$
\begin{aligned}
P(3,5) &= {}_5C_3(.8)^3(.2)^2 \\
&= \frac{5!}{3!(5-3)!}(.02048) = 10(.02048) = .2048
\end{aligned}
$$

La probabilidad de cinco éxitos en cinco ensayos es

$$P(5,5) = {}_5C_5(.8)^5(.2)^0$$
$$= \frac{5!}{0!(5-0)!}(.32768) = 1(.32768) = .32768$$

La tabla 10.22 da un resumen de la distribución binomial de probabilidad en este experimento. Nótese que los eventos posibles de la variable aleatoria son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. La suma de las probabilidades es 1.0.

La figura 10.2 incluye una representación de esta clase de distribución por medio de un histograma. Cada barra corresponde a uno de los seis eventos, y la altura de ella indica la probabilidad del evento.

EJEMPLO 16

Crédito a clientes Un banco muy importante emite tarjetas de crédito con el nombre de VISACARD. Se ha averiguado que 40% de las cuentas de todas las tarjetas se liquida completamente después de la primera factura. Es decir, 40% de las cuentas nunca presentan cargos de interés. Si una muestra de seis cuentas se selecciona aleatoriamente en los registros correpondientes a años anteriores, construya la distribución binomial de probabilidad en que la variable aleatoria X sea el número de cuentas que no hayan incurrido en gastos por intereses.

SOLUCIÓN

Este experimento puede considerarse un proceso de Bernoulli donde una cuenta que no muestre gastos por intereses se clasifica como un éxito y las que sí los presente se califica de fracaso. En este experimento $p = 0.40$, $q = 0.60$ y $n = 6$.

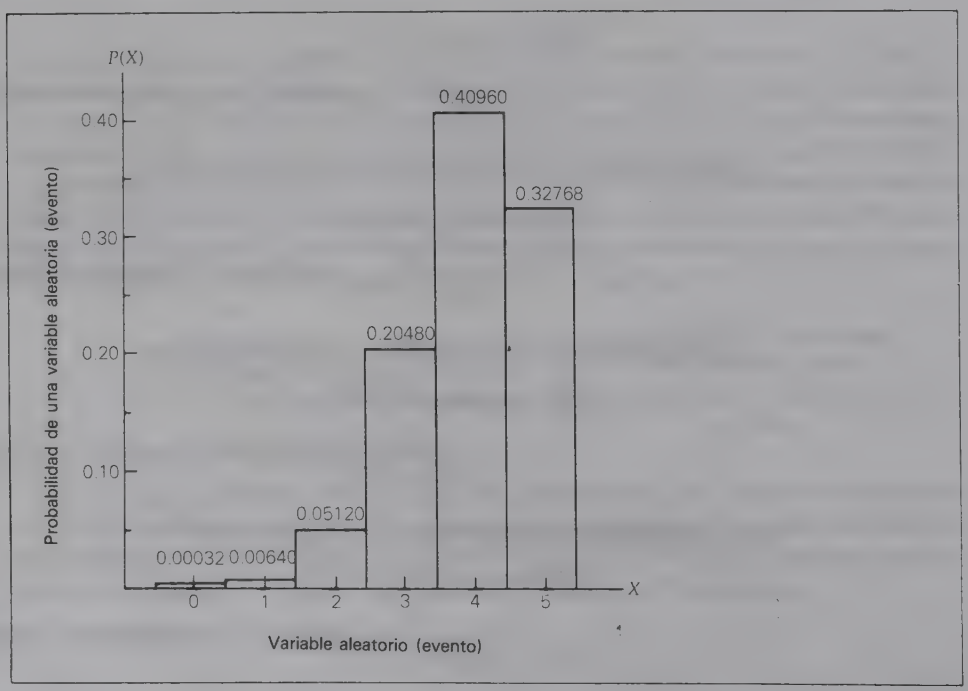


FIGURA 10.2 Representación de una distribución binomial mediante un histograma.

TABLA 10.22 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA

Número de éxitos (respuestas correctas en el problema) X	$P(X)$
0	.00032
1	.00640
2	.05120
3	.20480
4	.40960
5	.32768
	1.00000

La probabilidad de que ninguna de las seis cuentas tenga gastos por concepto de intereses es

$$P(0,6) = {}_6C_0(.4)^0(.6)^6$$
$$= \frac{6!}{0!(6-0)!}(.046656) = (1)(.046656) = .046656$$

La probabilidad de que exactamente una cuenta muestre gastos por concepto de intereses es

$$P(1,6) = {}_6C_1(.4)^1(.6)^5$$
$$= \frac{6!}{1!(6-1)!}(.031104) = (6)(.031104) = .186624$$

La probabilidad de que exactamente dos cuentas no muestren gastos por concepto de interés es

$$P(2,6) = {}_6C_2(.4)^2(.6)^4$$
$$= \frac{6!}{2!(6-2)!}(.020736) = (15)(.020736) = .31104$$

La probabilidad de que exactamente tres cuentas no presenten gastos por concepto de intereses es

$$P(3,6) = {}_6C_3(.4)^3(.6)^3$$
$$= \frac{6!}{3!(6-3)!}(.013824) = (20)(.013824) = .27648$$

Al continuar este proceso, el resultado es la distribución de probabilidad que aparece en la tabla 10.23.

EJERCICIO

En el ejemplo 16, ¿qué probabilidades hay de que un máximo de tres cuentas no muestren gastos por concepto de intereses? ¿Y un máximo de cuatro cuentas?*

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

¿Es un proceso de Bernoulli el que se da en el ejemplo 36 del capítulo 9 (página 398) (simulación de un módulo espacial)? Explique su respuesta.

*Respuestas: .8208, .04096.

TABLA 10.23 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE ANÁLISIS DE CRÉDITO A CLIENTES

Número de éxitos (cuentas que no han incurrido en cargos por concepto de interés (X)	$P(X)$
0	.046656
1	.186624
2	.311040
3	.276480
4	.138240
5	.036864
6	.004096
	1.000000

Desviación estándar y media de la distribución binomial

MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL
El valor medio μ de una distribución binomial se determina por medio de la ecuación

$$\mu = np \qquad (10.8)$$

La ecuación (10.8) indica que el número promedio de éxitos en un proceso de Bernoulli es igual al producto del número de ensayos por la probabilidad de éxito de cada ensayo. Si una distribución binomial describe el número de caras que caen en 500 lanzamientos de una moneda legal, la media de este experimento es

$$\mu = 500(.5)$$
$$= 250$$

lo cual indica que, en promedio, cabe esperar que 250 veces caiga cara en 500 lanzamientos de una moneda legal.

EJEMPLO 17

En el ejemplo 16, la probabilidad de que una cuenta no presente gastos por concepto de intereses fue de 0.4. En la selección de las seis cuentas, la media es

$$\mu = 6(.4)$$
$$= 2.4$$

Esto significa que, en promedio (a largo plazo), una selección de seis cuentas al azar hará que se identifique que 2.4 no ha incurrido en gastos por concepto de intereses.

EJEMPLO 18

Ya antes se expuso un problema donde un estudiante estaba realizando un examen de verdadero/falso (alternativa constante) que incluye cinco preguntas. La probabili-

dad de contestar una pregunta cualquiera en forma correcta se estimó en 0.8. En este proceso de Bernoulli, el número promedio de las respuestas correctas es

$$\mu = 5(.8) = 4.0$$

Este resultado indica que, si el estudiante hizo muchos exámenes con cinco preguntas que tengan la misma probabilidad de éxito, el número promedio de respuestas correctas sería de 4.0.

Si el número de preguntas en un examen es 36, el número promedio de respuestas correctas es

$$\mu = 36(.8) = 28.8$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La desviación estándar de una distribución binomial de probabilidad se determina por medio de la ecuación

$$\sigma = \sqrt{npq} \qquad (10.9)$$

En el ejemplo 16, la desviación estándar es

$$\sigma = \sqrt{6(.4)(.6)}$$
$$= \sqrt{1.44} = 1.2$$

EJEMPLO 19

Confiabilidad del polígrafo Un fabricante de polígrafos (detectores de mentiras) afirma que sus máquinas pueden distinguir correctamente las verdaderas respuestas a las preguntas procedentes de respuestas falsas 85% de las veces. Si se somete a pruebas la máquina que utiliza un conjunto de 50 preguntas, determine *a)* la media de este proceso de Bernoulli y *b)* la desviación estándar.

SOLUCIÓN

En este proceso, $p = 0.85$ y $n = 50$.

a) El número de respuestas identificadas correctamente es

$$\mu = 50(.85) = 42.5$$

b) La desviación estándar es

$$\sigma = \sqrt{(50)(.85)(.15)}$$
$$= \sqrt{6.375} = 2.52$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 10.3

1 Determine cuáles de las siguientes variables aleatorias no son variables en un proceso de Bernoulli.

a) X = número de caras en el lanzamiento de una moneda 20 veces

b) X = altura de 10 estudiantes seleccionados de modo aleatorio

c) X = número de 6 que aparecen en cinco lanzamiento de un *par* de dados
d) X = calificaciones logradas por 100 estudiantes en una prueba ordinaria
e) X = precio de cierre de una acción en 10 días seleccionados aleatoriamente
f) X = número de pacientes que llegan cada hora a una sala de urgencias y que se observaron en 20 horas escogidas en forma aleatoria
g) X = número de alarmas falsas en una muestra de 10 alarmas en que la probabilidad de que una alarma sea falsa es de 0.18

2 Una moneda legal se lanzará 4 veces. ¿Qué probabilidad existe de que la cara salga exactamente tres veces? ¿Cuatro veces? ¿Una o más veces?

3 Un dado legal se lanzará 4 veces. ¿Qué probabilidad hay de que el 1 salga exactamente tres veces? ¿Y de que salga menos de tres veces?

4 Conductores en estado de ebriedad Un estado de un país ha averiguado que, de todos los accidentes de tránsito en que hay un muerto, en el 80% se trata de situaciones en que por lo menos un conductor había ingerido bebidas alcohólicas. Si se selecciona aleatoriamente una muestra de cuatro accidentes mortales, construya la distribución binomial en que la variable aleatoria X sea el número de accidentes en los cuales por lo menos un conductor había estado ingiriendo bebidas alcohólicas.

5 Se ha comprobado que 90% de las familias estadounidenses tienen por lo menos un televisor. Si se seleccionan aleatoriamente cinco residencias, construya la distribución binomial en que la variable aleatoria X sea el número de residencias que tengan por lo menos un televisor.

6 Una empresa que lleva a cabo encuestas entre consumidores por correo descubrió que 40% de las familias que reciben un cuestionario lo devuelven. En una encuesta de 80 familias, ¿qué probabilidades hay de que exactamente ocho lo devuelvan? ¿De que lo retornen exactamente 15 familias?

7 Un estudiante realiza un examen con 10 preguntas de verdadero-falso (alternativa constante). No sabe nada del tema y opta por contestar al azar. Suponiendo que las preguntas sean independientes y que haya una probabilidad de 0.7 de responder bien cualquier pregunta, ¿qué probabilidades hay de que apruebe el examen (suponga que aprobar significa obtener 7 o más aciertos)? Si el examen contiene 20 preguntas, ¿cambia la probabilidad de aprobar (14 preguntas o más contestadas correctamente)?

8 Inmunización Una vacuna contra la influenza ofrece una eficacia de 95% en la creación de inmunidad. En una muestra aleatoria de 4 personas vacunadas que fueron expuestas a esta cepa de la influenza, ¿qué probabilidades existen de que ninguna de ellas contraiga la enfermedad?

9 Una urna contiene 5 bolas rojas, 2 bolas verdes y 3 bolas azules. Si se seleccionan aleatoriamente 10 bolas con reposición en cada extracción, ¿qué probabilidad hay de que no se seleccione ninguna bola roja? ¿Y de que no se seleccionen 3 bolas verdes?

10 Un proceso de manufactura produce piezas defectuosas en forma aleatoria y a una tasa de 10%. En una muestra de 10 piezas, ¿qué probabilidad hay de que se produzcan menos de 2 defectuosas?

11 En el ejercicio 10, ¿cuál es el número promedio de piezas defectuosas esperadas? ¿Qué interpretación se da a ese valor? ¿Cuál es la distribución estándar en esta distribución?

12 En un hospital 40% de los recién nacidos son varones. En un día particular nacen 5 niños. ¿Qué probabilidades existen de que tres o más de ellos sean varones? ¿Cuál es la media de esta distribución cuando $n = 5$? ¿Cuál es la desviación estándar?

10.4 DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDAD

En las distribuciones continuas de probabilidad, el número de valores posibles de la variable aleatoria es infinito. En ellas, las probabilidades se asignan ex-

clusivamente a intervalos de valores de la variable aleatoria. Para dar un ejemplo de ello, imagine la variable aleatoria X que representa las lluvias anuales en una región, medidas en pulgadas. El número de la posible precipitación pluvial es infinito. Así, un valor posible de X es 24.000056 pulgadas. En un número infinito de valores posibles de X, la probabilidad de cada valor es sumamente pequeña. Por tanto, en las distribuciones continuas de probabilidad no se hacen afirmaciones respecto a la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor específico. Por el contrario, casi siempre se hacen en lo tocante a la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor dentro de un intervalo definido. En el ejemplo de la precipitación pluvial, quizá se desee conocer la probabilidad de que la precipitación anual fluctúe entre 24 y 25 pulgadas.

En la presente sección se trata de una de las distribuciones continuas más conocidas y de mayor aplicación: la ***distribución normal de probabilidad.***

Distribución normal de probabilidad

Este tipo de distribución es una de las más importantes en la teoría moderna de la probabilidad. Se representa mediante la clásica curva *en forma de campana*, llamada también ***curva normal***, que aparece en la figura 10.3. La curva de la figura 10.3 es representativa de una familia de curvas en forma de campana que indican las distribuciones de la probabilidad normal, todas ellas distintas en relación con su media y su desviación estándar. La figura 10.4 muestra las gráficas de dos distribuciones normales que tienen la misma media pero diferentes desviaciones estándar. La figura 10.5 contiene las gráficas de dos distribuciones normales que tienen diferentes medias pero una misma desviación estándar.

La curva normal es simétrica alrededor de una línea vertical imaginaria que pasa por la media μ. Esta simetría significa que la curva es la misma si el espectador recorre distancias iguales a la derecha e izquierda de la media. La "colas" de la curva se van acercando cada vez más al eje horizontal sin tocarlo nunca, por mucho que el espectador se desplace a la derecha o la izquierda.

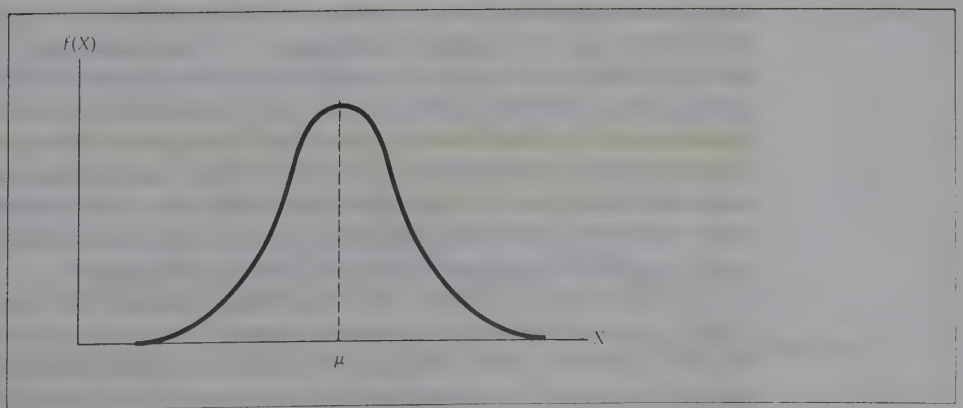


FIGURA 10.3 Curva normal.

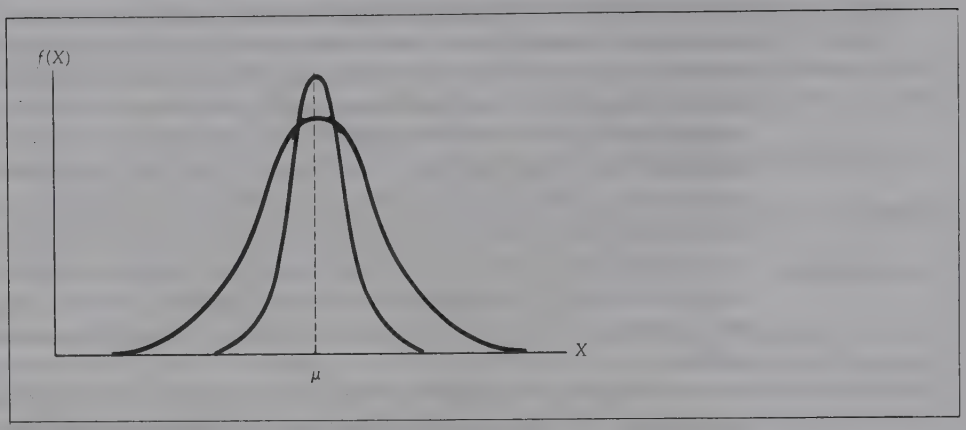


FIGURA 10.4
Distribuciones normales con medias iguales.

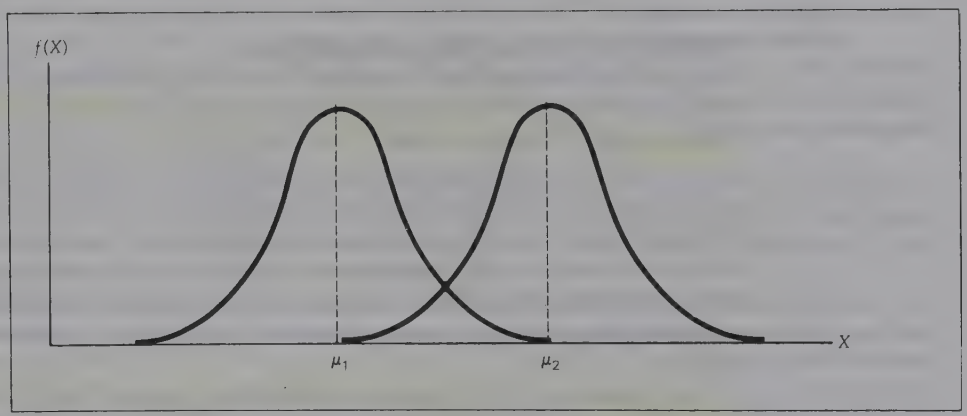


FIGURA 10.5
Distribuciones normales con desviaciones estándar.

Las áreas bajo la curva que representan una distribución de probabilidad denotan las probabilidades. Si el área total bajo una curva normal se considera igual a 1, la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor entre a y b equivale al área situada debajo de la curva y limitada a la derecha e izquierda por las líneas verticales $X = a$ y $X = b$. Esto se muestra en la figura 10.6.

Pongamos el caso en que se observa que las calificaciones conseguidas en una prueba estandarizada de aptitudes está *normalmente distribuida* con una media de 70 y una desviación estándar de 7.5. Supóngase que se quiere determinar la probabilidad de que un estudiante obtenga una calificación de 70 a 85 en la prueba. Con objeto de calcular esa probabilidad, se recurre a la utilísima propiedad de las distribuciones normales. *Cualquier distribución normal de probabilidad μ puede ser transformada en una* ***distribución normal estándar (unitaria)*** *que tenga una media igual a 0 y una desviación estándar de 1.* La tranformación redefine cada valor de la variable aleatoria X en función de su distancia respecto a la media, *expresada como un múltiplo de la desviación estándar.*

La figura 10.7 contiene esta transformación de X en función de otra variable z que representa la distancia respecto a la media en múltiplos de la desviación estándar. Adviértase que los valores z a la derecha de la media son positivos y que los de la izquierda son negativos. Un valor de X que esté una

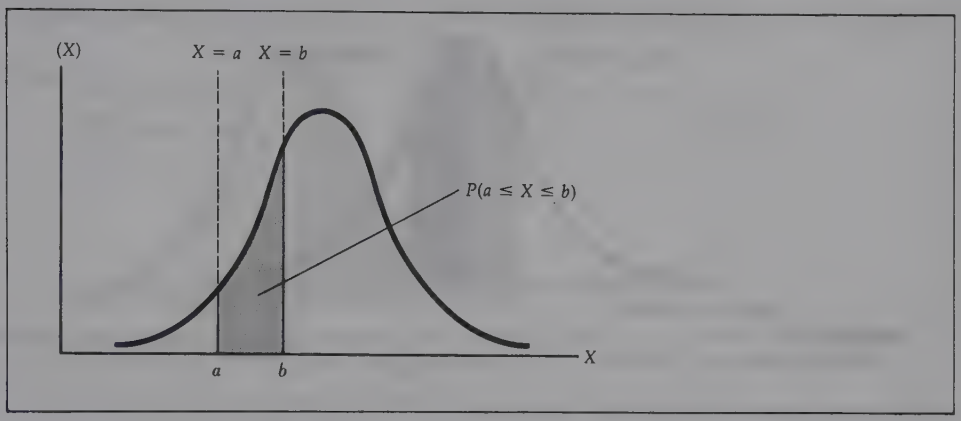


FIGURA 10.6 El área debajo de la curva normal representa la probabilidad.

desviación estándar a la derecha de la media se definirán en forma equivalente por un valor de z de 1. Un punto situado tres desviaciones estándar a la izquierda de la media se definirá de modo equivalente por un valor z de -3.

La tabla 10.24 en la página ~~447~~ 467 contiene las áreas bajo la curva normal estándar. *Nótese que las áreas son las que se encuentran debajo de las curvas entre la media y otro punto situado z desviaciones respecto a la media.* La curva normal es tal que 50% de área se encuentra a la izquierda de la media y 50% a la derecha. En otras palabras, existe una probabilidad de 50% de que el valor de la variable aleatoria X sea menor que la media y 50% de probabilidad de que sea mayor. La simetría de la curva normal indica que la tabla 10.24 puede emplearse para determinar las áreas comprendidas entre la media y otro punto, cuando el segundo punto se halla a la izquierda o derecha de la media. Un valor z de 1 en la tabla 10.24 significa que el área debajo de la curva entre $z = 0$ y $z = 1$ es de 0.3413. *El área es la misma entre* $z = 0$ *y* $z = -1$. La figura 10.8 muestra esas áreas. Obsérvese asimismo que podemos hacer la afirmación de que el área bajo la curva normal estándar *entre* $z = -1$ *y* $z = 1$ es 0.6826.

Volvamos ahora al problema original concerniente a la prueba estandarizada de aptitudes. Se ha descubierto que las puntuaciones están normalmente distribuidas con un media de 70 y una desviación estándar de 7.5. El problema

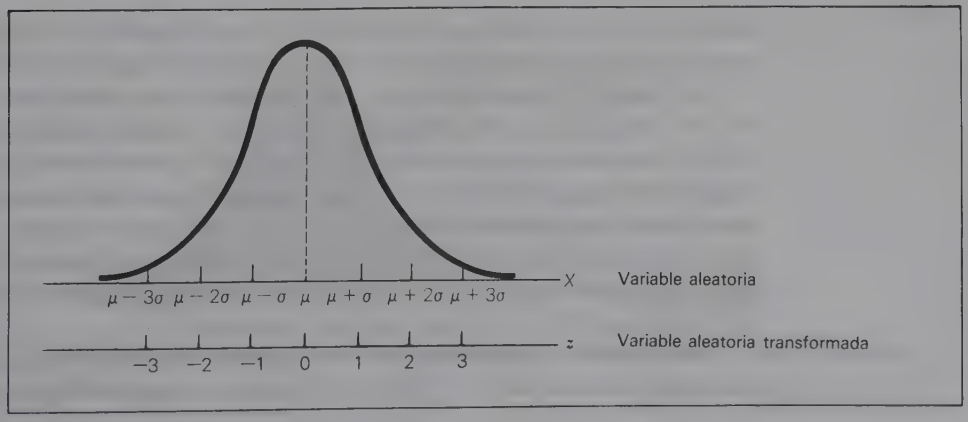


FIGURA 10.7 Transformación en distribución normal estádar (unitaria).

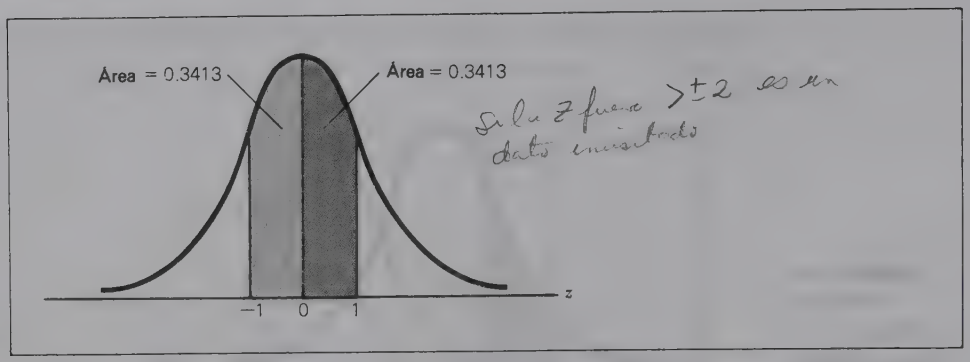


FIGURA 10.8

radicaba en determinar la probabilidad de que un estudiante seleccionado en forma aleatoria obtuviese una puntuación comprendida entre 70 y 85. Para determinar esta probabilidad, hay que transformar la distribución original en la distribución normal estándar. Y para ello es preciso identificar los valores de z para los valores pertinentes de X. La fórmula que permite convertir los valores de la variable aleatoria X en los valores equivalentes de z es

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \textbf{(10.10)}$$

El valor z correspondiente a la media siempre es 0. Por tanto, en este caso un valor de z correspondiente a un valor de X de 70 es

$$z = \frac{70 - 70}{7.5} = 0$$

El valor z correspondiente a un valor X de 85 es

$$z = \frac{85 - 70}{7.5}$$

$$= \frac{15}{7.5} = 2$$

Esta media tiene una puntuación de 85 y se encuentra a dos desviaciones estándar arriba (a la derecha de) la puntuación promedio de 70.

Así pues, la probabilidad de que un estudiante logre puntuaciones entre 70 y 85 es igual al área debajo de la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 2$. Esta área, que aparece en la figura 10.9, se obtiene directamente de la tabla 10.24 como 0.4772. En consecuencia, la probabilidad de que un estudiante logre una puntuación de 70 a 85 es 0.4772. En la figura 10.9 nótese que una escala equivalente de X se trazó debajo de la escala de z para mostrar el valor correspondiente de X. Ello no es necesario, pero sirve para recordarnos los valores pertinentes de la variable aleatoria X.

Supóngase que queremos conocer la probabilidad de que un estudiante reciba calificaciones ente 0 y 85 en el examen. La probabilidad es igual a la de

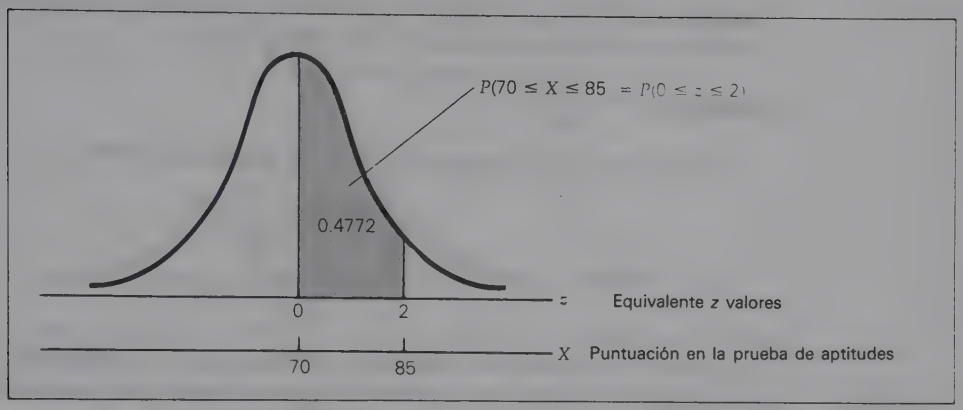


FIGURA 10.9

que z sea menor que 2 en la distribución normal estándar. La probabilidad es el área debajo de la curva normal estándar, que se observa en la figura 10.10. Esta área consta de los 0.5000 a la izquierda de la media y de los 0.4772 que se identificaron antes, o sea

$$P(z \leq 2) = P(z \leq 0) + P(0 < z \leq 2)$$
$$= .5000 + .4772 = .9772$$

NOTA
Si hay problemas que exijan determinar las probabilidades de una variable distribuida normalmente, se aconseja hacer un bosquejo aproximado que identifique el área o áreas equivalentes bajo la curva normal estándar.

EJEMPLO 20

Una encuesta reveló que el ingreso anual per cápita de los habitantes de un estado tiene una distribución normal con una media de \$9800 y una desviación estándar de \$1600. Si se selecciona una persona aleatoriamente, ¿qué probabilidad hay de que sus

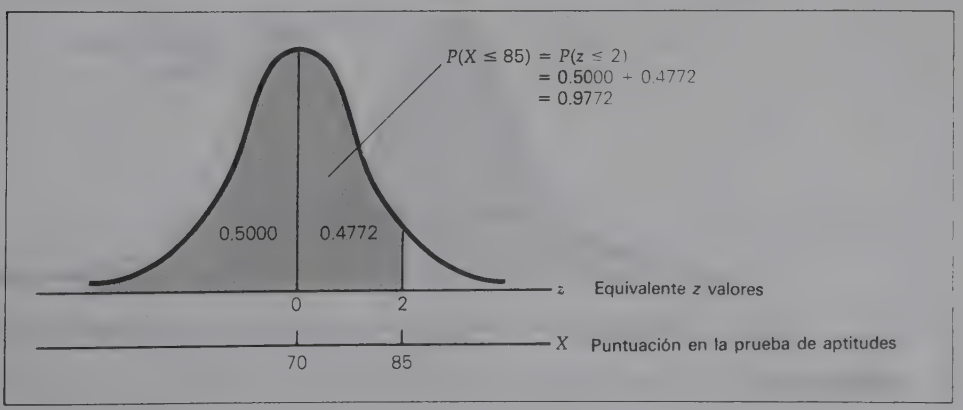


FIGURA 10.10

ingresos anuales *a*) sean mayores que \$5000, *b*) mayores que \$12 200, *c*) fluctúen entre \$8520 y \$12 200, *d*) entre \$11 400 y \$13 000?

SOLUCIÓN

a) El valor de z correspondiente a un ingreso de \$5000 es

$$z = \frac{5\,000 - 9\,800}{1\,600}$$
$$= \frac{-4\,800}{1\,600} = -3$$

Con base en la figura 10.11 es posible concluir que la probabilidad de que el sueldo de una persona sea mayor que \$5000 es igual a la de que z sea mayor que -3 en la distribución normal estándar. Según la tabla 10.24

$$P(z > -3) = P(-3 < z \leq 0) + P(z > 0)$$
$$= .49865 + .5000 = .99865$$

b) El valor de z correspondiente a un ingreso de \$12 200 es

$$z = \frac{12\,200 - 9\,800}{1\,600}$$
$$= \frac{2\,400}{1\,600} = 1.5$$

A partir de la figura 10.12 se llega a la siguiente conclusión: la probabilidad de que el sueldo de una persona sea mayor que \$12 200 es igual a la de que z sea mayor que 1.5. Basándonos en la figura 10.12 puede determinarse que $P(0 < z \leq 1.5) = 0.4332$. Dado que

$$P(z > 0) = .5000$$
$$P(z > 1.5) = P(z > 0) - P(0 < z \leq 1.5)$$
$$= .5000 - .4332 = .0668$$

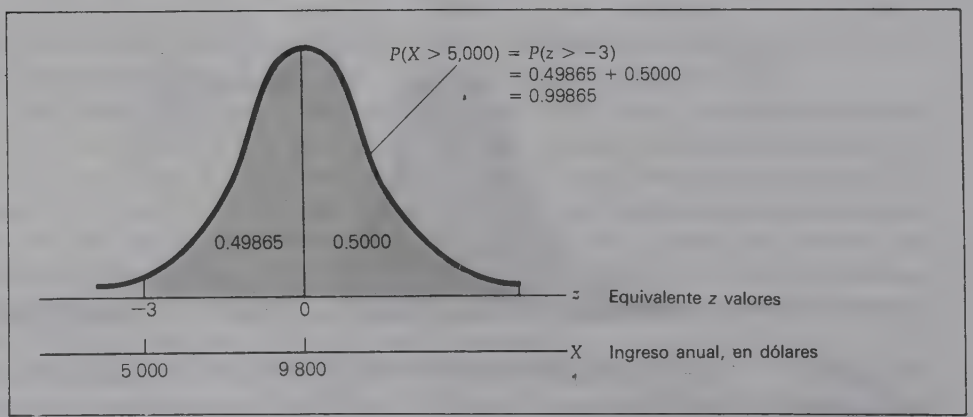


FIGURA 10.11

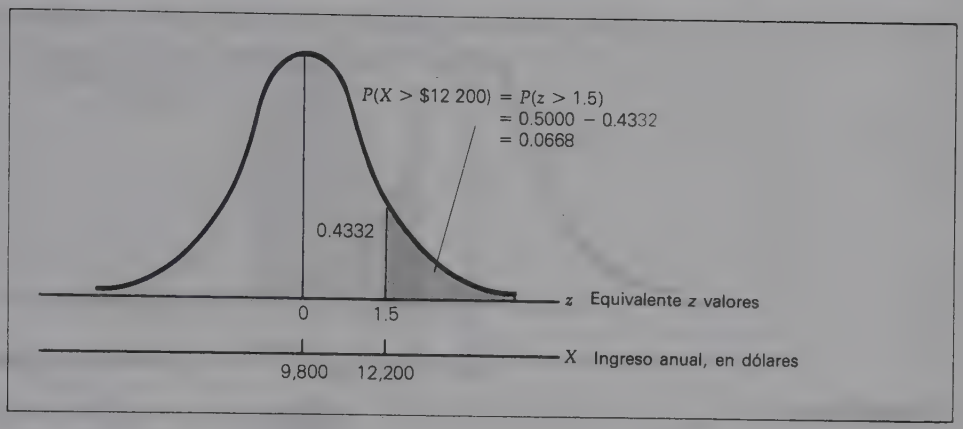


FIGURA 10.12

c) El valor de z correspondiente a un ingreso de \$8520 es

$$z = \frac{8\,520 - 9\,800}{1\,600}$$

$$= \frac{-1\,280}{1\,600} = -.8$$

Conforme a la figura 10.13, la probabilidad de que el sueldo de una persona fluctúe entre \$8520 y \$12 200 es igual a la de que z esté comprendida entre -0.8 y 1.5, es decir,

$$P(-0.8 \leq z \leq 1.5) = P(-0.8 \leq z < 0) + P(0 \leq z \leq 1.5)$$

$$= .2881 + .4332 = .7213$$

d) El valor de z correspondiente a un ingreso de \$11 400 es

$$z = \frac{11\,400 - 9\,800}{1\,600}$$

$$= \frac{1600}{1\,600} = 1$$

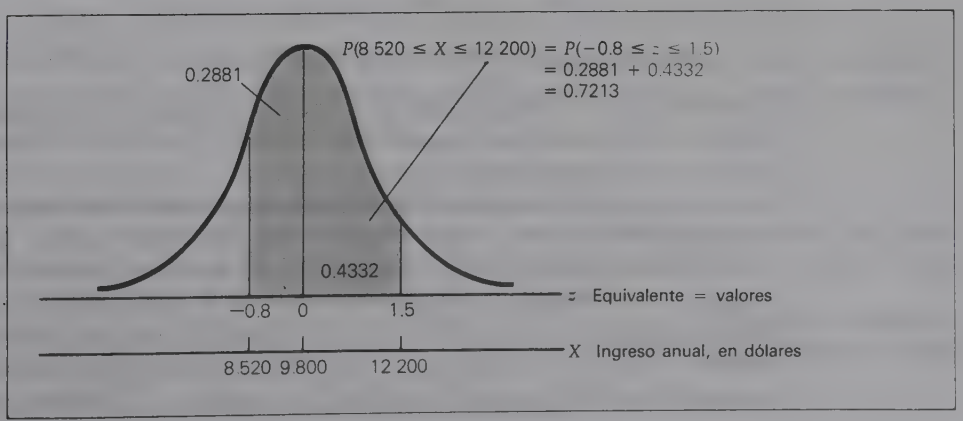


FIGURA 10.13

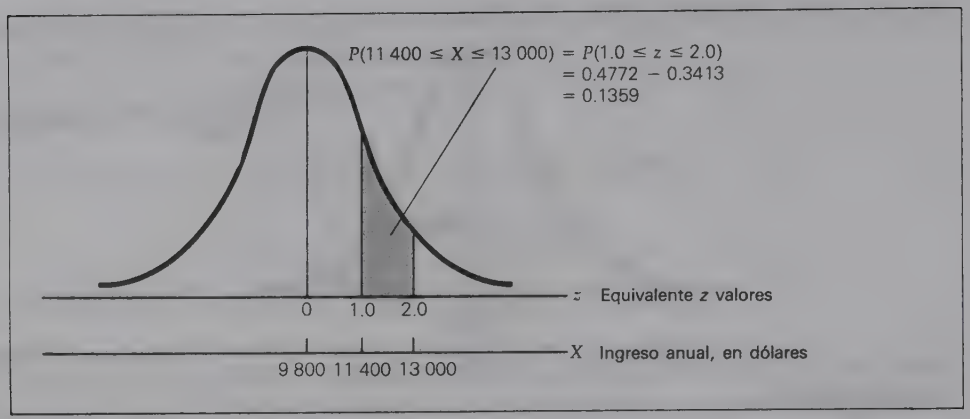


FIGURA 10.14

El valor de z correspondiente a un ingreso de \$13 000 es

$$z = \frac{13\,000 - 9\,800}{1{,}600}$$

$$= \frac{3\,200}{1\,600} = 2$$

De acuerdo con la figura 10.14, la probabilidad de que el sueldo de una persona se encuentre entre \$11 400 y \$13 000 es igual a la de que z esté comprendida entre 1 y 2. Para calcular esa probabilidad, hay que encontrar el área entre $z = 0$ y $z = 2$, restándole después el área entre $z = 0$ y $z = 1$. En otras palabras,

$$P(1 \leq z \leq 2) = P(0 \leq z \leq 2) - P(0 \leq z \leq 1)$$
$$= .4772 - .3413 = .1359$$

Hay que hacer una aclaración respecto al empleo de la tabla 10.24. Ya se señaló antes que, en el caso de variables continuas, la probabilidad de que ocurra un valor específico de la variable es 0. Es decir, para un punto cualquiera a,

$$P(X = a) = 0$$

Por tanto, para dos constantes cualesquiera $a < b$,

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

La consecuencia o implicación práctica de lo anterior es que los valores de la tabla 10.24 representan las probabilidades de que z adopte valores entre dos puntos z_1 y z_2 donde los valores exactos de z_1 y z_2 pueden estar o no incluidos. En el ejemplo 20*a*, las probabilidades de que el sueldo de una persona sea mayor que \$5000 o bien mayor o igual a esa cifra son iguales: 0.99865.

Una última observación respecto a las variables con distribución normal es que, entre todos los posibles resultados de la variable aleatoria X, se prevé que aproximadamente 68% ocurrirá dentro de una desviación estándar (±) respecto a la media (es decir, $\mu \pm 1\sigma$), se prevé que más o menos 95% ocurrirá dentro de dos desviaciones estándar (±) respecto a la media ($\mu \pm 2\sigma$) y cerca

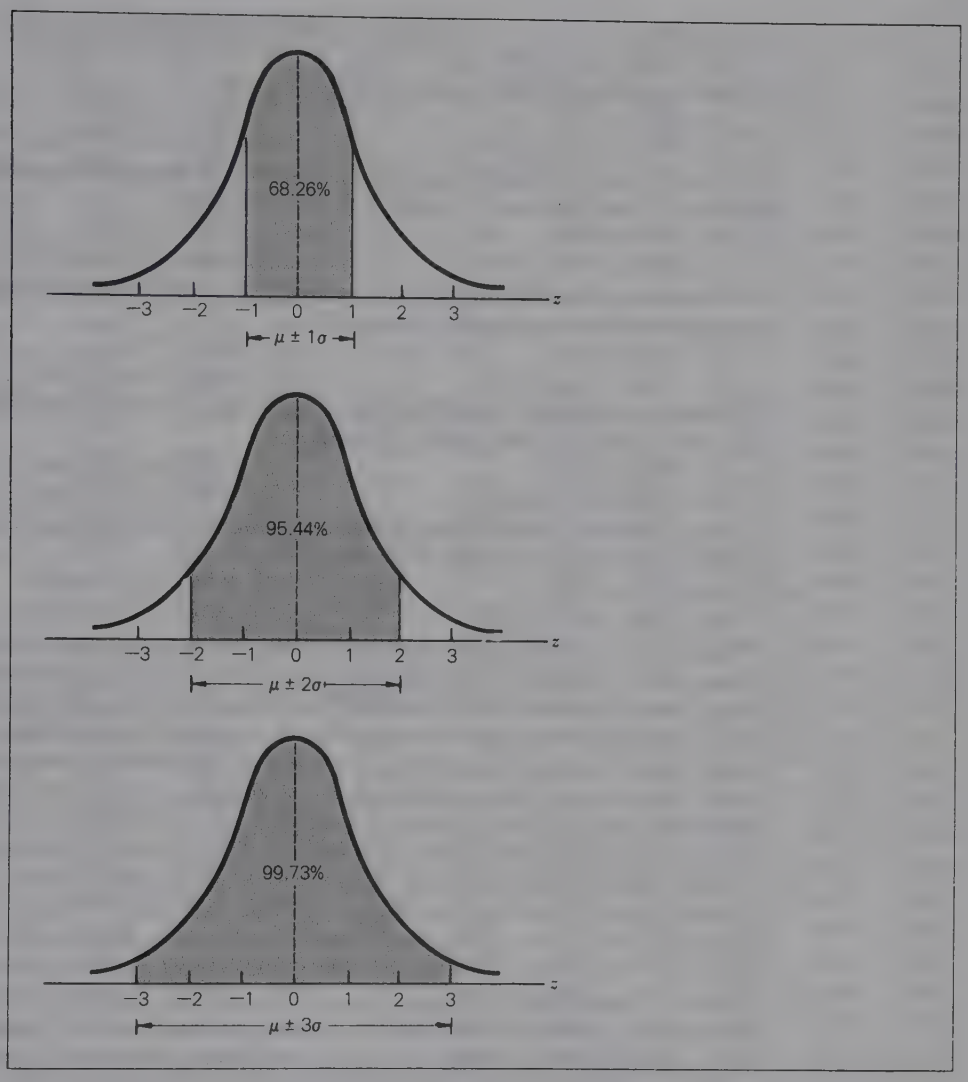


FIGURA 10.15
Propiedades de variables aleatorias con distribución normal.

de 99% dentro de tres desviaciones estándar (±) respecto a la media ($\mu \pm 3\sigma$). Éste es un conjunto útil de propiedades cuanto se intenta hacer generalizaciones sobre las variables aleatorias con distribución normal. Dichas propiedades se describen en la figura 10.15.

Ejercicios de seguimiento de la sección 10.4

1 En una distribución normal donde μ = y σ = 12, determine el número de desviaciones estándar que separan cada uno de los siguientes valores de la variable aleatoria respecto a la media: *a*) 56, *b*) 42, *c*) 66, *d*) 36 y *e*) 87.

2 En una distribución normal donde μ = 240 y σ = 40, determine el número de desviaciones estándar que separan los siguientes valores de la variable aleatoria respecto a la media: *a*) 320, *b*) 160, *c*) 365, *d*) 430 y *e*) 130.

3 En la distribución normal estándar determine

a) $P(z > 2.2)$ *b*) $P(z < 1.0)$
c) $P(0.8 < z < 2.9)$ *d*) $P(-2.1 \leq z \leq 2.7)$

4 En la distribución normal estándar determine
a) $P(z > -1.8)$ *b*) $P(z < +1.6)$
c) $P(-1.9 < z < 0.5)$ *d*) $P(-1.5 \leq z \leq 1.9)$

5 Si se tiene una variable aleatoria X que tiene una distribución normal con una media de 15 y una desviación estándar de 2.5, determine
a) $P(X \geq 12.9)$ *b*) $P(X \leq 16.8)$
c) $P(7.6 \leq X \leq 18.1)$ *d*) $P(9.8 \leq X \leq 12.9)$

6 Si hay una variable aleatoria X que tiene una distribución normal con media de 75 y desviación estándar de 5, determine
a) $P(X \geq 90)$ *b*) $P(X < 77.5)$
c) $P(60 \leq X \leq 77.5)$ *d*) $P(80 < X < 7.85)$

7 Si hay una variable aleatoria X que tenga una distribución normal con media de 300 y desviación estándar de 20, determine
a) $P(X \leq 275)$ *b*) $P(285 \leq X \leq 330)$
c) $P(315 \leq X \leq 350)$ *d*) $P(270 \leq X \leq 345)$

8 si se tiene una variable aleatoria X que tiene una distribución normal con media de 160 y desviación estándar de 8, determine
a) $P(X \leq 140)$ *b*) $P(146 \leq X \leq 152)$
c) $P(152 \leq X \leq 180)$ *d*) $P(164 \leq X \leq 182)$

9 Los pesos de los recién nacidos en un hospital muestran una distribución normal con media de 7.5 libras y desviación estándar de 0.5 libras. ¿Qué probabilidad existe de que un niño nacido en él pese más de 9 libras? ¿Y de que pese más de 7 libras?

10 Los ingresos anuales de los empleados de un estado de la Unión Americana presentan una distribución normal con media de \$15 000 y desviación estándar de \$2000. Si se escoge a un empleado de modo aleatorio, ¿qué probabilidad hay de que perciba más de \$16 000? ¿Menos de \$12 000? ¿Entre \$10 000 y \$20 000?

11 Un fabricante efectuó un estudio sobre la vida útil de determinado tipo de lámpara. El estudio llegó a la conclusión de que la vida útil, medida en horas, es una variable aleatoria con una distribución normal. La vida útil es de 700 horas, con desviación estándar de 100 horas. ¿Qué probabilidad hay de que la lámpara seleccionada al azar tenga una vida útil que oscile entre 800 y 900 horas? ¿Más de 850 horas?

12 Se ha comprobado que las puntuaciones obtenidas en una prueba de aptitudes a nivel nacional tienen una distribución normal con media de 450 y desviación estándar de 75. ¿Qué probabilidad hay de que un estudiante, seleccionado de modo aleatorio, reciba una calificación comprendida entre 240 y 510? ¿Mayor que 540?

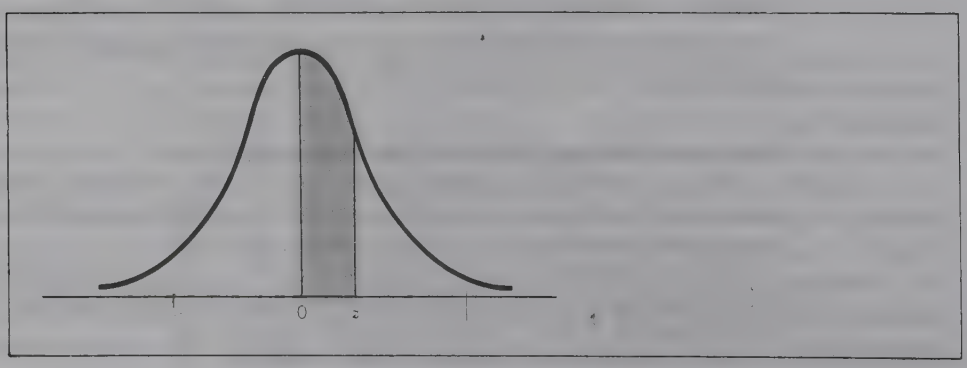


TABLA 10.24 ÁREA BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

13 En una gran ciudad el número de llamadas del servicio policiaco durante un periodo de 24 horas parece ser aleatorio. El número de llamadas en que se solicita el servicio de la policía en un periodo de 24 horas parece ser aleatorio. Se ha descubierto que presentan una distribución normal, con una media de 425 y una desviación estándar de 50. ¿Qué probabilidad hay de que, en un día escogido aleatoriamente, las llamadas no lleguen a 300? ¿Sean más de 400?

14 Las ventas anuales (en dólares) por vendedor en una fábrica de copiadores tienen una distribución normal con media de $720 000 y desviación estándar de $80 000. Si se selecciona a uno de los vendedores en forma aleatoria, ¿qué probabilidades existen de que sus ventas anuales *a*) excedan los $900 000, *b*) fluctúen entre $600 000 y $800 000?, *c*) sean menores que $500 000 o *d*) oscilen entre $540 000 y $660 000?

15 Acondicionamiento físico Se ha aplicado una prueba de condición física a nivel nacional. Un elemento de la prueba midió la cantidad de planchas (''lagartijas'') que

una persona podría hacer. En el caso de los estudiantes de último año, esos ejercicios presentaban una distribución normal con una media de 22.5 y una desviación estándar de 5.0. Si se escoge aleatoriamente a un estudiante del último año de enseñanza media, ¿qué probabilidad existe de que pueda *a*) hacer más de 15 planchas, *b*) más de 30, *c*) entre 25 y 35 y *d*) menos de 20?

16 Sismografía Un sismólogo ha reunido datos en torno a la frecuencia de los terremotos en todo el mundo en los cuales se miden los de 5.0 o más intensos en la escala de Richter. El sismólogo estima que el número de terremotos por año muestra una distribución normal con una media de 24 y una desviación estándar de 5.0. En un año cualquiera, ¿qué probabilidad hay de que haya *a*) más de 32 terremotos, *b*) menos de 18, *c*) más de 16 y *d*) entre 20 y 25.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

curva normal 437
desviación estándar 426
distribución binomial de probabilidad 429
distribución de probabilidad 415
distribución discreta de probabilidad 415
distribución de frecuencia 413
distribución normal estándar (unitaria) 439
distribución normal de probabilidad 437
frecuencia 413
frecuencia relativa 415
histograma 416
intervalo (rango) 425
media 421
mediana 422
moda 423
proceso de Bernoulli 430
variable aleatoria 412
variable aleatoria continua 412
variable aleatoria discreta 412
varianza (variancia) 426

■ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \tag{10.1}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \cdots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n} \tag{10.2}$$

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \tag{10.3}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \tag{10.4}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \tag{10.5}$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n} \tag{10.6}$$

$$P(k, n) = {}_nC_k p^k q^{n-k} \tag{10.7}$$

$$\mu = np \quad \text{(binomial)} \tag{10.8}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} \quad \text{(binomial)} \tag{10.9}$$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{(normal)} \tag{10.10}$$

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-8 se relacionan con las secciones 10.1 y 10.2.

1 El número de automóviles que se venden cada día en una automotriz de la localidad al parecer fluctúa en forma aleatoria. El gerente de ventas reunió algunos datos en los últimos 150 días; en la tabla 10.25 se da un resumen de los resultados.

TABLA 10.25

Automóviles vendidos por día	Frecuencia
0	24
1	32
2	40
3	20
4	12
5	9
6	6
7	4
8	3
	150

a) Construya la distribución de probabilidad para este estudio.
b) Trace un histograma de esta distribución.
c) Calcule la media, la mediana, la moda y la desviación estándar.
d) ¿Qué probabilidades hay de que por lo menos un automóvil se venda en un día cualquiera? ¿De que se vendan más de cuatro? ¿De que se vendan menos de cinco?

2 Seguridad ocupacional Una oficina de distrito de una organización de seguridad ocupacional recibe quejas concernientes a condiciones de trabajo potencialmente nocivas. El gerente de distrito ha recopilado algunos datos sobre la cantidad de quejas presentadas diariamente en el último año. La tabla 10.26 es un resumen de los datos.

Frecuencia

a) Construya la distribución de probabilidad de este estudio.
b) Dibuje un histograma de esta distribución.
c) Calcule la media, la mediana, la moda y la desviación estándar.
d) ¿Qué probabilidades hay de que más de 10 quejas sean presentadas en un día? ¿Y de que se hagan menos de 10?

TABLA 10.26

Quejas por día	Frecuencia
5	25
6	40
7	60
8	48
9	56
10	40
11	34
12	20
13	18
14	10
15	9

TABLA 10.27

Nuevos casos registrados por día	Frecuencia
0	35
1	68
2	74
3	55
4	48
5	36
6	32
7	25
8	17
9	8
10	2

3 Epidemiología Un centro de control de enfermedades ha recabado datos sobre un tipo bastante raro de infección viral. La tabla 10.27 contiene un resumen de los datos referentes al número de casos nuevos comunicados diariamente al centro en los últimos 400 días.

a) Construya la distribución de probabilidad de este estudio.
b) Trace un histograma para la distribución de probabilidad.
c) Calcule la media, la mediana, la moda y la desviación estándar.
d) ¿Qué probabilidad hay de que por lo menos se registre un nuevo caso en un día cualquiera? ¿Más de uno? ¿Menos de cinco?

4 Construya la distribución discreta de probabilidad que corresponda al experimento de lanzar una moneda tres veces. Suponga que $P(H) = 0.6$ y se representa con la variable aleatoria X el número de cruces (T) que salen en tres lanzamientos. ¿Qué probabilidad hay de que salga más de una cara? ¿Dos o más cruces?

5 Calcule la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad en la tabla 10.28.

6 Calcule la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad en la tabla 10.29.

TABLA 10.28

X	10	20	30	40	50
$P(X)$	.18	.26	.32	.20	.04

7 Retiro de automóviles Un fabricante de automóviles ha anunciado que retirará los vehículos de 1982-1984 por un defecto en el eje. Desde que se hizo el anuncio, un supervisor regional de servicio en una región del país lleva registros diarios del número de respuestas al anuncio. Construyó una distribución de probabilidad del número diario de respuestas. La distribución se observa en la tabla 10.30. *a*) Calcule e interprete la media de esta distribución y *b*) calcule la desviación estándar.

TABLA 10.29

X	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$P(X)$	.04	.08	.10	.15	.25	.13	.10	.06	.05	.03	.01

TABLA 10.30

Número de respuestas por día	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilidad	.10	.15	.18	.22	.16	.08	.06	.03	.02

8 Aparición de OVNIS Una sociedad que investiga la supuesta aparición de objetos voladores no identificados (OVNIS) recabó datos relativos a la frecuencia de estos informes en todo Estados Unidos. La tabla 10.31 es una distribución de probabilidad del número de las apariciones que se registran todos los días.

TABLA 10.31

Número de informes por día	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	.32	.24	.20	.15	.05	.04

a) Calcule e interprete la media de esta distribución.
b) Calcule la desviación estándar.

Los ejercicios 9-18 se relacionan con la sección 10.3.

9 Una moneda legal se lanza cinco veces. ¿Qué probabilidad hay de que salgan exactamente dos caras? ¿Y de que salgan cinco caras?

10 Un funcionario de las autopistas de cuota ha dado a conocer información según la cual 80% de los vehículos que la usan son automóviles. Suponga que las llegadas a la caseta de la autopista ocurren de modo aleatorio en relación con el tipo de vehículo. Si llegan a ella 10 vehículos, ¿qué probabilidades hay de que 9 sean automóviles?

11 Un funcionario aduanal de Estados Unidos estima que 20% de las personas que regresan de Europa no declaran todas las compras que están sujetas a impuesto. Si se selecciona a cinco viajeros aleatoriamente luego de regresar de Europa, determine las probabilidades de que cero, dos, tres, cuatro o cinco de ellas no declaren todas sus compras que están sujetas a impuesto. Construya un histograma que resuma estos resultados.

12 Una prueba consta de 20 preguntas de verdadero/falso. Calcule la probabilidad de que un estudiante que conoce la respuesta correcta a 10 de ellas, pero que adivina las restantes lanzando una moneda, obtenga una puntuación de 80% o más en el examen. (Suponga una probabilidad de conjetura correcta = 0.5.)

13 Una oficina de hacienda ha averiguado que 50% de las declaraciones del impuesto sobre la renta contienen un error por lo menos. Si se selecciona aleatoriamente una muestra de 10 declaraciones, ¿qué probabilidad existe de que exactamente 6 contengan un error por lo menos?

14 Una distribución binomial se caracteriza por $p = 0.8$, $q = 0.2$ y $n = 50$.
a) Determine la media de la distribución.
b) Determine la desviación estándar.

15 Un proceso de manufactura produce piezas defectuosas en forma aleatoria y a una tasa de 16%. En una muestra de 10 piezas, ¿qué probabilidad hay de que se encuentren 2 piezas defectuosas?

16 En el ejercicio 15, ¿cuál es el número medio de piezas defectuosas que se espera descubrir en una muestra de 10? ¿Cuál es la interpretación de este valor? ¿Cuál es la desviación estándar de esta distribución?

17 Una distribución binomial se caracteriza por $p = 0.05$ y $q = 0.95$. En una muestra de 400,
a) Determine la media de la distribución.

b) Determine la desviación estándar.

18 En una pequeña universidad, se ha comprobado que 20% de los alumnos cuentan con alguna clase de beca. Si se selecciona en forma aleatoria una muestra de 10 alumnos, ¿qué probabilidad hay de que más de 8 tengan algún tipo de beca? ¿Cuál es el número medio de los que cuentan con becas en una muestra de 100 estudiantes?

Los ejercicios 19-30 se relacionan con la sección 10.4.

19 Para la distribución normal estándar determine

a) $P(z \leq 2.4)$ *b*) $P(-0.4 \leq z \leq 1.7)$

c) $P(-2.8 \leq z \leq -1.3)$ *d*) $P(0.24 \leq z \leq 2.26)$

20 En la distribución normal estándar determine

a) $P(z \geq -1.28)$ *b*) $P(z \leq 0.36)$

c) $P(-1.64 \leq z \leq 0.72)$ *d*) $P(-1.88 \leq z \leq 2.46)$

21 En una variable aleatoria X que tiene una distribución normal con una media de 80 y una desviación estándar 12, determine

a) $P(X \geq 89)$ *b*) $P(X \leq 68)$

c) $P(82 \leq X \leq 95)$ *d*) $P(65 \leq X \leq 71)$

22 En una variable aleatoria X que tiene una distribución normal con una media de 240 y una desviación estándar de 20, determine

a) $P(X \geq 215)$ *b*) $P(X \geq 256)$

c) $P(216 \leq X \leq 252)$ *d*) $P(224 \leq X \leq 238)$

23 Pruebas para medir la presión arterial La presión arterial de un grupo de mujeres de 25 a 34 años de edad presenta una distribución normal con una media de 120 mmHg y una desviación estándar de 12.5 mmHg. Si se escoge aleatoriamente a una de ellas, ¿qué probabilidad existe de que *a*) la presión arterial fluctúe entre 95 y 157.5 mmHg, *b*) sea menor que 95 mmHg y *c*) sea mayor que 145 mmHg?

24 Los estudiantes que iniciaron un curso en la escuela de derecho obtienen un promedio de 680 en la prueba de aptitudes académicas, con una desviación estándar de 40. Las puntuaciones obtenidas en este grupo también parecen tener una distribución normal.

a) ¿Qué porcentaje del grupo tenderá a alcanzar una puntuación de 720 en la prueba? ¿Entre 700 y 750? ¿Mayor que 750? ¿Menor que 650?

b) Un estudiante se encontraba 1 desviación estándar debajo de la media de la prueba. ¿Qué porcentaje aproximadamente de estos condiscípulos consiguió calificaciones menores en la prueba que él?

25 Tabaquismo Un estudio reciente efectuado por el servicio de salubridad pública descubrió que los varones que fumaban consumían en promedio 24 cigarrillos al día. El número de los cigarros fumados diariamente presenta una distribución normal con una desviación estándar de 8. Si se selecciona aleatoriamente un fumador, ¿qué probabilidad hay de que fume *a*) más de dos paquetes (40 cigarros) al día, *b*) menos de un paquete al día, *c*) menos de un paquete y medio?

26 Ahorros personales Un gran banco de inversión efectuó un estudio sobre los hábitos de inversión de individuos de 21 años de edad y mayores durante 1984. Según el estudio, los ahorros anuales por persona mostraban una distribución normal con una media de $1850 y una desviación estándar de $350. Si una persona, de 21 años de edad, es seleccionado aleatoriamente, ¿qué probabilidad hay de que en 1984 esa persona haya hecho ahorros *a*) de más de $2200, *b*) de menos de $1500, *c*) entre $1080 y $2375 o *d*) menos de $800?

27 Donativos a obras de caridad El servicio de recaudación de impuestos analizó las declaraciones que incluían deducciones por aportaciones a obras de caridad de todos aquellos que incluyeron ese renglón en su declaración correspondiente a 1987. La oficina descubrió que las aportaciones declaradas por cada trabajador tenían una distri-

bución normal con una media de $840 y una desviación estándar de $180. Si se escoge aleatoriamente a un empleado, ¿qué probabilidad hay de que en 1987 ese individuo haya aportado *a*) más de $1020, *b*) menos de $435, *c*) entre $390 y $1380 o *d*) más de $300?

28 Un proceso de manufactura produce una pieza metálica circular. Los diámetros de las piezas tienen, según se ha comprobado, una distribución normal con una media de 20 cm y una desviación estándar de 0.05 cm. Si una pieza metálica se selecciona de modo aleatorio, ¿qué probabilidad existe de que tenga un diámetro entre 19.925 y 20.075 cm?

29 Los promedios de bateo en la Liga Nacional de Estados Unidos presentaron en un año una media de 0.275 y una desviación estándar de 0.020. Si se escoge aleatoriamente a un jugador, ¿qué probabilidad existe de que su promedio *a*) sea mayor que 0.300, *b*) menor que 0.250, *c*) entre 0.280 y 0.320 y *d*) menos de 0.200 *o* mayor que 0.350?

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 En la siguiente distribución de probabilidad, *a*) calcule la media y la desviación estándar, y *b*) determine la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor mayor que 21.

X	$P(X)$
20	.08
21	.16
22	.21
23	.29
24	.12
25	.14

2 Se ha averiguado que 25% de las familias estadounidenses tiene cablevisión. Si se seleccionan de modo aleatorio cinco residencias, construya la distribución binomial donde la variable aleatoria X sea el número de residencias que poseen este tipo de televisión.

3 Un proceso de manufactura produce partes defectuosas en una forma aleatoria a una tasa de 15%. En una muestra de 500 piezas, ¿cuál es el número medio de piezas defectuosas que se esperan? ¿Cuál es la desviación estándar de esta distribución?

4 Una moneda legal se lanza 6 veces. ¿Qué probabilidad existe de que en los seis lanzamientos caiga exactamente cuatro veces cruz?

5 Una variable aleatoria X tiene una distribución normal con una media de 180 y una desviación estándar de 40. Determine *a*) $P(X \leq 172)$, *b*) $P(192 \leq X \leq 204)$.

CAPÍTULO

11 ALGUNAS APLICACIONES DE LA PROBABILIDAD

475-511

11.1 PROCESOS DE MARKOV
11.2 TEORÍA DE DECISIONES
11.3 TEORÍA DE JUEGOS: TOMA DE DECISIONES CON UN OPONENTE ACTIVO
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DE CAPÍTULO
MINICASO A: CAMBIO DE MARCA
MINICASO B: BANCA DE INVERSIÓN

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Familiarizar a los lectores con algunas técnicas del modelado matemático que son extensiones de los temas estudiados antes
- Dar ejemplos de aplicaciones de las técnicas expuestas en este capítulo

11.1 PROCESOS DE MARKOV

En la presente sección se explican los ***procesos de Markov***, un campo de aplicación que combina los elementos de la teoría de probabilidad con el álgebra matricial.

Procesos de Markov

Pongamos el caso de una serie de experimentos, cada uno con un mismo grupo de resultados. En algunos de ellos, las probabilidades de los resultados son independientes de los que se obtengan en los experimentos precedentes. Lanzar varias veces una moneda legal y extraer naipes de un mazo *con reposición* son ejemplos de esta clase de experimentos. En otros, las probabilidades de algu-

nos resultados pueden depender en alguna forma de los que se consigan en los anteriores. En un extremo, la probabilidad de un resultado puede depender de todos los experimentos anteriores en sucesión. En un experimento que consista en seleccionar un naipe de un mazo *sin reposición*, la probabilidad de escoger un corazón en la vigésima octava extracción depende de los resultados de las 27 selecciones previas. En esta situación, la serie de experimentos recibe el nombre de *proceso de Markov*. He aquí una definición más formal:

DEFINICIÓN: PROCESO DE MARKOV
Un ***proceso de Markov*** es una serie de experimentos en que cada uno tiene m posibles resultados $E_1, E_2, \ldots, E_m$ y la probabilidad de cada resultado depende exclusivamente del que se haya obtenido en los experimentos previos.

Existen varios fenómenos que parecen seguir un comportamiento como el de un proceso de Markov. Por ejemplo, la probabilidad de que una persona tenga antecedentes criminales puede depender de que uno de sus progenitores los tenga; la probabilidad de que una persona repita la compra de una marca particular de un producto de consumo (por ejemplo, cereales, detergentes, cerveza, etc.) puede depender de la marca escogida en la última compra; la probabilidad de que el precio de una acción aumente, disminuya o permanezca inalterado en un día cualquiera de operaciones en bolsa de valores puede depender de que haya aumentado, disminuido o permanecido inalterado en el día anterior; y la probabilidad de que la salud de un paciente atendido en una unidad de cuidados intensivos mejore, empeore o se mantenga estable en un día puede depender de que se haya cumplido una de esas posibilidades en el día anterior.

La ***matriz de transición*** es una herramienta eficaz que representa el comportamiento de un proceso de Markov. Supóngase que el proceso tiene m resultados mutuamente excluyentes $E_1, E_2, \ldots, E_m$, posibles para cada experimento. A continuación se muestra la forma general de una matriz de transición para este conjunto de experimentos:

$$\begin{array}{cc} & \text{Siguiente estado (resultado)} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Estado actual} \\ \text{(resultado)}\end{array} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m \end{array} \end{array}$$

Nótese que el sistema que va a ser modelado puede estar en uno de m posibles *estados actuales*. Un estado corresponde al resultado de un experimento. Al finalizar un experimento, el sistema se hallará en uno de m estados posibles. La matriz de transición se compone de elementos p_{ij}, los cuales representan la

probabilidad condicional de que el sistema pase de un estado actual i al siguiente estado j. Otra manera de visualizar esto es que

$$p_{ij} = P\left[\begin{array}{l|l}\text{El resultado } E_j & \text{El resultado } E_i \text{ ocurrió} \\ \text{ocurre durante el} & \text{en el experimento} \\ \text{siguiente experimento} & \text{anterior}\end{array}\right]$$

Por ejemplo, p_{23} representa la probabilidad condicional de que el resultado 3 ocurra durante el siguiente experimento, suponiendo que el resultado 2 se haya obtenido en el anterior.

Nótese que los elementos p_{ij} (donde $i = j$) indican las probabilidades de permanecer en el mismo estado mientras los elementos p_{ij} ($i \neq j$) representan las probabilidades de pasar de un estado a otro (en concreto, del estado i al estado j). Obsérvese asimismo que la matriz de transición es una matriz cuadrada de dimensión $m \times m$.

Los elementos de la matriz de transición deberían satisfacer dos propiedades. ***Primero, los elementos deben ser tales que $0 \leq p_{ij} \leq 1$ puesto que cada uno representan una probabilidad. Segundo, la suma de todos los elementos p_{ij} en cada renglón deberá ser igual a 1.*** Esta segunda propiedad garantiza que, en un estado actual del sistema i, éste se encontrará en uno de los m estados posibles j al finalizar el siguiente experimento.

EJEMPLO 1

Clasificaciones de crédito Un gran banco valora las clasificaciones de las tarjetas de crédito de sus clientes cada mes. Los clientes reciben tres clasificaciones de crédito: "deficiente", "buena" y "excelente" según sus antecedentes de cumplimiento en los pagos. La siguiente matriz es una matriz de probabilidades de transición, en la cual las entradas representan la probabilidad de que una persona clasificada en una categoría de crédito durante un mes sea evaluado en determinada categoría al siguiente mes.

		A		
		Deficiente	**Buena**	**Excelente**
De	Deficiente	0.80	0.18	0.02
	Buena	0.20	0.75	0.05
	Excelente	0.00	0.16	0.84

Por ejemplo, si una persona en un mes recibe una clasificación "buena" de crédito, hay 20% de probabilidades de que obtenga una clasificación "deficiente", un 75% de que reciba una clasificación "buena" y 5% de que su clasificación sea "excelente" en el siguiente mes. Nótese que la suma de las entradas en cada renglón es 1. Suponiendo que un cliente tenga determinada clasificación de crédito en un mes, esta propiedad explica todas las posibles reclasificaciones de su solvencia.

EJERCICIO
Interprete los otros elementos en esta matriz de transición.

TABLA 11.1 NÚMERO DE CONSUMIDORES QUE CAMBIAN LA MARCA *i* EN LA SEMANA 6 POR LA MARCA *j* EN LA SEMANA 7

	Marca en la semana 7			
Marca en la semana 6	1	2	3	Total
1	72	4	4	80
2	12	102	6	120
3	2	6	42	50
Total	86	112	52	250

EJEMPLO 2

Cambio de marca El comportamiento de cambio de marca de los consumidores ha sido modelado como un proceso de Markov desde hace muchos años, para ayudar a desarrollar las estrategias de mercadotecnia. A manera de ejemplo, examine el comportamiento de cambio de marca descrito en la tabla 11.1 para una muestra de 250 consumidores de un producto. El primer renglón indica que, de 80 personas que compraron la marca 1 en la semana 6, 72 volvieron a adquirirla en la semana 7, 4 prefirieron la marca 2 y 4 la marca 3. Sin embargo, nótese que 12 personas cambiaron la marca 2 por la marca 1 y 2 de la marca 3 por la marca 1. Así pues, para la marca 1, la pérdida de 8 clientes se compensó con creces por la conquista de 14 clientes, lo cual produce una ganancia neta de 6 nuevos clientes. Entre la sexta y séptima semanas, la marca 1 aumentó su participación en el mercado de 32% (80/250) a 34.4% (86/250).

Además de mostrar los cambios netos y las participaciones en el mercado, las tablas de contingencias como la tabla 11.1 indican las causas del cambio. Por ejemplo, la marca 1 logró una ganancia neta de 8 clientes (12 − 4) a costa de la marca 2 y sufrió una pérdida neta de 2 clientes (2 − 4) ante la marca 3. Además, esas tablas sirven para construir la matriz correspondiente de probabilidades de transición **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{72}{80} & \frac{4}{80} & \frac{4}{80} \\ \frac{12}{120} & \frac{102}{120} & \frac{6}{120} \\ \frac{2}{50} & \frac{6}{50} & \frac{42}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.04 & 0.12 & 0.84 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa una estimación tipo de la matriz de transición subyacente o verdadera, pues se basa en observaciones sobre el comportamiento de compra de 250 consumidores durante un periodo de 2 semanas.

A medida que el lector estudie la matriz **P**, notará que los elementos p_{11}, p_{22} y p_{33} son medidas del "poder de retención" de las tres marcas; los restantes elementos p_{ij} reflejan el "poder de atracción" de la marca j, suponiendo que la compra anterior haya sido en favor de la marca i. Más exactamente, *los elementos de cada renglón reflejan la probabilidad de que una marca retenga a sus clientes o los pierda frente a otras marcas. Los elementos de cada columna resumen la probabilidad de que una marca retenga a sus clientes o conquiste a otros a costa de cada marca de la competencia.*

Predicción de estados futuros

Examinemos ahora un proceso de Markov donde el sistema puede encontrarse en cualquiera de m estados posibles. Las probabilidades de que el sistema esté en alguno de ellos puede escribirse por medio del vector renglón $1 \times m$:

$$\mathbf{X} = (x_1 \quad x_2 \cdots x_m)$$

donde x_j representa la probabilidad de que el sistema se halle en el estado j. A este vector se le llama frecuentemente ***vector de estado***.

En los estados actuales de un proceso de Markov $\mathbf{X}_k$, los estados revisados después del siguiente experimento (transición) pueden calcularse mediante la multiplicación de matrices

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k\mathbf{P} \tag{11.1}$$

EJEMPLO 3

Cambio de marca (continúa) Suponga que las participaciones en el mercado que tienen las tres marcas del ejemplo 2 son 30%, 38% y 32%, respectivamente, durante la séptima semana. Si la matriz de transición **P** derivada en ese ejemplo se considera una buena estimación de la verdadera matriz de transición, es posible predecir las participaciones de mercado esperadas en la octava semana por medio de la multiplicación de matrices.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_8 &= \mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{P} \\ &= (0.30 \quad 0.38 \quad 0.32)\begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.04 & 0.12 & 0.84 \end{pmatrix} \\ &= (0.3208 \quad 0.3764 \quad 0.3028)\end{aligned}$$

Las participaciones en el mercado predichas durante la octava semana son 32.08%, 37.64% y 30.28%, respectivamente, para las tres marcas.

Para entender el fundamento lógico de esta multiplicación se repasará el cálculo de la nueva participación en el mercado que tendrá la marca 1. La cifra 0.3208 se obtuvo multiplicando el vector renglón por la columna 1 de la matriz de transición, como se advierte en la figura 11.1. Este cálculo se basa en el siguiente fundamento lógico:

$$\begin{pmatrix}\text{Participación de la marca 1 en el mercado}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{probabilidad de que el cliente repita la compra de la marca 1}\end{pmatrix} = 0.30 \times 0.90 = 0.27$$

más

$$\begin{pmatrix}\text{Participación de la marca 2 en el mercado}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{probabilidad de que los clientes de la marca 2 la cambien por la marca 1}\end{pmatrix} = 0.38 \times 0.10 = 0.038$$

más

$$\begin{pmatrix}\text{Participación de la marca 3 en el mercado}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{probabilidad de que los clientes de la marca 3 la cambien por la marca 1}\end{pmatrix} = 0.32 \times 0.04 = \underline{\underline{0.0128}}$$

$$0.3208$$

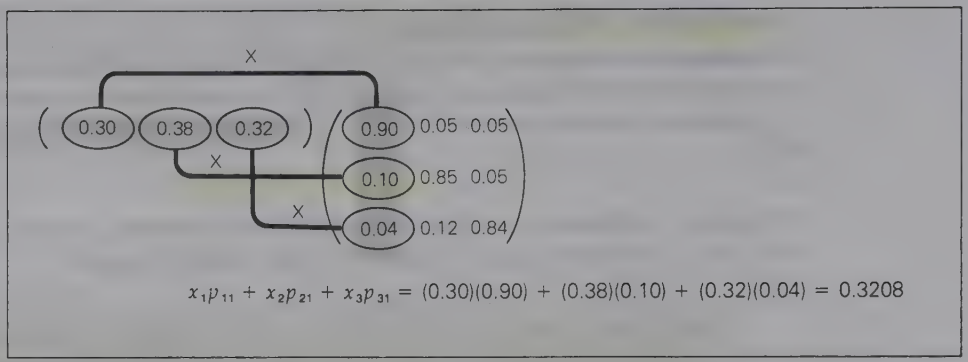


FIGURA 11.1 Cálculo de la participación de la nueva marca 1 en el mercado.

o

$$x_1' = x_1 p_{11} + x_2 p_{21} + x_3 p_{31}$$

EJERCICIO
Verifique del mismo modo el cálculo de las participaciones revisadas en el mercado que tienen las marcas 2 y 3, a fin de asegurarse de que haya sido válido el procedimiento matricial.

Con base en la ecuación (11.1) puede afirmarse que

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0\mathbf{P}$$
$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{P} = (\mathbf{X}_0\mathbf{P})\mathbf{P} = \mathbf{X}_0\mathbf{P}^2$$
$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2\mathbf{P} = (\mathbf{X}_0\mathbf{P}^2)\mathbf{P} = \mathbf{X}_0\mathbf{P}^3$$

o bien, en general,

$$\boxed{\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_0\mathbf{P}^n} \qquad (11.2)$$

La ecuación (11.2) indica que el vector de estado, el cual describe al sistema después de n transiciones (o experimentos) es el producto del vector inicial de estado y la potencia n-ésima de la matriz de transición.

EJEMPLO 4

Suponga en el ejemplo 3 que se desea predecir las participaciones de mercado durante la décima semana. Si se aplica la ecuación (11.2), $\mathbf{X}_0$ corresponde al vector de estado de participación en el mercado durante la séptima semana. Por consiguiente,

$$\mathbf{X}_{10} = \mathbf{X}_7\mathbf{P}^3$$

Primero se calcula $\mathbf{P}^3$:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{PP}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.04 & 0.12 & 0.84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.04 & 0.12 & 0.84 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8170 & 0.0935 & 0.0895 \\ 0.1770 & 0.7335 & 0.0895 \\ 0.0816 & 0.2048 & 0.7136 \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2\mathbf{P}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8170 & 0.0935 & 0.0895 \\ 0.1770 & 0.7335 & 0.0895 \\ 0.0816 & 0.2048 & 0.7136 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.04 & 0.12 & 0.84 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.748230 & 0.131065 & 0.120705 \\ 0.236230 & 0.643065 & 0.120705 \\ 0.122464 & 0.263792 & 0.613744 \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

Usando la ecuación (11.2),

$$\mathbf{X}_{10} = (0.30 \quad 0.38 \quad 0.32) \begin{pmatrix} 0.748230 & 0.131065 & 0.120705 \\ 0.236230 & 0.643065 & 0.120705 \\ 0.122464 & 0.263792 & 0.613744 \end{pmatrix}$$

$$= (0.35342488 \quad 0.36809764 \quad 0.27847748)$$

Las participaciones predichas en el mercado durante la décima semana son 35.342488%, 36.809764% y 27.847748%, respectivamente, en el caso de las tres marcas.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Explique otra manera en que podrían haberse determinado las participaciones en la décima semana. ¿Cuál es, a su juicio, el método más eficiente? ¿Por qué?

Si nos concentramos en las matrices de transición de las ecuaciones (11.3) y (11.4), deberá verificarse que la suma de los elementos de cada renglón de $\mathbf{P}^2$ y $\mathbf{P}^3$ sea 1. Esto no es en absoluto una coincidencia, como lo indica claramente la siguiente propiedad.

PROPIEDAD

Si $\mathbf{P}^k$ es la k-ésima potencia de una matriz de transición $\mathbf{P}$ para un proceso de Markov, los elementos $p_{ij}^{(k)}$ de $\mathbf{P}^k$ representan la probabilidad de una transición del estado i al estado j en k repeticiones del experimento de Markov.

En $\mathbf{P}^2$ el elemento $p_{12}^{(2)}$ sugiere que existe una probabilidad de 0.0935 de que un consumidor de la marca 1 sea, en una semana cualquiera, consumidor de la marca 2 al cabo de dos semanas. Nótese que este elemento se calculó así:

$$\begin{aligned} p_{12}^{(2)} &= \overbrace{p_{11}p_{12}}^{1 \to 1 \to 2} + \overbrace{p_{12}p_{22}}^{1 \to 2 \to 2} + \overbrace{p_{13}p_{32}}^{1 \to 3 \to 2} \qquad \text{Transiciones} \\ &= (0.90)(0.05) + (0.05)(0.85) + (0.05)(0.12) \\ &= 0.045 + 0.0425 + 0.006 \\ &= 0.0935 \end{aligned}$$

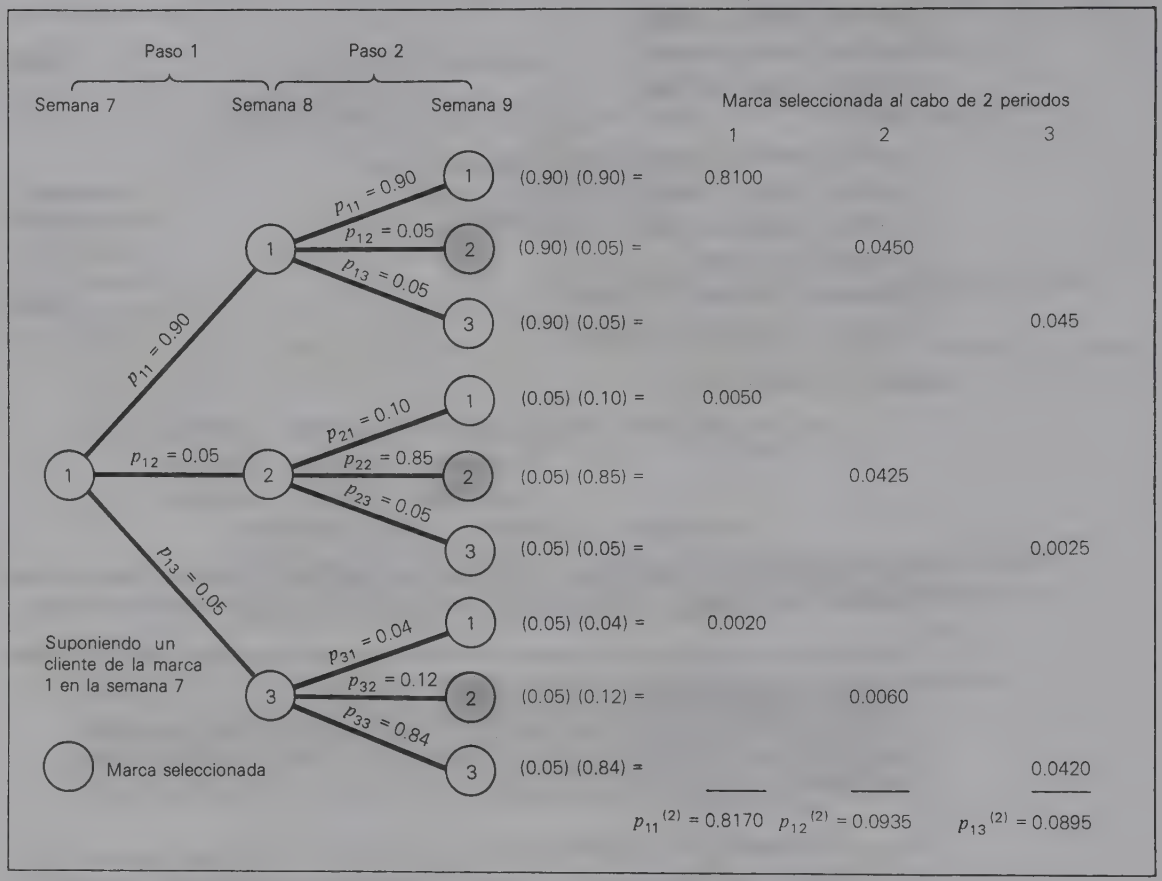


FIGURA 11.2
Probabilidades de transición de dos pasos para los clientes de la marca 1.

Este cálculo suma las probabilidades conjuntas de que el consumidor de la marca 1 escoja cualquiera de las tres marcas a la siguiente semana, pero que seleccione la marca 2 en la semana entrante. El árbol de probabilidad de la figura 11.2 resume las probabilidades de transición *de dos pasos* para un cliente que escoja la marca 1 en la semana 7. La figura ofrece una verificación de los elementos situados en el renglón 1 de la matriz de transición $\mathbf{P}^2$.

EJERCICIO
Dibuje un árbol de probabilidad que verifique los elementos del renglón 2 en $\mathbf{P}^3$. Explique lo que representan dichas probabilidades en lo tocante a las decisiones de marca por parte de los consumidores.

Estados de equilibrio

En la presente sección nos ocuparemos del comportamiento a largo plazo de los procesos de Markov. En concreto, examinaremos los efectos que un proceso de Markov tiene en el vector estado, conforme va creciendo más y más el número de experimentos.

EJEMPLO 5

Migración de la población Una aplicación semejante al análisis del cambio de marca es la que se refiere a la *migración de la población*. La población puede estar integrada por personas, animales salvajes, etc. Los patrones o modelos de migración podrían representarse con una matriz de transición semejante a la que caracteriza el comportamiento de cambio de marca. En esa matriz junto con el vector de estado de la población que describe su distribución en las regiones de interés, es posible proyectar la dinámica de los cambios de la población a lo largo del tiempo. Si los patrones de migración muestran estabilidad en el tiempo (no cambia la matriz de transición), puede acabar por presentarse una condición de equilibrio en que se estabiliza la población de cada región. En ese estado los incrementos demográficos de cada región se compensan con las disminuciones durante cada periodo. Esta condición se muestra en el siguiente ejemplo simplificado.

Ante el creciente costo de la energía, la población de un país europeo al parecer está desplazándose del norte hacia el sur, como se aprecia en la figura 11.3. La matriz de transición **P** describe el comportamiento de migración observado entre las dos regiones.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Al norte} & \text{Al sur} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Del norte} \\ \text{Del sur} \end{array}$$

El valor de 0.95 en **P** indica que 95% de los que viven en el norte durante un año seguirán viviendo allí al año siguiente. El 0.05 representa el restante 5% que se mudará al norte procedente del sur. El 0.02 indica la migración anual, hacia el norte, de 2% de la población que habita en el sur. El 0.98 revela que 98% de los que viven en el sur seguirán residiendo allí al año siguiente.

NOTA
Para simplificar el análisis se supondrá que la población del país es constante o que las probabilidades de transición reflejan los efectos netos que explican los nacimientos, fallecimientos y emigración en el año.

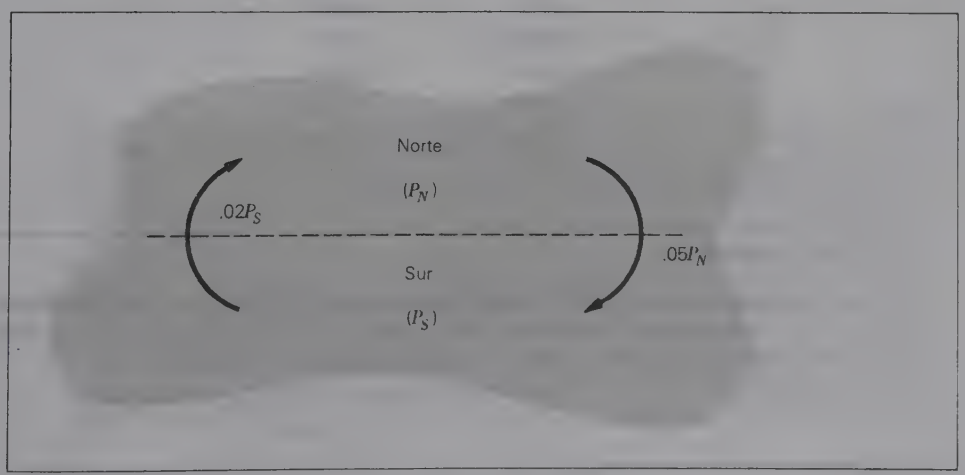


FIGURA 11.3
Cambios de población.

Supóngase que el vector de estado $\mathbf{X}_t$ represente la distribución de la población en un año cualquiera t. En este sector x_1^t representa el porcentaje de la población que vive en el norte del país y x_2^t el porcentaje de los que habitan en la región del sur. La distribución de la población en el año $t + 1$ puede determinarse por medio de la multiplicación de matrices

$$\mathbf{X}_t\mathbf{P} = \mathbf{X}_{t+1}$$

o bien

$$(x_1^t \quad x_2^t)\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} = (x_1^{t+1} \quad x_2^{t+1}) \tag{11.5}$$

Si 40% de la población habita actualmente en el norte y 60% en el sur, puede aplicarse la ecuación (11.5) para determinar su distribución en los años venideros. La tabla 11.2 ofrece un resumen de los resultados de estos cálculos para los 50 años próximos. Un examen detenido de la tabla revela que la distribución parece estarse acercando a algunos valores a largo plazo de x_1^t y x_2^t. Al cabo de 50 años los valores de esas dos variables están cambiando en pequeñas cantidades, y podría suponerse que estén alcanzando ***valores estables o de equilibrio***.

TABLA 11.2 DISTRIBUCIÓN ESPERADA DE LA POBLACIÓN AL CABO DE t AÑOS

Año t	Norte x_1^t	Sur x_2^t
1	0.392	0.608
2	0.386	0.614
3	0.379	0.621
4	0.372	0.628
5	0.366	0.634
10	0.342	0.658
15	0.325	0.675
20	0.313	0.687
25	0.304	0.696
30	0.299	0.701
35	0.294	0.706
40	0.2908	0.7092
45	0.2892	0.7108
50	0.2882	0.7118

EJEMPLO 6

Migración de la población (continúa). Condiciones de equilibrio. En el ejemplo 5, se presenta una condición de equilibrio cuando la distribución de la población permanece inalterada de un año al siguiente o cuando

$$\boxed{\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t+1}} \tag{11.6}$$

Dicho con otras palabras, se consigue el equilibrio cuando $x_1^t = x_1^{t-1}$ y $x_2^t = x_2^{t-1}$ para las dos regiones. Si reescribimos la ecuación (11.5) en una forma no matricial, el equilibrio se alcanza si

$$0.95x_1^t + 0.02x_2^t = x_1^t \tag{11.7}$$

y

$$0.05x_1^t + 0.98x_2^t = x_2^t \tag{11.8}$$

Con objeto de determinar la distribución de equilibrio es preciso recordar la relación

$$x_1^t + x_2^t = 1.0 \tag{11.9}$$

Esta ecuación ha de incluirse con las ecuaciones (11.7) y (11.8). Para resolver este sistema (3 × 2), puede demostrarse que únicamente se necesitan tres ecuaciones: ecuaciones (11.9) y (11.7) *u* (11.8). Así pues, la solución del sistema

$$0.95x_1^t + 0.02x_2^t = x_1^t \tag{11.7}$$
$$x_1^t + x_2^t = 1.0 \tag{11.9}$$

deberá producir la distribución de la población en equilibrio. Resuelva el sistema (por métodos matriciales o no matriciales) y verifique que ocurre la condición de equilibrio cuando

$$x_1^t = \tfrac{2}{7} = 0.2857 \quad \text{y} \quad x_2^t = \tfrac{5}{7} = 0.7143.$$

Es decir, existe el equilibrio si 28.57% de la población vive en la región del norte y 71.43% habita en la región del sur.

Si se desea comprobar que se consigue el equilibrio en esos valores, puede hacerse una proyección demográfica para el próximo año al realizar la multiplicación

$$(0.2857 \quad 0.7143)\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} = (0.2714 + 0.0143 \quad 0.0143 + 0.7000)$$
$$= (0.2857 \quad 0.7143)$$

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Al determinar la distribución de equilibrio, no utilizamos las distribuciones iniciales de la población en el país (especificadas en el ejemplo 5 como $x_1 = 0.40$ y $x_2 = 0.60$). Resulta que los valores de equilibrio son independientes de esas condiciones iniciales. Sin embargo, si se conocen las cifras iniciales, una pregunta interesante se relaciona con el tiempo necesario para alcanzar el equilibrio. Se trata de una cuestión que no abordaremos nosotros. No obstante, supondremos que, cuanto más se acerque la distribución inicial de la población a la distribución de equilibrio, *menos tiempo se requerirá para lograr el equilibrio.*

Para determinar las condiciones de equilibrio de los sistemas que contienen más de dos estados, el método es exactamente el mismo. Se forma un sistema de ecuaciones que combine la ecuación matricial

$$\mathbf{XP} = \mathbf{X} \tag{11.10}$$

y la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.0 \tag{11.11}$$

Si existen condiciones de equilibrio, serán identificadas cuando se resuelva el sistema que incluye las ecuaciones (11.10) y (11.11).

EJEMPLO 7

Pongamos el caso de un proceso de Markov que tenga una matriz de probabilidades de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .800 & .100 & .100 \\ .070 & .900 & .030 \\ .083 & .067 & .850 \end{pmatrix}$$

Con objeto de determinar los estados de equilibrio del sistema, primero se forma la relación de equilibrio

$$\mathbf{XP} = \mathbf{X}$$

o sea

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} .800 & .100 & .100 \\ .070 & .900 & .030 \\ .083 & .067 & .850 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$$

que puede reescribirse en una forma no matricial como

$$\begin{aligned} .800x_1 + .070x_2 + 0.83x_3 &= x_1 \\ .100x_1 + .900x_2 + .067x_3 &= x_2 \\ .100x_1 + .030x_2 + .850x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Hay que agregar a esto una ecuación que indique que la suma de las probabilidades de que el sistema se encuentre en uno de los tres estados es 1, o sea

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.0$$

A fin de determinar si se dan las condiciones de equilibrio, pueden combinarse las cuatro ecuaciones y resolver para x_1, x_2 y x_3. Pero también pueden seleccionarse dos de las tres primeras ecuaciones, combinarlas con la última y resolver.

EJERCICIO

Determine los estados de equilibrio (si los hay) para este ejemplo.*

---

*Respuestas: $x_1 = .273$, $x_2 = .454$, $x_3 = .273$.

Matrices regulares de transición

No todos los procesos de Markov pueden alcanzar las condiciones de equilibrio. Un proceso de Markov lo consigue sólo si está caracterizado por una *matriz regular de transición*.

DEFINICIÓN: MATRIZ REGULAR DE TRANSICIÓN
La matriz de transición es ***regular*** si alguna potencia suya contiene todas las entradas positivas.

La matriz de transición del ejemplo 6 es regular porque incluye todas las entradas positivas; y ya hemos demostrado que se dan las condiciones de equilibrio. Pongamos el caso de la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

No podemos llegar a la conclusión de que $\mathbf{P}$ sea regular por los elementos P_{21} y P_{32}. Si elevamos al cuadrado $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.28 & 0.28 \\ 0.08 & 0.64 & 0.28 \\ 0.48 & 0.08 & 0.44 \end{pmatrix}$$

Todas las entradas de $\mathbf{P}^2$ son positivas, por lo cual $\mathbf{P}$ es una matriz regular de transición.

Examínese atentamente la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{P}$ se eleva a varias potencias, el lector descubrirá que las potencias pares son iguales a la matriz identidad, o sea

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^6 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

y que las potencias impares son iguales a la matriz original, es decir,

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^5 = \mathbf{P}^7 = \cdots = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Dado que estas potencias de la matriz original siempre incluyen cero entradas, $\mathbf{P}$ no será una matriz regular de transición.

UNA APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE MARKOV AL MANTENIMIENTO DE CARRETERAS*

El departamento de transporte de Arizona se encarga de diseñar, construir, preservar y dar mantenimiento a una red que tiene más de 7400 millas de carreteras. El costo del sistema fue de $3000 millones; hoy los costos de sustitución ascenderían a $9000 millones. A mediados de la década de 1970, los costos de mantenimiento empezaron a aumentar muchísimo, haciéndose evidente que era preciso desarrollar mejores sistemas para administrar la asignación de los presupuestos destinados al mantenimiento.

Se emprendió un estudio cuyo objetivo primordial era idear una herramienta de toma de decisiones que ayudase al estado a conservar sus carreteras en óptimas condiciones, sin rebasar el presupuesto. El resultado del estudio fue el sistema de administración del pavimento de Arizona. Se basa fundamentalmente en un modelo matemático que recomienda políticas de mantenimiento para alcanzar a un costo mínimo los objetivos a corto y largo plazos de las condiciones de la carretera. Como suele suceder cuando se aplica el análisis matemático, este modelo combina elementos de más de un método analítico; a esos modelos se les da el nombre de modelos "híbridos". Su aspecto básico es un modelo de Markov que tiene probabilidades de transición, las cuales vinculan las condiciones actuales de las carreteras a las condiciones futuras. Después el modelo se combina con los métodos de programación lineal para determinar las soluciones óptimas.

El nuevo sistema ha cambiado el proceso de administración aplicado a la toma de decisiones: éste ha dejado de ser un método subjetivo no cuantitativo y ahora tiene un fundamento científico, que da a los gerentes la seguridad de que sacan el máximo provecho a sus escasos fondos. Durante el primer año, el sistema logró un ahorro de $14 millones en los fondos del mantenimiento. Y se estimó en $101 millones los ahorros que se conseguirán en los próximos 4 años.

*Kamal Golabi, Ram B. Kulkarni y Geórge B. Way, "A Statewide Pavement Management System", *Interfaces*, vol. 12, núm. 6 (diciembre de 1982), pp. 5-21.

Ejercicios de seguimiento de la sección 11.1

1 Se entrevistó a una muestra de 1000 familias que viven en una pequeña ciudad, y la encuesta tenía por objeto determinar sus preferencias en cuanto a la compra en los supermercados. En la ciudad existen tres grandes cadenas de supermercados. Los entrevistados dieron el nombre de la cadena en que la familia había realizado la mayor parte de sus compras en la semana actual y en la semana anterior. En la tabla 11.3 se da un resumen de sus respuestas.

TABLA 11.3 PREFERENCIAS DE COMPRA DE LA FAMILIAS

		Cadena escogida en la semana actual			
		1	2	3	Total
Cadena escogida en la semana anterior	1	306	36	18	360
	2	42	224	14	280
	3	9	36	315	360

Si los resultados de la muestra son representativos de las tendencias generales de los clientes:

a) Construya la matriz de probabilidades de transición.
b) ¿Cuáles son las actuales participaciones porcentuales en el mercado?
c) Prediga las participaciones esperadas en la próxima semana.
d) Si la matriz de probabilidades de transición se eleva al cubo, dé una interpretación general de los elementos p_{ij}^3 de la matriz resultante.

2 El departamento de personal de una gran universidad hace poco terminó su programa anual de reinscripción para obtener los beneficios del seguro médico. La universidad ofrece tres opciones de seguro: Blue Crosss/Blue Shield, el plan de una organización para la conservación de la salud (HMO) y el plan que ofrece una compañía de seguros de viajeros. En la tabla 11.4 se sintetizan los resultados de un análisis de las opciones escogidas en el presente año frente a las que se escogieron el año pasado.

Si los datos de la tabla 11.4 son representativos del patrón general de los cambios en las preferencias de los empleados,

a) Construya la matriz de probabilidades de transición.
b) ¿Cuáles son las actuales participaciones porcentuales en el mercado?
c) Prediga las participaciones previstas para el siguiente año. ¿Y cuáles serán las participaciones en dos años?
d) Si la matriz de probabilidades de transición se eleva a la quinta potencia, dé una interpretación de los elementos p_{ij}^5.

3 Análisis de censo En un censo reciente se clasificó a los habitantes de un país europeo en tres categorías: residentes de zonas urbanas, residentes de zonas suburbanas y residentes de zonas rurales. El censo tomó en consideración las comparaciones entre el domicilio actual y el que se tenía al momento de efectuarse el censo anterior. El censo reveló que, de los que habitan en zonas urbanas, 90% permanece en ellas, 6% se muda a zonas suburbanas y 4% se muda a zonas rurales. Entre los que viven en zonas suburbanas, 3% se traslada a zonas urbanas, 12% se muda a zonas rurales y el resto permanece en zonas suburbanas. De manera análoga, en el caso de los que viven en zonas rurales, 2% se traslada a zonas urbanas, 5% se muda a zonas suburbanas y el resto se queda en las zonas rurales. Con base en los datos citados,

TABLA 11.4

NÚMERO DE EMPLEADOS QUE ESCOGEN VARIAS OPCIONES DEL SEGURO MÉDICO

Opción escogida en el año anterior	Opción escogida en el año actual			
	BC/BS	HMO	Viajeros	Total
BC/BS	640	80	80	800
HMO	20	475	5	500
Viajeros	30	30	140	200

a) Construya una matriz de probabilidades de transición que refleje los movimientos de la población.

b) Si 70% de la población actualmente habita en zonas urbanas, 20% en zonas suburbas y 10% en zonas rurales, estime los porcentajes que habrán cuando se lleve a cabo el próximo censo.

c) ¿Qué suposiciones se están haciendo en la parte *b*?

4 El mercado de petróleo para la calefacción en un pueblo pequeño lo dominan dos compañías: Petro Oil Company y la Bruzki Brothers Oil Company. En la siguiente matriz de transición se aprecia el comportamiento de cambio de marca de los clientes entre dos años consecutivos:

		A	
		Petro	**Bruzki**
De	Petro	0.85	0.15
	Bruzki	0.10	0.90

El mercado se divide actualmente así: 60% de los consumidores compran a la Petro Oil Company y 40% a la Bruzki Brothers Oil Company.

a) Prediga las participaciones estimadas en el mercado para cada uno de los 5 años venideros.

b) Determine las participaciones de equilibrio en el mercado, si es que las hay.

5 Un lugar de veraneo en la montaña cuenta con dos hoteles que compiten entre sí. Ambos ofrecen una calidad excelente: comida muy rica, buen servicio, excelentes instalaciones y diversiones. La cámara de comercio de la localidad quiere conocer el comportamiento de los turistas que año con año regresan al lugar de veraneo. Una encuesta aplicada a ellos arrojó la siguiente matriz de transición, la cual indica la probabilidad de que un turista escoja uno de los dos hoteles:

		Hotel escogido en el año actual	
		A	***B***
Hotel escogido en el año anterior	*A*	0.92	0.08
	B	0.05	0.95

En el momento actual el hotel *A* atrae 60% de los turistas que retornan y el hotel *B* atrae el restante 40%.

a) Estime las participaciones respectivas que tendrán de esta clientela para cada uno de los próximos 4 años.

b) Determine las participaciones de equilibrio de los dos hoteles en relación con este importante grupo de clientes.

6 Tiempo compartido de computadora Una oficina de tiempo compartido clasifica a los clientes en usuarios de grado ligero, moderado e intenso, basándose para ello en sus facturas mensuales. Ha despertado cierto interés la mecánica de tal clasificación. La siguiente matriz de transición indica la probabilidad de que un cliente pase de una clasificación a otra de un año al siguiente:

		A		
		Ligero	**Moderado**	**Intenso**
De	Ligero	0.75	0.20	0.05
	Moderado	0.05	0.80	0.15
	Intenso	0.05	0.20	0.75

En el momento actual 20% de los clientes son clasificados como usuarios de grado ligero, 50% como usuarios de grado moderado y 30% como usuarios de grado intenso. Si se supone que la matriz de transición sea relativamente estable,

a) Estime los porcentajes de los clientes en cada categoría de uso para cada uno de los próximos 5 años.

b) Determine los porcentajes de equilibrio si es que los hay.

7 Investigación médica El hospital de una universidad hace tiempo lleva a cabo investigaciones sobre los efectos de una dieta de colesterol sérico a que han sido sometidas 2000 personas que han sufrido ataques cardiacos. A cada participante del programa se le mide una vez al mes el nivel de colesterol sérico. El nivel o concentración se clasifica en bajo, promedio y alto. En la siguiente matriz de transición se denota la probabilidad de que la concentración de colesterol de un paciente pase de una clasificación dada en un mes a otra en el siguiente mes.

		A		
		Bajo	**Promedio**	**Alto**
De	Bajo	0.85	0.10	0.05
	Promedio	0.20	0.70	0.10
	Alto	0.02	0.18	0.80

Si actualmente 200 personas tienen bajas concentraciones, 100 muestran concentraciones promedio y 800 presentan concentraciones altas, determine el número que habrá en cada categoría al alcanzar el equilibrio.

8 Determine cuáles de las siguientes matrices son regulares.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

9 Se ha dicho que las condiciones de equilibrio son posibles sólo si la matriz de transición es regular.

a) ¿Es regular una matriz de identidad?

b) Si una matriz de transición es una matriz de identidad, ¿habrá condiciones de equilibrio?

c) ¿Puede explicar el lector esta evidente contradicción?

11.2 TEORÍA DE DECISIONES

La gente toma constantemente decisiones en su vida privada, lo mismo que en su trabajo. Algunas decisiones son cualitativas por lo que respecta a sus implicaciones e importancia. ("Si no hago ejercicio hoy, me sentiré mal todo el día; si lo hago, me sentiré ligero y como un hombre nuevo.") Otras incluyen

elementos de índole cuantificable. ("Si acepto el empleo *A*, mi sueldo será de $25 000 al año; en el trabajo *B* mi sueldo será de $30 000.") Esta sección se centra en un subconjunto de ambientes de la toma de decisiones, en el cual las consecuencias de éstas son cuantificables. También se analizarán diversos criterios que pueden servir de fundamento al adoptar una decisión.

Introducción a la teoría de decisiones

En la explicación de esta teoría se supondrá que los elementos específicos relacionados con las decisiones pueden deducirse de un ambiente en que se toman e incorporarse a una estructura general. *En primer lugar*, se supondrá que el que toma la decisión está en condiciones de definir todas las opciones o estrategias que están estudiándose. Por ejemplo, un grupo médico que tiene cargas crecientes de pacientes podría definir las siguientes opciones:

1 Contratar a más médicos y ampliar el consultorio actual.
2 Contratar a más médicos y abrir un nuevo consultorio.
3 Ampliar el horario de trabajo sin modificar el número actual de médicos.
4 Remitir pacientes a otros médicos.

En segundo lugar, suponemos que el que toma la decisión puede definir los llamados ***estados de la naturaleza*** en el ambiente que la rodea. Dichos estados representan varias condiciones que pueden repercutir en las consecuencias de la alternativa escogida. He aquí un punto importante que es preciso señalar: *se trata de condiciones que no están bajo el control del que adopta la decisión*. A continuación se mencionan algunos estados de la naturaleza: condiciones económicas, las respuestas ante las personas que toman una decisión, las condiciones meteorológicas, etc. En el caso del grupo médico, entre los estados de la naturaleza podrían contarse los siguientes:

1 Demanda superior promedio al de servicios médicos.
2 Demanda promedio de servicios médicos.
3 Demanda inferior al promedio de servicios médicos.

Los estados de la naturaleza pueden ser categóricos o numéricamente específicos. En el ejemplo, son categorías (rangos) de la demanda por parte de pacientes. Y, por otra parte, también podrían haber identificado a determinados números de enfermos.

En tercer lugar, se supone que los encargados de la toma de decisiones pueden estimar las consecuencias (beneficios o costos) de escoger alguna de las opciones y de hacer que ocurra cualquier estado de la naturaleza. Estas consecuencias deberían ser cuantificables y suelen representar un criterio con que el que toma una decisión mide el desempeño de la organización. Estas consecuencias se muestran en la ***tabla de pagos (resultados)***. Ésta no es otra cosa que una tabla o matriz con un renglón que representa cada alternativa de la decisión, una columna para cada estado de la naturaleza y los pagos (resultados) incluidos en el cuerpo de la tabla.

La tabla 11.5 es una tabla de pagos para el ejemplo del grupo médico. Los pagos representan la utilidad anual prevista[1] cuando se selecciona una opción en particular y la realización de uno de los estados de la naturaleza. Por ejem-

TABLA 11.5 TABLA DE PAGOS DEL GRUPO MÉDICO (PAGOS EXPRESADOS COMO UTILIDADES ANUALES EN DÓLARES)

	Estado de la naturaleza		
Alternativa	Demanda superior al promedio	Demanda promedio	Demanda inferior al promedio
Ampliar el consultorio	$750 000	$300 000	$100 000
Abrir un nuevo consultorio	600 000	240 000	−50 000
Ampliar el horario	500 000	350 000	50 000
Remitir pacientes	300 000	300 000	250 000

plo, si el grupo opta por ampliar su horario de atención a los pacientes y se presenta una demanda promedio de sus servicios, se espera que las utilidades anuales sean de $350 000. De manera análoga, si decide abrir un nuevo consultorio y existe una demanda inferior al promedio de los servicios, se prevé una utilidad anual *negativa* o *pérdida* de $50 000.

Si se tiene una matriz de pagos, se necesita otro factor más (y crítico) para determinar la descripción del ambiente de decisión, esto es, cuanto se conoce sobre la probabilidad de que se realicen distintos estados de la naturaleza. El grado de conocimiento referente a los estados de la naturaleza se clasifica en tres categorías de la toma de decisiones:

1 ***Toma de decisiones en condiciones de certidumbre.*** En esta situación existe la certidumbre total por parte del que toma la decisión respecto a cuál estado de la naturaleza va a presentarse.

2 ***Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.*** En esta situación el encargado de tomar la decisión no conoce la probabilidad de que se realicen varios estados de la naturaleza.

3 ***Toma de decisiones en condiciones de riesgo.*** En esta situación, el encargado de la toma de decisiones tiene suficiente conocimiento sobre los estados de la naturaleza para asignar las probabilidades de su posibilidad de que ocurran.

El lector podría pensar que el nivel de conocimiento que posee el encargado de la toma de decisiones se encuentra en un continuo como el de la figura 11.4. El continuo va de un extremo de incertidumbre (ausencia de conocimiento) al otro extremo de certidumbre absoluta (conocimiento perfecto). El territorio intermedio comprende todos los niveles del conocimiento entre los extremos. Es en esa región donde diríamos que la toma de decisiones se adopta en condiciones de riesgo. Las probabilidades asignadas a los estados de la naturaleza tienden a ser más *subjetivas* cuando hay menos conocimiento y más *objetivas* cuando es mayor el conocimiento.

En una matriz de pagos, las siguientes secciones examinan diversos criterios que pueden aplicarse a las decisiones que se toman en condiciones de certidumbre, incertidumbre y riesgo.

Toma de decisiones en condiciones de certidumbre

Las condiciones de certidumbre tienden a ser raras, en especial cuando se trata de decisiones muy importantes. En este tipo de circunstancias, las decisiones

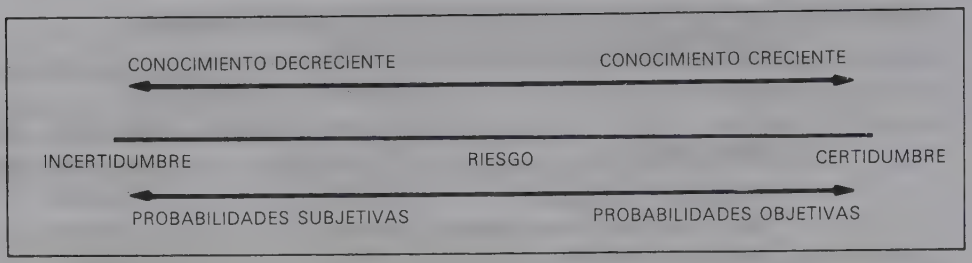


FIGURA 11.4
Continuo de conocimiento.

		Estado de la naturaleza		
		Demanda superior al promedio	Demanda promedio	Demanda inferior al promedio
Alternativas	Ampliar el consultorio	$750 000	$300 000	$100 000
	Abrir un nuevo consultorio	600 000	240 000	50 000
	Ampliar el horario	500 000	350 000	50 000
	Remitir pacientes	300 000	300 000	250 000

FIGURA 11.5
Ejemplo del grupo médico: seguramente habrá una demanda superior al promedio.

son muy fáciles por conocerse el estado de la naturaleza que se presentará. En tal caso, el que toma la decisión debería concentrarse en la correspondiente columna de la tabla de pagos y escoger la opción que produzca el mejor pago (resultado). En el ejemplo del grupo médico de la tabla 11.5, supóngase que se sabe que la demanda será superior al promedio. La atención deberá centrarse en la columna 1, como se aprecia en la figura 11.5. El pago mayor ($750 000) ocurre cuando se adopta la decisión de ampliar el consultorio. De manera parecida, si se presenta la demanda promedio, la estrategia de ampliar el horario de servicio es la mejor opción. Cuando se espera una demanda inferior al promedio, la mejor decisión consiste en remitir pacientes a otros médicos.

Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre

En este tipo de toma de decisiones, el que la adopta conoce los posibles estados de la naturaleza pero no cuenta con suficiente información para asignar probabilidades a su realización. Se han propuesto varios criterios para este ambiente de decisión. Cada uno de esos criterios hacen una suposición en cuanto al grado de optimismo o pesimismo del encargado de la decisión. He aquí los criterios que se estudiarán en la presente sección:

1 El criterio maximax
2 El criterio maximín
3 El criterio de Hurwicz
4 El criterio de igual probabilidad (Laplace)
5 El criterio de arrepentimiento

Criterio maximax Este criterio es adecuado para el tomador de decisiones optimistas. Éste piensa que, en una selección de cualquier estrategia, la "natura-

TABLA 11.6 CRITERIO MAXIMAX

Alternativa	Estado de la naturaleza: Demanda superior al promedio	Demanda promedio	Demanda inferior al promedio	Máximo de renglón	Máximo de máximos
Ampliar el consultorio	$750.000	$300 000	$100 000	$750 000	$750 000
Abrir un nuevo consultorio	600 000	240 000	−50 000	600 000	
Ampliar el horario	500 000	350 000	50 000	500 000	
Remitir pacientes	300 000	300 000	250 000	300 000	

TABLA 11.7 CRITERIO MAXIMÍN

Alternativa	Estado de la naturaleza: Demanda superior al promedio	Demanda promedio	Demanda inferior al promedio	Mínimo (peor)	Máx de mínimos (mejor de lo peor)
Ampliar el consultorio	$750 000	$300 000	$100 000	$100 000	
Abrir un nuevo consultorio	600 000	240 000	−50 000	−50 000	
Ampliar el horario	500 000	350 000	50 000	50 000	
Remitir pacientes	300 000	300 000	250 000	250 000	$250 000

leza'' actuará en una forma que ofrece el premio mayor. Así pues, identifica el pago máximo asociado a la selección de cada alternativa. Y después escoge la alternativa (renglón) relacionada con el *máx*imo de estos *máx*imos; de ahí el nombre *maximax*.

Para el ejemplo del grupo médico, la tabla 11-6 indica los pagos máximos en cada opción. (Nótese el empate que muestra la cuarta opción.) El criterio maximax escoge la opción relacionada con el mayor de estos pagos máximos, que es $750 000. Así pues, el grupo ampliará su consultorio y tendrá plena confianza en que habrá una demanda superior al promedio de sus servicios.

Criterio maximín Este criterio es adecuado para una persona pesimista en la toma de decisiones. El pesimista cree que la naturaleza está en contra suya. Está convencido de que, sin importar la estrategia que escoja, la naturaleza responderá de modo de que se produzca el peor resultado posible. Con el criterio maximín, el que toma la decisión identifica primero el peor pago (mínimo) asociado a cada alternativa de decisión. Se identifica el *máx*imo de estos pagos *mín*imos y se escoge la opción correspondiente. En la tabla 11.7, se identifican primero los pagos *mínimos* relacionados con cada una de las cuatro alternativas. Su máximo es los $250 000 asociados a la alternativa de remitir pacientes a otros médicos. Ésta sería la decisión que se valdría usando este criterio lo ''mejor de lo peor''. Nótese que el pesimista garantiza un pago mínimo de $250 000 y (aunque al verdadero pesimista no puede convencérsele de esto) tiene la oportunidad de obtener un pago mayor si la naturaleza responde de modo benevolente.

Criterio de Hurwicz Este criterio, aunque adecuado para el optimista y el pesimista absolutos, en realidad está diseñado para el encargado de la toma de decisiones que se encuentra entre ambos extremos. Esa persona refleja su grado de optimismo al especificar lo que se llama ***índice de optimismo***. El índice es una estimación subjetiva representada por la letra griega α (alfa) y se le asigna un valor comprendido entre 0 y 1, inclusive. La asignación de un valor de 1 representa al optimista absoluto; un valor de 0 representa al pesimista absoluto. Un valor entre 0 y 1 denota una actitud entre ambos extremos.

Si α representa el índice del optimismo, el valor $(1 - \alpha)$ se interpreta como una medida de pesimismo. El criterio de Hurwicz toma esos valores y calcula el pago ponderado de cada decisión alternativa. En cada alternativa, el cálculo es

$$\text{Pago ponderado} = \alpha\begin{pmatrix}\text{pago máximo de}\\ \text{la alternativa}\end{pmatrix} + (1 - \alpha)\begin{pmatrix}\text{pago mínimo de}\\ \text{la alternativa}\end{pmatrix}$$

En cierto modo, el pago (resultado) ponderado evalúa el pago máximo por la estimación que hace de su probabilidad de ocurrencia el encargado de la toma de decisiones y el pago mínimo por la estimación de probabilidad de su ocurrencia. La alternativa de decisión que se escoja es la que posee el pago de mayor ponderación.

Supóngase que, en el ejemplo del grupo médico, el que toma la decisión especifica $\alpha = 0.3$. Esta persona tiende al pesimismo en su decisión. Los pagos ponderados se calculan como sigue:

Alternativa	Pago ponderado
Ampliar el consultorio	0.3($750 000) + 0.7($100 000) = $295 000
Nuevo consultorio	0.3($600 000) + 0.7(−$50 000) = $145 000
Ampliar horario	0.3($500 000) + 0.7($50 000) = $185 000
Remitir pacientes	0.3($300 000) + 0.7($250 000) = $265 000

Aplicando este criterio, la decisión será ampliar el consultorio actual.

Criterio de igual probabilidad (Laplace) El criterio de Laplace, cuando no se conoce la probabilidad de ocurrencia de los estados de la naturaleza, supone que tienen igual probabilidad de presentarse. Si existen n estados distintos de la naturaleza, a cada uno se le asigna una probabilidad de ocurrencia igual a $1/n$. Con esta suposición, un *pago esperado* se calculará para cada alternativa de decisión. En el problema del grupo médico, esos valores se obtendrán del modo siguiente:

Alternativa	Pago esperado
Ampliar el consultorio	$\frac{1}{3}$($750 000) + $\frac{1}{3}$($300 000) + $\frac{1}{3}$($100 000) = $383 333
Nuevo consultorio	$\frac{1}{3}$($600 000) + $\frac{1}{3}$($240 000) + $\frac{1}{3}$(−$50 000) = $263 333
Ampliar el horario	$\frac{1}{3}$($500 000) + $\frac{1}{3}$($350 000) + $\frac{1}{3}$($50 000) = $300 000
Remitir pacientes	$\frac{1}{3}$($300 000) + $\frac{1}{3}$($300 000) + $\frac{1}{3}$($250 000) = $283 333

TABLA 11.8 TABLA DE ARREPENTIMIENTO PARA EL GRUPO MÉDICO

Alternativa	Estado de la naturaleza: Demanda superior al promedio	Demanda promedio	Demanda inferior al promedio
Ampliar el consultorio	750 000 − 750 000 = 0	350 000 − 300 000 = 50 000	250 000 − 100 000 = 150 000
Abrir un nuevo consultorio	750 000 − 600 000 = 150 000	350 000 − 240 000 = 110 000	250 000 − (−50 000) = 300 000
Ampliar el horario	750 000 − 500 000 = 250 000	350 000 − 350 000 = 0	250 000 − 50 000 = 200 000
Remitir pacientes	750 000 − 300 000 = 450 000	350 000 − 300 000 = 50 000	250 000 − 250 000 = 0

Alternativa	Demanda superior al promedio	Demanda promedio	Demanda inferior al promedio	Arrepentimiento máx	Arrepentimiento minimax
Ampliar el consultorio	0	50 000	150 000	150 000	150 000
Abrir un nuevo consultorio	150 000	110 000	300 000	300 000	
Ampliar el horario	250 000	0	200 000	250 000	
Remitir pacientes	450 000	50 000	0	450 000	

Aplicando este criterio, la alternativa escogida será ampliar el consultorio actual.

Criterio de arrepentimiento Este criterio se centra en el *arrepentimiento* que uno podría sentir al adoptar una decisión en particular. El arrepentimiento se mide mediante la diferencia entre el pago que se obtiene al tomar la decisión y el pago óptimo que podría conseguirse de haber sabido qué estado de la naturaleza iba a ocurrir. Esta diferencia recibe a veces el nombre de ***pérdida de oportunidad*** o ***costo de oportunidad***, es decir, una medida de la magnitud de la pérdida en que se incurrió por no seleccionar la mejor opción.

El criterio anterior indica que el encargado de la toma de decisiones debería esforzarse por *minimizar el arrepentimiento más grande* o bien escoger la alternativa de *arrepentimiento minimax*. El primer paso en la aplicación del criterio consiste en construir una tabla de arrepentimiento (pérdida de oportunidad). La tabla aplicable al ejemplo del grupo médico se da en la tabla 11.8. Nótese la manera de calcular los elementos. Para determinar los de la primera columna, hacemos la suposición de que ocurre una "demanda superior al promedio". Hecha esta suposición, se determina el arrepentimiento que se tendría al escoger una de las alternativas de decisión. La magnitud del arrepentimiento es la diferencia existente entre el pago más alto correspondiente a este estado de la naturaleza y el asociado a cada opción.

En la columna 1, el pago óptimo es de $750 000. Así pues, los elementos de la columna 1 de la tabla de arrepentimiento se encuentran restando cada pago a $750 000. Si examinamos los valores del arrepentimiento en esa columna, el valor de cero indica que no habrá arrepentimiento en caso de que se pre-

sente una *demanda superior al promedio* y si escogemos la alternativa 1. Una vez conocido el estado de la naturaleza, se obtendrá el mejor pago posible. El valor del arrepentimiento para la alternativa 2 es de 150 000. Al escoger esa opción, se obtendría un pago de 600 000, o sea 150 000 menos que si hubiéramos escogidos la alternativa 1.

Una vez deteminada la matriz de arrepentimiento, para cada alternativa de decisión se identifica el arrepentimiento máximo, según se aprecia en la tabla 11.8. Este criterio se escoge también para el pesimista. Supone que la naturaleza responderá de un modo que maximice el nivel de arrepentimiento ante cualquier opción seleccionada. Y así el criterio indica la selección de la alternativa que *mini*mice el valor de arrepentimiento *máx*imo, el cual en este ejemplo ($150 000) corresponde a la alternativa de ampliar el consultorio actual.

En resumen, el procedimiento de aplicar este criterio es así:

1 Se construye la tabla de arrepentimiento usando la matriz de pagos (resultados).

2 Se identifica el arrepentimiento máximo para cada alternativa de la decisión.

3 Se escoge la alternativa que minimice esos valores de arrepentimiento máximo.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
Explique las suposiciones, ventajas y limitaciones de los criterios expuestos en esta sección.

Toma de decisiones en condiciones de riesgo

Cuando se toman decisiones en condiciones de riesgo, se conocen todos los posibles estados de la naturaleza y el que adopta la decisión posee suficientes conocimientos para asignar las probabilidades a su posibilidad de ocurrencia. Según se mencionó antes, las probabilidades pueden incluir desde las asignaciones subjetivas, basadas en los "sentimientos" y la experiencia de quien toma las decisiones, y las asignaciones objetivas, basadas en la colección y análisis de numerosos datos conexos con los estados de la naturaleza.

Aunque se cuenta con diversos criterios para evaluar estos tipos de decisiones, el más conocido es el ***valor esperado***. El siguiente ejemplo ilustra este método.

EJEMPLO 8

Supongamos una situación en que un minorista vende un solo producto. Adquiere el producto de un proveedor a un costo de $5 por unidad y cada unidad la vende a $8. El producto es perecedero: si no se vende en el primer día, carece de valor: es decir, no puede venderse y no hay valor de salvamento. Cuando ello sucede, el minorista tiene que absorber el costo del producto como una pérdida de $5.

Se han reunido datos históricos para confirmar que la demanda diaria del producto adopta cuatro valores posibles. En la tabla 11.9 se resume esta información en términos de una distribución discreta de probabilidad.

El detallista está tratando de decidir cuántas unidades almacenar en un día determinado. Ha decidido que, en vez de intentar hacer un pronóstico del mercado todos

TABLA 11.9

Demanda diaria (X)	Número de días observados	$P(X)$
21	20	.10
22	60	.30
23	100	.50
24	20	.10
	200	1.00

TABLA 11.10 **TABLA DE UTILIDADES CONDICIONALES**

Decisión de guardar en inventario	Demanda posible (X)			
	$P(21) = .10$ 21	$P(22) = .30$ 22	$P(23) = .50$ 23	$P(24) = .10$ 24
21	63	63	63	63
22	58	66	66	66
23	53	61	69	69
24	48	56	64	72

los días, preferirá determinar una cantidad que se tenga en existencia diariamente. Su meta es seleccionar la cantidad que maximice la *utilidad diaria esperada*.

La tabla 11.10 presenta una tabla de pagos para este problema, a la cual suele dársele el nombre de ***tabla de utilidades condicionales***. En la tabla se sintetiza la utilidad diaria que se obtendría con la selección de cierto nivel de existencias y la ocurrencia de determinado nivel de demanda. Las decisiones referentes a las existencias son las diversas estrategias, mientras que los posibles niveles de la demanda corresponden a los estados de la naturaleza. Nótese que las posibles decisiones referentes a las existencias y las posibilidades discretas de la demanda son exactamente iguales.

Los valores de las utilidades condicionales se determinan al calcular la utilidad total que se obtiene de las unidades vendidas y al restarles las pérdidas que deberán ser absorbidas a causa del exceso de inventario. Por ejemplo, la decisión de mantener siempre en inventario 21 unidades produce una utilidad condicional de \$63. Esta última cantidad se logra al vender las 21 unidades en inventario con una utilidad de \$8 − \$5 = \$3 por unidad. Si la demanda es de 22 unidades o más, las 21 unidades en inventario se venderán invariablemente. Sin embargo, en estos niveles de demanda el minorista no tendrá bastantes existencias.

Ahora examinemos la decisión de almacenar 22 unidades. Si se tiene una demanda de 21 unidades, se venderán en su totalidad consiguiéndose con ello una utilidad de \$63. Sin embargo, como el minorista tiene un exceso de 1 unidad en inventario, el costo de la unidad que no se vende habrá de ser absorbido, reduciéndose así la utilidad condicional a \$63 − \$5 = \$58. Si se almacena 22 unidades y hay una demanda de esa cantidad, se producirán utilidades condicionales de \$66. Y si hay una demanda de más de 22 unidades, se venderán las 22 unidades en inventario y se conseguirán utilidades condicionales por \$66.

Las utilidades condicionales logradas con las decisiones de guardar en inventario 23 y 24 unidades se calculan de manera semejante. Por ejemplo, la utilidad condicional de \$53 al mantener en inventario 23 unidades y al tener una demanda de 21 unidades se obtiene al vender 21 unidades con una utilidad de \$63, esta cantidad se reduce en 2 × \$5 a causa de exceso de 2 unidades en inventario.

La utilidad diaria esperada en *cada decisión de inventario* puede determinarse ponderando cada utilidad condicional por su probabilidad de ocurrencia (que es la probabilidad de nivel correspondiente de la demanda). En la tabla 11.11 se da un ejemplo del cálculo de cada decisión de inventario.

Basándonos en la utilidad diaria esperada, la mejor decisión de inventario consiste en mantener una existencia de 22 productos todos los días, con lo cual se consigue una utilidad diaria esperada (promedio) de $65.20.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

¿Por qué el minorista en este ejemplo no tiene en cuenta la posibilidad de conservar en almacén menos de 21 unidades o más de 24?

UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE DECISIÓN A LA ATENCIÓN MÉDICA DE LOS INDIOS*

Pese a todos los adelantos que hemos presenciado en la medicina y en los sistemas de atención médica, sigue siendo todavía un grave problema la prestación de los servicios médicos a quienes viven en lugares remotos. Uno de esos grupos de personas es la población india que habita en las reservaciones remotas. En 1972 el Indian Health Service (IHS) comenzó un estudio sobre la manera de dar un mejor servicio a aproximadamente 8000 indios de la tribu Papago que están dispersos en una reservación de 2 855 874 acres en el desierto de Sonora, situado al sur de Arizona. En el estudio se descubrió una posible solución que permitía mejorar el servicio, usando para ello tecnología actual de las telecomunicaciones en lugar de los tradicionales servicios clínicos de carácter personal. Sin embargo, un resultado igualmente importante fue la utilización de la teoría de decisión y los métodos para modelar las decisiones, a fin de ayudar a los planificadores de la atención médica a evaluar y seleccionar entre las diversas opciones con que cuentan para prestar este servicio. La herramienta con que se evalúa el sistema basado en las telecomunicaciones se ha utilizado desde entonces al planear nuevos sistemas de atención médica destinados a la población india de Arizona.

*Stan Henceroth, "An Application of Decision Modeling to Indian Health Care", *Interfaces*, vol. 9, núm. 1 (noviembre de 1978), pp. 18-24.

Ejercicios de seguimiento de la sección 11.2

1 La tabla de pagos (resultados) para cierta situación de decisión se muestra en la tabla 11.12. Determine la alternativa de decisión que se escogería si el criterio de decisión es *a*) maximax, *b*) maximín, *c*) Hurwicz ($\alpha = 0.3$), *d*) de igual probabilidad y *e*) arrepentimiento.

2 En la tabla 11.13 se da la tabla de pagos para determinada situación de decisión. Determine la alternativa de decisión que se escogerá si el criterio de decisión es *a*) maximax, *b*) maximín, *c*) Hurwicz ($\alpha = 0.8$), *d*) de igual probabilidad y *e*) arrepentimiento.

3 La tabla de pagos para determinada situación de decisión se incluye en la tabla 11.14. Determine la alternativa de decisión que se escogerá si el criterio de decisión es *a*) máxima, *b*) maximín, *c*) Hurwicz ($\alpha = 0.7$), *d*) de igual probabilidad y *e*) arrepentimiento.

TABLA 11.11 CÁLCULO DE LA UTILIDAD ESPERADA DIARIA

Producto 21		
Utilidad condicional	**Probabilidad de ocurrencia**	**Utilidad esperada diaria**
\$63	× .10	= \$ 6.30
63	× .30	= 18.90
63	× .50	= 31.50
63	× .10	= 6.30
		\$63.00

Producto 22		
Utilidad condicional	**Probabilidad de ocurrencia**	**Utilidad esperada diaria**
\$58	× .10	= \$ 5.80
66	× .30	= 19.80
66	× .50	= 33.00
66	× .10	= 6.60
		\$65.20

Utilidad condicional	**Probabilidad de ocurrencia**	**Utilidad esperada diaria**
\$53	× .10	= \$ 5.30
61	× .30	= 18.30
69	× .50	= 34.50
69	× .10	= 6.90
		\$65.00

Producto 24		
Utilidad condicional	**Probabilidad de ocurrencia**	**Utilidad esperada diaria**
\$48	× .10	= \$ 4.80
56	× .30	= 16.80
64	× .50	= 32.00
72	× .10	= 7.20
		\$60.80

TABLA 11.12

	Estado de la naturaleza				
Alternativa	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
A_1	350	420	200	400	275
A_2	300	180	240	600	450
A_3	250	300	320	360	400

4 Supóngase que los pagos de la tabla 11.12 representan costos o pérdidas. Los criterios expuestos en el caso de la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre supusieron que los valores de pago representaron alguna clase de rendimientos positivos. (*a*) Analice los cinco criterios y reformúlelos de modo que puedan generalizarse a los pagos que representan pérdidas o ganancias. (*b*) Determine la alternativa que se deberá seleccionar en la tabla 11.12, usando los cinco criterios si los pagos representan pérdidas o ganancias.

TABLA 11.13

	Estado de la naturaleza					
Alternativa	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6
A_1	150	−50	180	−100	50	125
A_2	80	70	−20	120	40	150
A_3	60	40	100	50	−50	−150
A_4	175	−50	100	−80	60	120
A_5	−75	50	−10	0	45	180

TABLA 11.14

	Estado de la naturaleza			
Alternativa	N_1	N_2	N_3	N_4
A_1	1,200	1,400	800	1,000
A_2	900	1,600	1,200	1,450
A_3	1,050	1,250	1,300	700
A_4	600	1,000	1,200	900
A_5	1,100	750	1,050	1,225

TABLA 11.15

Demanda diaria (X)	$P(X)$
10	.10
11	.30
12	.40
13	.20
	1.00

5 Vuelva a resolver el ejercicio 3 si los valores de la tabla 11.14 representan costos.

6 Un producto perecedero es adquirido por un minorista en \$15 y se vende a un precio de \$25. La demanda diaria varía en forma aleatoria conforme a la distribución incluida en la tabla 11.15. Si un producto se almacena pero no se vende, el minorista tendrá que absorber el costo de \$15 como pérdida. Desea determinar el nivel del inventario diario, a fin de maximizar la utilidad diaria esperada.

(*a*) Construya la tabla de utilidad condicional

(*b*) ¿Qué decisión de inventario produce la máxima utilidad diaria esperada?

(*c*) ¿Cuál es la máxima utilidad diaria esperada?

7 Un minorista compra un producto en \$2 y lo vende en \$5. Dado que el producto es perecedero, carece de valor si no se vende en el primer día. la demanda diaria (X) varía de manera aleatoria según la siguiente distribución.

X	$P(X)$
10	.10
11	.20
12	.40
13	.30

El minorista desea determinar el nivel de inventario diario, a fin de maximizar la utilidad diaria esperada.

(*a*) ¿Qué decisión de inventario produce la máxima utilidad diaria esperada?

(*b*) ¿Cuál es la máxima utilidad diaria esperada?

8 Valor de salvamento Vuelva a resolver el ejercicio 6 con la suposición de que las unidades no vendidas después del primer día tengan un valor de salvamento de $5.

9 Vuelva a resolver el ejercicio 7 si hay un valor de salvamento de $1 para las unidades no vendidas en el primer día.

10 Un producto perecedero es comprado por un minorista en $10 y lo vende a $15. La demanda diaria ($X$) varía en forma aleatoria conforme a la siguiente distribución.

X	$P(X)$
20	.10
21	.20
22	.40
23	.30

Si un producto se almacena pero no se vende en el primer día, puede salvarse por $5. El minorista desea determinar el nivel de inventario diario, a fin de maximizar la utilidad diaria esperada.

(*a*) ¿Qué decisión de inventario produce la máxima utilidad diaria esperada?

(*b*) ¿Cuál es la máxima utilidad diaria esperada?

11 Valor esperado con información perfecta Supóngase en el ejemplo 8 que existe una manera de predecir exactamente cuántas unidades serán demandadas en cierto día (un sistema de anticipación de pedidos podría lograrlo). Cuando se conoce de antemano la demanda, la decisión prudente de inventario consiste en conservar en almacén la cantidad demandada. Con ello se evita el exceso o falta de inventario. En el ejemplo 8, por ejemplo, se guardarían 21 unidades siempre que esa cantidad sea demandada, se almacenan 22 unidades cuando la demanda es de 22 y así sucesivamente. Cuando se emplean las unidades condicionales apropiadas de la tabla 11.10, se calcula la utilidad esperada *(utilidad esperada con información perfecta)* en esta situación. ¿Qué relación hay entre esto y la máxima utilidad esperada (sin información perfecta) de $65.20 al mantener en inventario 22 unidades?

12 Calcule la utilidad esperada con información perfecta para la situación del ejercicio 6.

13 Suponga que el minorista del ejercicio 7 conoce de antemano el número exacto que será demandado cada día. Determine la utilidad diaria esperada asociada al hecho de contar con esta información perfecta acerca de la demanda. ¿Qué relación tiene esto con la utilidad diaria esperada que se obtuvo en el ejercicio 7?

14 Explique las limitaciones de la aplicación del valor esperado como criterio para la toma de decisiones. ¿En qué circunstancias es más apropiado dicho criterio?

11.3 TEORÍA DE JUEGOS: TOMA DE DECISIONES CON UN OPONENTE ACTIVO

En la última sección hemos examinado situaciones donde los resultados de las decisiones dependían de un conjunto de factores a los que dimos el nombre de *estados de la naturaleza*. La ocurrencia o la no ocurrencia de esos factores pare-

cía estar sujeta al azar. Aunque algunos de los que toman decisiones podrían pensar lo contrario, en la sección 11.2 se señala que la naturaleza *no* conspira en contra de ellos para infligir el mayor daño posible. Podemos pensar que la toma de decisiones en condiciones de riesgo e incertidumbre se enfrenta a un "oponente pasivo".

En la presente sección examinaremos la toma de decisiones con un oponente activo; es decir, explicaremos situaciones donde dos encargados de la toma de decisiones compiten entre sí. A estas situaciones competitivas se les da el nombre genérico de ***juegos***. Los análisis de ellas se denominan ***teoría de juegos***.

Juegos de suma cero entre dos personas

En nuestras explicaciones de la teoría de juegos nos limitaremos a los ***juegos entre dos personas***, es decir, nos concentraremos en el caso en que compiten dos participantes que pueden ser individuos o grupos de personas (por ejemplo, organizaciones).

Como en el caso de la toma de decisiones en condiciones de riesgo e incertidumbre, la estructura de un juego entre dos personas puede resumirse por medio de una *tabla o matriz de pagos* (resultados). La matriz de la tabla 11.16 representa un juego en que interviene el jugador X y el jugador Y. El primero dispone de dos estrategias posibles representadas por los dos renglones. El segundo tiene también dos estrategias posibles representadas por las dos columnas. Los resultados (pagos) posibles asociados a la selección de diversas estrategias adoptadas por ambos jugadores se muestran en el cuerpo de la matriz.

En los juegos ***de suma cero*** entre dos personas, la suma de los resultados conseguidos por ambos jugadores es 0 para cada partido del juego. Cualquiera que sea la cantidad que gane un jugador, el otro siempre perderá. Nuestra convención consiste en interpretar los pagos positivos como *ganancias* del jugador cuyas estrategias estén representadas por los renglones. Los resultados negativos representán pérdidas para él. Así pues, si el jugador X escoge la estrategia 1 y el jugador Y la estrategia 2, el primero ganará 3 unidades. Este valor representa al mismo tiempo una pérdida de 3 unidades para el jugador Y. Si el jugador X selecciona la estrategia 2 y el jugador Y la estrategia 1, el primero *perderá* 4 unidades y el segundo ganará 4 unidades. Se hace una suposición en la teoría de juegos según la cual cada jugador conoce a la perfección las estrategias del otro y además los posibles resultados de la selección simultánea de estrategias. En términos más sencillos, se supone que ambos tienen acceso a la información contenida en la matriz de pagos.

TABLA 11.16

	Jugador Y
Jugador X	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

El análisis de la tabla 11.16 llevará al lector a la conclusión de que este juego favorece al jugador X. Si él escoge la estrategia 1, tiene la garantía de un pago o resultado positivo. (Si selecciona la estrategia 2 se le garantiza una pérdida.) Suponiendo que tome decisiones en forma racional, la estrategia 1 será siempre la que se escoja. Si el jugador Y debe participar, se dará cuenta de la

parcialidad del juego e intentará reducir al mínimo sus pérdidas. Reconocerá que el jugador X seleccionará la estrategia 1. Para reducir al mínimo sus pérdidas, el jugador Y deberá optar por la estrategia 2. La solución del juego es la estrategia 1 para el jugador X y la estrategia 2 para el jugador Y. *El valor del juego* es de 3; el jugador X gana 3 y el jugador Y pierde 3 en cada partido. *El valor del juego representa las ganancias (pérdidas) promedio por partido del juego en varios partidos.*

EJEMPLO 9

Examine las siguientes matrices de pagos:

(*a*)

		Jugador Y	
Jugador X	-2	-4	
	3	(−2)	
	5	-6	

Este juego favorece al jugador Y. Ello se debe a que, si el jugador Y escoge la estrategia 2, no puede perder. El jugador X, al ver esta parcialidad, procura disminuir en lo posible sus pérdidas escogiendo la estrategia 2. Así pues, el valor del juego es -2; el jugador X pierde 2, mientras que el jugador Y gana 2 en cada partido del juego.

(*b*)

		Jugador Y	
Jugador X	3	-4	5
	-1	-4	-2
	3	(0)	5
	-1	-3	6

En este juego, el jugador X no puede perder si escoge la estrategia 3. Las pérdidas se sufren al optar por las otras tres estrategias. Con objeto de reducir al mínimo sus pérdidas, el jugador Y seleccionará la estrategia 2, la cual produce un valor del juego equivalente a 0.

En los ejemplos que acabamos de examinar, se identificó *una* estrategia para cada jugador. Puede haber un poco de experimentación durante un tiempo, pero a la postre los jugadores optarán por la estrategia que hemos señalado. Cuando un jugador determina una estrategia que prefiere en todos los partidos, a esto lo llamamos ***estrategia pura***. Es obvio que, si los dos participantes del juego adoptan este tipo de táctica, se determinará un valor único para el juego. Se da el nombre de ***punto en silla de montar*** al valor del juego.

DEFINICIÓN: PUNTO EN SILLA DE MONTAR
El ***punto en silla de montar*** es el valor del juego cuando los dos participantes adoptan estrategias puras.

Los puntos en silla de montar tienen la propiedad especial de ser a la vez el valor mínimo del renglón y el valor máximo de la columna donde está localizado el pago (es decir, *mínimo de renglón-máximo de columna*). Esta propiedad tiene un fundamento lógico. Si el jugador X adopta una estrategia cualquiera (renglón), el jugador Y querrá escoger una estrategia que produzca el mínimo pago posible en ese renglón; por tanto, la estrategia *mínimo de renglón* para él. De manera análoga, si el jugador Y escoge una estrategia (columna), al jugador X le gustaría seleccionar una estrategia que produzca el valor máximo de la columna, o sea la estrategia *máximo de columna* para él.

No todas las matrices de resultados poseen valores del punto en silla de montar. Cuando un punto de este tipo realmente existe, no hay estrategias puras para ambos jugadores. Un sistema fácil de determinar si existen estrategias puras para los dos oponentes en un juego consiste en examinar la matriz de pagos en busca del valor del punto en silla de montar. Si se encuentra uno, existirán estrategias puras, y entonces se calcula el valor del juego.

EJERCICIO

En las siguientes matrices de pago, identifique las que poseen condiciones de punto en silla de montar.*

(*a*)
$$\begin{array}{c} \\ X \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

(*b*)
$$\begin{array}{c} \\ X \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 12 & 8 & 10 \\ -5 & 5 & 6 \\ -4 & -10 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

(*c*)
$$\begin{array}{c} \\ X \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -10 & -6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

(*d*)
$$\begin{array}{c} \\ X \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 6 & 14 & -8 \\ 10 & -5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Estrategias mixtas

Cuando en un juego existe un punto en silla de montar, los oponentes seguramente adoptarán una ***estrategia mixta***. Con este nombre se denota simplemente el hecho de que un jugador adopta cada estrategia cierto número de veces. Por ejemplo, si cuenta con dos estrategias posibles, la estrategia 1 podría ser escogida 40% de las veces y la estrategia 2, 60% de las veces. En el caso de las estrategias mixtas estamos suponiendo (1) que el juego se realiza más de una vez y (2) que sus parámetros (o sea, la tabla de pagos) son estables. En esta sección se expondrá un criterio con el cual se escogen las estrategias mixtas, y también indicaremos cómo determinar las estrategias y el valor del juego en el caso de que dos personas participen en él.

Supóngase que hay un juego con la siguiente matriz de pagos.

$$\begin{array}{c} \\ X \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

*(*a*) sin punto en silla de montar, (*b*) punto 8 en silla de montar, (*c*) punto de −5 en silla de montar, (*d*) sin punto en silla de montar.

Un examen rápido de la matriz revela que no existe un punto en silla de montar. Así pues, dado que no hay extrategias puras disponibles para los jugadores, deseamos determinar la proporción de veces que debería ser adoptada cada estrategia. Por el momento, analizaremos esto desde la perspectiva del jugador X. Si con p designamos la proporción de las veces que ese jugador escoge la estrategia 1, entonces $1 - p$ representa la proporción de veces que se selecciona la estrategia 2.

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

El criterio con que se determina la estrategia mixta consiste en seleccionar el valor de p tal que el pago (resultado) esperado sea el mismo, sin importar la estrategia adoptada por el jugador Y. Si sus estrategias se denotan con y_1 y y_2, el jugador X querrá escoger p y $(1 - p)$ tal que

$$\boxed{\text{EV}(y_1) = \text{EV}(y_2)} \qquad \textbf{(11.12)}$$

Para determinar el pago esperado cuando el jugador Y escoja la estrategia 1, nos concentraremos en la columna 1 de la matriz de pagos. El pago (resultado) esperado se obtiene ponderando los pagos individuales por la proporción de las veces que el jugador X selecciona la estrategia correspondiente. Si el jugador Y escoge la estrategia 1, el pago de 5 será obtenido $p\%$ de las veces y el pago de -4 se obtendrá $(1 - p)\%$ de las veces. Por consiguiente,

$$\text{EV}(y_1) = 5(p) + (-4)(1 - p)$$

Por un razonamiento similar, si el jugador Y selecciona la estrategia 2,

$$\text{EV}(y_2) = -3(p) + 8(1 - p)$$

Aplicando el criterio formulado por la ecuación (11.12) para calcular el valor de p,

$$\text{EV}(y_1) = \text{EV}(y_2)$$

cuando

$$\begin{aligned} 5p + (-4)(1 - p) &= -3p + 8(1 - p) \\ 9p - 4 &= -11p + 8 \\ 20p &= 12 \\ p &= \tfrac{12}{20} = 0.60 \end{aligned}$$

Este resultado señala que el jugador X tendrá la seguridad de conseguir el mismo pago esperado o promedio, *cualquiera que sea la estrategia escogida por* Y, si la estrategia 1 se adopta 60% de las veces y la estrategia 2 se escoge $(1 - 0.60)$, o sea 40% de las veces. Para determinar el pago esperado, deberíamos ser capaces de sustituir esos valores en la ecuación de $\text{EV}(y_1)$ y $\text{EV}(y_2)$ y luego descubrir que son iguales. Al probar esto se obtiene

$$\begin{aligned} \text{EV}(y_1) &= 5(0.60) + (-4)(1 - 0.60) \\ &= 5(0.60) + (-4)(0.40) \\ &= 3.00 - 1.60 \\ &= 1.40 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{EV}(y_2) &= -3(0.60) + 8(0.40) \\ &= -1.80 + 3.20 \\ &= 1.40 \end{aligned}$$

Este análisis, que lleva a determinar una estrategia mixta para el jugador X, también revela que a largo plazo el valor del juego es de 1.40; es decir, luego de muchos partidos, el jugador X tendrá una ganancia promedio de 1.40, mientras que el jugador Y tendrá una pérdida promedio de 1.40. Un aspecto interesante de este análisis radica en que al parecer la solución del juego ha sido conseguida independientemente de las acciones del jugador Y. ¿Cómo es posible esto? Demos al jugador Y la oportunidad de elaborar una estrategia mixta. Sin duda puede desarrollar una estrategia que le reditúe un resultado a largo plazo que sea por lo menos distinto al que acabamos de derivar.

Para determinar una estrategia mixta destinada al jugador Y, se definirá q como la proporción de las veces que debería adoptarse la estrategia 1 y $(1 - q)$ la proporción de las veces que debería escogerse la estrategia 2.

$$\begin{array}{c} \\ X \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Y & \\ q & 1-q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aplicando el mismo criterio que en el caso del jugador X, el jugador Y escogerá los valores de q y $1 - q$, a fin de asegurarse el mismo pago esperado sin importar la estrategia que adopte el otro jugador. Por tanto,

$$\text{EV}(x_1) = \text{EV}(x_2)$$

cuando

$$\begin{aligned} 5q + (-3)(1 - q) &= -4q + 8(1 - q) \\ 8q - 3 &= -12q + 8 \\ 20q &= 11 \\ q &= \tfrac{11}{20} = 0.55 \end{aligned}$$

Así pues, el jugador Y asegurará el mismo pago esperado, prescindiendo de la estrategia que escoja el jugador X, si la estrategia 1 es seleccionada 55% de las veces y la estrategia 2, 45% de la veces. Para determinar el pago esperado garantizado, se sustituyen $\text{EV}(x_1)$ y $\text{EV}(x_2)$ en las expresiones, o sea

$$\begin{aligned} \text{EV}(x_1) &= 5(0.55) + (-3)(0.45) \\ &= 2.75 - 1.35 \\ &= 1.40 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{EV}(x_2) &= -4(0.55) + 8(0.45) \\ &= -2.20 + 3.60 \\ &= 1.40 \end{aligned}$$

¿Y qué sucedió? Pues que el pago esperado es exactamente el mismo que se obtuvo para el jugador X.

NOTA

Hay que aclarar un punto importante en relación con la realización de una estrategia mixta. Los juegos se efectúan en una situación de competencia. Los jugadores deben tratar de sorprender al oponente mediante la selección de sus estrategias. Hay que adoptar un patrón aleatorio de tácticas. De lo contrario, si un jugador detecta un patrón de juego por parte de su oponente, lo contrarrestará con la estrategia más ventajosa. He aquí un ejemplo extremo: supóngase que el jugador X adopta la original estrategia de aplicar la estrategia 1 sesenta veces consecutivas después de la estrategia 2 en los siguientes 40 partidos. Supongamos asimismo que el jugador Y descubre el patrón del juego y escoge la estrategia 2 sesenta veces consecutivas y la estrategia 1 en los siguientes 40 partidos. Al cabo de 100 partidos el valor promedio por juego será

$$0.6(-3) + 0.4(-4) = -3.40,$$

cifra muy distinta a la de +1.40 determinada antes. El patrón de juego adoptado por el jugador X en este ejemplo es irracional.

El ejemplo anterior se muestra para subrayar que las estrategias mixtas han de ejecutarse empleando un elemento de "maestría en el juego". En otras palabras, los participantes deberán observar el comportamiento de los oponentes y tratar de descubrir los patrones del juego, a la vez que procuran ocultar los que ellos mismos están aplicando. A la larga tendrán que tratar de ejecutar sus estrategias en proporción con las estrategias mixtas derivadas.

El valor del juego puede determinarse además sirviéndose del concepto de probabilidades conjuntas. Si se conocen las estrategias mixtas de ambos jugadores, puede calcularse la probabilidad conjunta de que los oponentes escojan diferentes pares de estrategias.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Y & \\ .55 & .45 \end{array} \\ X \begin{array}{c} .60 \\ .40 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por ejemplo, la probabilidad conjunta de que el jugador X escoja la estrategia 1 y el jugador Y la estrategia 1 será

$$p(x_1, y_1) = .60(.55) = .33$$

Todas las posibles probabilidades conjuntas se incluyen en la tabla 11.17.

TABLA 11.17

$p(x_1, y_1) = .60(.55) =$	.33
$p(x_1, y_2) = .60(.45) =$	.27
$p(x_2, y_1) = .40(.55) =$	.22
$p(x_2, y_2) = .40(.45) =$	.18
	1.00

Si se pondera cada pago posible por la probabilidad de su ocurrencia, el valor del juego se determina así:

Pago	*P(pago)*	
5	× .33	= 1.65
−3	× .27	= − .81
−4	× .22	= − .88
8	× .18	= 1.44
		1.40

Otras consideraciones

Antes de dar por terminada la introducción a la teoría de juegos, se ofrecerá un panorama general de otras cuestiones que son extensiones de lo que hemos dicho hasta ahora.

Estrategias mixtas Las estrategias mixtas pueden determinarse cuando los encargados de la toma de decisiones afrontan más de dos alternativas u opciones. Por ejemplo, en la siguiente matriz de pagos se muestra un juego entre dos personas en el cual ambos oponentes tiene tres estrategias posibles:

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 = 1 - p_1 - p_2 \end{array} \begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ 5 & 8 & -6 \\ -12 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Al determinar una estrategia mixta para el jugador X, p_1, p_2 y p_3 se definen como la proporción de las veces que deberían adoptarse las estrategias respectivas. Como en el caso de las dos estrategias, esos valores habrán de determinarse de modo que el valor esperado del juego sea el mismo si se escoge cualquiera de las estrategias de Y. Es decir,

$$\text{EV}(y_1) = \text{EV}(y_2) = \text{EV}(y_3)$$

Para encontrar esos valores, es necesario resolver simultáneamente ambas ecuaciones para los valores de p_1 y p_2.

EJERCICIO

Determine los valores de p_1, p_2 y p_3. ¿Cuál es el valor esperado del juego?*

*Respuestas: $p_1 = \frac{183}{339}$, $p_2 = \frac{190}{339}$, $p_3 = \frac{166}{339}$, valor esperado $= \frac{788}{339}$.

Estrategias dominantes Algunas veces la matriz de pagos de un juego puede reducirse de tamaño en virtud de las ***estrategias dominantes***. Un jugador dispone de ellas cuando una estrategia posee un conjunto de pagos que siempre son superiores a los de una o varias estrategias. Así, en la siguiente matriz, los pagos (resultados) del jugador X siempre serán mejores si se prefiere la estrategia 3 a la 2.

$$\begin{array}{c} \\ X \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ 10 & 8 \\ 24 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{Matriz original de pagos}$$

En otras palabras, la estrategia 3 es *dominante* sobre la estrategia 2. Dado que no hay un incentivo para adoptar la estrategia 2, se elimina la estrategia *dominada*. La matriz *efectiva* de pagos del juego puede reescribirse del modo siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ X \\ \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ 24 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{Matriz efectiva de pagos}$$

En la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{array}{c} \\ X \\ \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & -10 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{Matriz original de pagos}$$

la estrategia 3 del jugador Y es dominante sobre las estrategias 2, 4 y 5. Si se suprimen, la matriz efectiva de pagos del juego puede reescribirse como

$$\begin{array}{c} \\ X \\ \end{array}\begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{Matriz efectiva de pagos}$$

Otras estructuras de juegos Hay extensiones de los juegos de suma cero entre dos personas. Por ejemplo, cuando los oponentes son más de dos, damos el nombre de ***juego entre n personas*** a la situación de competencia. Estos tipos de juegos se tornan más complejos de analizar a causa del potencial de negociación o colusión entre dos o más jugadores.

Otra variante es el concepto de ***juego de suma no cero***. Estos ambientes competitivos son tales que un jugador no necesariamente gana a expensas del otro. Pueden darse casos en que las decisiones de los contrincantes sobre las estrategias pueden hacer que ambos ganen o pierdan. Por ejemplo, si dos empresas están realizando campañas de publicidad para obtener una mayor participación en un mercado, sus estrategias conjuntas podrían aumentar el tamaño del mercado. Además, las estrategias adoptadas por una tal vez incrementen realmente las ventas de la otra al estimular la demanda global del producto, lo mismo que las ventas de una marca en particular. Otro ejemplo en que se dan las condiciones de la suma no cero es la guerra. Las pérdidas de vidas y

los daños materiales de un país no pueden ser considerados como *ganancias* por el otro.

Ejercicios de seguimiento de la sección 11.3

En los ejercicios 1-6, determine los juegos en que existe un punto en silla de montar En ellos especifique las estrategias puras y el valor del juego.

1
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$$

3
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

4
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 20 & 45 & -60 \\ -25 & 0 & -40 \\ 15 & -10 & 60 \end{pmatrix}$$

5
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 5 & -8 & -6 & 10 \\ 10 & -5 & 8 & 5 \\ -8 & 14 & 2 & 0 \\ 6 & 12 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

6
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -8 \\ -9 & 6 & -15 \\ -8 & -7 & -12 \\ -24 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 7-10, reduzca el tamaño de la matriz de pagos, si es posible, examinando para ello las estrategias dominantes.

7
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 3 & 12 & -5 & 10 \\ 5 & 10 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

8
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -8 \\ -1 & 0 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

9
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & 3 & 8 & -10 \\ 8 & -9 & 12 & -20 \\ 18 & 6 & -5 & 16 \end{pmatrix}$$

10
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 100 & -50 & 120 & -75 \\ 80 & -80 & 0 & 125 \\ -40 & -20 & -60 & 40 \\ 150 & -40 & 225 & 300 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 11-16, determine las estrategias mixtas de cada oponente y el valor resultante del juego.

11
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 100 & 5 \\ -150 & 200 \end{pmatrix}$$

12
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -20 & 5 \end{pmatrix}$$

13
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} -6 & -10 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

14
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 30 & -50 \end{pmatrix}$$

15
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ -12 & 0 & 10 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

16
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ -12 & 8 & -10 \\ 4 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

criterio de igual probabilidad (Laplace) 496
criterio de Hurwicz 496
criterio de arrepentimiento 497
criterio maximax 494
criterio maximín 495
estados de la naturaleza 492
estrategias dominantes 511
estrategia mixta 506
estrategia pura 505

índice de optimismo 496
juego de suma cero 504
juego de suma no cero 511
juego entre dos personas 504
juego entre *n* personas 511
matriz de transición 476
matriz regular de transición 487
pérdida (costo) de oportunidad 497
proceso de Markov 475
punto en silla de montar 505
tabla de pagos (resultados) 492
tabla de utilidades condicionales 499
teoría de juegos 503
toma de decisiones en condiciones de certidumbre 493
toma de decisiones en condiciones de incertidumbre 493
toma de decisiones en condiciones de riesgo 493
valores de equilibrio 484
valor esperado 498
valor del juego 505
vector de estado 479

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1—4 se relacionan con la sección 11.1

1 Renta de automóviles Una compañía renta automóviles en tres aeropuertos del área. Los automóviles pueden alquilarse en cualquiera de ellos y devolverse también a cualquiera. La siguiente matriz indica la probabilidad de que un automóvil rentado en uno de los aeropuertos sea devuelto a cualquiera de las tres oficinas:

Rentado del aeropuerto	Devuelto al aeropuerto		
	1	2	3
1	0.80	0.15	0.05
2	0.10	0.70	0.20
3	0.20	0.05	0.75

Los números totales de automóviles que se alquilan en las tres oficinas son de 500. Cuando se logra un estado de equilibrio, ¿cuántos automóviles se encontrarán en cada aeropuerto?

2 Administración de hospitales Cuando los pacientes cardiacos son atendidos en un gran hospital de alguna universidad, se les pone en la unidad de atención a las coronarias (CCU) o en una sala normal. Según los datos que se han recabado, el estado (ubicación) de un enfermo en un día determinado depende del estado (ubicación) que haya tenido en el día anterior. Un tercer estado del paciente es que se le haya dado de alta en el hospital o que haya muerto. La siguiente matriz de probabilidades de transición refleja estas probabilidades:

De	CCU	A un cuarto regular	Dado de alta o fallecido
CCU	0.65	0.25	0.10
Cuarto regular	0.05	0.70	0.25
Dado de alta o fallecido	0.02	0.01	0.97

En el estado de equilibrio, ¿cuál es la probabilidad de que un enfermo se encuentre en cada uno de los tres estados?

3 Control de la contaminación ambiental La división de la calidad del aire en una ciudad muy importante de Estados Unidos lo clasifica diariamente en "excelente", "bueno", "deficiente" o "peligroso". La división ha reunido datos según los cuales la clasificación de la calidad del aire en un día determinado depende de la que se haya registrado en el día anterior. La siguiente matriz de probabilidades de transición sintetiza estas probabilidades.

Clasificación en el día actual	Clasificación al día siguiente			
	Excelente	**Buena**	**Deficiente**	**Peligrosa**
Excelente	0.20	0.25	0.35	0.20
Buena	0.25	0.40	0.20	0.15
Deficiente	0.10	0.40	0.30	0.20
Peligrosa	0.15	0.30	0.40	0.15

Determine las probabilidades de equilibrio de los diversos niveles de la calidad del aire.

4 Sistema de corrección El director de corrección de una penitenciaria estatal ha reunido datos sobre los movimientos de *personas que han sido condenadas y enviadas al sistema de corrección*. La siguiente matriz de transición sintetiza las probabilidades de varios movimientos mensuales. Obsérvese que un movimiento posible es la liberación. Otra posibilidad es el reingreso en el sistema correccional.

	A				
De	**Gran Seguridad**	**Seguridad mediana**	**Liberación de trabajo**	**Alojamiento intermedio**	**Liberación**
Gran seguridad	0.70	0.30	0.00	0.00	0.00
Seguridad mediana	0.10	0.60	0.15	0.05	0.10
Liberación de trabajo	0.00	0.15	0.40	0.20	0.25
Alojamiento intermedio	0.00	0.05	0.10	0.40	0.45
Liberación	0.02	0.08	0.00	0.10	0.80

En un grupo de 3000 personas que han sido admitidas al sistema de corrección, 600 se encuentran actualmente en la sección de extrema seguridad, 1800 en la seguridad mediana, 200 participan en liberación de trabajo, 100 se encuentran en alojamiento de libertad intermedia y 300 han sido liberadas.

a) En este grupo de presos, estime el número que se espera que se encuentre en cada programa de seguridad durante el próximo mes y el siguiente.

b) ¿Cuántas de esas 3000 personas se encontrarán en cada programa cuando el sistema se encuentre en equilibrio? (Quizá el lector opte por servirse de un programa de computadora para resolver el sistema de ecuaciones.)

c) Estime el número de meses necesarios para alcanzar el equilibrio. Esto puede lograrse eficientemente sólo escribiendo o usando un programa de computadora (de preferencia en BASIC, aplicando los comandos de matriz) para predecir la distribución de los 3000 presos en los meses futuros.

Los ejercicios 5-9 se relacionan con la sección 11.2.

5 Desarrollo de condominios Un grupo de inversión ha comprado terrenos en el área de Atlantic City y está planeando construir unidades de condominio. El grupo

TABLA 11.18

Alternativa	Nivel de desarrollos de condominios		
	Grande	Mediano	Bajo
Desarrollo pequeño/precio alto	15	30	34
Desarrollo mediano/precios medio-alto	5	35	38
Desarrollo grande/precios bajo-medio	−10	40	46

está estudiando la implantación de tres estrategias: *a*) un desarrollo pequeño exclusivo de alto precio; *b*) un desarrollo mediano, de un rango de precios de medio a alto, y *c*) un desarrollo grande, con un rango de precios de bajo a medio. Se piensa que la rentabilidad del proyecto depende primordialmente de la tendencia a corto plazo en la construcción de condominios en Atlantic City. La tabla 11.18 es una tabla de pagos que expresa una utilidad (en $100 000) en función de la estrategia escogida y del nivel de desarrollo de condominios.

a) Determine la alternativa que se seleccionaría usando los criterios maximax, maximín, de Hurwicz ($\alpha = 0.6$), de igual probabilidad y de arrepentimiento.

b) Suponga que se cuenta con información sobre la probabilidad de distintos niveles de desarrollo y que P(grande) = 0.5, P(mediano) = 0.35 y P(bajo) = 0.15. Aplique el criterio de valor esperado para seleccionar la alternativa apropiada. ¿Cuál es el valor esperado con la información perfecta? (Véase el ejercicio 11 de la sección 11.2.)

6 Selección de fondo mutualista El director de un gran plan de pensiones desea invertir $50 millones en uno de los seis fondos mutualistas durante un año. Los seis fondos varían en su composición, objetivos y riesgo. Los analistas han estimado que el rendimiento anual de cada uno dependerá de la tasa preferencial de interés durante el año. La tabla 11.19 indica esos rendimientos, expresados en millones de dólares.

a) Determine el fondo mutualista que ha de seleccionarse y para ello utilice los criterios maximax, maximín, de Hurwicz ($\alpha = 0.3$), de igual probabilidad y de arrepentimiento.

b) Suponga que una empresa de inversión confiable ha proporcionado estimaciones de la probabilidad de los distintos comportamientos de la tasa preferencial. En concreto, $P(N_1) = 0.10$, $P(N_2) = 0.25$, $P(N_3) = 0.40$, $P(N_4) = 0.20$ y $P(N_5) = 0.05$. Aplique el criterio del valor esperado para seleccionar el mejor fondo mutualista. ¿Cuál es el valor esperado con información perfecta? (Véase la sección 11.2, ejercicio 11.)

TABLA 11.19 RENDIMIENTO EN DÓLARES (MILLONES)

Fondo mutualista	Comportamiento de la tasa preferencial de interés				
	Disminución significativa (N_1)	Disminución moderada (N_2)	Relativamente estable (N_3)	Incremento moderado (N_4)	Incremento significativo (N_5)
A	$ 3.5	$6.2	$ 4.8	$7.1	$8.2
B	4.5	4.8	5.0	5.5	7.0
C	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
D	8.5	9.0	10.0	8.2	7.6
E	10.5	8.4	7.6	6.5	5.8
F	12.2	8.0	2.5	7.5	8.2

7 Investigación médica Una fundación desea invertir $50 millones en el estudio del cáncer. Se propone gastar el dinero en el estudio del cáncer del colon, la leucemia o ambas enfermedades. Las opciones propuestas son dedicar 75% del dinero a una de las enfermedades y el resto a la otra, o bien dividirla en partes iguales entre las dos. Dada la interdependencia entre las dos formas de cáncer, se espera que la investigación en un área aporte beneficios periféricos en la otra.

Los resultados de las áreas de investigación se juzgarán significativos o no significativos. He aquí los resultados posibles:

N_1 = significativos para la investigación del cáncer del colon *y* la leucemia
N_2 = significativos para la investigación del cáncer del colon; no significativos para la leucemia
N_3 = no significativos para la investigación del cáncer del colon; significativos para la leucemia
N_4 = no significativos para la investigación del cáncer del colon *y* la leucemia

La fundación ha hecho que un panel de expertos estime las probables reducciones anuales en deusos atribuibles a ambas clases de cáncer, una vez conocidas las inversiones anuales dedicadas a la investigación y los posibles resultados de ella.

a) Determine la alternativa que debe seleccionarse y para ello aplique los criterios maximax, maximín, de Hurwicz ($\alpha = 0.75$), de igual probabilidad y de arrepentimiento.

b) Suponga que el panel de expertos estimó la probabilidad de diversos resultados de la investigación. Sus juicios son que $P(N_1) = 0.03$, $P(N_2 = 0.18$, $P(N_3) = 0.12$ y $P(N_4) = 0.67$. Aplique el criterio del valor esperado para escoger la mejor alternativa de decisión.

8 Un minorista compra un producto en $12 y lo vende en $20. Puesto que se trata de un producto perecedero, carece de valor si no se vende en el primer día. La demanda diaria (X) varía en forma aleatoria conforme a la siguiente distribución:

X	$P(X)$
20	.05
21	.15
22	.40
23	.20
24	.10
25	.10

El minorista desea determinar el nivel que debe guardar en inventario diariamente, con objeto de maximizar la utilidad diaria esperada.

a) Construya la tabla de utilidad condicional.

b) ¿Qué decisión de inventario produce la máxima utilidad diaria esperada?

TABLA 11.20 REDUCCIÓN ANUAL DE DECESOS EN MILES

Inversiones en investigación	Resultados de la investigación			
	N_1	N_2	N_3	N_4
75% C/25%L	20.0	18.5	5.0	2.8
50% C/50%L	16.0	14.5	8.5	2.0
25% C/75%L	14.0	7.5	10.5	1.8

c) ¿Cuál es la máxima utilidad diaria esperada?
d) ¿Cuál es el valor esperado con información perfecta?

9 Resuelva el ejercicio 8 suponiendo un valor de salvamento de \$4 si una unidad no se vende en el primer día.

Los ejercicios 10-18 se relacionan con la sección 11.3. En los ejercicios 10-13, determine los juegos en que existe un punto en silla de montar. En dichos juegos, especifique las estrategias puras y el valor del juego.

10
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -11 & -15 \end{pmatrix}$$

11
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$$

12
$$\begin{matrix} & & Y & \\ X & & & \end{matrix}\begin{pmatrix} 30 & -10 & 25 & 40 \\ 60 & 50 & -40 & -80 \\ 20 & -50 & 30 & 40 \\ -75 & 40 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

13
$$\begin{matrix} & & Y & \\ X & & & \end{matrix}\begin{pmatrix} 40 & -10 & 25 & -5 \\ -50 & -40 & -5 & 10 \\ 40 & -15 & 80 & 75 \\ 0 & -12 & 40 & -20 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 14 y 15, reduzca el tamaño de la matriz de pagos, si es posible, examinando en busca de estrategias dominantes.

14
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \\ -5 & 0 & 10 \\ 4 & -5 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

15
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 & 0 \\ -5 & 5 & 10 & -8 \\ 10 & 15 & -20 & 18 \\ 0 & 4 & 12 & -16 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 16-18, determine las estrategias mixtas para *cada* oponente y el valor resultante del juego.

16
$$\begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 250 & -300 \end{pmatrix}$$

17
$$\begin{matrix} & & Y & \\ X & & & \end{matrix}\begin{pmatrix} 8 & 16 & -12 \\ -24 & 0 & 20 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

18
$$\begin{matrix} & & & Y & \\ X & & & & \end{matrix}\begin{pmatrix} 10 & -20 & 10 & 30 \\ 30 & 10 & -20 & 50 \\ 60 & 40 & 30 & -60 \\ -100 & 0 & 100 & -80 \end{pmatrix}$$

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 La siguiente matriz de probabilidades de transición refleja el comportamiento de cambio de marca por parte de los consumidores de tres marcas de leche. *a*) Si las participaciones en el mercado son actualmente 30%, 60% y 10%, respectivamente, determine las participaciones al final del periodo. *b*) ¿Cuáles son las participaciones de equilibrio en el mercado?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} .90 & .10 & 0 \\ .05 & .80 & .15 \\ .20 & .20 & .60 \end{pmatrix}$$

2 En la siguiente tabla de pagos:

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
A_1	150	180	40	90	120
A_2	160	140	200	50	0
A_3	120	100	150	180	160
A_4	200	160	140	40	180

Determine la alternativa que debe escogerse y para ello aplique los criterios maximax, maximín, de Hurwicz ($\alpha = 0.6$) de igual probabilidad y de arrepentimiento.

3 Si $P(N_1) = 0.1$, $P(N_2) = 0.3$, $P(N_3) = 0.2$ $P(N_4) = 0.1$ y $P(N_5) = 0.3$ en el problema anterior, con el criterio de valor esperado seleccione la opción apropiada. ¿Cuál es el valor esperado? ¿Cuál es el valor esperado con información perfecta?

MINICASO A

CAMBIO DE MARCA

Una organización dedicada a la investigación de mercados terminó hace poco una encuesta sobre el comportamiento de compra en un mercado dominado por cuatro marcas. La tabla anexa contiene un resumen de las compras totales durante el periodo actual. Nótese que cada renglón indica la marca adquirida en el periodo anterior y que cada columna muestra la marca adquirida en el periodo actual.

		Marca comprada en este periodo				
		1	2	3	4	
Marca comprada en el periodo anterior	1	47 500	500	1 000	1 000	50 000
	2	400	38 000	0	1 600	40 000
	3	0	4 500	54 000	1 500	60 000
	4	5 000	1 000	4 000	40 000	50 000

La organización de investigación de mercados piensa que el comportamiento de cambio de marca observado en el periodo actual representa lo que normalmente sucede en este mercado. También opina que esos patrones son estables.

1 ¿Cuáles fueron las participaciones relativas de las marcas en el mercado durante el periodo anterior? ¿Y en el periodo actual?

2 Construya la matriz de probabilidades de transición correspondiente a las cuatro marcas.

3 Prediga las participaciones en el mercado al final del próximo periodo de compras y al final del siguiente periodo.

4 Suponiendo que la matriz de probabilidades de transición sea estable, ¿se logrará alguna vez el equilibrio en el mercado? Y de ser así, ¿cuáles serán las participaciones de equilibrio?

4 Determine las estrategias apropiadas y el valor del juego en los siguientes juegos de suma cero.

$$(a)\quad \begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 20 & -40 \\ -30 & 50 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{matrix} & Y \\ X & \end{matrix}\begin{pmatrix} 120 & -40 & 90 \\ 100 & -80 & -10 \\ 200 & -60 & 150 \end{pmatrix}$$

MINICASO B

BANCA DE INVERSIÓN

El funcionario de una gran institución bancaria está planeando invertir $1 millón del fondo fiduciario de una familia durante el próximo año. El funcionario del fideicomiso ha identificado una cartera de acciones y otro grupo de bonos que podría seleccionar para invertir en ellos. El fideicomiso familiar puede invertirse en acciones o bonos, exclusivamente, o bien en una mezcla de los dos. El funcionario prefiere dividir el fideicomiso en incrementos de 10%; es decir, el fideicomiso familiar puede dividirse en 100% de acciones/0% de bonos, 90% de acciones/10% de bonos, 80% de acciones/20% de bonos, . . ., y así sucesivamente.

El funcionario del fideicomiso evaluó la relación existente entre los rendimientos sobre varias inversiones y las condiciones económicas generales. He aquí su juicio:

1 Si el próximo año se caracteriza por un sólido crecimiento de la economía, los bonos rendirán 12% y las acciones 20%.

2 Si el próximo año se caracteriza por inflación, los bonos producirán 18% y las acciones 10%.

3 Si el próximo año se caracteriza por estancamiento, los bonos rendirán 12% y las acciones 8%.

Se pide

a) Elaborar una tabla de pagos donde éstos representen el rendimiento anual en dólares, asociado a diversas estrategias de inversión y la ocurrencia de varias condiciones económicas.

b) Determinar la estrategia óptima de inversión por medio de los criterios maximax, maximín, de Hurwicz ($\alpha = 0.4$), de igual probabilidad y de arrepentimiento.

c) Suponga que una importante empresa de pronósticos económicos hace proyecciones de P(crecimiento sólido) = 0.4, P(inflación) = 0.25 y P(estancamiento) = 0.35. Por medio del criterio de valor esperado seleccione la estrategia más adecuada.

d) ¿Cuál es el valor esperado con información perfecta?

CAPÍTULO

12 FUNCIONES NO LINEALES

12.1 CUÁNDO SON INAPROPIADAS LAS FUNCIONES LINEALES
12.2 FUNCIONES CUADRÁTICAS Y SUS CARACTERÍSTICAS
12.3 FUNCIONES CUADRÁTICAS: APLICACIONES
12.4 OTRAS FUNCIONES NO LINEALES

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: EQUILIBRIO NO LINEAL Y ANÁLISIS DE UTILIDADES

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Distinguir entre las características de las funciones lineales y no lineales
- Lograr que el lector entienda las características algebraicas y gráficas de las funciones cuadráticas
- Dar ejemplos de varias aplicaciones de las funciones cuadráticas
- Ofrecer un panorama general de las características algebraicas y gráficas de las funciones polinomiales

Hasta ahora nos hemos concentrado primordialmente en las matemáticas lineales (en contraste con las matemáticas no lineales). Sin embargo, pese a la gran utilidad y comodidad que ofrece el primer tipo, existen varios fenómenos que no se comportan de modo lineal y, por lo mismo, no pueden aproximarse adecuadamente por medio de las funciones lineales. En el presente capítulo se hará una introducción a algunas de las funciones no lineales más comunes. Los objetivos de este capítulo son familiarizar al lector con ellas, darle ideas que le permitan prever el comportamiento de esos tipos de funciones y proporcionar

ejemplos de algunas áreas de aplicación donde se recurre a las funciones no lineales. En el capítulo 1 ya se habló de algunas de las formas de funciones no lineales.

12.1 CUÁNDO SON INAPROPIADAS LAS FUNCIONES LINEALES

Cualquier función de una variable que no se grafique como línea recta en dos dimensiones o cualquier función de dos variables que no se grafique como un plano en tres dimensiones puede considerarse como no lineal. En este libro, las ***funciones no lineales*** de una o dos variables pueden concebirse como funciones matemáticas que se grafican como líneas curvas en dos dimensiones y como superficies curvas en tres dimensiones. Aparte de este punto de vista geométrico las diferencias entre las funciones lineales y no lineales pueden considerarse en términos de ''respuestas''. En la ecuación

$$y = f(x) \tag{12.1}$$

si f es una función lineal, la variable dependiente y cambia en proporción directa con el cambio de la variable independiente x. Por ejemplo, en la función lineal

$$y = f(x) = -6x + 10 \tag{12.2}$$

y *disminuye* 6 unidades por cada unidad que aumente x. La pendiente de una función lineal es la tasa *constante* de cambio de la variable dependiente si la variable independiente se acrecienta una unidad.

En las funciones no lineales, la respuesta de la variable dependiente no se encuentra en proporción directa o exacta con los cambios de la variable independiente. He aquí un ejemplo: si

$$y = f(x) = x^2 \tag{12.3}$$

la variable dependiente y se calcula elevando al cuadrado el valor de la variable independiente x. Al sustituir unos cuantos valores de éste en la ecuación (12.3), se ve en la tabla 12.1 que, a medida que x aumenta de 0 a 1, el cambio de x, Δx (que se lee ''delta x''), y el cambio de y, Δy (que se lee ''delta y''), son iguales. Pero al aumentar x de 1 a 2, $\Delta x = 1$ y $\Delta y = 3$. De manera análoga, cuando x se incrementa de 2 a 3, y aumenta 5 unidades. Los cambios de y ni son constantes ni están en proporción *directa* con los de x. La figura 12.1 muestra estas respuestas.

Se dan muchas situaciones donde la relación de las variables es no lineal. Un buen ejemplo de ello es la *ley de los rendimientos decrecientes en la economía.*

TABLA 12.1 $y = f(x) = x^2$

x	y	Δx	Δy
0	0		
1	1	1	1
2	4	1	3
3	9	1	5

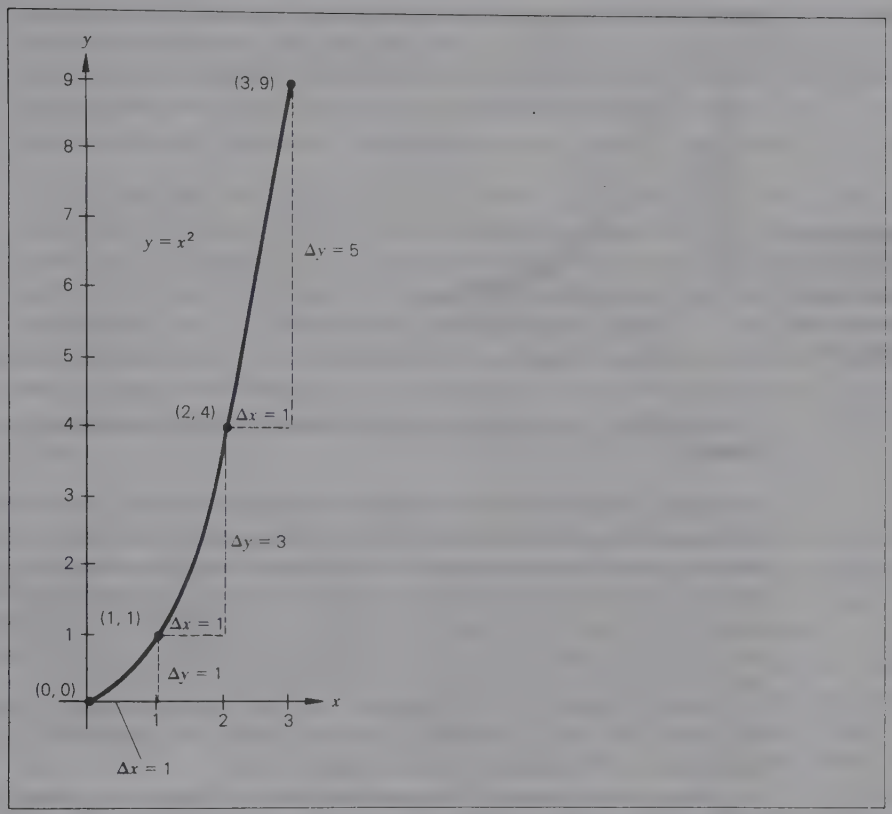


FIGURA 12.1

Un aumento de algunos insumos en relación con otros insumos fijos hará que aumente la producción total; pero después de un punto la producción extra resultante de las mismas adiciones de más insumos tiende a disminuir cada vez más. *

TABLA 12.2

Número de vendedores (n)	Δn	Ventas en dólares (S)	Ventas adicionales (ΔS)
0		0	0
1	1	$100 000	$100 000
2	1	210 000	110 000
3	1	330 000	120 000
4	1	430 000	100 000
5	1	500 000	70 000
6	1	530 000	30 000
7	1	540 000	10 000

*Paul A. Samuelson, *Economics*, 11a. ed. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1980, p. 25.

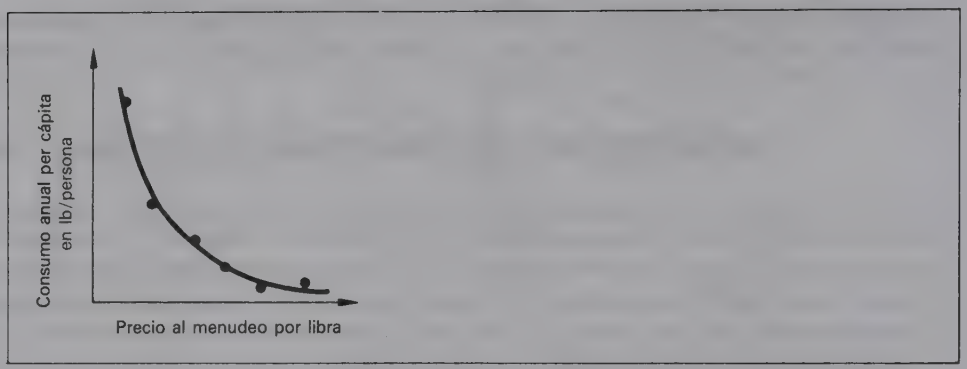


FIGURA 12.2 Relación de la demanda en el caso de las langostas.

EJEMPLO 1

Ley de los rendimientos decrecientes Un ejemplo de la ley de los rendimientos decrecientes pudiera ser la respuesta de las ventas de un producto ante los cambios del número de vendedores empleados o el nivel de los gastos destinados a la publicidad. Supóngase que una compañía de reciente creación ha establecido que cierta zona geográfica sea un distrito piloto de ventas para probar los productos nuevos. Una de sus preocupaciones principales es cuántos vendedores hay que asignar al distrito. Los analistas de la compañía sospechan que las ventas (en dólares), S, dependerán del número de vendedores, n, asignados al distrito. Esta relación podría representarse con la notación $S = f(n)$. Los analistas han hecho proyecciones de las ventas según varias cantidades de vendedores (véase la tabla 12.2).

Si se toma el número de vendedores como el *insumo* y las ventas como la *producción*, las ventas aumentan con cada vendedor más que se asigne. Pero si se examinan las ventas adicionales asociadas a cada uno de ellos, las *ventas adicionales* crecen hasta el tercer vendedor, pero empiezan a decrecer después. Puede afirmarse que el punto en que se asigna al distrito el cuarto vendedor es el punto de *rendimientos decrecientes*, aquel en que la producción extra o marginal (ventas) relacionada con los insumos adicionales (vendedores) merma en comparación con los rendimientos marginales de los insumos precedentes.

EJEMPLO 2

Los economistas han dedicado mucho tiempo a estudiar las leyes y el comportamiento de la *oferta* y la *demanda*. Según se dijo en el capítulo 3, una teoría sostiene que el determinante fundamental de la cantidad demandada de ciertos bienes de consumo es el precio que se les fije. Una representación general de esta relación por medio de una función es la siguiente:

$$q = f(p) \tag{12.4}$$

donde q = *número de unidades demandadas*
p = *precio por unidad*

En algunos casos la relación entre precio y cantidad demandada es lineal, aunque también puede aproximarse de manera razonable mediante una función lineal. Este caso se expuso en el capítulo 3. En otros casos, la relación es no lineal y no puede aproximarse satisfactoriamente por medio de una función lineal. La figura 12.2 contiene

una función de demanda para la venta de langostas en la región de Nueva Inglaterra. La curva continua es una aproximación a los puntos de datos recabados en una encuesta de gastos aplicada a un grupo de consumidores. La relación entre precio al menudeo y consumo anual per cápita es ostensiblemente no lineal.

He aquí la pregunta que el lector debería hacerse: ¿cuándo se recurrirá a una función lineal y cuándo a una función no lineal para representar la relación entre variables? La respuesta a esta pregunta depende que sea clara y explícita la estructura lógica de cómo se interrelacionan las variables. En el caso de que sea clara, la representación matemática debería adoptar la forma exacta de la relación. Un buen ejemplo de ello es la determinación de la función del ingreso total asociada a la venta de un producto. Si la firma vende cada unidad por el mismo precio p, el ingreso total R obtenido de la venta de q unidades se calcula así:

$$R = pq$$

En otras muchas situaciones, no se conoce con exactitud la forma en que se interrelacionan las variables. En tales casos, es preciso reunir los datos pertinentes aplicando el procedimiento apropiado de muestreo. Un ejemplo de este tipo de colección de datos se presenta en el ejemplo 2. Los puntos de datos muestrales se obtuvieron encuestando a los consumidores sobre las cantidades de langosta que esperaban adquirir según los distintos precios al menudeo. Una vez recabados los datos, el objetivo será identificar la función matemática que mejor "se ajuste" a ellos. Diversas formas de funciones, tanto lineales como no lineales, pueden ajustarse al mismo conjunto de puntos de datos y se llega a alguna decisión respecto a cuál forma aproxima más exactamente la relación indicada por los puntos de datos. La figura 12.3 contiene un conjunto

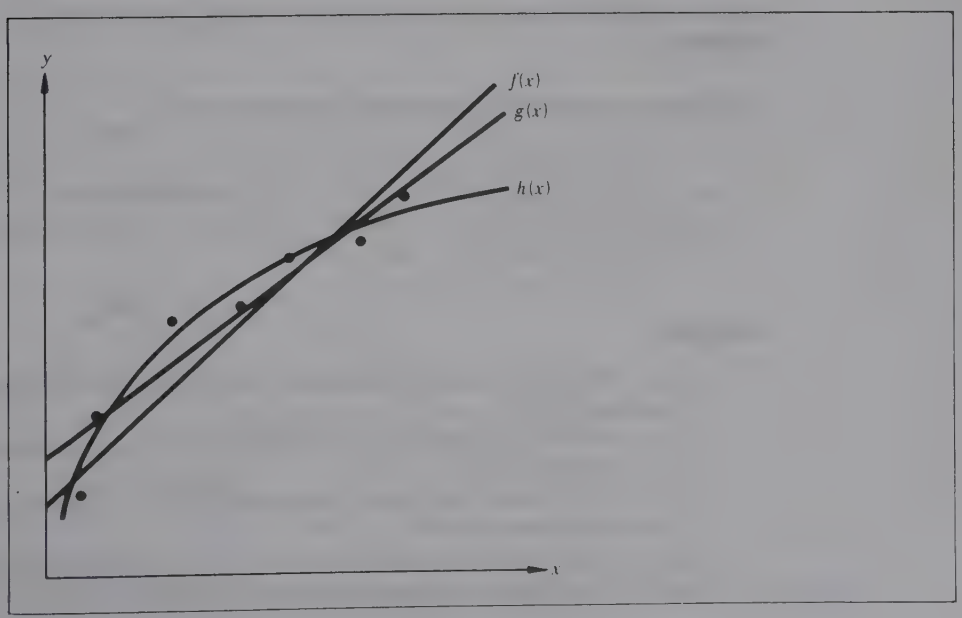


FIGURA 12.3 Ajuste de un conjunto de puntos de datos mediante diferentes funciones matemáticas.

de puntos de datos que han sido ajustados a tres funciones: dos lineales y una no lineal. Se dispone de diversos criterios que pueden aplicarse al determinar cuál función es la "mejor". Los métodos pueden incluir desde "echar un simple vistazo" a una curva para ajustar los puntos hasta técnicas estadísticas más rigurosas, entre ellas el análisis de regresión. Una vez identificada la función (modelo) matemática, puede iniciarse el análisis del modelo.

12.2 FUNCIONES CUADRÁTICAS Y SUS CARACTERÍSTICAS

Una de las funciones no lineales más comunes es la función cuadrática.

Forma matemática

DEFINICIÓN: FUNCIÓN CUADRÁTICA
Una ***función cuadrática*** que contenga la variable independiente x y la variable dependiente y presenta la forma general

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \textbf{(12.5)}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

¿Entiende el lector la razón por la cual el coeficiente de x^2 no puede ser igual a 0? Si $a = 0$ y b y c son no cero, la ecuación (12.5) se transforma en

$$y = bx + c$$

que es una función lineal, mientras $a \neq 0$, b y c pueden adoptar cualquier valor.

EJEMPLO 3

¿Cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas?

(*a*) $y = f(x) = 5x^2$
(*b*) $u = f(v) = -10v^2 - 6$
(*c*) $y = f(x) = 7x - 2$
(*d*) $g = f(h) = -6$
(*e*) $y = f(x) = x^2 + 10x$
(*f*) $y = f(x) = 6x^2 - 40x + 15$
(*g*) $y = f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$

SOLUCIÓN

a) $y = 5x^2$ es una función cuadrática. De acuerdo con la forma general de la ecuación (12.5), $a = 5$, $b = 0$ y $c = 0$.
b) $u = -10v^2 - 6$ es una función cuadrática donde, según la ecuación (12.5), $a = -10$, $b = 0$ y $c = -6$.
c) $y = 7x - 2$ *no* es una función cuadrática ya que no existe un término x^2 o, lo que es lo mismo $a = 0$.
d) $g = -6$ no es una función cuadrática por la misma causa que se señaló en *c*).
e) $y = x^2 + 10x$ es una función cuadrática, donde $a = 1$, $b = 10$ y $c = 0$.

f) $y = 6x^2 - 40x + 15$ es una función cuadrática donde $a = 6$, $b = -40$ y $c = 15$.

g) $y = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$ no es una función cuadrática por no tener la forma de la ecuación (12.5). Y ésta no es cuadrática porque contiene el término de tercer grado $2x^3$.

NOTA

La ecuación (12.5) tiene la misma forma que la presentada en el capítulo 1. En él dijimos que la forma general de una función cuadrática es

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad a_2 \neq 0 \tag{1.4}$$

Conviene señalar que las dos formulaciones [ecuaciones (1.4) y (12.5)] son equivalentes. Sólo se cambiaron los nombres de los coeficientes. Nos hallamos ante una preferencia personal del autor a fin de ajustarse a la notación usada a menudo para generalizar las funciones cuadráticas en otros textos.

Representación gráfica

Todas las funciones cuadráticas con la forma de la ecuación (12.5) se grafican como ***parábolas***. La figura 12.4 muestra dos parábolas que poseen distintas orientaciones. Una parábola que "se abre" hacia arriba, como la de la figura 12.4*a*, será ***cóncava hacia arriba.*** Una parábola que se "abre" hacia abajo como la de la figura 12*b*, será ***cóncava hacia abajo***.* Los puntos en que una parábola

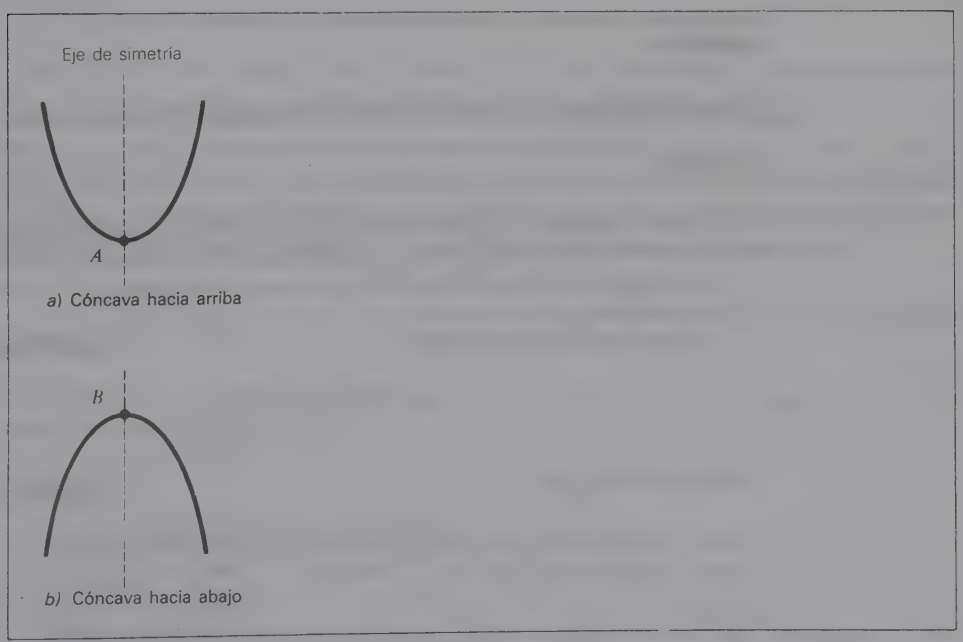


FIGURA 12.4 Parábolas.

*Véase en el capítulo 14 una explicación más completa de la *concavidad* de las funciones.

"se cierra" cuando es cóncava hacia arriba o "se abre" cuando es cóncava hacia abajo se llama ***vértice*** de la parábola. Los puntos A y B son los ***vértices*** respectivos de las dos parábolas de la figura 12.4.

NOTA
Puede demostrarse que las coordenadas del vértice de una parábola son

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

donde a, b y c son los parámetros de la ecuación (12.5).*

La línea vertical punteada que pasa por el vértice de cada parábola en la figura 12.4 es una línea imaginaria denominada ***eje de simetría***. La parábola se divide en dos mitades que son simétricas alrededor del eje de simetría. Es decir, si el lector enrolla un lado de la parábola usando el eje de simetría como perno, descubrirá que las dos mitades son imágenes especulares una de otra.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
Con la forma general de la función cuadrática expresada por la ecuación (12.5), ¿qué ecuación representa al eje de simetría? *Sugerencia*: Examine la forma general de las coordenadas del vértice.

EJEMPLO 4

Trace la gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = x^2$.

SOLUCIÓN

Para trazar cualquier función matemática que contenga dos variables, es necesario determinar el conjunto de puntos que satisfagan las funciones. Los valores muestra de x y los valores correspondientes de y se dan en al figura 12.5, junto con el dibujo de la parábola.

En esta función cuadrática, $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$. La coordenada x del vértice es

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} = 0$$

y la coordenada y es

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(0) - (0)^2}{4(1)} = 0$$

---

* Véase el ejercicio 12 al final del capítulo.

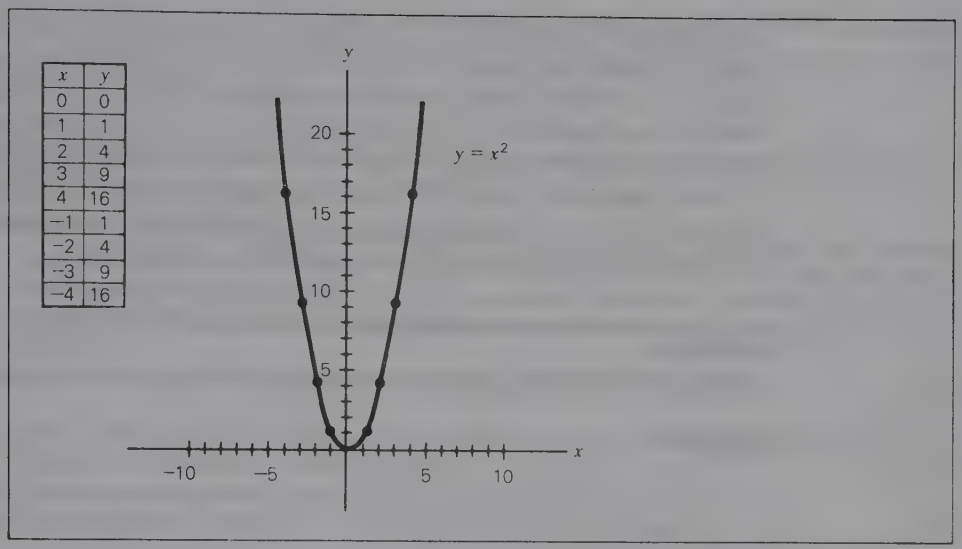


FIGURA 12.5
Gráfica de $y = f(x) = x^2$.

Puesto que (0, 0) es el vértice, el eje y es el eje de simetría. El lector podrá verificar la simetría alrededor del eje y si observa que los movimientos iguales a lo largo del eje x en ambos lados del vértice dan origen a los mismos valores de y. Por ejemplo, nótese que el valor de y es igual cuando x equivale a $+1$ o -1, $+2$ o -2, $+3$ o -3, y $+4$ o -4.

La figura 12.5 no es más que un *bosquejo* de la función. Cuantos más puntos de datos se identifiquen y se grafiquen, mayor exactitud tendrá el trazado de cualquier función.

Ideas especiales en el trazado de funciones cuadráticas

Si se conoce la forma cuadrática general de la ecuación (12.5), la concavidad de la parábola puede determinarse por el signo del coeficiente en el término x^2. Si ***a es positiva***, la función se graficará como una parábola que es ***cóncava hacia arriba***. Si ***a es negativa***, la parábola será ***cóncava hacia abajo***.

EJEMPLO 5

¿Cuál es la concavidad de la parábola que representa cada función cuadrática identificada en el ejemplo 3?

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $y = 5x^2$ es cóncava *hacia arriba* puesto que $a = +5$.
b) La gráfica de $u = -10v^2 - 6$ es cóncava *hacia abajo* puesto que $a = -10$.
c) La gráfica de $y = x^2 + 10x$ es cóncava *hacia arriba* pues $a = +1$.
d) La gráfica de $y = 6x^2 - 40x + 15$ es cóncava *hacia arriba*, ya que $a = +6$.

Conocer la concavidad y algunos otros puntos fundamentales de datos puede permitir un trazado rápido y fácil de la parábola que representa a una función cuadrática. Si se conoce la concavidad, se logra un bosquejo aproximado de la función si se conocen además 1) la localización del vértice, 2) la intersección con el eje y y 3) la intersección o intersecciones con el eje x.

En el capítulo 2 se definió la ***intersección con el eje y*** para una función como el punto donde ésta cruza el eje y. La coordenada y de la intersección con el eje y es el valor de y cuando x es igual a 0, o sea $f(0)$.

EJEMPLO 6

¿Cuáles son las intersecciones con el eje y para las funciones cuadráticas del ejemplo 3?

SOLUCIÓN

a) Para $y = 5x^2$, $f(0) = 0$, o sea que la intersección con el eje y ocurre en $(0, 0)$.
b) Cuando $u = -10v^2 - 6$, $f(0) = -6$, es decir, la intersección con el eje u ocurre en $(0, -6)$.
c) Con $y = x^2 + 10x$, $f(0) = 0$, o sea que la intersección con el eje y ocurre en $(0, 0)$.
d) Si $y = 6x^2 - 40x + 15$, $f(0) = 15$, o sea que la intersección con el eje y ocurre en $(0, 15)$.

La ***intersección con el eje x*** para una función también se definió en el capítulo 2 como el punto o puntos donde la función cruza el eje x. En forma equivalente, la intersección con el eje x representa el valor o valores de x cuando y es igual a 0. En el caso de funciones cuadráticas, puede haber una intersección con el eje x, dos intersecciones con el eje x y *ninguna* con el eje x. En la figura 12.6 se incluyen estas posibilidades.

Se dispone de varios métodos para determinar las intersecciones con el eje x en el caso de una función cuadrática, si es que existen. Las intersecciones con el eje x se obtienen determinando las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textbf{(12.6)}$$

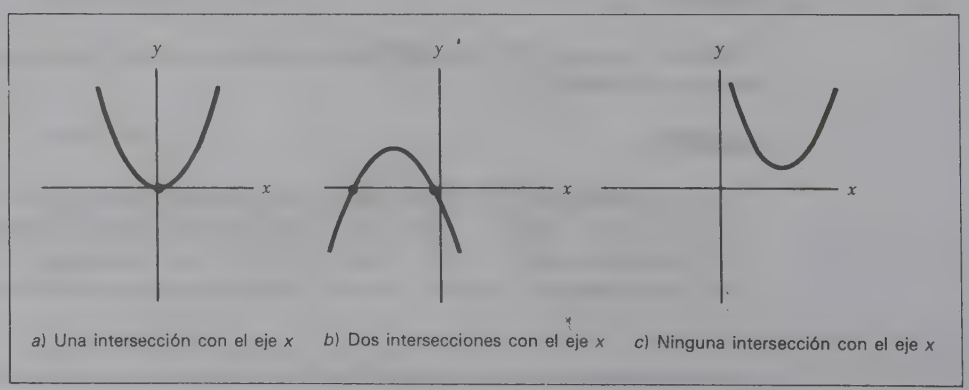


FIGURA 12.6 Posibilidades de la intersección con el eje x para las funciones cuadráticas.

Dos métodos con que se determinan las raíces de la ecuación (12.6) se explican en la sección A.6 del apéndice A al final del libro. Ambos se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7

Determinación de raíces por factorización Algunas funciones cuadráticas pueden factorizarse (sección A.3, apéndice A) en uno de dos: dos binomios o un binomio y un monomio. Si una función cuadrática puede ser factorizada, será fácil determinar las raíces de la ecuación (12.6). Por ejemplo, los valores de x que satisfacen la ecuación cuadrática

$$6x^2 - 2x = 0 \tag{12.7}$$

pueden determinarse factorizando primero $2x$ a partir de la expresión del miembro izquierdo de la ecuación, obteniéndose así

$$(2x)(3x - 1) = 0 \tag{12.8}$$

Se hace que cada factor sea igual a 0 y de ese modo las raíces de la ecuación se identifican como

$$2x = 0 \quad \text{o} \quad x = 0$$

y

$$3x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x = \tfrac{1}{3}$$

De manera análoga, los valores de x que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

se obtienen factorizando el miembro izquierdo de la ecuación, lo cual nos da

$$(x + 3)(x + 3) = 0$$

Cuando los factores se hacen igual a 0, se comprueba que el único valor que satisface la ecuación es $x = -3$.

Cuando una función cuadrática no puede ser factorizada, el método ilustrado en el ejemplo 7 no identifica las raíces de ella. Si se aplica la ***fórmula cuadrática***, siempre se identificarán las raíces verdaderas de la ecuación cuadrática *si es que existen*

RECORDATORIO DE ÁLGEBRA
La ***fórmula cuadrática***, que sirve para identificar las raíces de las ecuaciones de la forma de la ecuación (12.6), es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al utilizar la fórmula cuadrática, 1) si $b^2 - 4ac > 0$, habrá dos raíces reales; 2) si $b^2 - 4ac = 0$, habrá una raíz real; y 3) si $b^2 - 4ac < 0$, no habrá raíces reales (sección A.6).

EJEMPLO 8

En la función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 3.75$, las intersecciones con el eje x ocurren cuando $x^2 - x - 3.75 = 0$. En relación con la ecuación (12.6), se obtiene $a = 1$, $b = -1$, $c = -3.75$. Al sustituir estos valores de a, b y c en la fórmula cuadrática, las raíces de la ecuación se calculan así:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-3.75)}}{2(1)}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 15}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{1 \pm 4}{2}$$

o bien, usando el signo de más, se tiene

$$x = \tfrac{5}{2} = 2.5$$

Al utilizar el signo menos se obtiene

$$x = -\tfrac{3}{2} = -1.5$$

Así pues, hay dos valores de x que satisfacen la ecuación cuadrática. La parábola que representa la función cuadrática cruzará el eje x en (2.5, 0) y (−1.5, 0). Este caso se parece al de la figura 12.6*b*.

A continuación nos serviremos de la información conseguida hasta ahora para ejemplificar cómo puede realizarse el trazado de la función cuadrática cuando se conocen su concavidad, la localización del vértice, la intersección con el eje y y la intersección o intersecciones con el eje x.

EJEMPLO 9

Supóngase que queremos dibujar la función cuadrática $f(x) = 3x^2 + 6x - 45$. Puesto que $a = 3$ es mayor que 0, podemos afirmar de inmediato que la gráfica es una parábola cóncava *hacia arriba*. La coordenada y de la *intersección con el eje y* es $f(0)$, o sea −45. La intersección con el eje x puede identificarse factorizándola como

$$3x^2 + 6x - 45 = 0$$

o bien

$$(3x - 9)(x + 5) = 0$$

Haciendo cada factor igual a 0 se obtiene

$$3x - 9 = 0$$

cuando

$$x = 3$$

y

$$x + 5 = 0$$

cuando

$$x = -5$$

Así pues, la parábola cruza el eje x en (−5, 0) y (3, 0). Las coordenadas del vértice son (−1, −48) como se calculan a continuación.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(3)} = -1$$

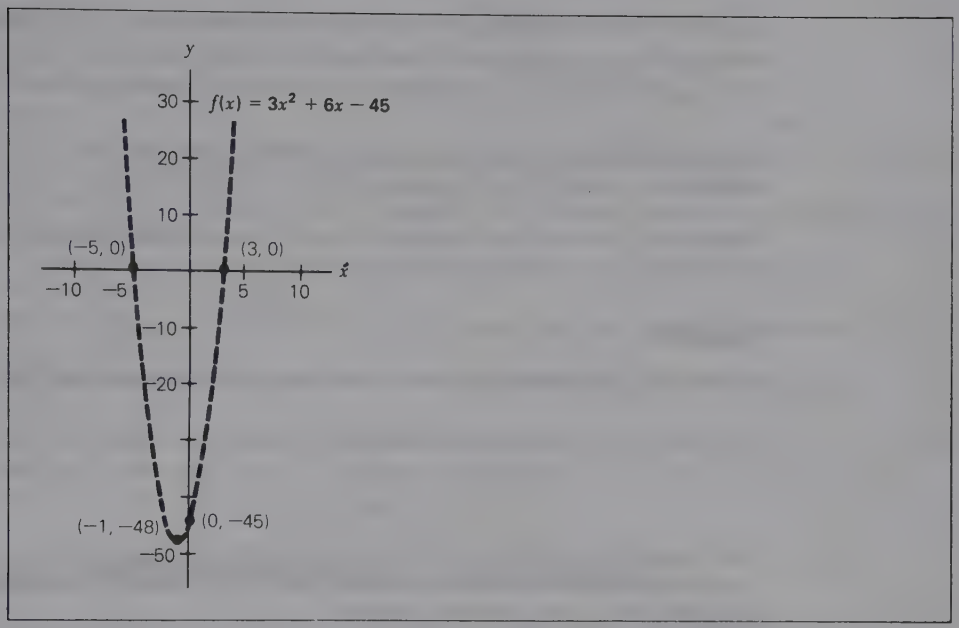


FIGURA 12.7
Gráfica de $f(x) = 3x_2 + 6x - 45$.

y

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(3)(-45) - (6)^2}{4(3)}$$

$$= \frac{-540 - 36}{12} = \frac{-576}{12} = -48$$

La parábola se traza en la figura 12.7.

NOTA
Por la simetría de las parábolas, siempre que una parábola tenga dos intersecciones con el eje *x*, las coordenadas *x* del vértice se encontrarán a la mitad entre las intersecciones con el eje *x*. Siempre que la parábola tiene una intersección con este último, el vértice se halla en ese punto.

En el ejemplo 9, la coordenada x del vértice se encontrará a la mitad entre $x = -5$ y $x = 3$, es decir en $x = -1$, que es el mismo valor que se obtuvo por medio de la fórmula.

Determinación de la ecuación de funciones cuadráticas

En el ejercicio 3 de la página 144 vimos que los parámetros a, b y c de una función cuadrática pueden determinarse si se conocen las coordenadas de los tres puntos que se encuentran en la gráfica de la función. Cuando las coorde-

nadas de los tres puntos se sustituyen en la ecuación (12.5), el resultado es un sistema de tres ecuaciones formuladas en términos de a, b y c. Los valores de esos parámetros pueden obtenerse al resolver simultáneamente las ecuaciones.

EJEMPLO 10

Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa por los puntos (1, 8), (3, 20) y (−2, 5).

SOLUCIÓN

Al sustituir las coordenadas de los tres puntos en la ecuación (12.5) se obtiene

$$8 = a(1)^2 + b(1) + c \quad \text{o} \quad a + b + c = 8 \qquad \textbf{(12.9)}$$

$$20 = a(3)^2 + b(3) + c \quad \text{o} \quad 9a + 3b + c = 20 \qquad \textbf{(12.10)}$$

$$5 = a(-2)^2 + b(-2) + c \quad \text{o} \quad 4a - 2b + c = 5 \qquad \textbf{(12.11)}$$

Verifique que la solución del sistema resultante de ecuaciones es $a = 1$, $b = 2$ y $c = 5$. Al sustituir este resultado en la ecuación (12.5), puede determinarse que la función que pasa por los tres puntos dados es

$$y = x^2 + 2x + 5$$

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Supóngase que se dan tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Luego de sustituirlos en la ecuación (12.5) para despejar a, b y c, ¿qué conclusión extraerá si no tiene solución el sistema de tres ecuaciones?

Ejercicios de seguimiento de la sección 12.2

En los ejercicios 1-14, determine qué funciones son cuadráticas y los valores de los parámetros a, b y c.

1 $f(x) = 6x^3 - 14x^2 - 28$
2 $f(w) = 5w^2 - 3w + 1000$
3 $f(t) = 5t^2/100 + 75$
4 $f(x) = x^{1/2} - 5x + 70$
5 $f(n) = (n^2 - 2n + 4)/5$
6 $f(u) = 3u^2 - 7u$
7 $f(r) = (16r^4)^{1/2} - r + 1$
8 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
9 $g(n) = (25 - 14n^2)/8$
10 $h(z) = (z - 3)^2$
11 $n(t) = (t - 3)(t + 5)$
12 $v(r) = r(r - 5)(r + 6)$
13 $f(u) = \sqrt{(u - 5)^4}$
14 $f(w) = (5 - 2w)(w + 3)$

En los ejercicios 15-30, determine la concavidad de la parábola que representa la función cuadrática, su intersección con el eje y, sus intersecciones con el eje x si las hay y las coordenadas del vértice. Dibuje la parábola.

15 $f(x) = -6x^2$
16 $f(x) = -x^2 + 6x - 40$
17 $f(x) = 5x^2 - 12x + 8$
18 $f(x) = x^2 + 10x - 5$
19 $f(x) = -x^2 - 8x + 20$
20 $f(x) = 2x^2 + 4x + 7$
21 $f(x) = x^2 - 0.5x - 5$
22 $f(x) = 25x^2 + 8x - 12$
23 $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$
24 $f(x) = -x^2 + 16$

25 $f(x) = -4x^2 + 36$

26 $f(x) = 10x^2 - 16$

27 $f(x) = \frac{x^2}{2} - 10x$

28 $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 24x$

29 $f(x) = -x^2 - 5x$

30 $f(x) = -10 + 5x + 16x^2$

31 Trace las tres siguientes funciones cuadráticas; señalando los valores de $|a|$ para cada una y la pendiente relativa de las tres parábolas.

32 Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa por los puntos (0, 10), (1, 6) y (− 2, 24).

33 Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa por los puntos (1, − 1), (− 3, − 33) y (2, − 8).

34 Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa por los puntos (− 3, 3), (0, 0) y (4, − 4).

35 Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa por los puntos (0, − 4), (3, 5) y (− 2, 0).

36 Determine la ecuación cuadrática que pasa por los puntos (1, 2), (− 5, − 64) y (3, − 8).

12.3 FUNCIONES CUADRÁTICAS: APLICACIONES

En la presente sección se darán ejemplos que ilustran algunas áreas de aplicación de las funciones cuadráticas.

EJEMPLO 11

Funciones cuadráticas de ingresos A menudo la demanda del producto de una firma puede describirse en función del precio que le fija. Supóngase que la empresa ha descubierto que la cantidad demandada de uno de sus productos depende del precio. La función que describe esta relación es

$$q = f(p)$$

o bien

$$q = 1\,500 - 50p$$

donde q es la cantidad demandada en miles de unidades y p indica el precio en dólares.

El ingreso total R logrado con la venta de q unidades se formula como el producto de p y q, es decir,

$$R = pq$$

Puesto que q se expresa en función de p, el ingreso total se formulará en función del precio, o sea

$$\begin{aligned} R &= h(p) \\ &= p \cdot f(p) \\ &= p(1{,}500 - 50p) \\ &= 1{,}500p - 50p^2 \end{aligned}$$

El lector deberá reconocer esto como una función cuadrática. La función del ingreso total se dibuja en la figura 12.8. Obsérvese que el dominio restringido (véase el capítulo 1) de la función consta de los valores no negativos de p. ¿Tiene sentido esto?

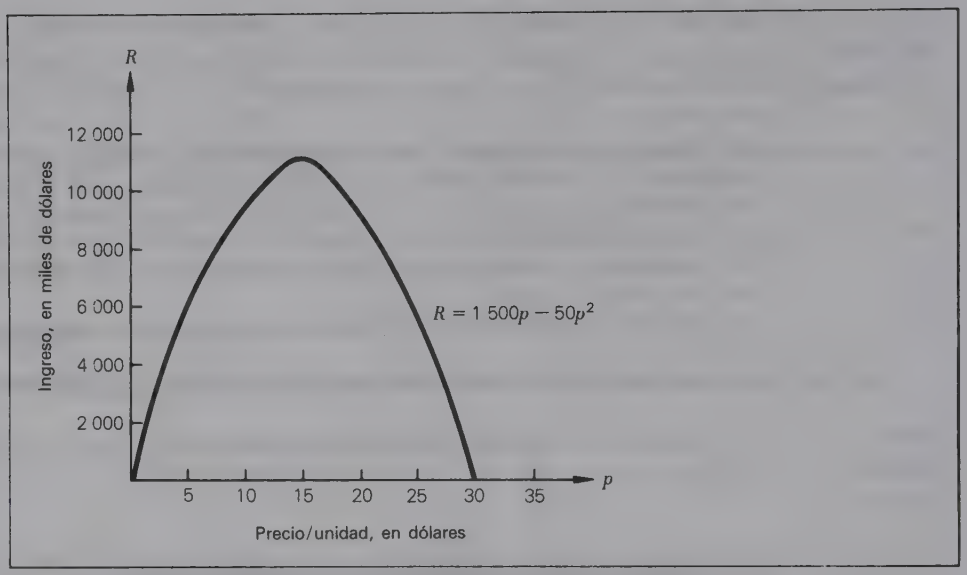


FIGURA 12.8 Función cuadrática del ingreso.

El ingreso total esperado al cobrar determinado precio se calculará sustituyendo el valor de p en la función del ingreso total. Por ejemplo, el ingreso total correspondiente al precio de \$10 es

$$\begin{aligned} h(10) &= 1\,500(10) - 50(10)^2 \\ &= 15\,000 - 5\,000 = \$10\,000 \end{aligned}$$

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Dadas las intersecciones con el eje x en la figura 12.8, ¿qué valor de p produce el valor máximo de R? ¿Cuál es el máximo ingreso total esperado? ¿Qué cantidad se demandará a ese precio? ¿Qué sucederá si $p > 30$?

EJEMPLO 12

Funciones cuadráticas de la oferta Las encuestas de mercado administradas a los proveedores de un producto en particular llevaron a la conclusión de que la forma de la función de la oferta (véase el capítulo 3) es cuadrática. A los proveedores se les preguntó qué cantidades estarían dispuestos a ofrecer a distintos precios de mercado. Los resultados de la encuesta revelaron que, con los precios de \$25, \$30 y \$40, las cantidades que los proveedores estarían dispuestos a ofrecer en el mercado serían 112.5, 250.0 y 600.0 unidades (en miles), respectivamente. Al aplicar el procedimiento descrito en el ejemplo 10, se determinará la ecuación de la función cuadrática de la oferta, con sólo sustituir las tres combinaciones de precio-cantidad en la ecuación general

$$q_s = f(p)$$

o bien

$$q_s = ap^2 + bp + c$$

Se obtiene el sistema resultante de ecuaciones

$$\begin{aligned} 625a + 25b + c &= 112.5 \\ 900a + 30b + c &= 250 \\ 1\,600a + 40b + c &= 600 \end{aligned}$$

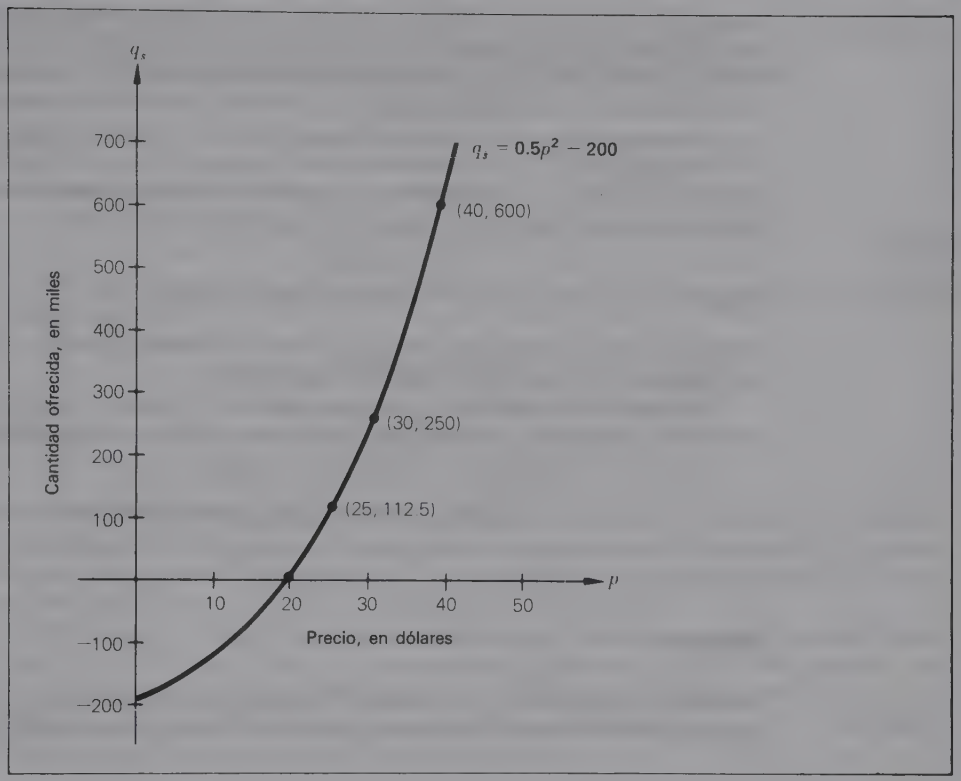


FIGURA 12.9 Función cuadrática de la oferta.

el cual, al ser resuelto, produce valores de $a = 0.5$, $b = 0$ y $c = -200$. En consecuencia, la función cuadrática de la oferta, que se da en la figura 12.9, está representada por la ecuación

$$q_s = f(p) = 0.5p^2 - 200$$

La cantidad ofrecida a cualquier precio de mercado puede determinarse sustituyendo el precio en la función de oferta. Así, la cantidad de la oferta a un precio de \$50 será

$$f(50) = 0.5(50)^2 - 200$$
$$= 0.5(2\,500) - 200 = 1\,250 - 200 = 1\,050 \text{ unidades (en miles)}$$

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

¿Cuál es el dominio restringido de la función de la oferta? ¿Es el mismo que se indicó en la figura 12.9? Interprete el significado de la intersección con el eje *x*. ¿Parece razonable esa interpretación? Interprete el significado de la intersección con el eje *y*. ¿Parece razonable esta interpretación?

EJEMPLO 13

Funciones cuadráticas de la demanda En relación con el ejemplo anterior, se llevó a cabo una encuesta entre los consumidores con el fin de determinar la función de la demanda del mismo producto. Los investigadores preguntaron a los consumidores si

comprarían el producto a diversos precios y con sus respuestas prepararon estimaciones de la demanda de mercado a varios precios. Luego de graficar los puntos de datos de la muestra se llegó a la conclusión de que la relación de la demanda estaba representada en forma óptima por una función cuadrática. Los investigadores concluyeron que la representación cuadrática era válida para precios comprendidos entre \$5 y \$45.

Tres puntos de datos escogidos para "ajustar" la curva fueron (5, 2025), (10, 1600) y (20, 900). Al sustituirlos en la ecuación general de una función cuadrática y resolver simultáneamente se obtiene la función de demanda

$$q_d = g(p)$$

o bien

$$q_d = p^2 - 100p + 2\,500$$

donde p es el precio de venta en dólares y q_d denota la demanda expresada en miles de unidades. La figura 12.10 muestra la función de demanda.

La cantidad demandada a cualquier precio se calculará al sustituir el precio en la función de demanda. Por ejemplo, a un precio de \$30, la cantidad demandada será

$$g(30) = (30)^2 - 100(30) + 2\,500$$
$$= 900 - 3\,000 + 2\,500 = 400 \text{ unidades (en miles)}$$

EJEMPLO 14

Equilibrio entre oferta y demanda El equilibrio del mercado entre la oferta y la demanda puede estimarse para las funciones de oferta y demanda en los dos últimos

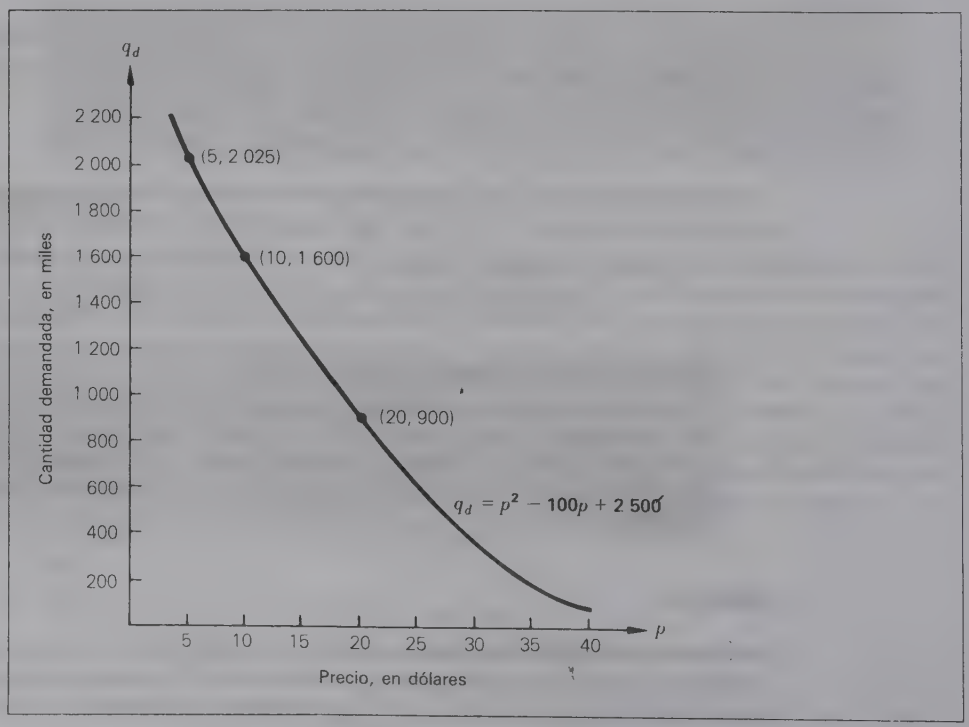


FIGURA 12.10 Función cuadrática de la demanda.

ejemplos, con sólo determinar el precio de mercado que iguale a la cantidad ofrecida y la cantidad demandada. Esta condición se expresa con la ecuación

$$q_s = q_d$$

o bien

$$0.5p^2 - 200 = p^2 - 100p + 2\,500$$

La ecuación puede rearreglarse de modo que

$$0.5p^2 - 100p + 2\,700 = 0 \qquad \textbf{(12.12)}$$

La fórmula cuadrática se empleará para determinar las raíces de la ecuación (12.12) como sigue:

$$p = \frac{-(-100) \pm \sqrt{(-100)^2 - 4(0.5)(2\,700)}}{2(0.5)}$$

$$= \frac{100 \pm \sqrt{4\,600}}{1} = 100 \pm 67.82$$

Los dos valores de p que satisfacen la ecuación (12.12) son $p = \$32.18$ y $p = \$167.82$. La segunda raíz se encuentra fuera del dominio relevante de la función de demanda y, por tanto, carece de significado. Sin embargo, $q_s = q_d$ cuando el precio de venta es de \$32.18.

Al sustituir $p = 32.18$ en las funciones de oferta y demanda se producen los valores de $q_s = 317.77$ y $q_d = 317.55$. (El redondeo es la razón de la diferencia existente entre ambos valores.) Así pues, se alcanza el equilibrio del mercado cuando el precio de mercado es igual a \$32.18 y la cantidad ofrecida y demandada es 317 770 unidades. En la figura 12.11 se incluyen las dos funciones.

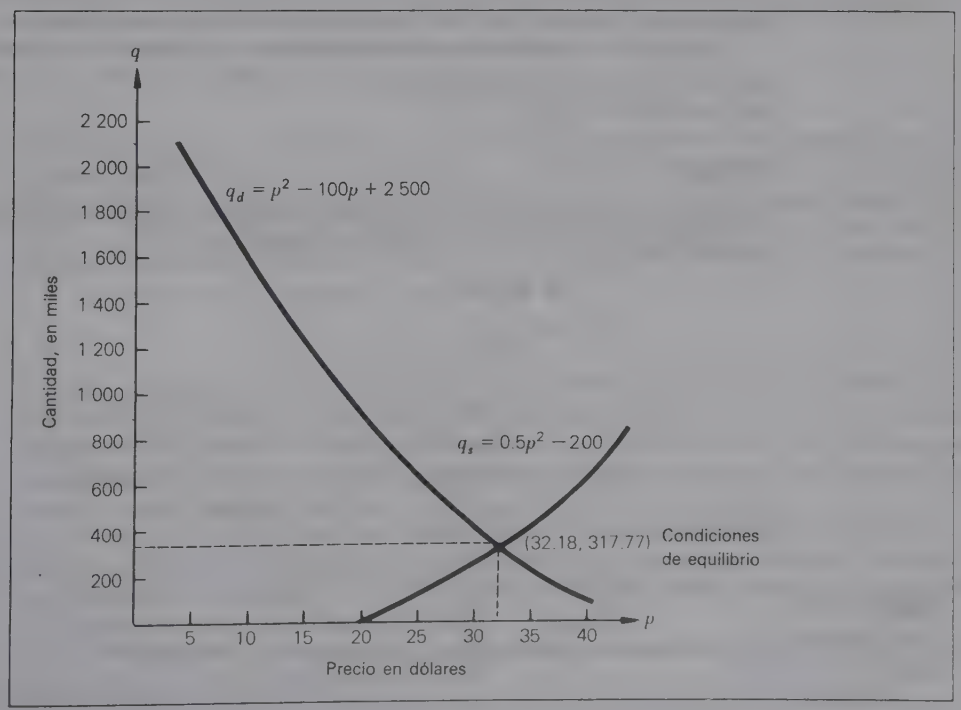


FIGURA 12.11 Equilibrio entre oferta y demanda.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Por qué hubo dos raíces de la ecuación (12.12)?

EJEMPLO 15

Respuesta de urgencia: modelo de ubicación La figura 12.12 muestra las ubicaciones relativas de tres ciudades a lo largo de una carretera costera. Se trata de lugares muy populares de veraneo y su población crece muchísimo en los meses de verano. Las tres ciudades piensan que su servicio de rescate y de atención médica es insuficiente durante la temporada vacacional. Han decidido apoyar de modo conjunto un servicio de atención en casos de urgencia que enviará camiones de rescate y paramédicos bien adiestrados. La pregunta básica se refiere a la ubicación del servicio.

Al elegir la ubicación, se ha aceptado que la distancia entre el servicio y las ciudades deberá ser lo más corta posible, a fin de garantizar tiempos rápidos de respuesta. Otra consideración es el tamaño de la población veraniega de cada ciudad, pues ésta es una medida de la posible necesidad de los servicios de respuesta ante las urgencias. Cuanto más grande sea la población veraniega de una ciudad, mayor será el deseo de situar el servicio cerca de ella. Los analistas han decidido que el criterio para seleccionar la ubicación es reducir al mínimo la suma de los productos de las poblaciones veraniegas de cada ciudad y elevar el cuadrado la distancia existente entre la ciudad y el servicio. Esto puede expresarse más sucintamente así:

$$\text{Minimice } S = \sum_{j=1}^{3} p_j d_j^2$$

donde p_j es la población veraniega de la ciudad j, expresada en miles, y d_j es la distancia entre la ciudad j y el servicio de rescate.

Si las poblaciones veraniegas son, respectivamente, 150 000, 100 000 y 200 000 para las tres ciudades, calcule la expresión general correspondiente a S. (*Sugerencia: sea x la ubicación del servicio en relación con el punto cero de la escala de la figura 12.12 y sea x_j la ubicación de la ciudad j.* La distancia entre la ciudad j y el servicio se calcula por medio de la ecuación $d_j = (x - x_j)$.)

SOLUCIÓN

Cuando x se define como la ubicación desconocida del servicio propuesto, S se expresará en función de x. La función se define así:

$$\begin{aligned} S &= f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{3} p_j (x - x_j)^2 \\ &= 150(x - 12)^2 + 100(x - 20)^2 + 200(x - 30)^2 \\ &= 150x^2 - 3\,600x + 21\,600 + 100x^2 - 4\,000x \\ &\quad + 40\,000 + 200x^2 - 12\,000x + 180\,000 \end{aligned}$$

o bien $$S = 450x^2 - 19\,600x + 241\,600$$

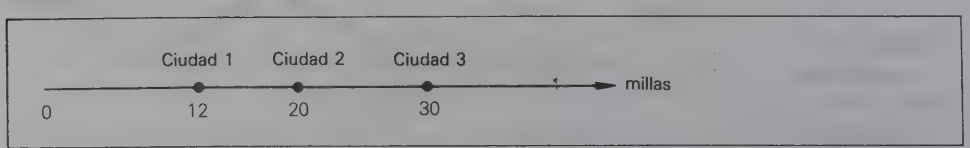


FIGURA 12.12 Ubicación relativa de las ciudades.

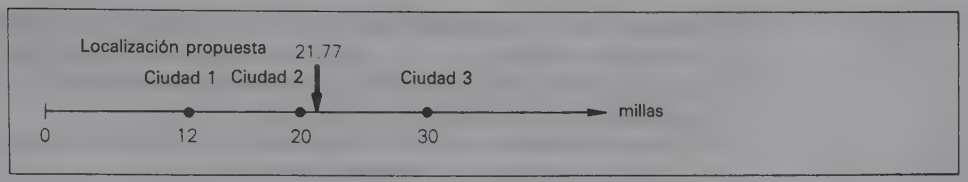


FIGURA 12.13 Ubicación óptima del servicio de respuesta a urgencias.

Nótese que esta función es la forma cuadrática, y se graficará como una parábola que es cóncava hacia arriba. S será minimizada en el vértice de la parábola o donde

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-19\,600)}{2(450)}$$
$$= \frac{19\,600}{900} = 21.77$$

De acuerdo con la figura 12.13, el servicio de respuesta a urgencias se instalará a 21.77 millas a la derecha del punto cero, o sea a 1.77 millas a la derecha de la ciudad 2.

En el capítulo 14 reconsideraremos este ejemplo y lo resolveremos con otro método.

Ejercicios de seguimiento de la sección 12.3

1 La función de demanda de un producto particular es

$$q = f(p) = 500\,000 - 3\,000p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total, donde R es una función de p o sea $R = g(p)$. ¿Cuál es la concavidad de la función? ¿Cuál es la intersección con el eje y? ¿Cuál es el ingreso total con un precio de $20? ¿Cuántas unidades serán demandadas a este precio? ¿A qué precio se maximizará el ingreso total? (*Sugerencia*: ¿corresponde el vértice al R máximo?)

2 La función de demanda de un producto es

$$q = f(p) = 1\,800 - 7.5p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total donde R es una función de p, es decir, $R = g(p)$. ¿Cuál es la concavidad de la función? ¿Cuál es la intersección con el eje y? ¿Cuál es el ingreso total con un precio de $50? ¿Cuántas unidades serán demandadas a este precio? ¿A qué precio el ingreso total será maximizado? (*Sugerencia*: ¿corresponde el vértice al R máximo?)

3 La función de demanda de un producto es

$$q = f(p) = 20\,000 - 25p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total, donde R es una función de p, o sea $R = g(p)$. ¿Cuál es la concavidad de la función? ¿Cuál es la intersección con el eje y? ¿Cuál es el ingreso total con un precio de $60? ¿Cuántas unidades serán demandadas a este precio? ¿A qué precio se maximizará el ingreso total?

4 El ingreso total del ejercicio 1 puede expresarse en términos del precio p o la demanda q. Reformule el ingreso total en función de q en vez de p. Dicho de otra manera, determine la función $R = h(q)$. (*Sugerencia*: despeje p en la función de demanda y multiplique esta expresión por q.)

5 En el ejercicio 2, reformule la función del ingreso total en términos de q. (Véase una sugerencia en el ejercicio 3.)

6 En el ejercicio 3, reformule la función del ingreso total en términos de q.

7 La función de oferta $q_s = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que se encuentran en ella son (60, 2750), (70, 6000) y (80, 9750).

a) Determine la ecuación de la función.

b) Haga las observaciones que pueda sobre el dominio pertinente de la función.

c) Calcule e interprete la intersección con el eje x.

d) ¿Qué cantidad se ofrecerá a un precio de \$75?

8 La función de oferta $q_s = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que se encuentran en la función son (30, 1500), (40, 3600) y (50, 6300).

a) Determine la ecuación de la función de oferta.

b) Haga las observaciones que pueda sobre el dominio pertinente de la función.

c) Calcule e interprete la intersección con el eje x.

d) ¿Qué cantidad será ofrecida con un precio de \$60?

9 La función de oferta $q_s = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que se encuentran en ella son (40, 600), (50, 3300) y (80, 15000).

a) Determine la ecuación de esta función.

b) Haga las observaciones que pueda sobre el dominio pertinente de la función.

c) Calcule e interprete la intersección con el eje x.

d) ¿Qué cantidad será ofrecida a un precio de \$100?

10 La función de demanda $q_d = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que se encuentran en ella son (10, 2700), (20, 1200) y (30, 300). Determine la ecuación correspondiente a la función de demanda. ¿Qué cantidad se demandará a un precio de mercado de \$25?

11 La función de demanda $q_d = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que se encuentran en ella son (5, 1600), (10, 900) y (20, 100). Determine la ecuación de la función de demanda. ¿Qué cantidad será demandada a un precio de mercado de \$15?

12 La función de demanda $q_d = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que se encuentran en ella son (10, 3800), (30, 1000) y (15, 2800). Determine la ecuación de la función de demanda. ¿Qué cantidad será demandada a un precio de mercado de \$25?

13 Las funciones de demanda y oferta de un producto son $q_s = p^2 - 400$ y $q_d = p^2 - 40p + 2600$. Determine el precio y cantidad del equilibrio del mercado.

14 Las funciones de oferta y demanda de un producto son $q_s = 4p^2 - 500$ y $q_d = 3p^2 - 20p + 1000$. Determine el precio y cantidad del equilibrio del mercado.

15 En el ejemplo 15, suponga que el criterio es minimizar la suma de los cuadrados de las distancias que separan el servicio de respuestas a urgencias y las tres ciudades; es decir,

$$S = \sum_{j=1}^{3} d_j^2$$

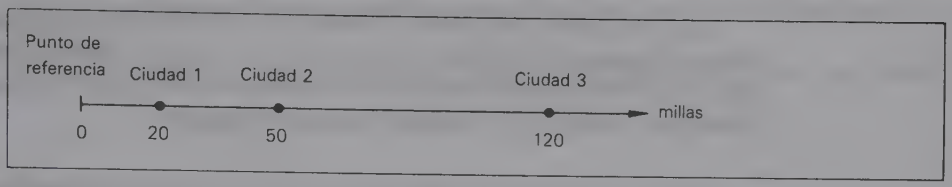
a) Determine la función de distancia $S = f(x)$.

b) Determine la ubicación que minimice S.

16 ***Organización para la conservación de la salud*** La figura 12.14 contiene las localizaciones relativas de tres ciudades. Una gran organización para la conservación de la salud desea construir una clínica satélite para dar servicio a las tres ciudades. La ubicación de la clínica x deberá ser tal que se minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre la clínica y cada ciudad. Este criterio puede formularse así:

$$\text{Minimice } S = \sum_{j=1}^{3} (x_j - x)^2$$

FIGURA 12.14



donde x_j es la ubicación de la ciudad j y x es la de la clínica. *a*) Determine la función de distancia $S = f(x)$. *b*) Determine la ubicación que minimice a S.

12.4 OTRAS FUNCIONES NO LINEALES

Funciones polinomiales

Las funciones lineales y cuadráticas son ejemplos del conjunto general de las funciones denominadas ***funciones polinomiales***.

DEFINICIÓN: FUNCIÓN POLINOMIAL

La ***función polinomial*** de n grado que contenga a la variable independiente x y a la variable dependiente y presenta la forma general

$$y = f(x)$$

donde

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \textbf{(12.13)}$$

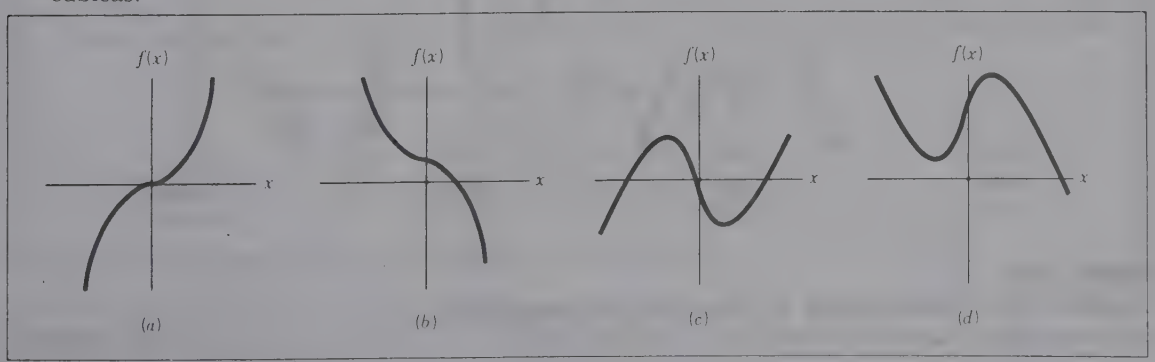
a_j es un número real para cada j, n es un entero positivo y $a_n \neq 0$.

El grado de un polinomio es el exponente del término de la potencia más alta de la expresión. Una función lineal es una ***función polinomial de primer grado***; en cambio, una función cuadrática es una ***función de segundo grado.*** Una ***función de tercer grado*** como

$$y = x^3 - 2x^2 + 5x + 10$$

recibe el nombre de ***función cúbica.***

FIGURA 12.15
Características gráficas de las funciones cúbicas.



Las funciones cúbicas de la forma $y = f(x)$ tienden a exhibir un comportamiento semejante a las de la figura 12.15. Aunque aprenderemos más sobre las características gráficas de las funciones en los siguientes capítulos, exploraremos un atributo de las funciones polinomiales.

ATRIBUTO DE DIRECCIÓN FINAL

La ***dirección definitiva (final)*** de una función f designa el comportamiento de $f(x)$ a medida que x adopta valores positivos cada vez más grandes y valores negativos crecientes. En el caso de las funciones polinomiales el comportamiento final de $f(x)$ depende del comportamiento del término de potencia más alta de la función. Esto se basa en la observación de que, al hacerse x más positiva (o negativa), con el tiempo el término de la mayor potencia contribuirá más al valor de $f(x)$ que el resto de los que constituyen la función.

En las funciones polinomiales de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

el comportamiento final depende del término $a_n x^n$. En la figura 12.16 se dan las diversas posibilidades. El signo de a_n y también el hecho de que n sea impar o par son factores importantes al determinar la dirección definitiva. Cuando n es *par*, $x^n > 0$ para x positiva o negativa; en tales casos el coeficiente a_n determina el signo de $a_n x^n$. Cuando n es *impar*, $x^n > 0$ si $x > 0$ y $x^n < 0$ si $x < 0$. También aquí a^n determina el signo de $a_n x^n$; sin embargo, $f(x)$ sigue a la postre direcciones diferentes cuando $x > 0$ y $x < 0$.

Si observamos la figura 12.15, los casos (a) y (c) representan funciones cúbicas donde $a_3 > 0$, y los casos (b) y (d) representan aquellas en que $a_3 < 0$.

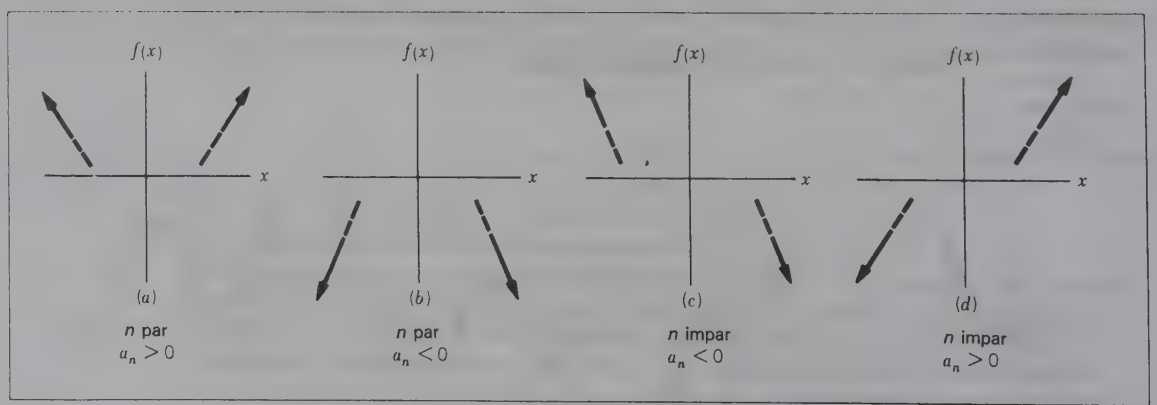


FIGURA 12.16
Atributos de dirección final de las funciones polinomiales con la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

EJEMPLO 16

En las siguientes funciones polinomiales, determine la dirección final de $f(x)$ y trace f.

$$(a)\quad f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{8} - 2.5x^3 \qquad (b)\quad g(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2 + 10$$

SOLUCIÓN

a) La dirección final de $f(x)$ se determina por medio del término $x^5/5$. A medida que x asume valores cada vez mayores (positivos y negativos), este término con el tiempo se torna dominante en la determinación del valor de $f(x)$. Como su exponente es impar y el coeficiente $(\frac{1}{5})$ es positivo, la dirección final corresponde a la situación de la figura 12.16*d*. Los valores positivos de x producen valores positivos para $f(x)$; los valores negativos de x dan origen a valores también negativos en $f(x)$.

Si suficientes números de valores de x se sutituyen en f y si se grafican los pares ordenados resultantes, el trazado de f deberá ser como el que se advierte en la figura 12.17.

b) La dirección final de $g(x)$ se determina por el término $x^4/4$. El grado de este término es par y el coeficiente $(\frac{1}{4})$ es positivo, de manera que la dirección final corresponderá a la situación descrita en la figura 12.16*a*. *Tanto* los valores positivos *como* los negativos de x producen valores positivos para $f(x)$. Si se identifican y grafican bastantes pares ordenados de valores que satisfagan g, la gráfica de g deberá ser como la que se da en la figura 12.18.

NOTA
El comportamiento de las funciones polinomiales entre las "colas" de la dirección final puede determinarse con mayor facilidad que mediante el método de la "fuerza bruta" consistente en graficar muchos pares ordenados. En el capítulo 14 esto se examinará con más detalle.

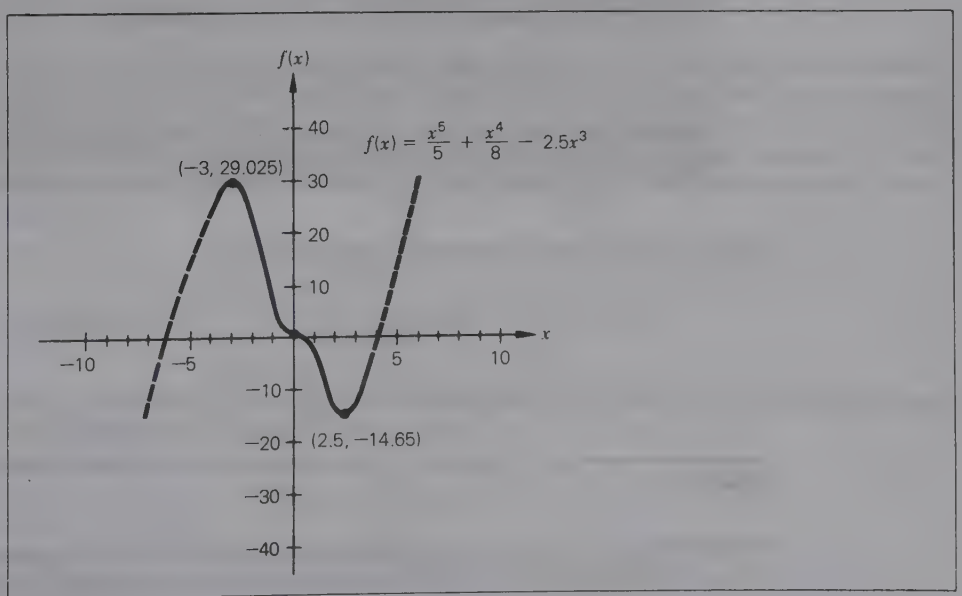


FIGURA 12.17

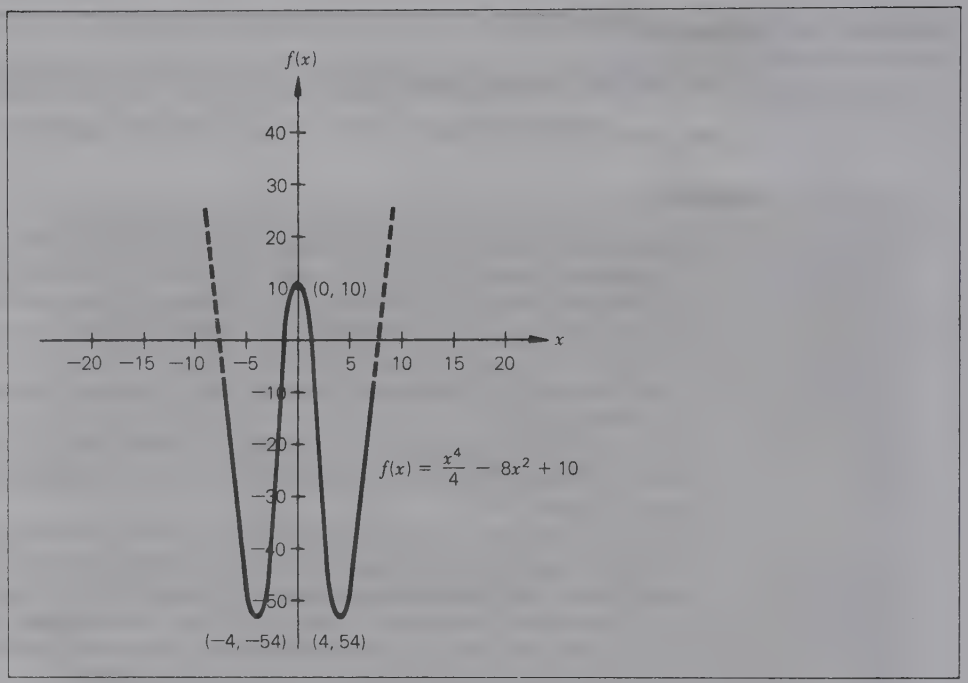


FIGURA 12.18

Funciones racionales

Según se mencionó en el capítulo 1, las ***funciones racionales*** son las que se expresan en forma de ***razón*** o cociente de dos polinomios.

DEFINICIÓN: FUNCIÓN RACIONAL
Una ***función racional*** presenta la forma general

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

donde g es una función polinomial de n-ésimo grado y h es una función polinomial no cero de m-ésimo grado.

He aquí dos ejemplos de este tipo de función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \qquad x \neq 2, -2$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 5x + 10}{x} \qquad x \neq 0$$

EJEMPLO 17

Rehabilitación A menudo los fisioterapeutas descubren que el proceso de rehabilitación se caracteriza por un efecto de rendimientos decrecientes. Es decir, la recupe-

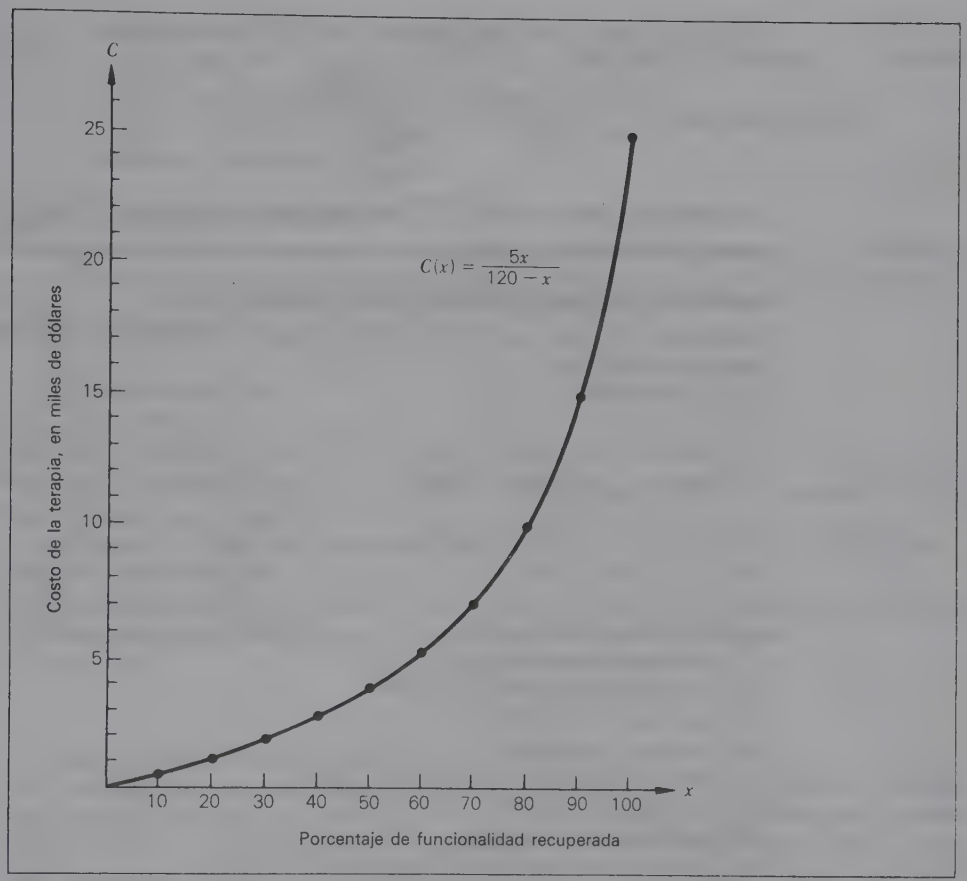


FIGURA 12.19 Costo de la rehabilitación.

ración de la funcionalidad suele aumentar con la duración del programa terapéutico, pero con el tiempo el mejoramiento es cada vez menor en relación con los esfuerzos adicionales del programa. Para una incapacidad particular, los terapeutas han ideado una función matemática que describe el costo C de un programa terapéutico en función del porcentaje de la funcionalidad recuperada, x. La función es racional y presenta la forma

$$C = f(x)$$

o bien

$$C = \frac{5x}{120 - x} \qquad 0 \le x \le 100$$

donde C se mide en miles de dólares. Por ejemplo, el costo de la terapia para lograr una recuperación del 10% se estima en

$$f(10) = \frac{5(10)}{120 - 10}$$

$$= \frac{50}{110} = 0.454 \text{ (miles de dólares)}$$

El costo de lograr una recuperación del 60% se calcula en

$$f(60) = \frac{5(60)}{120 - 60}$$

$$= \frac{300}{60} = 5.0 \text{ (miles de dólares)}$$

La gráfica de esta función del costo aparece en la figura 12.19.

Ejercicios de seguimiento de la sección 12.4

En los ejercicios 1-16, *a*) determine el grado de la función y *b*) determine la dirección final de la función.

1 $f(x) = -x^3/4$
2 $f(x) = -x^5/2$
3 $f(x) = x^6$
4 $f(x) = -x^4$
5 $f(x) = x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 5x$
6 $f(x) = x^8 - 2x^6 + x^5 - 10x$
7 $f(x) = x^7 - x^3 + x^2 - 1{,}000$
8 $f(x) = x^{10} - 5x^4 - 100$
9 $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x - 4)/7$
10 $f(x) = x^{12} - \frac{5}{2}x^6 + 1$
11 $f(x) = -5x^8 + 2x^3$
12 $f(x) = -3x^{15} + 12x^{14} - 1$
13 $f(x) = -(x + 1)^3$
14 $f(x) = -(x - 2)^4$
15 $f(x) = (2x^3 - 4x)^2$
16 $f(x) = -(x - 2x^4)^3$

17 Grafique la función $f(x) = -x^3$.
18 Grafique la función $f(x) = -x^5$.
19 Grafique la función $f(x) = x^6$.
20 Grafique la función $f(x) = -x^4$.
21 Grafique la función $f(x) = 5x^5 - 10$.
22 Grafique la función $f(x) = -x^4 + 8$.
23 Grafique la función $f(x) = 4x^3 + 5$.
24 Grafique la función $f(x) = -x^6 + 6$.
25 Grafique la función racional $f(x) = 3x/(100 - x)$.
26 Grafique la función racional $f(x) = 1/(x - 1)$.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

atributo de dirección final (definitiva) 544
cóncava hacia arriba (abajo) 527
eje de simetría 528
fórmula cuadrática 531
función cuadrática 526
función no lineal 522
función polinomial 543
función racional 546
grado de un polinomio 543
ley de rendimientos decrecientes 522
parábola 527

■ FÓRMULAS IMPORTANTES

$y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ **Función cuadrática** **(12.5)**

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ **Vértice de la parábola**

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **Fórmula cuadrática**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \textbf{Función polinomial} \qquad (12.13)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \quad \textbf{Función racional}$$

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-13 se relacionan con la sección 12.2. En los ejercicios 1-10, determine la concavidad de la parábola correspondiente, su intersección con el eje y, sus intersecciones con el eje x, si las hay, y las coordenadas del vértice.

1 $f(x) = 3x^2 + 3x - 10$
2 $f(x) = -50 + 2x^2$
3 $f(x) = ex^2 + fx + g, \quad e,f,g > 0$
4 $f(x) = -x^2/d$, where $d > 0$
5 $f(x) = x^2 - x - 20$
6 $f(x) = 2x^2 + 14x - 36$
7 $f(x) = -6x^2 + 11x + 35$
8 $f(x) = -x^2 + 13x - 40$
9 $f(x) = -15x^2 + 34x - 16$
10 $f(x) = -3x^2 - 16x - 5$

11 Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa por los puntos (0, −20), (5, −120) y (−3, −56).

***12** Verifique que las coordenadas del vértice de la parábola sean $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ donde $(fx) = ax^2 + bx + c$.

***13** En la función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, demuestre (pruebe) que las raíces (si es que existen) pueden obtenerse mediante la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Los ejercicios 14-24 se relacionan con la sección 12.3.

14 Se arroja al aire una pelota. La altura que alcanza puede describirse en función del tiempo, conforme a la función $h(t) = -16t^2 + 128t$, donde $h(t)$ es la altura media en pies y t es el tiempo medido en segundos. *a*) ¿Cuál es la altura después de 2 segundos de arrojada la pelota? *b*) ¿Cuándo alcanzará la pelota su altura máxima? *c*) ¿Cuándo caerá al suelo ($h = 0$)?

15 Se deja caer un objeto desde un puente que tiene 400 pies de altura. La altura del objeto puede determinarse en función del tiempo (desde el momento en que se deja caer) según la función $h(t) = 400 - 16t^2$, donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos. *a*) ¿Cuál es la altura de la pelota al cabo de 4 segundos? *b*) ¿Cuánto tarda en caer al agua?

16 La función de demanda de un producto es

$$q = f(p) = 60\,000 - 20p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total $R = g(p)$. ¿Cuál será el ingreso total cuando $p = \$100$?

17 La función de demanda de un producto es

$$q = f(p) = 80\,000 - 40p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total $R = h(q)$. (Nótese que q es la variable independiente.)

18. La función de oferta $q_s = f(p)$ de un producto es cuadrática. Tres puntos que se encuentran en la gráfica de ella son (20, 150), (30, 400) y (40, 750). Determine la ecuación de la función de oferta.

19 La función de demanda de un producto es

$$q_d = p^2 - 70p + 1\,225$$

a) ¿Cuántas unidades serán demandadas si se fija un precio de \$20?
b) Determine la intersección con el eje y e interprete su significado.
c) Determine la intersección o intersecciones con el eje x e interprete su significado.

20 La función de demanda de un producto es

$$q_d = p^2 - 90p + 2\,025$$

a) ¿Cuántas unidades serán demandadas si se fija un precio de \$30?
b) Determine la intersección con el eje y e interprete su significado.
c) Determine la intersección o intersecciones con el eje x e interprete su significado.

21 Las funciones de oferta y demanda de un producto son $q_s = p^2 - 100$ y $q_d = p^2 - 40p + 400$. Determine el precio y la cantidad del equilibrio del mercado.

22 Las funciones de oferta y demanda de un producto son $q_s = p^2 - 525$ y $q_d = p^2 - 70p + 1225$. Determine el precio y la cantidad del equilibrio del mercado.

23 Un agente de viajes está organizando una excursión a un conocido lugar de recreo. Ha cotizado un precio de \$300 por persona, si reúne a 100 o menos pasajeros. Por cada pasajero después de los 100, el precio que se cobra a *todos ellos* disminuirá en \$2.50. Por ejemplo, si se inscriben en la excursión 101 pasajeros, cada uno pagará \$297.50. Sea x el número de personas después de 100.

a) Determine la función que exprese el precio por persona p en función de x, o sea $p = f(x)$.
b) En la parte *a*, ¿tiene alguna restricción el dominio?
c) Formule la función $R = h(x)$, que exprese el ingreso total en boletos R en función de x.
d) ¿Qué valor de x produce el máximo valor de R?
e) ¿Cuál es el valor máximo de R?
f) ¿Con qué precio por boleto se obtiene una R máxima?

24 Plan de incentivos salariales El fabricante de un producto perecedero ofrece un incentivo salarial a los conductores de sus camiones. Una ruta normal de reparto tarda un promedio de 20 horas. A los conductores se les paga a una tarifa de \$10 por hora hasta un *máximo* de 20 horas (si el viaje requiere de 30 horas, los conductores sólo reciben su sueldo a razón de 20 horas). Se les da un incentivo por hacer el viaje en menos de 20 horas. El salario por hora se incrementa en \$1 por cada hora menos de ese tope. Suponga que x sea el número de horas requeridas para terminar el viaje.

a) Determine la función $w = f(x)$, donde w es el sueldo por hora en dólares.
b) Determine la función que exprese el salario del conductor en un viaje como función de x.
c) ¿Qué tiempo del viaje x maximizará el sueldo del conductor en el viaje?
d) ¿Qué sueldo por hora se asocia a este tiempo de viaje?
e) ¿Cuál es el sueldo máximo?

Los ejercicios 25-38 se relacionan con la sección 12.4. En los ejercicios 25-32, *a*) determine el grado de la función y *b*) su dirección final.

25 $f(x) = 8x^6 - 4x^3$
26 $f(x) = -x^5/25 - 3x^4 + 65$
27 $f(x) = 4x^5 + 5x^3 - 2x$
28 $f(x) = x^9 - 9x^7 + 5x^3 - 500$
29 $f(x) = -x^8 + 40\,000x^5 - 25x$
30 $f(x) = -x^7 + 4x^5 + 2x^3 - x + 5$
31 $f(x) = (x^7 - 5x^6 + 3x^5 - 5x^4)/100$
32 $f(x) = -x^6/3 + 2x^3 + 4x$

33 Grafique la función $f(x) = -x^3/2 + 10$.
34 Grafique la función $f(x) = -x^5/4 + 5$.
35 Grafique la función $f(x) = x^8$.
36 Grafique la función $f(x) = -x^7$.
37 Grafique la función racional $f(x) = 5x/(200 - x)$.
38 Grafique la función racional $f(x) = 3/(x - 3)$.

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 Para la función cuadrática

$$f(x) = x^2 + 10x + 25$$

determine *a*) la concavidad, *b*) la intersección con el eje *y*, *c*) la intersección o intersecciones con el eje *x* y *d*) las coordenadas del vértice de la parábola. *e*) Grafique la función.

2 La función de demanda de un producto es

$$q = f(p) = 450\,000 - 30p$$

donde q es la cantidad demandada y p indica el precio de venta en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total $R = g(p)$.

3 Tres puntos (p, q) en una función cuadrática de oferta son (20, 400), (25, 850) y (30, 1400). Formule (*sólo*) el sistema de ecuaciones que, al ser resueltas, den los parámetros de la función de oferta $q_s = ap^2 + bp + c$.

4 Determine *a*) el grado y *b*) la dirección final de la función

$$f(x) = \frac{x^9 - 5x^6 + 7x^4 - 3x}{150}$$

MINICASO

EQUILIBRIO NO LINEAL Y ANÁLISIS DE UTILIDADES

La I. M. Handy Corporation es un gran fabricante de computadoras. Y actualmente está planeando penetrar en el mercado de las microcomputadoras. La empresa necesita ayuda para analizar este nuevo producto. Los ingenieros de manufactura estiman que los costos variables de producción serán de $100 por unidad. Los costos fijos que se requieren para establecer la línea de producción se calculan en $2 500 000. Los investigadores de mercado realizaron algunos estudios preliminares y llegaron a la conclusión de que la función de demanda para el nuevo producto será aproximadamente lineal. Es decir, el número de unidades demandado, q, variará según el precio, p, en forma lineal. Dos puntos de datos (p, q) que se utilizarán al definir esta función son (100, 26 000) y (500, 10 000).

La compañía solicita al lector lo siguiente:

a) Formulación de la función de demanda $q = f(p)$.
b) Formulación de la función cuadrática del ingreso total $R = g(q)$.
c) Formulación de la función del costo total $C = h(p)$.
d) Determinación del nivel o niveles de equilibrio de la producción.
e) Una representación gráfica de las funciones de ingresos y costos que muestra el punto o puntos de equilibrio.
f) Determinación del precio o precios que deben fijarse en el punto o puntos de equilibrio.
g) Una explicación de por qué hay más de un punto de equilibrio (en caso de que existan varios).
h) Formulación de la función cuadrática de las utilidades totales $p = r(q)$.
i) Determinación del número de unidades que deberían venderse a fin de maximizar las utilidades totales. ¿Cuál es la utilidad esperada?
j) Determinación del precio que debería fijarse en el nivel de producción correspondiente a la maximización de utilidades.

Y no lo olvide: es urgente conocer sus resultados.

CAPÍTULO

13 DIFERENCIACIÓN

13.1 LÍMITES Y CONTINUIDAD
13.2 TASA PROMEDIO DE CAMBIO
13.3 LA DERIVADA
13.4 DIFERENCIACIÓN
13.5 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR
13.6 DIFERENCIACIÓN DE FORMAS FUNCIONALES ESPECIALES

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
APÉNDICE: PRUEBAS DE ALGUNAS REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Dar una introducción de los importantes conceptos de límites y continuidad
- Lograr que el lector entienda la tasa promedio de cambio y la manera de determinarla para las funciones
- Lograr que el lector comprenda la derivada; su significado, cálculo e interpretación
- Explicar algunas reglas de la diferenciación y ofrecer ejemplos de su uso
- Dar una introducción de la naturaleza de las derivadas de orden superior y de su interpretación, cuando se juzgue conveniente

Éste es el primero de seis capítulos que examinan el ***cálculo*** y su aplicación a la administración, la economía y otras esferas de la solución de problemas. Dos áreas fundamentales de estudio en el cálculo son el ***cálculo diferencial*** y el ***cálculo integral***. El primero se centra en las *tasas de cambio* al analizar una situación. En forma gráfica, el cálculo diferencial resuelve el siguiente problema: *dada una función cuya gráfica es una curva suave y un punto del dominio de la función, ¿cuál será la pendiente de la línea tangente respecto a la curva en este punto?* Más adelante

en este capítulo verá el lector que esa "pendiente" expresa la velocidad instantánea del cambio de la función.

El cálculo integral incluye la suma de un tipo especial. Desde el punto de vista gráfico, los conceptos de *área* en dos dimensiones son importantes en el cálculo integral. En dos dimensiones, el cálculo integral resuelve el siguiente problema: *dada una función cuya gráfica es una curva suave y dos puntos en el dominio de la función, ¿cuál es el área de la región acotada por la curva y el eje x entre los dos puntos?*

En este capítulo y los tres siguientes se explicará el cálculo diferencial y sus aplicaciones. En el capítulo 17 se dará una introducción al cálculo integral y en el capítulo 18 se expondrán sus aplicaciones. El objetivo de estos capítulos es ofrecer un conocimiento de lo que es el cálculo y sus áreas de aplicación. Aunque se necesitarían varios semestres de estudio intensivo para entender la mayor parte de los puntos más finos del cálculo, lo que aquí se explica permitirá al lector entender las herramientas con las cuales efectuar análisis en niveles elementales.

En este capítulo pretendemos sentar las bases para lo que se dirá en los siguientes. En primer lugar, se describirán dos conceptos que son muy importantes en la teoría del cálculo diferencial: *límites* y *continuidad*. Esta exposición se acompañará de un desarrollo intuitivo del concepto de *derivada*. En el resto del capítulo se proporcionarán las herramientas con que se calculan las derivadas y también se darán ideas sobre la interpretación del significado de la derivada. Las pruebas de las reglas de la diferenciación no se presentan en la parte principal del capítulo, pero se ofrecen algunas pruebas en el apéndice del final del mismo.

13.1 LÍMITES Y CONTINUIDAD

Dos conceptos muy importantes en la teoría del cálculo diferencial e integral son el ***límite de una función*** y la ***continuidad***. Ambos se comentan en la presente sección. Recomendamos al lector leer atentamente esta explicación pues se trata de conceptos que muchas veces se entienden en forma equivocada.

Límites de las funciones

En el cálculo a menudo desea conocerse el valor límite de una función a medida que la variable independiente se aproxima a un valor específico. Este valor, cuando existe, recibe el nombre de ***límite***. La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{13.1}$$

sirve para expresar los valores límites de una función. La ecuación (13.1) se lee "el límite de $f(x)$, a medida que x se aproxima al valor a, es L". En forma más abreviada se acostumbra decir "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L". Cuando se investiga un límite, en realidad se está preguntando si $f(x)$ se acerca a un valor específico L a medida que el valor de x se aproxima más y más a a.

Se dispone de varios procedimientos con los cuales determinar el límite de una función. La tentación nos lleva a sustituir simplemente el valor $x = a$ en

f y a determinar $f(a)$. En verdad se trata de una forma válida de calcular el límite de muchas funciones, pero no de todas.

Un método que puede aplicarse consiste en sustituir los valores de la variable independiente en la función, mientras se observa el comportamiento de $f(x)$ a medida que el valor de x va aproximándose más y más a a. Un aspecto importante de este procedimiento es que el valor de la función se observa conforme el valor de a se aproxima desde ambos lados de a. La notación $\lim_{x \to a^-} f(x)$ representa el límite de $f(x)$ al aproximarse x a a desde la izquierda (***límite de la izquierda***) o desde abajo. La notación $\lim_{x \to a^+} f(x)$ representa el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a desde la derecha (***límite de la derecha***) o desde arriba. ***Si el valor de la función se aproxima al mismo número L conforme x se acerca a desde ambas direcciones, entonces existe el límite.*** Esto se expresa con mayor precisión como sigue:

PRUEBA DE LA EXISTENCIA DE UN LÍMITE

Si el límite $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y el límite $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si los valores límites de $f(x)$ son diferentes cuando x se aproxima a a desde ambas direcciones, entonces la función no se aproxima a un límite conforme x se acerca a a. Los siguientes ejemplos muestran claramente esto.

EJEMPLO 1

A fin de determinar el $\lim_{x \to 2} x^3$ (si es que existe) construyamos una tabla de valores supuestos de x y los valores correspondientes de $f(x)$. La tabla 13.1 contiene estos valores. Adviértase que el valor de $x = 2$ ha sido aproximado desde la izquierda y la derecha. Y, desde una y otra dirección, $f(x)$ se acerca al mismo valor de 8. Puesto que

$$\lim_{x \to 2^-} x^3 = 8 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} x^3 = 8$$

entonces

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

Obsérvese que este límite podría haberse determinado con sólo sustituir $x = 2$ en f.

La figura 13.1 confirma el resultado. Cuanto más nos acerquemos al valor de $x = 2$, más se aproxima a 8 el valor de $f(x)$.

TABLA 13.1

Aproximación de $x = 2$ desde la izquierda							
x	1	1.5	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999
$f(x) = x^3$	1	3.375	6.858	7.415	7.881	7.94	7.988
Aproximación de $x = 2$ desde la derecha							
x	3	2.5	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001
$f(x) = x^3$	27	15.625	9.261	8.615	8.121	8.060	8.012

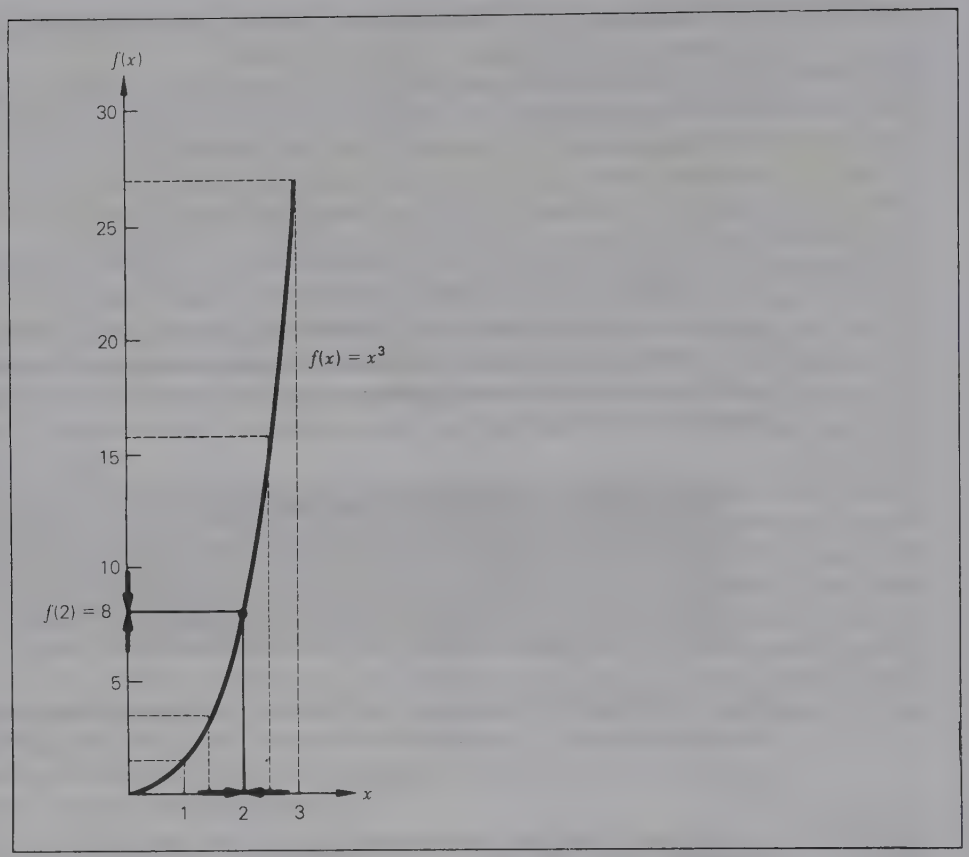


FIGURA 13.1
$\lim_{x \to 2^-} x^3 = \lim_{x \to 2^+} x^3 = 8.$

EJEMPLO 2

En la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{cuando } x \leq 4 \\ 2x + 3 & \text{cuando } x > 4 \end{cases}$$

se determinará si existe $\lim_{x \to 4} f(x)$. Se elabora una tabla con los valores de $f(x)$ determinados a medida que x se aproxima al valor de 4 desde la izquierda y la derecha (tabla 13.2). Conforme x se aproxima al valor de 4 desde la izquierda, $f(x)$ se acerca al valor de 8, o sea

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$$

TABLA 13.2

Aproximación de $x = 4$ desde la izquierda						
x	3	3.5	3.8	3.9	3.95	3.99
$f(x) = 2x$	6.0	7.0	7.6	7.8	7.9	7.98
Aproximación de $x = 4$ desde la derecha						
x	5	4.5	4.3	4.1	4.05	4.01
$f(x) = 2x + 3$	13.0	12.0	11.6	11.2	11.1	11.02

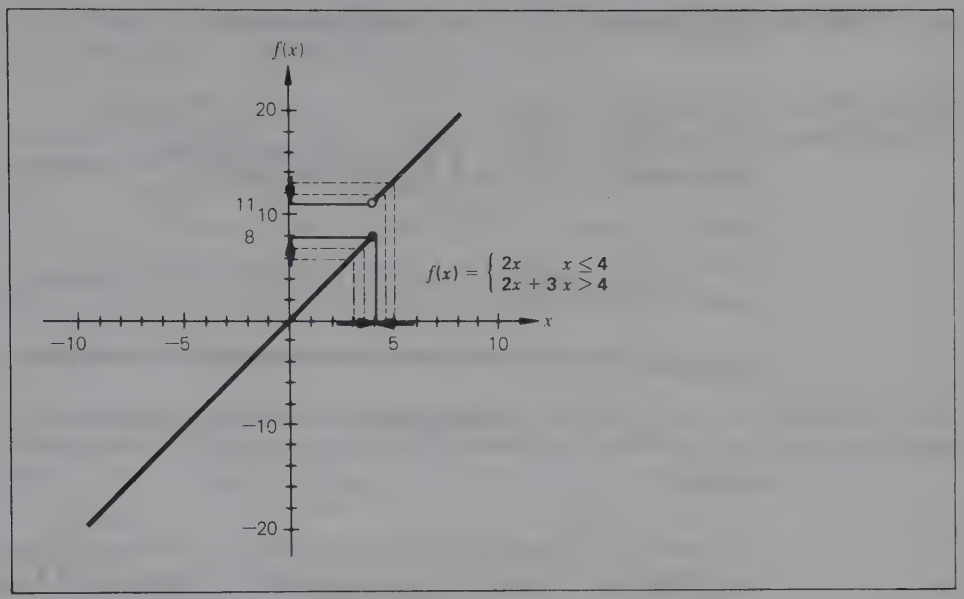


FIGURA 13.2 $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x)$.

Cuando x se aproxima a 4 desde la derecha, $f(x)$ se acerca al valor de 11, es decir

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 11$$

Puesto que

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim_{x \to 4^+} f(x)$$

la función no se acerca al valor límite cuando $x \to 4$, y no existe $\lim_{x \to 4} f(x)$. La figura 13.2 muestra la gráfica de esta función. En el capítulo 1 se dijo que el círculo sólido (●) indica que $x = 4$ está incluida en el dominio del segmento de la línea inferior y que el círculo abierto (○) denota que $x = 4$ no está incluida en el dominio del segmento de la línea superior. La interrupción de la función en $x = 4$ es la causa de que el límite no exista. Un punto importante en relación con esta función es que $f(x)$ no se aproxima al límite en el caso de otros valores que no sean $x = 4$.

EJEMPLO 3

A continuación determinaremos si existe $\lim_{x \to 3} f(x)$ si

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

El denominador es 0 cuando $x = 3$, de manera que podemos concluir que la función no está definida en este punto. Y sería tentador afirmar que no existe límite alguno cuando $x = 3$. Sin embargo, esta función sí se aproxima a un límite conforme x se acerca a 3, a pesar de que esta función no está definida si $x = 3$.

La tabla 13.3 contiene valores de $f(x)$ a medida que x se aproxima a 3 desde la izquierda y la derecha.

TABLA 13.3

Aproximación de $x = 3$ desde la izquierda					
x	2	2.5	2.9	2.95	2.99
$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$	5.0	5.5	5.9	5.95	5.99
Aproximación de $x = 3$ desde la derecha					
x	4	3.5	3.1	3.05	3.01
$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$	7.0	6.5	6.1	6.05	6.01

Puesto que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

entonces

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Aun cuando la función no está definida si $x = 3$, la función se aproxima al valor de 6 a medida que el valor de x se acerca más a 3. La figura 13.3 presenta la gráfica de la función.

Un caso especial es el de los límites en un punto final en el dominio de una función. Considérese la función $f(x) = \sqrt{x}$. El dominio de esta función es $x \geq 0$. Si nos interesa conocer $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$, no podemos determinar los límites izquierdo y derecho. Podemos determinar $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$, pero no $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$. *El interés se centrará siempre en determinar los límites dentro del dominio de una función.* En este ca-

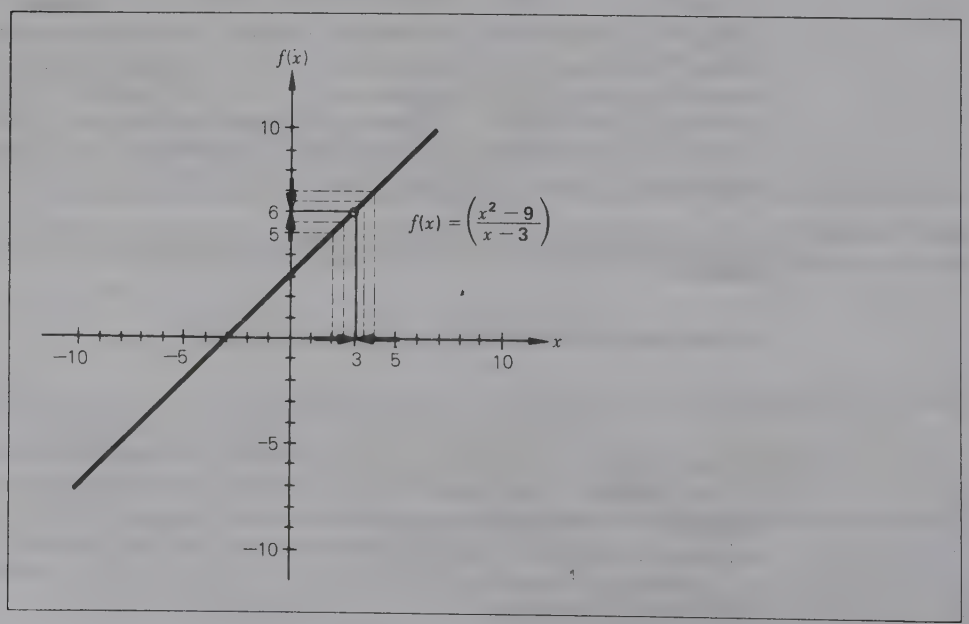


FIGURA 13.3

so, el límite se determinará a partir del límite derecho exclusivamente. Puesto que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, entonces $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

Un punto clave en el concepto de límite es que no se desea conocer el valor de $f(x)$ cuando $x = 1$. Se requiere conocer el comportamiento de los valores de $f(x)$ a medida que x se aproxima más y más al valor de a. Y la notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que, al acercarse x a a, si $x \neq a$, $f(x)$ se acerca a L.

Ejercicios de seguimiento de la sección 13.1

En los siguientes ejercicios determine el límite (si existe) y para ello construya una tabla de valores $f(x)$ y examine los límites derecho e izquierdo (cuando convenga hacerlo).

1 $\lim_{x \to 4} 3x^2$

2 $\lim_{x \to -2} (5x + 5)$

3 $\lim_{x \to 5} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x < 5 \\ 20 - 2x & \text{para } x \geq 5 \end{cases}$

4 $\lim_{x \to 3} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{para } x < 3 \\ 2 - x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$

5 $\lim_{x \to 2} g(x)$ donde $g(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{para } x < 2 \\ 2x & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

6 $\lim_{x \to 3} h(x)$ donde $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 3 \\ 0.5x^2 & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$

7 $\lim_{x \to -1} (-2x^3)$

8 $\lim_{x \to 3} (4x^2 - 5x + 1)$

9 $\lim_{x \to 0} (-x^3)$

10 $\lim_{x \to 2} (2x^3 - 16)$

11 $\lim_{x \to 8} \dfrac{x^2 - 64}{x - 8}$

12 $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

13 $\lim_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 9x - 12}{3x + 3}$

14 $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2 + x - 1}{2x - 1}$

15 $\lim_{x \to 0} \dfrac{2}{x}$

16 $\lim_{x \to -4} \dfrac{1}{x + 4}$

17 $\lim_{x \to 3} \dfrac{5}{x - 3}$

18 $\lim_{x \to 2} \dfrac{10}{4 - 2x}$

19 $\lim_{x \to -7} \dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$

20 $\lim_{x \to -2} \dfrac{4 - x^2}{2 + x}$

21 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

22 $\lim_{x \to -6} \dfrac{18 - 3x - x^2}{6 + x}$

23 $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$

24 $\lim_{x \to -5} \dfrac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5}$

Algunas propiedades de los límites

En la presente sección se explican algunas propiedades de los límites, que son útiles para determinar el valor límite de una función. Pronto se verá que el pro-

ceso de determinación de los límites no siempre requiere una evaluación de $f(x)$ en una serie de puntos a ambos lados de $x = a$.

1 Si $f(x) = c$, donde c es real,

$$\lim_{x \to a}(c) = c$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} 100 = 100$$

2 Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8$$

3 Si $f(x)$ tiene un límite cuando $x \to a$ y c es real, entonces

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 10} 5x^2 &= 5 \lim_{x \to 10} x^2 \\ &= 5(10)^2 = 500 \end{aligned}$$

4 Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} (x^5 - 10) &= \lim_{x \to -1} x^5 - \lim_{x \to -1} 10 \\ &= (-1)^5 - 10 = -1 - 10 = -11 \end{aligned}$$

5 Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} [(x^2 - 5)(x + 1)] &= \lim_{x \to 4}(x^2 - 5) \cdot \lim_{x \to 4}(x + 1) \\ &= [(4)^2 - 5][4 + 1] \\ &= [16 - 5][5] \\ &= 11(5) = 55 \end{aligned}$$

6 Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad \textbf{a condición de que } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to -5}\frac{x}{x^2+10}=\frac{\lim_{x\to -5} x}{\lim_{x\to -5}(x^2+10)}$$

$$=\frac{-5}{(-5)^2+10}=\frac{-5}{35}=\frac{-1}{7}$$

Como se verá en los siguientes ejemplos, para evaluar un límite se requiere con frecuencia aplicar más de una de estas propiedades.

EJEMPLO 4

$$\lim_{x\to -1} x^4=(-1)^4=1 \qquad \textbf{(Propiedad 2)}$$

EJEMPLO 5

$$\lim_{x\to 5}(x^2-x+10)=\lim_{x\to 5} x^2-\lim_{x\to 5} x+\lim_{x\to 5} 10 \qquad \textbf{(Propiedad 4)}$$

$$=5^2-5+10 \qquad \textbf{(Propiedades 1 y 2)}$$

$$=30$$

EJEMPLO 6

$$\lim_{x\to -2} 5x^3=5\cdot\lim_{x\to -2} x^3 \qquad \textbf{(Propiedad 3)}$$

$$=(5)(-2)^3 \qquad \textbf{(Propiedad 2)}$$

$$=(5)(-8)=-40$$

EJEMPLO 7

$$\lim_{x\to 0}[(x^5-1)(x^3+4)]=\lim_{x\to 0}(x^5-1)\cdot\lim_{x\to 0}(x^3+4) \qquad \textbf{(Propiedad 5)}$$

$$=(\lim_{x\to 0} x^5-\lim_{x\to 0} 1)(\lim_{x\to 0} x^3+\lim_{x\to 0} 4) \qquad \textbf{(Propiedad 4)}$$

$$=(0-1)(0+4) \qquad \textbf{(Propiedades 1 y 2)}$$

$$=(-1)(4)=-4$$

EJEMPLO 8

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2}=\frac{\lim_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim_{x\to 2} x^2} \qquad \textbf{(Propiedad 6)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 2} x^3-\lim_{x\to 2} 1}{\lim_{x\to 2} x^2} \qquad \textbf{(Propiedad 4)}$$

$$= \frac{2^3 - 1}{2^2} = \frac{8 - 1}{4} = \frac{7}{4} \qquad \textbf{(Propiedades 1 y 2)}$$

Las propiedades hacen el proceso de evaluación de los límites más fácil para determinadas clases de funciones. Los límites de estos tipos de funciones pueden evaluarse por **sustitución** para determinar $f(a)$. En estas clases de funciones

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)} \qquad \textbf{(13.2)}$$

Las funciones polinomiales son una clase muy común de funciones para las cuales es válida la ecuación (13.2). Esto se deduce de las propiedades 1 a 4.

EJEMPLO 9

$$\lim_{x \to -2} (3x^2 - 4x + 10) = f(-2)$$
$$= 3(-2)^2 - 4(-2) + 10 = 12 + 8 + 10 = 30$$

En el ejemplo 3 se determinó el

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Aun cuando la función no se defina cuando $x = 3$, el valor de ella se aproxima a 6 a medida que x se acerca a 3. Esta función es un ejemplo de una familia de funciones de "cociente" que pueden simplificarse por factorización.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$
$$= \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3}$$
$$= x + 3 \text{ para todas las } x \neq 3$$

Si bien $f(x) = [(x + 3)(x - 3)]/(x - 3)$ y $g(x) = x + 3$ *no* son la misma función, *son iguales siempre que se defina* $f(x)$. Como se aprecia en la figura 13.4, g se grafica como línea con un "hoyo" en $x = 3$. Sin embargo, dado que no nos preocupa lo que sucede si $x = 3$, es posible determinar el comportamiento de $f(x)$ estudiando el de $g(x)$.

Esta simplificación redujo la función a una forma para la cual es válido el procedimiento de sustitución. Esto es,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3)$$
$$= 3 + 3 = 6$$

EJEMPLO 10

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x^2 + x - 3}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(4x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \to -1} (4x - 3)$$
$$= 4(-1) - 3 = -7$$

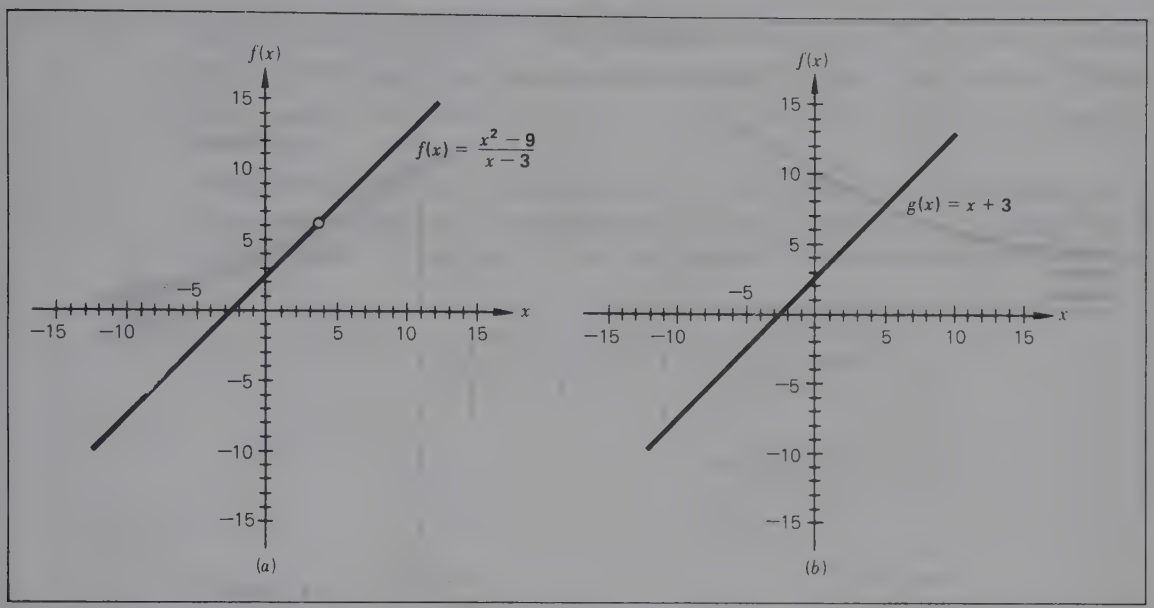


FIGURA 13.4

Límites e infinito

A menudo desea conocerse el comportamiento de una función conforme aumenta la variable independiente sin límite alguno (tanto positiva como negativamente). Se dice entonces que la variable independiente se "aproxima al infinito" (o "tiende al infinito"). Examínense las dos funciones trazadas en la figura 13.5 En la figura 13.5*b*, al acercarse x al infinito negativo, $f(x)$ se aproxima al valor de 4 pero sin alcanzarlo nunca. Usando la notación de límites, se establece

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$$

También puede afirmarse que $f(x)$ tiene una ***asíntota horizontal*** de $y = 4$ conforme x se acerca a $-\infty$. También aquí lo anterior significa que $f(x)$ se aproxima a un valor de 4 aunque sin alcanzarlo nunca, a medida que x se acerca a $-\infty$.

De manera similar, en la figura 13.5*b*, g se acerca al eje x aunque sin tocarlo nunca, conforme x se aproxima a ∞. Puede formularse este comportamiento por medio de la notación

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Como en el caso de f, g tiene una asíntona horizontal de $y = 0$, al aproximarse x a ∞.

Una definición más formal de una asíntota horizontal es la siguiente:

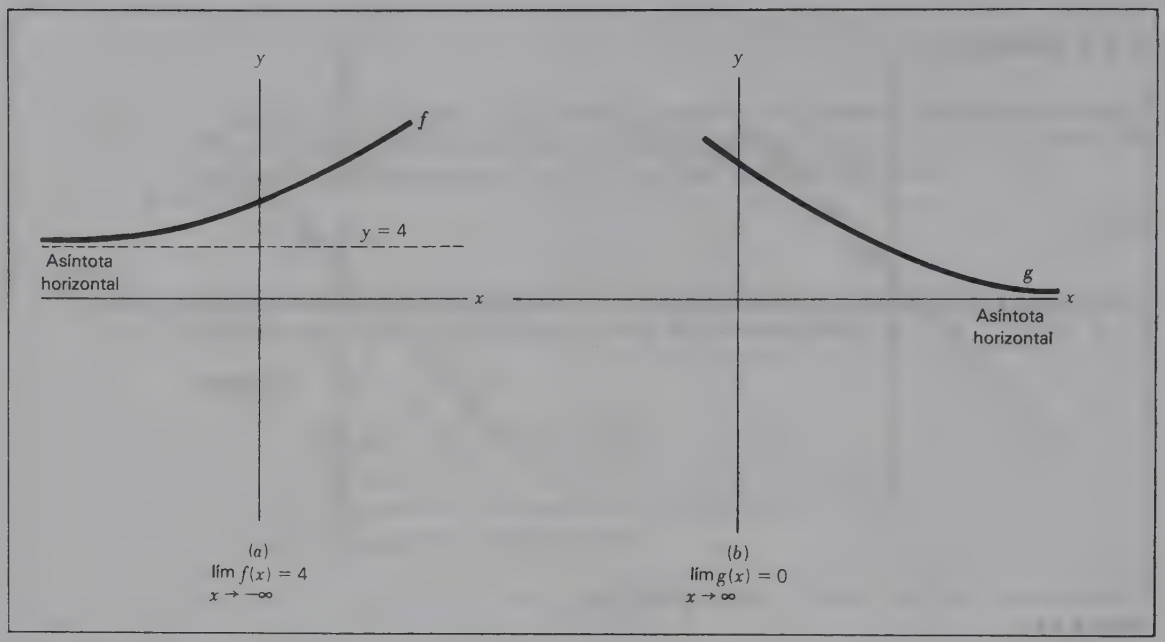


FIGURA 13.5
Límites en el infinito.

DEFINICIÓN: ASÍNTOTA HORIZONTAL
La línea $y = a$ es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de f si y sólo si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

o bien

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

A continuación se analizará la evaluación de límites a medida que la variable independiente se aproxima al infinito positivo o negativo. Consideremos la expresión

$$\lim_{x \to \infty} (1/x)$$

En la tabla 13.4 se ofrece la sustitución de los valores muestra de x. En esta tabla se observa que $\lim_{x \to \infty} (1/x) = 0$.

Considérese la evaluación del $\lim_{x \to \infty} (1/x^2)$. La tabla 13.5 contiene un resumen de los valores de la función para diversos valores de x. Una vez más, se

TABLA 13.4

x	1	10	100	1 000	10,000	100 000
$f(x) = 1/x$	1	.1	.01	.001	.0001	.00001

TABLA 13.5

x	1	10	100	1 000	10 000
$f(x) = 1/x^2$	1	.01	.0001	.000001	.00000001

advierte que $\lim_{x\to\infty} (1/x^2) = 0$. En comparación con $\lim_{x\to\infty} (1/x)$, elevar al cuadrado x en el denominador hace que se aproxime el límite a una tasa más rápida.

EJEMPLO 11

Pongamos el caso de la evaluación de $\lim_{x\to\infty} (3x^2 + 5x)/(4x^2 - 5)$. *Una técnica con que se evalúa este límite es factorizar el término monomial de mayor grado tanto en el numerador como en el denominador.* Al factorizar $3x^2$ en el numerador y $4x^2$ en el denominador se obtiene

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2}{4x^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{5x}{3x^2}\right)}{\left(1-\frac{5}{4x^2}\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(1+\frac{5}{3x}\right)}{\left(1-\frac{5}{4x^2}\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{4}\left[\frac{(1+0)}{(1-0)}\right]$$
$$= \frac{3}{4}$$

EJEMPLO 12

Consideremos la evaluación de $\lim_{x\to-\infty} (5x^3 - 20x)/(3x^2 + 5)$. Al aplicar la misma técnica que en el último ejemplo, se factorizan $5x^3$ en el numerador y $3x^2$ en el denominador. Esto nos da

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x^3}{3x^2}\cdot\frac{\left(1-\frac{20x}{5x^3}\right)}{\left(1+\frac{5}{3x^2}\right)}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x}{3}\cdot\frac{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{5}{3x^2}\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x}{3}\cdot\frac{(1-0)}{(1+0)}\right]$$
$$= -\infty$$

Aunque tal vez esto no sea claro en los ejemplos presentados hasta ahora, el límite de una función racional al acercarse x al infinito positivo o negativo es simplemente *el límite del cociente del término monomial de mayor grado en el numerador y el término monomial de mayor grado en el denominador.* Ello se debe a que los términos de mayor grado en numerador y denominador dominan a los otros términos al tender x al infinito positivo o negativo. En el ejemplo 11, puede evaluarse el límite al evaluar el comportamiento de $3x^2/4x^2$ como $x \to \infty$. En el ejemplo 12, el límite se obtiene al evaluar el límite de $5x^3/3x^2$ como $x \to \infty$.

A continuación este concepto se ilustra específicamente evaluando

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4 - 2x^3 + 5x}{25 + 3x^2 - 7x^4}$$

Para evaluar el límite se determina

$$\lim_{x\to\infty}(4x^4/-7x^4) = \lim_{x\to\infty}(4/-7)$$
$$= \frac{-4}{7}$$

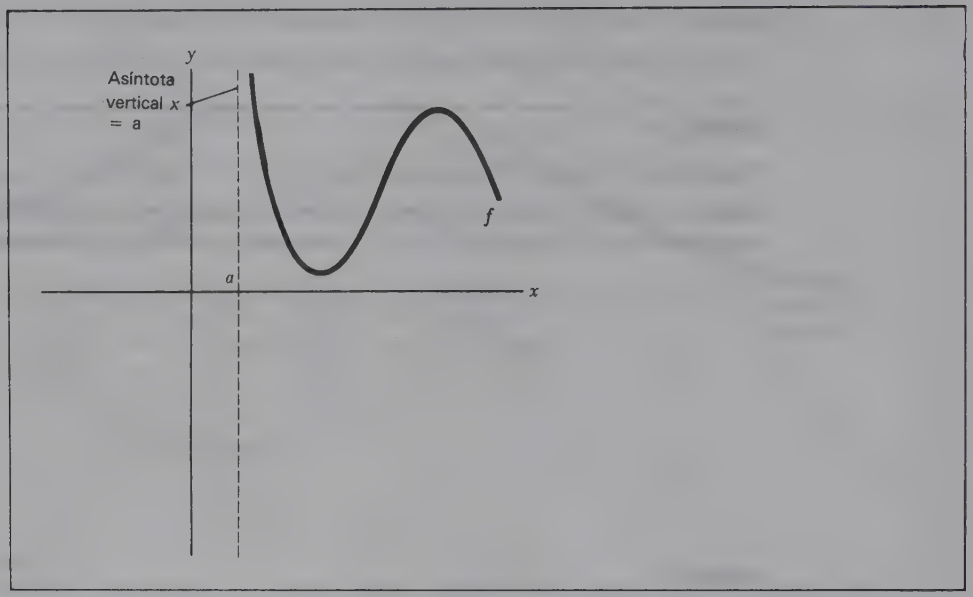


FIGURA 13.6
Asíntota vertical.

Otra posibilidad de límite se da en la figura 13.6. En ésta $f(x)$ se vuelve arbitrariamente grande al aproximarse x al valor de a. En esta situación afirmamos que $f(x)$ presenta una ***asíntota vertical*** de $x = a$ porque, al acercarse x al valor de a, $f(x)$ se torna infinitamente grande. Desde el punto de vista visual, la ordenada de la curva que representa f crece sin límite alguno conforme la curva va aproximándose a la línea cuando $x = a$, pero sin tocarla nunca. He aquí una definición más formal de este fenómeno:

DEFINICIÓN: ASÍNTOTA VERTICAL

La línea $x = a$ es una ***asíntota vertical*** de la gráfica de f si y sólo si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad (\text{o } -\infty)$$

o

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad (\text{o } -\infty)$$

EJEMPLO 13

Para evaluar $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ se toman los límites izquierdo y derecho al aproximarse x a 0. La tabla 13.6 contiene algunos valores selectos. Deberá llegarse a la conclusión de que $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. Desde el punto de vista gráfico, f aparece en la figura 13.7. Adviértase que $f(x) = 1/x^2$ tiene una asíntota vertical de $x = 0$ y asíntotas horizotales de $y = 0$.

Continuidad

En un sentido informal, la función se describe como un ***continuo*** si puede graficarse sin levantar la pluma o lápiz del papel. Casi todas las funciones que

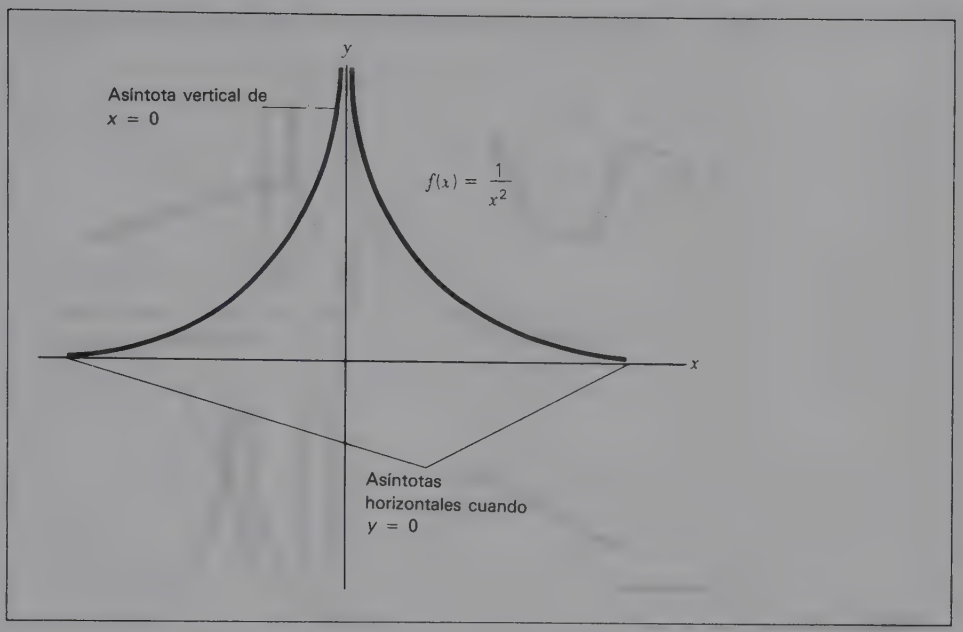


FIGURA 13.7 Asíntota horizontal cuando $y = 0$.

TABLA 13.6

Aproximación de $x = 0$ desde la izquierda					
x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	1	4	100	10 000	1 000 000
Aproximación de $x = 0$ desde la derecha					
x	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	1	4	100	10 000	1 000 000

se examinarán en el cálculo son funciones continuas. La figura 13.8 indica las gráficas de cuatro funciones distintas. Las descritas en la figura 13.8*a* y 13.8*b* son continuas porque pueden trazarse sin levantar el lápiz del papel. Las de las figuras 13.8*c* y 13.8*d* no lo son a causa de las "interrupciones" de las funciones. Una función que no sea continua recibe el nombre de ***discontinua***. En seguida se da una definición más formal de la propiedad de la continuidad.

DEFINICION: CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Se dice que una función es ***continua*** cuando $x = a$, si 1) está definida con $x = a$ y 2) si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{13.3}$$

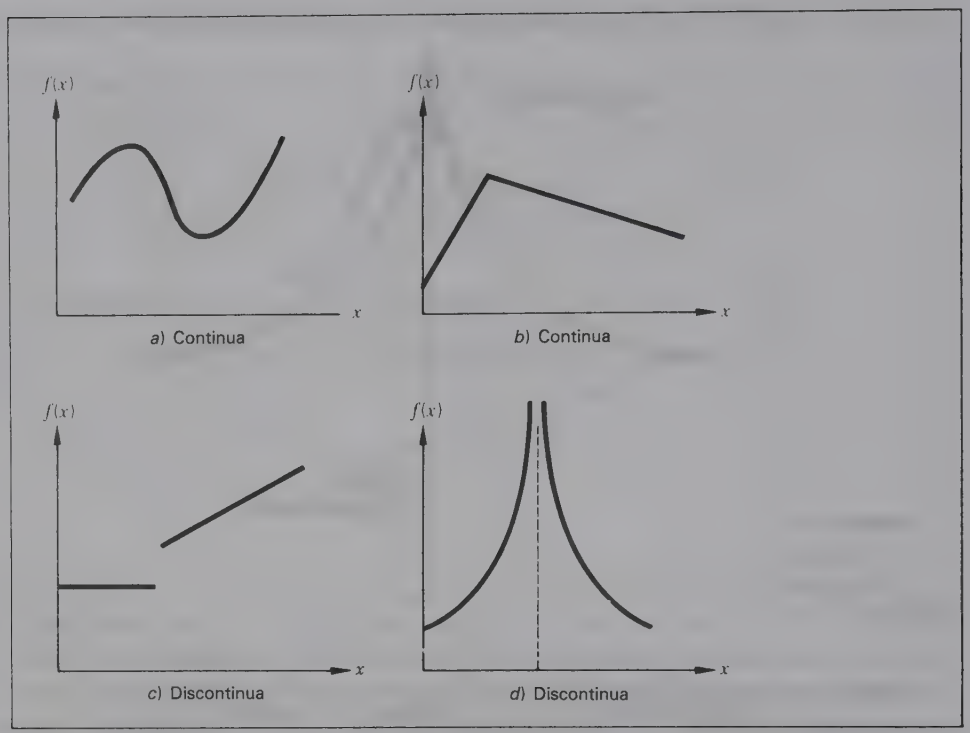


FIGURA 13.8 Evaluación de la continuidad.

EJEMPLO 14

En el ejemplo se determinó que para $f(x) = x^3$

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

Puesto que $f(x) = x^3$ se define cuando $x = 2$ y $\lim_{x \to 2} x^3 = f(2) = 8$, puede afirmarse que la función $f(x) = x^3$ es continua con $x = 2$.

EJEMPLO 15

En el ejemplo 3 se determinó que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Como $x = 3$ no se encuentra en el dominio de la función, $f(3)$ no está definida y puede afirmarse que la función $(x^2 - 9)/(x - 3)$ es *discontinua* cuando $x = 3$.

DEFINICIÓN: CONTINUIDAD SOBRE UN INTERVALO

La función f es continua sobre un intervalo $[a, b]$ si lo es en todos los puntos del intervalo.

NOTA

Si a y b son reales y $a < b$, el ***intervalo cerrado*** $[a, b]$ es el conjunto $\{x | a \leq x \leq b\}$. El ***intervalo abierto*** (a, b) es el conjunto $\{x | a < x < b\}$. De manera análoga $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ y $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ se denominan ***intervalos semiabiertos***.

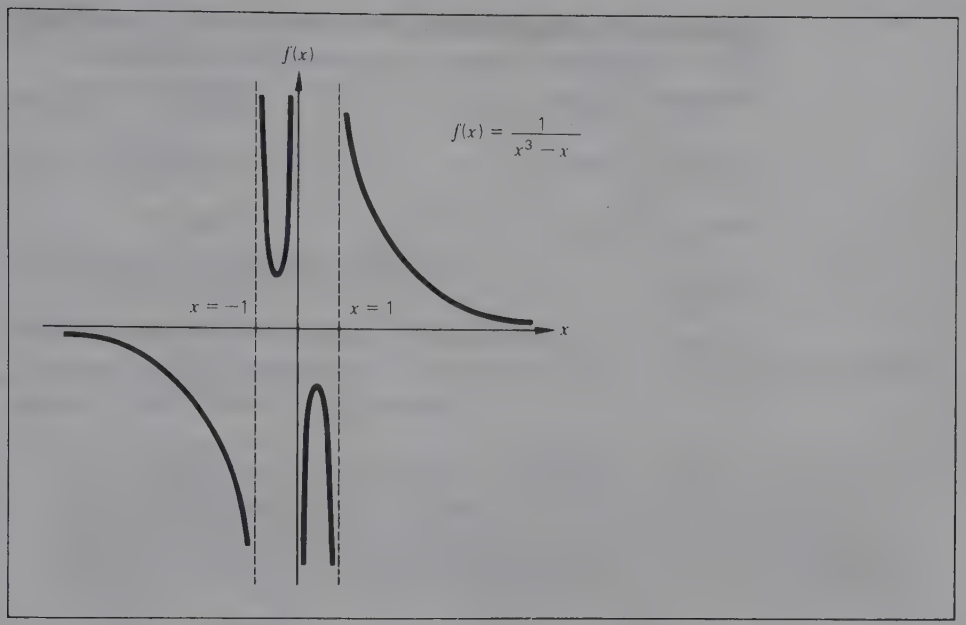


FIGURA 13.9 Discontinuidades cuando $x = 0, -1, 1$.

EJEMPLO 16

La función $f(x) = x^2 - 2x + 5$ es continua cuando a x se le asigna un valor real, pues

$$\lim_{x \to a}(x^2 - 2x + 5) = f(a)$$
$$= a^2 - 2a + 5 \quad \text{para todas las } a \text{ reales}$$

EJEMPLO 17

La función racional

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

no se define cuando

$$x^3 - x = 0$$

o

$$x(x^2 - 1) = 0$$

o bien

$$x(x + 1)(x - 1) = 0$$

El producto del miembro izquierdo de la ecuación será 0 cuando $x = 0$, $x = -1$ o $x = +1$. Así pues, la función es discontinua en esos tres puntos. La figura 13.9 presenta una gráfica de la función. Obsérvese que esta función tiene asíntotas verticales descritas por las ecuaciones $x = 1$, $x = -1$, y $x = 0$.

Ejercicios de seguimiento de la sección 13.1 (continúa)

En los siguientes ejercicios encuentre el límite indicado.

1 $\lim_{x \to 0} (5x^2 - 12x + 3)$

2 $\lim_{x \to 2} (2x^3 - 15x)$

3 $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{2}{3} \right)$

4 $\lim_{x \to 6} \frac{2x - 5}{x - 4}$

5 $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4}{x^3 - 4x - 2}$

6 $\lim_{x \to -4} 25$

7 $\lim_{x \to 0} 125$

8 $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x}$

9 $\lim_{x \to -3} (5x^3 - 2x^2 + 3x)$

10 $\lim_{x \to -2} (-x^4 + 3x^2)$

11 $\lim_{x \to -1} (-x^3 + 5x^2 - 10)$

12 $\lim_{x \to 2} (5x^3 - 10x^2 + 4x - 1)$

13 $\lim_{x \to 4} \left(\frac{4x - 2}{3x^2 - 2x + 5} \right)$

14 $\lim_{x \to -2} \left(\frac{10 - x}{5 - 3x + 2x^2} \right)$

15 $\lim_{x \to -2} (6x^3 - 2x)(5x - 10)$

16 $\lim_{x \to 3} \left[\left(\frac{x + 1}{x + 6} \right) (x^2 - 12) \right]$

17 $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 5x - 14}{x + 7}$

18 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x - 24}{x - 3}$

19 $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

20 $\lim_{x \to -9} \frac{81 - x^2}{9 + x}$

21 $\lim_{x \to c} (4x^3 - 3x^2 + 10)$

22 $\lim_{x \to -d} (x^2 - 2x + 1)$

En los siguientes ejercicios, calcule el límite indicado y comente la existencia de asíntotas, si las hay.

23 $\lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^3}$

24 $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 8}{x + 10}$

25 $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{5x + 100}$

26 $\lim_{x \to -\infty} \frac{12x + 18}{-4x}$

27 $\lim_{x \to -\infty} 3x$

28 $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5}{x - 1}$

29 $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{4x + 1\,000}$

30 $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x + 10\,000}{x - 5\,000}$

31 $\lim_{x \to -\infty} \frac{100 - 3x}{-x}$

32 $\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 500}{5\,000 - x^2}$

En los siguientes ejercicios, determine si existen discontinuidades y, en caso de haberlas, señale dónde ocurren.

33 $f(x) = 5x^2 - 2x + 10$

34 $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

35 $f(x) = \frac{x^5}{2}$

36 $f(x) = \frac{3x}{x - 5}$

37 $f(x) = \frac{100}{6 + 2x}$

38 $f(x) = |x|$

39 $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 - 4x - 21}$

40 $f(x) = \frac{6x - 2}{x^2 - 6x}$

41 $f(x) = \frac{4x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}$

42 $f(x) = \frac{5/x}{2x^2 - 7x - 15}$

43 $f(x) = \dfrac{20}{x^2 + 3x - 10}$

44 $f(x) = \dfrac{4/x}{18 - 3x - x^2}$

45 $f(x) = \dfrac{10/(5 - x)}{4 - x^2}$

46 $f(x) = \dfrac{5/(4 - x)}{16 - x^2}$

47 $f(x) = \dfrac{3x - 5}{27x - x^4}$

48 $f(x) = \dfrac{3/(x^2 - 1)}{2/(x^2 - 4)}$

13.2 TASA PROMEDIO DE CAMBIO

Tasa promedio de cambio y pendiente

Como se dijo en el capítulo 2, la pendiente de una recta puede determinarse aplicando la fórmula de dos puntos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{13.4}$$

La figura 13.10 contiene la gráfica de una función lineal. En este tipo de funciones la pendiente es constante sobre el dominio de la función. La pendiente constituye una *medida exacta* de la tasa de cambio del valor y respecto al que se opera en el valor de x. Si la función de la figura 13.10 representa una función lineal de costo y x denota el número de unidades producidas, la pendiente indicará la tasa a que se incrementa el costo total respecto a los cambios en el nivel de producción.

En las funciones no lineales, la tasa de cambio en el valor de y en relación con un cambio de x no es constante. Sin embargo, una manera de describir parcialmente las funciones no lineales es la ***tasa promedio de cambio*** sobre algún intervalo.

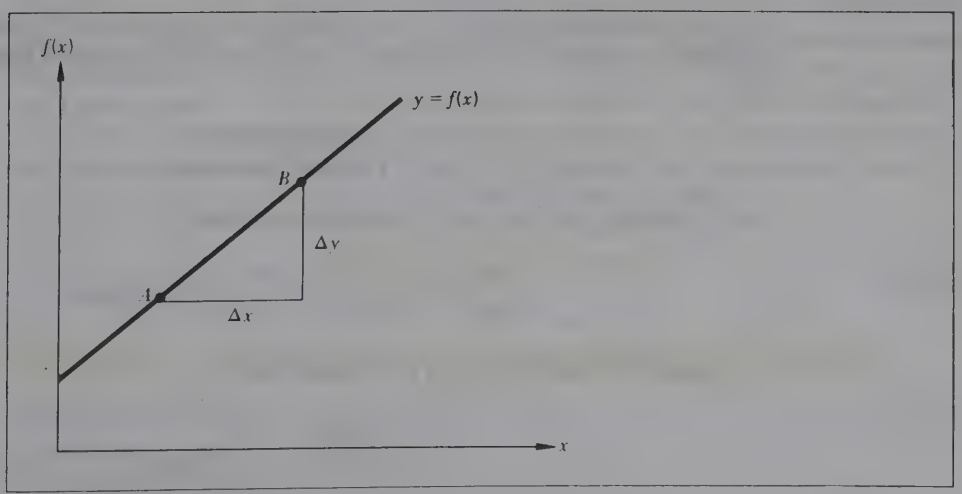


FIGURA 13.10 Función lineal con pendiente constante.

EJEMPLO 18

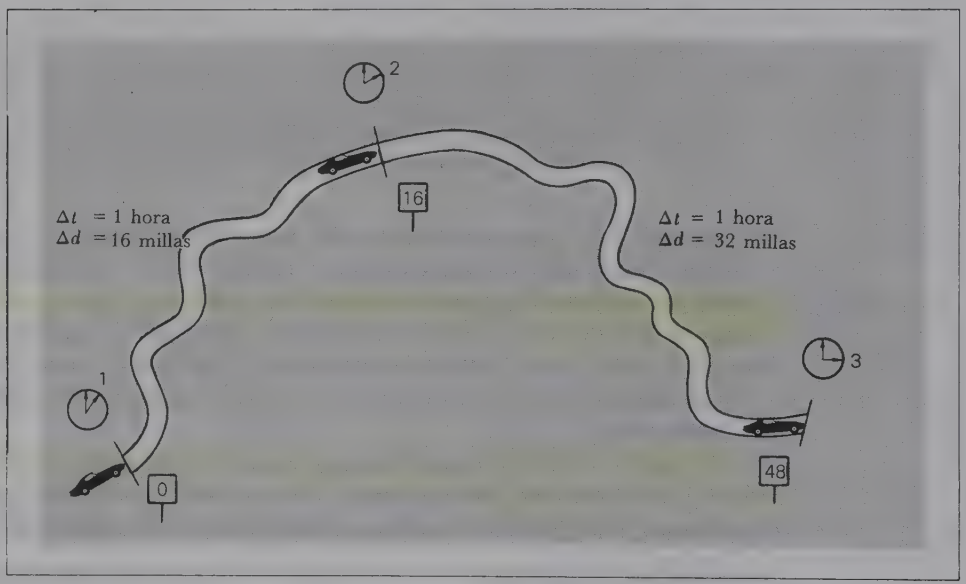
Supóngase que una persona hace un viaje de placer en autómovil y que la distancia recorrida d puede describirse en función del tiempo t por medio de la función no lineal

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t$$

donde d se mide en millas, t en horas y $0 \leq t \leq 5$. Durante este viaje de 5 horas, la velocidad del autómovil puede variar continuamente (por ejemplo, a causa de los semáforos, las paradas para descansar y otros factores).

Al cabo de 1 hora, la distancia total recorrida será

$$\begin{aligned} f(1) &= 8(1)^2 + 8(1) \\ &= 16 \text{ millas} \end{aligned}$$



La tasa promedio del cambio en la distancia recorrida respecto al cambio en el tiempo durante un intervalo (conocido mejor con el nombre de ***velocidad promedio***) se calcula así:

$$\frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

En la primera hora de viaje la velocidad promedio es

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{16 - 0}{1} = 16 \text{ mph}$$

La distancia recorrida al cabo de 2 horas será

$$\begin{aligned} f(2) &= 8(2)^2 + 8(2) \\ &= 32 + 16 = 48 \text{ millas} \end{aligned}$$

La distancia recorrida *durante* la segunda hora es

$$\Delta d = f(2) - f(1)$$
$$= 48 - 16 = 32 \text{ millas}$$

La velocidad promedio en la *segunda hora* será

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{32}{1} = 32 \text{ mph}$$

Y la velocidad promedio es distinta al compararla con la alcanzada durante la primera hora.

La velocidad promedio *durante las 2 primeras horas* es la distancia recorrida en ese periodo dividida entre el tiempo del viaje, o sea

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{48 - 0}{2} = 24 \text{ mph}$$

EJERCICIO

¿Cuál es la velocidad promedio en todo el viaje de 5 horas?*

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

Examine atentamente la función

$$d = f(t) = 55t$$

que expresa la distancia recorrida en d (en millas) en función del tiempo t (en horas). Compare esta función con la del ejemplo 18. ¿Cuál es la diferencia en relación con la velocidad promedio del viaje de 5 horas?

Considere dos puntos A y B en la figura 13.11. La recta que los une en f recibe el nombre de ***línea secante***. En el punto A la variable independiente posee un valor de x, y el valor correspondiente de la variable dependiente puede determinarse al evaluar $f(x)$. En el punto B la variable independiente cambió su valor por $x + \Delta x$, y el valor correspondiente de la variable dependiente se calcula evaluando $f(x + \Delta x)$. Al pasar del punto A al punto B, el cambio del valor de x es $(x + \Delta x) - x$, o sea Δx. El cambio concomitante del valor de y es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. La razón de estos cambios es

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad (13.5)$$

A la ecuación (13.5) se le llama en ocasiones ***cociente de la diferencia.***

---

*Respuesta: 48 mph.

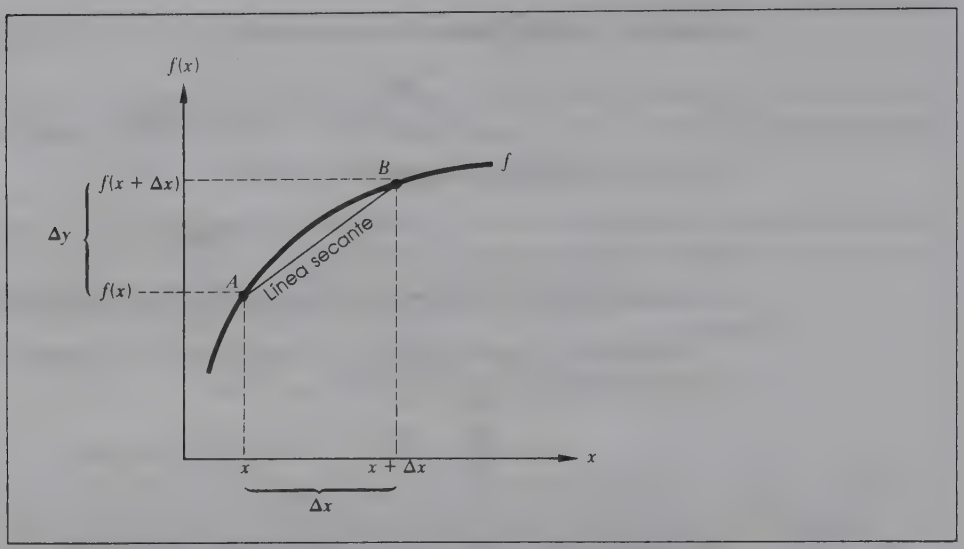


FIGURA 13.11
Línea secante *AB*.

COCIENTE DE LA DIFERENCIA

En dos puntos cualesquiera sobre una función f que tenga coordenadas $[x, f(x)]$ *y* $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$ el cociente de la diferencia ofrece una expresión general que

I Representa la *tasa promedio de cambio* en el valor de y y respecto al que se opera en x mientras pasa de $[x, f(x)]$ a $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$.

II Calcula la pendiente de la secante que une los dos puntos.

EJEMPLO 19

a) Encuentre la expresión general del cociente de la diferencia de la función $y = f(x) = x^2$.

b) Obtenga la pendiente de la línea que une $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ usando la fórmula de dos puntos.

c) Encuentre la pendiente en la parte *b* por medio de la expresión del cociente de la diferencia obtenido en la parte *a*.

SOLUCIÓN

a) Dados dos puntos en la función $f(x) = x^2$ que tengan coordenadas $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{[x^2 + x(\Delta x) + x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{[x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Al factorizar Δx en cada término del numerador y al cancelar con Δx en el denominador, nos queda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= 2x + \Delta x \qquad (13.6)$$

NOTA

Cuando se calcula el cociente de la diferencia, la evaluación de $f(x + \Delta x)$ y de $f(x)$ para una función específica causa grandísimas dificultades a los estudiantes. Si en esta función se nos pide encontrar $f(3)$, se sustituirá el valor de 3 en la función siempre que aparezca la variable independiente, o sea $f(3) = 3^2 = 9$. Cuando se nos pidió calcular $f(x + \Delta x)$ en este ejemplo, se sustituyó $x + \Delta x$ en la función cuando aparecía la variable independiente y se evalúo $(x + \Delta x)^2$. De manera análoga, cuando se determinó $f(x)$, se sustituye el valor x siempre que aparecía la variable independiente y se evalúo x^2. *Cuando se pida al lector determinar el cociente de la diferencia $f(x)$, invariablemente será la función específica con la que esté trabajando.*

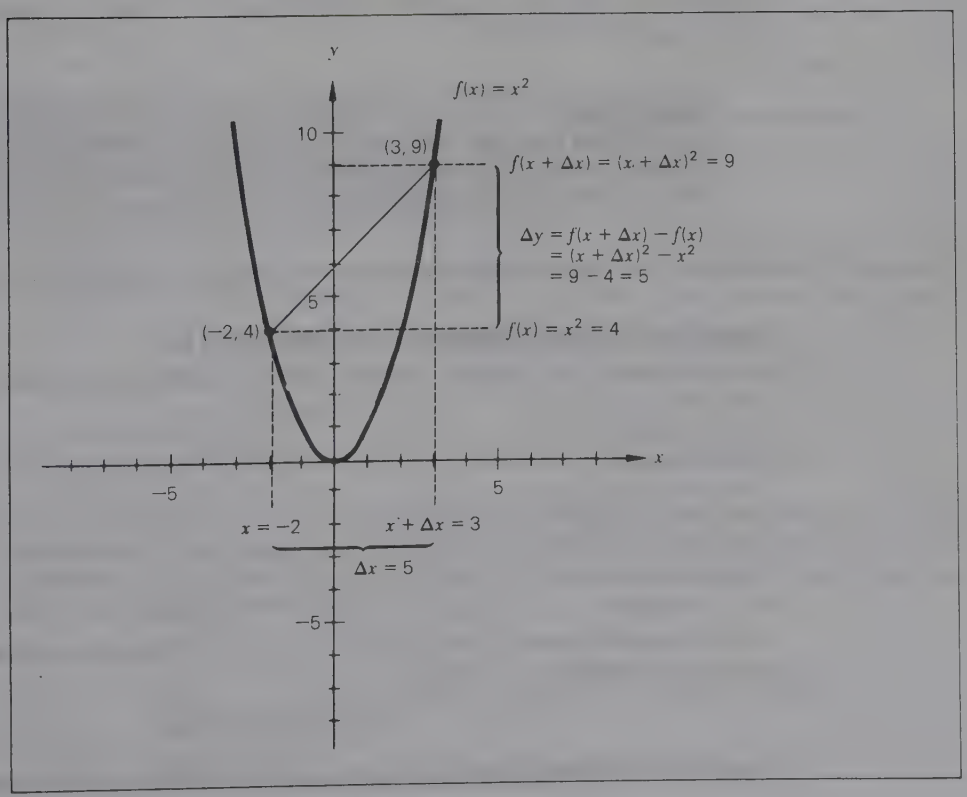


FIGURA 13.12

b) Aplicando la fórmula de la pendiente de dos puntos. se obtendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}$$
$$= \frac{9 - 4}{3 - (-2)} = \frac{5}{5} = 1$$

La pendiente de la secante que une $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ sobre f es 1.

c) Supóngase que $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ corresponden a los puntos $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ en la función. Supóngase asimismo que x corresponde a la coordenada -2 y $x + \Delta x$ corresponde a la coordenada 3. Por tanto,

$$(x, f(x)) \quad (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$(-2, 4) \quad (3, 9)$$

Y en consecuencia, $x = -2$

y $x + \Delta x = 3$

Por consiguiente, $(-2) + \Delta x = 3$

o bien $\Delta x = 5$

Este valor de Δx significa simplemente que al pasar *de* $(-2, 4)$ a $(3, 9)$, el valor de x se ha incrementado en 5 unidades.

Si sustituimos los valores de $x = -2$ y $\Delta x = 5$ en la ecuación (13.6), el cociente de la diferencia de esos dos puntos es $2(-2) + 5 = 1$. Éste es el mismo resultado que se consiguió en la parte *b*.

EJERCICIO

En el último ejemplo, sea $x = 3$ y $(x + \Delta x) = -2$. Evalúe el cociente de la diferencia y compruebe si llega al mismo resultado que en el ejemplo. ¿Cuáles son sus conclusiones?

Ejercicios de seguimiento de la sección 13.2

En cada una de las siguientes funciones determine la tasa promedio de cambio en el valor de y al pasar de $x = -1$ a $x = 3$.

1 $y = f(x) = 6x^2$
2 $y = f(x) = 3x^3$
3 $y = f(x) = x^2 - 3x + 4$
4 $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + x - 2$
5 $y = f(x) = x^2/(x - 4)$
6 $y = f(x) = x^3/2$
7 $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 1$
8 $y = f(x) = 5x^2 - 3x + 10$
9 $y = f(x) = 3x^2 - 2x$
10 $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$
11 $y = f(x) = -5x^3$
12 $y = f(x) = 3x^3 - 4x + 7$
13 $y = f(x) = x^4$
14 $y = f(x) = 5x^4 - 10$

15 Se lanza una pelota al aire. Su altura puede describirse en función del tiempo conforme a la función

$$h(t) = -16t^2 + 128t$$

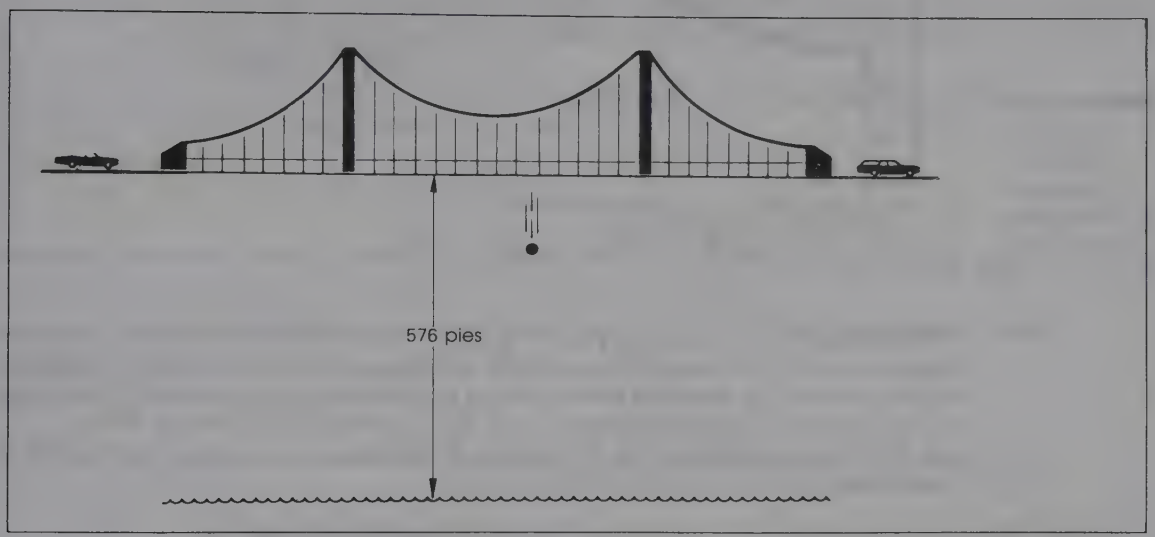
donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.

a) Determine la tasa promedio de cambio en la altura entre $t = 0$ y $t = 3$. Entre $t = 0$ y $t = 5$. Entre $t = 0$ y $t = 8$.

b) ¿Cuánto tarda la pelota en caer al suelo ($h = 0$)?

16 Se deja caer un objeto desde un puente de 576 pies de alto. La altura del objeto se determina en función del tiempo (a partir del momento en que se deja caer) según la función

$$h(t) = 576 - 16t^2$$



donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.

a) Determine la tasa promedio de cambio de altura entre $t = 0$ y $t = 1$. Entre $t = 0$ y $t = 2$. Entre $t = 0$ y $t = 4$.

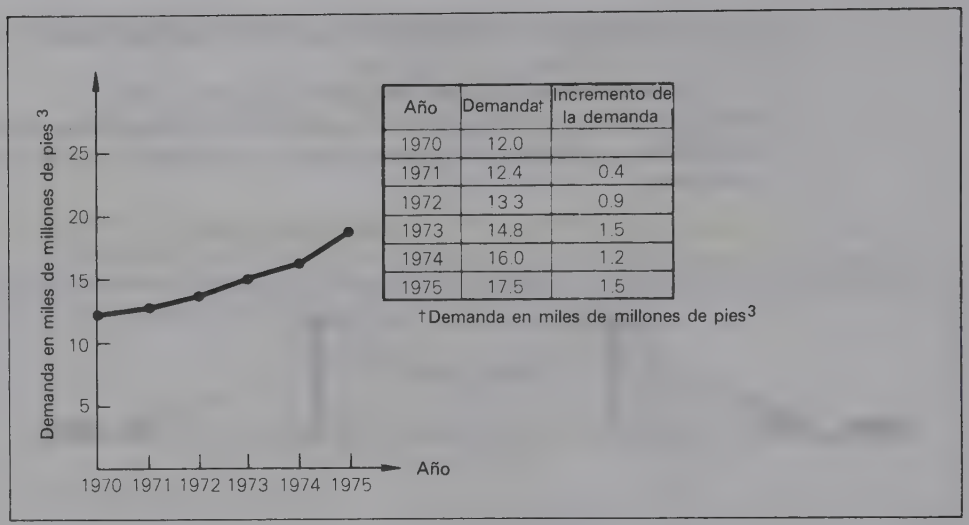
b) ¿Cuánto tarda la pelota en caer al agua ($h = 0$)?

17 La siguiente tabla contiene las ventas anuales (en dólares) obtenidas por una compañía durante cierto periodo. ¿A qué tasa promedio se incrementaron las ventas anuales entre 1983 y 1985? ¿Entre 1983 y 1984? ¿Entre 1984 y 1985? ¿Entre 1984 y 1986?

Año	1983	1984	1985	1986
Ventas anuales (millones)	$100.8	$105.4	$109.8	$116.5

18 La asistencia anual a los juegos de béisbol profesional se ha ido elevando en los últimos años (antes de la huelga de peloteros en 1981). Las cifras correspondientes a los años de 1977 a 1981 se dan en la tabla anexa. Calcule la tasa promedio de cambio en la asistencia anual entre 1977 y 1981, 1977 y 1980 y 1979 y 1981.

Año	1977	1978	1979	1980	1981
Asistencia anual (millones)	53.1	54.8	56.0	57.8	53.0



Año	Demanda†	Incremento de la demanda
1970	12.0	
1971	12.4	0.4
1972	13.3	0.9
1973	14.8	1.5
1974	16.0	1.2
1975	17.5	1.5

†Demanda en miles de millones de pies^3

FIGURA 13.13 Demanda anual de terrenos forestales comerciales.

19 La figura 13.13 indica los puntos de datos reunidos sobre la demanda anual de madera en regiones forestales comerciales. La demanda se mide en miles de millones de pies cúbicos. La demanda está creciendo pero no a una tasa constante. Determine la tasa promedio de cambio entre 1970 y 1975, 1970 y 1973 y 1973 y 1975.

20 Una persona hace un viaje en automóvil. La distancia recorrida d (en millas) se describe en función del tiempo t (en horas):

$$d = f(t) = 5t^2 + 12t \quad \text{donde } 0 \le t \le 4$$

a) ¿Cuál es la velocidad promedio en la primera hora? ¿Y en la tercera hora?

b) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el viaje de 4 horas?

En los ejercicios 21-38, *a*) determine la expresión general del cociente de la diferencia y *b*) con ese cociente calcule la pendiente de la secante que une los puntos en $x = 1$ y $x = 3$.

21 $y = f(x) = 3x^2 + 5$
22 $y = f(x) = 6x^2 + 9x$
23 $y = f(x) = 20x^2 + 10x + 10$
24 $y = f(x) = 50$
25 $y = f(x) = -4x^2 + 3x + 10$
26 $y = f(x) = 5x^2 - 10x$
27 $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x$
28 $y = f(x) = \dfrac{x^2}{3} + 2x$
29 $y = f(x) = ax^2 - bx$
30 $y = f(x) = mx^2 - n$
***31** $y = f(x) = x^3$
***32** $y = f(x) = -2x^3$
***33** $y = f(x) = 1/x$
***34** $y = f(x) = 5/x$
***35** $y = f(x) = 2x^3 - 10$
***36** $y = f(x) = -5x^3$
***37** $y = f(x) = -4/x$
***38** $y = f(x) = -6/x$

13.3 LA DERIVADA

En esta sección se expondrá el concepto de ***derivada***. Es un concepto fundamental para entender lo que se dice aquí, por lo cual conviene estudiar detenidamente este material.

Tasa instantánea de cambio

Hay que trazar una distinción entre los conceptos de ***tasa promedio de cambio*** y ***tasa instantánea de cambio***. El ejemplo 18 se refiere a una situación donde la distancia recorrida d se describió en función del tiempo t por medio de la función

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 5$$

Supóngase que queremos determinar a qué velocidad está desplazándose el automóvil en el *instante* en que $t = 1$. Podríamos calcular esta velocidad instantánea examinando la velocidad promedio durante los intervalos de tiempo cercanos a $t = 1$.

Por ejemplo, la velocidad promedio en la segunda hora (entre $t = 1$ y $t = 2$) puede determinarse así:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{[8(2^2) + 8(2)] - [8(1^2) + 8(1)]}{1} = \frac{48 - 16}{1} = 32 \text{ mph}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.5$ se determinará como

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1}$$

$$= \frac{[8(1.5)^2 + 8(1.5)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.5} = \frac{30 - 16}{0.5} = 28 \text{ mph}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.1$ se calcula del modo siguiente

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1}$$

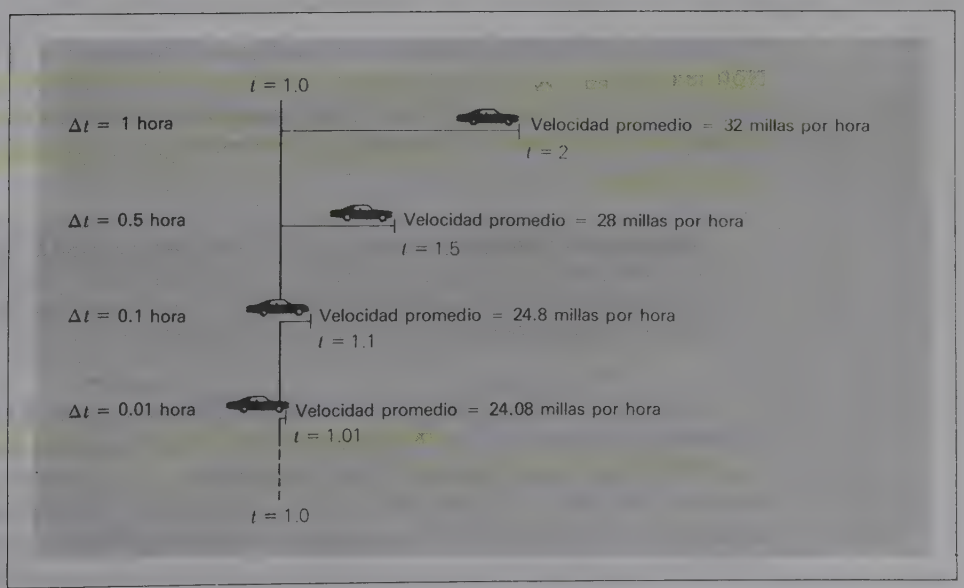


FIGURA 13.14

$$= \frac{[8(1.1)^2 + 8(1.1)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.1} = \frac{18.48 - 16}{0.1} = 24.8 \text{ mph}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.01$ se determina así:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(1.01) - f(1)}{1.01 - 1}$$

$$= \frac{[8(1.01)^2 + 8(1.01)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.01} = \frac{16.2408 - 16}{0.01} = 24.08 \text{ mph}$$

Con estos cálculos se ha estado determinando la velocidad promedio en intervalos cada vez más cortos medidos *desde* $t = 1$. A medida que el intervalo se torna más breve (o al irse aproximando a 1 el segundo valor de t), la velocidad promedio $\Delta d/\Delta t$ va acercándose a un valor límite. Y la ***velocidad instantánea*** en $t = 1$ puede definirse como este valor límite. Para determinarlo se calculará

$$\lim_{t \to 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{(8t^2 + 8t) - [8(1)^2 + 8(1)]}{t - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{(8t^2 + 8t) - 16}{t - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{8(t^2 + t - 2)}{t - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{8(t + 2)(t - 1)}{t - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} 8(t + 2)$$

$$= 8 \lim_{t \to 1} (t + 2)$$

$$= 8(1 + 2) = 24$$

Así pues, la velocidad *instantánea* del automóvil cuando $t = 1$ es de 24 mph. Nótese que la velocidad promedio se mide en un intervalo de tiempo y que la velocidad instantánea se define para un punto determinado en el tiempo. Esta última es una especie de instantánea de lo que está sucediendo en un instante determinado.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TASA INSTANTÁNEA DE CAMBIO
La tasa instantánea de cambio de una función suave y continua puede representarse geométricamente mediante la pendiente de la tangente trazada a la curva en el punto de interés.

Primero se determinará el significado de ***línea tangente***. Examinemos detenidamente la figura 13.15. *La línea tangente en A es la posición límite de la línea secante AB a medida que el punto B se va aproximando a A*. Adviértase que la posición de la secante gira en el sentido de las manecillas del reloj al aproximarse B a A(AB, AB', AB'' y AB'''). La posición límite de AB es el segmento de línea MN. Esta misma posición se produce sin importar si se aproxima a A con se-

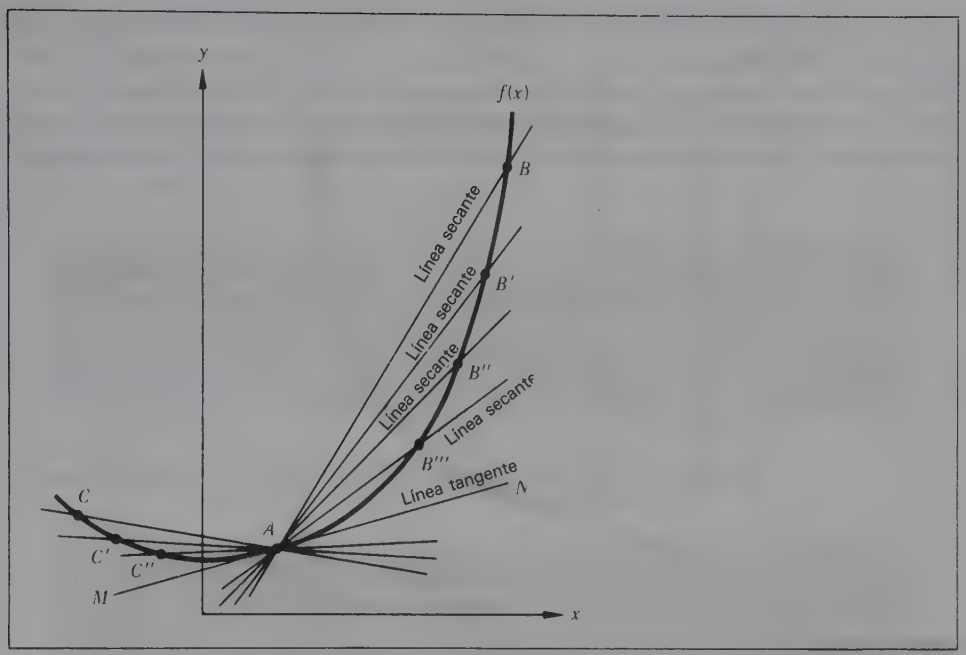


FIGURA 13.15

cantes de la derecha o izquierda de A. La secuencia de las líneas secantes AC, AC', y AC'' tiene la misma posición límite MN conforme C se traza más cerca de A. *Puesto que MN es la posición sin importar si la aproximación se hace desde la izquierda o derecha, MN es la línea tangente en el punto A.*

No todas las funciones continuas presentan líneas tangentes únicas en cada punto de la función. Así, la función $y = f(x) = \sqrt{|x|}$, que se ve en la figura 13.16, no posee una tangente en (0, 0). Las secantes trazadas desde (0, 0) a los puntos de la izquierda o derecha no convergen en la misma posición límite.

DEFINICIÓN: PENDIENTE DE UNA CURVA
La pendiente de una curva cuando $x = a$ es la pendiente de la tangente en $x = a$.

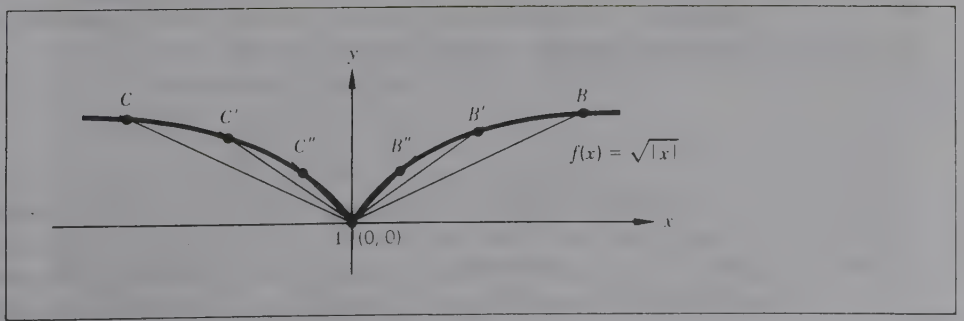


FIGURA 13.16
Ninguna línea secante en el punto A.

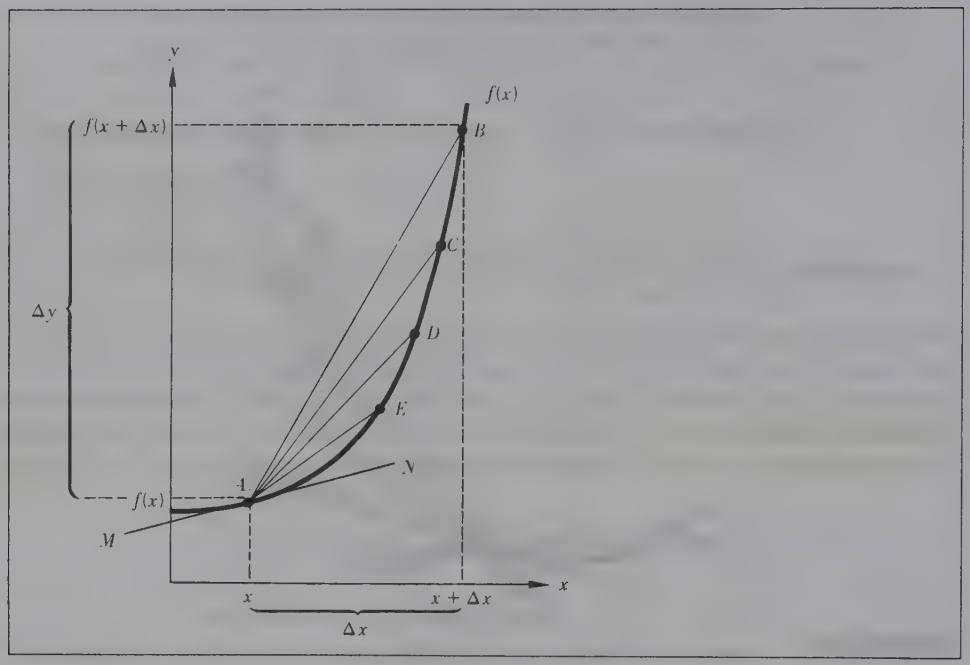


FIGURA 13.17

Más adelante se querrá determinar en especial la tasa instantánea de cambio de las funciones. Dicha tasa se representa con la pendiente de la línea tangente en el punto de interés, por lo cual hará falta un método para determinar esas pendientes de las tangentes. En la figura 13.17 supóngase que se desea calcular la pendiente de la línea tangente en A. Se cuenta con varias técnicas para ello. Si el lector es un excelente diseñador mecánico, podría construir una línea tangente en el punto A por medio de papel de gráficas, leer en las coordenadas de las líneas en dos puntos cualesquiera y sustituir las coordenadas en la fórmula de dos puntos.

Otro procedimiento consistirá en escoger otro punto B en la curva. Si se unen A y B con una secante, la pendiente del segmento de línea AB puede calcularse y utilizarse como una "aproximación" a la pendiente de MN. Es obvio que la pendiente AB no constituye una buena aproximación. Sin embargo, continuemos refiriéndonos todavía a la figura 13.17. En el punto B el valor de la variable independiente es $x + \Delta x$; la distancia entre A y B a lo largo del eje x es Δx. Si se aplica la fórmula de dos puntos, la pendiente de AB se obtendrá por medio del cociente de la diferencia:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad \textbf{(13.5)}$$

Y ahora observemos lo que sucede con la aproximación si se escoge un segundo punto más cerca del punto A. Si se selecciona como segundo punto al punto C, la pendiente de la línea secante AC sigue siendo una aproximación deficiente, pero mejor que la de AB. Y si observamos las pendientes de AD y

AE, se llegará la conclusión de que *la aproximación mejora a medida que el segundo punto se escoge cada vez más cerca de A*. De hecho, al irse aproximando el valor de Δx a 0, la pendiente del delgado segmento de línea que una A con el segundo punto se convierte en una aproximación excelente. La pendiente exacta de la tangente puede determinarse al calcular el límite del cociente de la diferencia cuando $\Delta x \to 0$.

DEFINICIÓN: LA DERIVADA

En una función dela forma $y = f(x)$ la ***derivada*** de la función es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{13.7}$$

Conviene señalar lo siguiente en relación con esta definición.

COMENTARIOS SOBRE LA DERIVADA

I La ecuación (13.7) es la expresión general de la *derivada* de la función f.

II La derivada es una expresión que representa la *tasa instantánea de cambio* en la variable dependiente cuando se opera un cambio en la variable independiente. La notación dy/dx se emplea para representar la tasa *instantánea* de cambio de y respecto al que se produce en x. Esta notación se distingue de $\Delta y/\Delta x$, que representa la tasa promedio de cambio.

III La derivada es una expresión general de la pendiente de la gráfica de una función en cualquier punto x dentro del dominio de la función.

IV Si el límite en la ecuación (13.7) no existe, tampoco existirá la derivada.

Aproximación del límite en la obtención de la derivada

OBTENCIÓN DE LA DERIVADA (APROXIMACIÓN DEL LÍMITE)

Paso 1: Se determina el cociente de la diferencia para f por medio de la ecuación (13.5).

Paso 2: Se encuentra el límite del cociente de la diferencia cuando $\Delta x \to 0$ mediante la ecuación (13.7).

NOTA

Si $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

no existe para una función en x, tampoco la función posee una derivada en x.

El siguiente ejemplo ilustra el ***método del límite*** en la determinación de la derivada.

EJEMPLO 20

En la función $f(x) = -5x + 9$, deberíamos observar que f es lineal con una pendiente de -5. Como la pendiente siempre es -5, deberemos encontrar que la derivada es -5.

Paso 1: el cociente de la diferencia es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[-5(x + \Delta x) + 9] - (-5x + 9)}{\Delta x}$$

$$= \frac{-5x - 5\Delta x + 9 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{-5\Delta x}{\Delta x}$$

o

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -5$$

Paso 2: la derivada es el límite del cociente de la diferencia, o sea

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(-5)$$

$$= -5$$

Así pues, la derivada es exactamente según se había previsto.

EJEMPLO 21

En el ejemplo 19 se observó que el cociente de la diferencia cuando $f(x) = x^2$ era

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Para encontrar la derivada de f, se determina el límite del cociente de la diferencia.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x)$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

USO E INTERPRETACIÓN DE LA DERIVADA

Para determinar la tasa instantánea de cambio (o, en forma equivalente, la pendiente) en cualquier punto de la gráfica de una función f, se sustituye el valor de la variable independiente en la expresión correspondiente a dy/dx. La derivada, evaluada en $x = c$, puede denotarse por $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}$, que se lee "la derivada de y respecto a x evaluada en $x = c$".

EJEMPLO 22

Para la función $f(x) = x^2$

a) Determine la tasa instantánea de cambio en $f(x)$ cuando $x = -3$
b) Determine la tasa instantánea de cambio en $f(x)$ cuando $x = 0$.
c) Determine la tasa instantánea de cambio en $f(x)$ cuando $x = +3$.

SOLUCIÓN

En el ejercicio 21 se determinó que $dy/dx = 2x$. Las respuestas a las partes (*a*) a (*c*) se consiguen por sustitución en esta expresión.

(*a*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-3} = 2(-3) = -6$

(*b*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2(0) = 0$

(*c*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 2(3) = +6$

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

En el capítulo 12 se dijo que la función $y = x^2$ es cuadrática. Grafique la función y confirme que los valores encontrados en el ejemplo 22 *a*, *b* y *c* parecen razonables en su representación de la pendiente $x = -3$, 0 y 3. La expresión de la derivada $dy/dx = 2x$ sugiere que, al volverse x más negativa, la pendiente se torna también más negativa y al hacerse x más positiva, será más positiva. ¿Parece esto correcto a la luz de la gráfica trazada por el lector?

EJEMPLO 23

En la función $f(x) = -2x^2 + 3x - 10$

a) Determine la derivada.
b) Determine la tasa instantánea de cambio en $f(x)$ cuando $x = 5$.
c) Determine en qué parte de la función la pendiente es 0.

SOLUCIÓN

a) **Paso I:** el cociente de la diferencia de f es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[-2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 10] - (-2x^2 + 3x - 10)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[-2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3x + 3\Delta x - 10] + 2x^2 - 3x + 10}{\Delta x}$$

$$= \frac{-2x^2 - 4x\Delta x - 2\Delta x^2 + 3x + 3\Delta x - 10 + 2x^2 - 3x + 10}{\Delta x}$$

Al simplificar el numerador se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4x\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x}$$

Al factorizar Δx en el numerador y al simplificar la expresión resultante nos queda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,(-4x - 2\Delta x + 3)}{\Delta x} = -4x - 2\Delta x + 3$$

Paso II: la derivada de la función es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (-4x - 2\Delta x + 3)$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = -4x + 3$$

(*b*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=5} = -4(5) + 3$

$= -17$

c) La pendiente será 0 siempre que $dy/dx = 0$, o en esta función cuando $-4x + 3 = 0$. Al despejar x se obtiene

$$-4x = -3$$

o

$$x = \tfrac{3}{4}$$

El único punto donde la pendiente es 0 ocurre cuando $x = \frac{3}{4}$.

EJERCICIO

Verifique que $x = \frac{3}{4}$ es la coordenada x del vértice de la parábola que representa a la función $f(x) = -2x^2 + 3x - 10$, empleando para ello la fórmula apropiada de la sección 12.2.

Si una función no es continua en un punto, no puede tener una derivada en él. Sin embargo, algunas funciones son continuas y, pese a ello, hay algunos puntos dentro del dominio donde no existe la derivada.

EJEMPLO 24

Examinemos detenidamente $f(x) = |2x|$, que se muestran en la figura 13.18. Supóngase que se desea calcular la derivada de f cuando $x = 0$. Al evaluar la ecuación 13.7 si $x = 0$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|2(0 + \Delta x)| - |2(0)|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|2\Delta x|}{\Delta x}$$

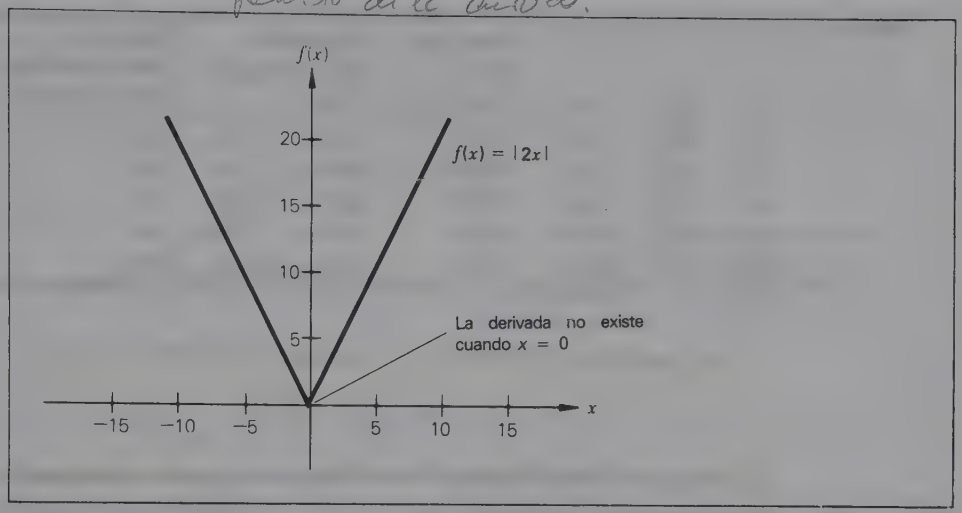


FIGURA 13.18

La evaluación de los límites de la izquierda y derecha nos da:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|2\Delta x|}{\Delta x} = -2 \quad y \quad \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|2\Delta x|}{\Delta x} = 2$$

Puesto que esos dos límites no son iguales,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|2\Delta x|}{\Delta x}$$

no existe. Por tanto, para la función $f(x) = |2x|$, que es continua a lo largo de su dominio, la derivada no existe *en el punto* $x = 0$.

Revisión de la tasa instantánea de cambio

En la última sección se comprobó que la derivada dy/dx puede interpretarse como una medida de la tasa instantánea de cambio en y respecto al que se opera en x. Con esta interpretación, la derivada puede servir para aproximar los cambios que ocurrirían en y si se produjera un cambio en el valor de x. En el siguiente ejemplo se explica el uso de dy/dx para aproximar estos cambios.

EJEMPLO 25

En el ejemplo 22 se evalúo la derivada de la función $f(x) = x^2$ en distintos valores de x. Se determinó que la pendiente con $x = 3$ es $+ 6$. Aplicando la tasa instantánea de cambio, se puede afirmar que "en el instante" en que $x = 3$, y está aumentando a una tasa de 6 unidades por cada unidad que se incremente x. Y esto nos da una aproximación de lo que sucederá si x crece a partir del valor de 3. El valor de la derivada cuando $x = 3$ indica que, por cada unidad que x aumente después de 3, y lo hará aproximadamente en 6 unidades. Si x crece de 3 a 4, la derivada denota que y se *incrementará* en 6 unidades, aproximadamente. Para verificar esta aproximación, se pueden compara los valores de $f(x)$ cuando x aumenta 1 unidad, de un valor de 3 a 4.

TABLA 13.17

x	Δx	$f(x)$	Cambio real $f(x) - f(3)$	Cambio proyectado $6(\Delta x)$	Cambio real−cambio proyectado
3.1	0.1	9.61	0.61	6(0.1) = 0.6	0.01
3.5	0.5	12.25	3.25	6(0.5) = 3.0	0.25
4.0	1.0	16.00	7.00	6(1.0) = 6.0	1.00
5.0	2.0	25.00	16.00	6(2.0) = 12.0	4.00
6.0	3.0	36.00	27.00	6(3.0) = 18.0	9.00

Al pasar de $x = 3$ a $x = 4$, el cambio verdadero de y será

$$\Delta y = f(4) - f(3)$$
$$= 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

La diferencia entre el cambio "real" de y y el cambio aproximado o "proyectado", que se funda en la derivada, es $7 - 6 = 1$. Se observa, pues, que la derivada da una *aproximación* del cambio real.

La tabla 13.7 presenta comparaciones similares de los valores de x más cercanos a 3 y de los valores de x mayores que 4. Un examen detenido de la tabla revela que, *cuanto menor sea el cambio de* x (Δx), *mejor será la aproximación proporcionada por* dy/dx. Esto se aprecia en la figura 13.19. Para cualquier valor de x, la separación vertical entre la curva que representa $y = x^2$ y la línea tangente en $x = 3$ representa la diferencia entre el valor real de $f(x)$ y el proyectado. Adviértase que, para los valores de x cercanos a 3, la separación vertical es pequeña; pero aumenta conforme nos alejamos más de $x = 3$.

La línea tangente puede utilizarse como una aproximación de $f(x)$ cerca del punto de tangencia. La exactitud de la aproximación dependerá de la distancia respecto al punto de tangencia (como se mostró antes) y de la naturaleza de la función y su comportamiento en la vecindad de la tangente. Esto se ilustra en la figura 13.20. El comportamiento de $f(x)$ cerca de A en la figura 13.20*b* es tal que la línea tangente es menos exacta que en la figura 13.20*a* en lo tocante a la aproximación.

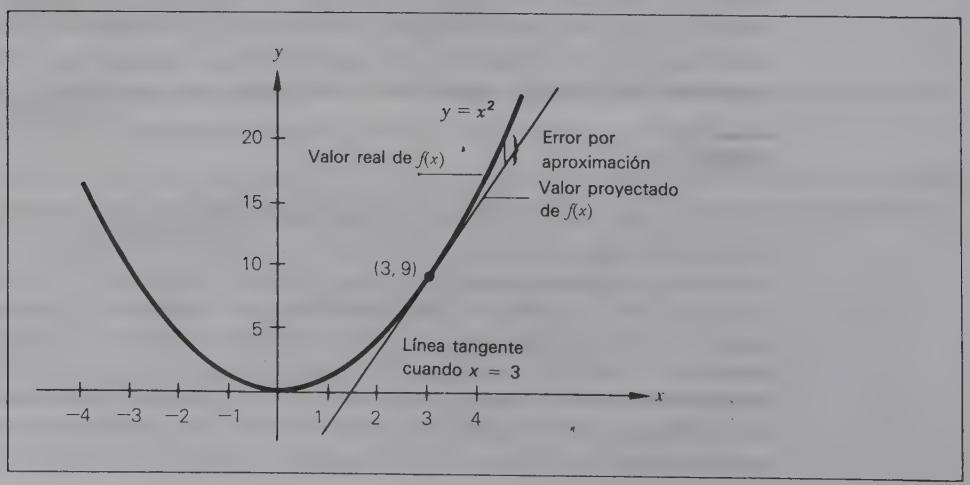


FIGURA 13.19

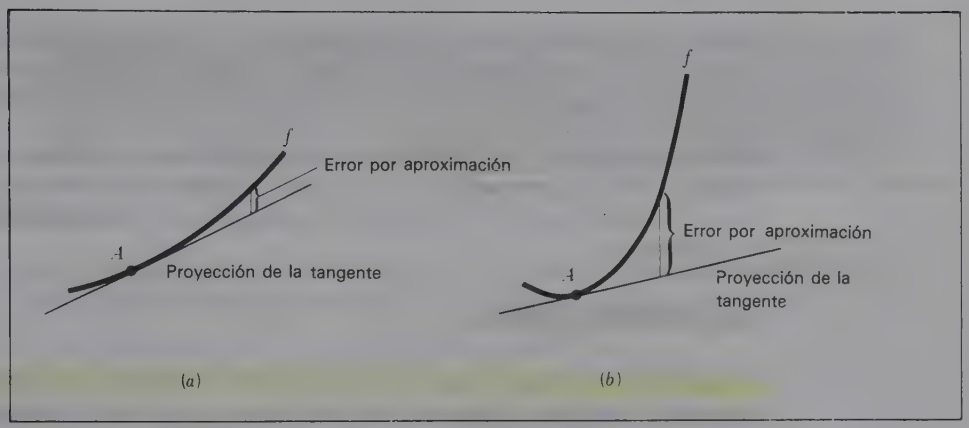


FIGURA 13.20

Ejercicios de seguimiento de la sección 13.3

En los ejercicios 1-24, *a*) determine la derivada de f por medio del método de límite y *b*) calcule la pendiente cuando $x = 1$ y $x = -2$.

1 $f(x) = 3x + 6$
2 $f(x) = 250$
3 $f(x) = 9x^2$
4 $f(x) = 4x^2$
5 $f(x) = 8x^2 - 10x$
6 $f(x) = 15x^2 + 18x$
7 $f(x) = x^2 - 7x + 8$
8 $f(x) = 12x^2 - 9x + 6$
9 $f(x) = -5x^2 + 3x - 6$
10 $f(x) = -6x^2 - 10x$
11 $f(x) = 25x^2 - 100$
12 $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4x$
13 $f(x) = ax + b$
14 $f(x) = -ax^2 - bx$
***15** $f(x) = -2/x$
***16** $f(x) = 4/x$
***17** $f(x) = a/x$
***18** $f(x) = 5/x^2$
***19** $f(x) = -3/x$
***20** $f(x) = 3x^3$
***21** $f(x) = x^3/2$
***22** $f(x) = 4/x^2$
***23** $f(x) = x^3 + 3x^2$
***24** $f(x) = x^4$

En los ejercicios 25-38 se dan la función f y su derivada dy/dx. *a*) determine la pendiente cuando $x = 2$ y $x = -1$, *b*) exprese con palabras la interpretación de los resultados de la parte (*a*) hecha a partir de la tasa instantánea de cambio y *c*) determine los valores de x en que la pendiente sea 0.

25 $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$
$dy/dx = 8x - 2$

26 $f(x) = 3x^2 + 24x - 10$
$dy/dx = 6x + 24$

27 $f(x) = 20x - 250$
$dy/dx = 20$

28 $f(x) = -x/2 + 5$
$dy/dx = -\frac{1}{2}$

29 $f(x) = -24$
$dy/dx = 0$

30 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x + 10$
$dy/dx = 12x^2 - 4x - 5$

31 $f(x) = x^5/5 - 16x + 3$
$dy/dx = x^4 - 16$

32 $f(x) = 16x^5 - 5x$
$dy/dx = 80x^4 - 5$

33 $f(x) = 8x^2 - 5x + 100$
$dy/dx = 16x - 5$

34 $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - x$
$dy/dx = x^4 - 1$

35 $f(x) = -30x^4 + 15x^3 - 25x^2$
$dy/dx = -120x^3 + 45x^2 - 50x$

36 $f(x) = -x^8$
$dy/dx = -8x^7$

37 $f(x) = 24x^3 - 12x$
$dy/dx = 72x^2 - 12$

38 $f(x) = 1/x^2$
$dy/dx = -2/x^3$

39 En la función del ejercicio 25, *a*) determine la tasa instantánea de cambio en $f(x)$ cuando $x = 2$. *b*) Empleando este resultado, estime el valor de $f(x)$ cuando $x = 2.5$ y $x = 3$. *c*) Calcule $f(2)$, $f(2.5)$ y $f(3)$, y determine la exactitud de sus estimaciones en la parte (*b*).

40 En la función del ejercicio 26, *a*) determine la tasa instantánea de cambio en $f(x)$ cuando $x = 2$, *b*) por medio de este resultado estime el valor de $f(x)$ cuando $x = 2.5$ y $x = 3$. *c*) Calcule $f(2)$, $f(2.5)$ y $f(3)$, y determine la exactitud de sus estimaciones en la parte (*b*).

13.4 DIFERENCIACIÓN

El proceso de obtener una derivada recibe el nombre de ***diferenciación***. Por fortuna, el proceso no necesariamente tiene que ser tan laborioso como podría parecer cuando se aplicó el método del límite. Se dispone de un grupo de reglas de diferenciación para obtener las derivadas de muchas funciones comunes. Hay varias funciones para las cuales no existe la derivada, *pero aquí nos ocuparemos de las funciones que son diferenciables.*

Reglas de diferenciación

Las reglas de diferenciación que se explican en la presente sección han sido desarrolladas usando el método de límite. Pueden ser muy complicadas las matemáticas que se aplican en la prueba de dichas reglas. En este libro bastará presentar las reglas sin prueba alguna. En el apéndice al final del capítulo se incluyen las pruebas de algunas reglas de diferenciación para el lector que desee consultarlas.

Las reglas de diferenciación se aplican a funciones que poseen características estructurales específicas. Una regla establecerá que, si una función muestra determinadas características, su derivada tendrá una forma resultante. Cuando estudie el lector las reglas, no olvide que cada función puede ser graficada y que la derivada es una expresión general de la pendiente de la función. Otra notación de dy/dx es hacer que $f'(x)$ (léase "f **prima de** x") represente la derivada de la función f en x. En otras palabras, si se tiene $f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Esta notación se empleará al presentar las reglas.

REGLA 1: FUNCIÓN CONSTANTE
Si $f(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces

$$f'(x) = 0$$

EJEMPLO 26

Examine la función $f(x) = 5$. Esta función tiene la forma indicada en la regla 1. Por consiguiente, $f'(x) = 0$. Si el lector considera el aspecto gráfico de la función, el resultado le parecerá razonable. La gráfica de la función $f(x) = 5$ es una línea horizontal que cruza el eje y en 5. La pendiente en todos los puntos a lo largo de la función es 0.

REGLA 2: REGLA DE LA POTENCIA
Si $f(x) = x^n$, donde n es un número real,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

EJEMPLO 27

Examine detenidamente la función $f(x) = x$. Esta función es la misma que $f(x) = x^1$. Al aplicar la regla 2, se sabe que $n = 1$ y que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot x^{1-1} \\ &= x^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esto significa que, para la función $f(x) = x$, la pendiente será 1 en todos los puntos. Conviene reconocer que $f(x) = x$ es una función lineal con pendiente de 1.

EJEMPLO 28

Considere la función $f(x) = x^5$. Al aplicar la regla 2 se tiene $n = 5$ y

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^{5-1} \\ &= 5x^4 \end{aligned}$$

EJEMPLO 29

Pongamos el caso de la función $f(x) = 1/x^3$.

RECORDATORIO DE ÁLGEBRA

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Al reescribir f como $f(x) = x^{-3}$, se tiene $n = -3$ y

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^{-3-1} \\ &= -3x^{-4} \\ &= \frac{-3}{x^4} \end{aligned}$$

EJEMPLO 30

Considérese la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

RECORDATORIO DE ÁLGEBRA

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Al reescribir f como $f(x) = x^{2/3}$ se obtiene $n = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{2}{3}x^{2/3-1} \\ &= \frac{2x^{-1/3}}{3} \end{aligned}$$

Cuando se reescribe con un exponente positivo se obtiene

$$f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

que puede escribirse en la forma siguiente usando un radical:

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

REGLA 3: CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN

Si $f(x) = c \cdot g(x)$, donde c es una constante y g es una función diferenciable,

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

EJEMPLO 31

Examínese la función $f(x) = 10x^2$. La aplicación de la regla 3 nos da $g(x) = x^2$ y $c = 10$, y también

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10(2x) \\ &= 20x \end{aligned}$$

EJEMPLO 32

Considérese la función $f(x) = -3/x$. Esta función puede reescribirse del modo siguiente:

$$f(x) = -3\left(\frac{1}{x}\right) = -3x^{-1}$$

La aplicación de las reglas 2 y 3 nos da

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-3)(-1)(x^{-1-1}) \\ &= 3x^{-2} \\ &= \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

REGLA 4: SUMA O DIFERENCIA DE FUNCIONES

Si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, donde u y v son diferenciables.

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

Esta regla significa que la derivada de una función formada por la suma (diferencia) de dos o más funciones componentes es la suma (diferencia) de las derivadas de dichas funciones.

EJEMPLO 33

Analicemos la función $f(x) = x^2 - 5x + 10$. La aplicación de las reglas 1 a 4 nos da

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 5 + 0 \\ &= 2x - 5 \end{aligned}$$

REGLA 5: REGLA DEL PRODUCTO
Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, donde u y v son diferenciables, entonces

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

EJEMPLO 34

Examínese la función $f(x) = (x^2 - 5)(x - x^3)$. Al aplicar la regla 5 se tiene $u(x) = x^2 - 5$ y $v(x) = x - x^3$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)(x - x^3) + (1 - 3x^2)(x^2 - 5) \\ &= 2x^2 - 2x^4 + x^2 - 5 - 3x^4 + 15x^2 \\ &= -5x^4 + 18x^2 - 5 \end{aligned}$$

EJEMPLO 35

En el último ejemplo la función pudo haber sido reescrita en la forma equivalente

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 5)(x - x^3) \\ &= x^3 - x^5 - 5x + 5x^3 \\ &= -x^5 + 6x^3 - 5x \end{aligned}$$

La obtención de la derivada de esta forma de la función no exige utilizar la regla 5. La derivada es

$$f'(x) = -5x^4 + 18x^2 - 5$$

que es el mismo resultado conseguido antes.

NOTA
Como en los dos últimos ejemplos, muchas de las funciones son manipulables algebraicamente y pueden ser convertidas en la forma equivalente. Esto puede ser de utilidad por dos motivos. *Primero*, reescribir una función en una forma equivalente permite emplear las reglas de la derivada que son más eficientes o fáciles de recordar. *Segundo*, la obtención de la derivada de la función original y de la forma equivalente proporciona una verificación de la respuesta.

REGLA 6: REGLA DEL COCIENTE
Si $f(x) = u(x)/v(x)$, donde u y v son diferenciables y $v(x) \neq 0$, entonces

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

En su forma verbal, la regla anterior establece que la derivada se calcula multiplicando el denominador por la derivada del numerador, luego se resta el producto del numerador y la derivada del denominador y, finalmente, se divide el resultado entre el cuadrado del denominador.

EJEMPLO 36

En el ejemplo 29 se utilizó la regla de la potencia para determinar que la derivada de $f(x) = 1/x^3$ es $f'(x) = -3/x^4$. Dado que f tiene la forma de cociente, a manera de método alternativamente puede aplicarse la regla 6 del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^3(0) - (1)(3x^2)}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-3}{x^4} \end{aligned}$$

EJEMPLO 37

Considérese la función $f(x) = (3x^2 - 5)/(1 - x^3)$. La aplicación de la regla 6 nos da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 - x^3)(6x) - (3x^2 - 5)(-3x^2)}{(1 - x^3)^2} \\ &= \frac{6x - 6x^4 + 9x^4 - 15x^2}{(1 - x^3)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 15x^2 + 6x}{(1 - x^3)^2} \end{aligned}$$

REGLA 7: POTENCIA DE UNA FUNCIÓN*

Si $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es una función diferenciable,

$$f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$

Esta regla se asemeja mucho a la de potencia (regla 2). En efecto, la regla de potencia constituye el caso especial de esta regla donde $u(x)$ es x. Cuando $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ y, al aplicar la regla 7, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x)^{n-1}(1) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

*Volveremos a ocuparnos de esta regla más adelante, cuando tratemos de la terminología de la regla de la cadena.

EJEMPLO 38

Examínese la función $f(x) = \sqrt{7x^4 - 5x - 9}$. Al reescribir la función se obtiene $f(x) = (7x^4 - 5x - 9)^{1/2}$. En esta forma, se aplica la regla cuando $u(x) = 7x^4 - 5x - 9$. La aplicación de la regla 7 nos da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}(7x^4 - 5x - 9)^{(1/2)-1}(28x^3 - 5) \\ &= (14x^3 - \tfrac{5}{2})(7x^4 - 5x - 9)^{-1/2} \end{aligned}$$

que puede reescribirse así

$$f'(x) = \frac{14x^3 - \frac{5}{2}}{(7x^4 - 5x - 9)^{1/2}}$$

o bien

$$f'(x) = \frac{14x^3 - \frac{5}{2}}{\sqrt{7x^4 - 5x - 9}}$$

EJEMPLO 39

Considérese la función

$$f(x) = \left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^5$$

Esta función presenta la forma señalada en la regla 7, donde u es la función racional $3x/(1 - x^2)$. Al aplicar la regla 7 se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{(1 - x^2)(3) - (3x)(-2x)}{(1 - x^2)^2} \\ &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{3 - 3x^2 + 6x^2}{(1 - x^2)^2} \\ &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{3 + 3x^2}{(1 - x^2)^2} \end{aligned}$$

Revisión de la tasa instantánea de cambio

En el ejemplo 18 la función

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t$$

describió la distancia (en millas) que recorre un automóvil en función del tiempo (en horas). La velocidad instantánea del automóvil en cualquier instante se calcula al evaluar la derivada en ese valor de t. Para determinar la velocidad instantánea si $t = 3$, la derivada

$$f'(t) = 16t + 8$$

ha de evaluarse cuando $t = 3$, o sea

$$\begin{aligned} f'(3) &= 16(3) + 8 \\ &= 56 \text{ mph} \end{aligned}$$

EJEMPLO 40

Se deja caer un objeto desde un peñasco situado a 1296 pies de altura. La altura del objeto se describe en función del tiempo. La función es

$$h = f(t) = -16t^2 + 1{,}296$$

donde h representa la altura en pies y t el tiempo medido en segundos y contado desde el momento en que se deja caer el objeto.

a) ¿A qué distancia caerá el objeto en 2 segundos?

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea del objeto cuando $t = 2$?

c) ¿Cuál es su velocidad en el momento de caer al suelo?

SOLUCIÓN

a) El cambio de la altura es

$$\begin{aligned}\Delta h &= f(2) - f(0)\\ &= [-16(2)^2 + 1\,296] - [-16(0)^2 + 1\,296]\\ &= (-64 + 1\,296) - 1\,296 = -64\end{aligned}$$

Así pues, el objeto *cae* 64 pies durante los primeros 2 segundos.

b) Puesto que $f'(t) = -32t$, el objeto tendrá una velocidad de

$$\begin{aligned}f'(2) &= -32(2)\\ &= -64 \text{ pies/segundo}\end{aligned}$$

cuando $t = 2$. El signo de menos denota la dirección de la velocidad hacia abajo.

c) A fin de determinar la velocidad del objeto cuando cae al suelo, es preciso saber *cuándo* llegará al suelo. Y lo hará cuando $h = 0$, o sea

$$-16t^2 + 1\,296 = 0$$

Si resolvemos para t,

$$t^2 = \frac{1\,296}{16} = 81$$

y $t = \pm 9$. Como una raíz negativa carece de sentido, puede llegarse a la conclusión de que el objeto tocará el suelo al cabo de 9 segundos. En ese momento la velocidad será de

$$\begin{aligned}f'(9) &= -32(9)\\ &= -288 \text{ pies/segundo}\end{aligned}$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 13.4

En los ejercicios 1-56, encuentre la expresión para $f'(x)$.

1 $f(x) = 140 - x$

2 $f(x) = -550$

3 $f(x) = x^3 - 8x$

4 $f(x) = -3x/4 + 9x^2$

5 $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

6 $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$

7 $f(x) = x^6$

8 $f(x) = x^{43/4}$

9 $f(x) = x^6/3 - 2x^2 + 25x$
10 $f(x) = x^4/2 - 5x^3 + 10x^2$
11 $f(x) = 6/x^3$
12 $f(x) = 8/6x^2$
13 $f(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3$
14 $f(x) = x^{5/3}$
15 $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$
16 $f(x) = x^{2/5}$
17 $f(x) = 25/x^4$
18 $f(x) = -8/x^5$
19 $f(x) = 25x^2 + \sqrt{x}$
20 $f(x) = 3x^2 + 5x - 1/x$
21 $f(x) = 1/x^{10}$
22 $f(x) = -1/x + 1/x^2$
23 $f(x) = x^2 + 1/\sqrt{x}$
24 $f(x) = 4/\sqrt[6]{x^5}$
25 $f(x) = (x^3 - 4x)(x^5 + 8x^2)$
26 $f(x) = (x^3/2 - 10)(x^4 - 2x^3 + 9)$
27 $f(x) = (6x^3 - 4x + 9)(x^3/4 + 6)$
28 $f(x) = [(x + 8)/2](x^3 - 4x^2 + 9)$
29 $f(x) = 7x/(1 + x^2)$
30 $f(x) = 8x/(6x^3 + 5)$
31 $f(x) = 1/(4x^3 - 6x^2 + 4)$
32 $f(x) = (4x^3 + 3)/(x^2 - 20)$
33 $f(x) = (1 - 6x^3)^4$
34 $f(x) = (9x^2 - 3x + 1)^5$
35 $f(x) = \sqrt[3]{1 - 5x^3}$
36 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 7x + 3}$
37 $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2 - 1}$
38 $f(x) = \sqrt{1/(x^2 + 8)}$
39 $f(x) = (x^3 - 3x^2)^5$
40 $f(x) = (10 - x + 3x^2)^4$
41 $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 2x + 1)^2}$
42 $f(x) = \sqrt[3]{(4x^5 - 5x^3)^2}$
***43** $f(x) = (x^2 + 6)(6x^5 - 4x^3)^5$
***44** $f(x) = (1 - x^3)^3(7x^5 - 4x^3 + 2x)$
***45** $f(x) = \sqrt{(x^2 - 2x + 1)/(1 - x^3)}$
***46** $f(x) = \sqrt[3]{[x/(3 - 5x^2)]^2}$
***47** $f(x) = [(3x^2 + 5x)/(1 - 5x^3)]^4$
***48** $f(x) = \sqrt[3]{(5 - x^2)(x^3 - 3x)^4}$
***49** $f(x) = \sqrt[3]{[x^2/(5x - 1)]^2}$
***50** $f(x) = \sqrt{(x - 1)^5(6x - 5)}$
***51** $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x^3)^5 x^3/(9 - 2x^2)}$
***52** $f(x) = (6x - 2)\sqrt{x^2 - 5x + 3}$
53 $f(x) = ax^2 + bx + c$
54 $f(x) = mx + b$
55 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
56 $f(x) = (mx + b)/(cx + d)$

En los ejercicios 57-74, *a*) calcule $f'(x)$, *b*) determine los valores de x para los cuales la pendiente de la gráfica de f sea 0.

57 $f(x) = 18x - 5$
58 $f(x) = 6x^2 - 4x + 1$
59 $f(x) = x^3/3 - 9x + 8$
60 $f(x) = 8x^4/4 - x$
61 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
62 $f(x) = -4/x$
63 $f(x) = x^2/(1 - x^2)$
64 $f(x) = (8x - 4)^{5/2}$
65 $f(x) = (x - 2)(x + 15)$
66 $f(x) = 4/x^3$
67 $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6$
68 $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 15x + 10$
69 $f(x) = 10/x^2$
70 $f(x) = -5/x^3$
71 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x$
72 $f(x) = 6x^3 + 2x^2$
73 $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 12x$
74 $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x - 50$

75 La función $h = f(t) = 2.5t^3$, donde $0 \le t \le 30$, describe la altura h (en miles de pies) de un misil t segundos después de haber sido lanzado.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el intervalo $0 \le t \le 5$?

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 5$? ¿Y cuando $t = 25$?

76 Un objeto es lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 256 pies por segundo. La función que describe la altura h de la pelota es

$$h = f(t) = 256t - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t es el tiempo medido en segundos desde que se arrojó la pelota.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando $t = 2$ segundos?

b) ¿Cuándo retornará la pelota al suelo?

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al caer al suelo?

77 Una pelota se deja caer desde el techo de un edificio de 256 pies de altura. La altura de la pelota se describe con la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 256$$

donde h denota la altura en pies y t el tiempo medido en segundos desde el momento en que se deja caer la pelota.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el intervalo $2 \leq t \leq 3$?
b) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 2$?
c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el momento de llegar al suelo?

78 Control de epidemias Una epidemia está propagándose por un estado del oeste de Estados Unidos. Los funcionarios de salubridad estiman que el número de personas que se contagiarán es una función del tiempo transcurrido desde que se detectó la epidemia. En concreto, la función es

$$n = f(t) = 300t^3 - 20t^2$$

donde n representa el número de personas y $0 \leq t \leq 60$, medido en días.

a) ¿Cuántas personas se espera que contraigan la enfermedad al cabo de 20 días? ¿Y al cabo de 40 días?
b) ¿Cuál es la tasa promedio que se espera a que la epidemia se propague entre $t = 10$ y $t = 15$?
c) ¿Cuál es la tasa instantánea que se espera a que la enfermedad se propague cuando $t = 25$?

13.5 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

En una función f existen otras derivadas susceptibles de definición. En la presente sección se explican estas ***derivadas de orden superior*** y su interpretación.

Segunda derivada

La derivada f' de la función f a menudo recibe el nombre de ***primera derivada*** de la función. El adjetivo *primera* sirve para distinguir esta derivada de las otras relacionadas con una función. El ***orden*** de ella es 1.

La ***segunda derivada*** f'' de una función es la derivada de la primera. En x, se denota por d^2y/dx^2 o bien $f''(x)$. La segunda derivada se determina aplicando las mismas reglas de diferenciación que se usarán para calcular la primera derivada. En la tabla 13.8 se incluye el cálculo de la primera y segunda derivadas de diversas funciones.

Del mismo modo que la primera derivada es una medida de la tasa instantánea de cambio en el valor de y respecto al que se opera en x, también la *segunda derivada* constituye una medida de la tasa instantánea de cambio en el valor

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
x^5	$5x^4$	$20x^3$
$x^2 - 3x + 10$	$2x - 3$	2
$mx + b$	m	0
$x^3 - 2x^2 + 5x$	$3x^2 - 4x + 5$	$6x - 4$
$x^{3/2}$	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$\frac{3}{4}x^{-1/2}$

de la primera derivada respecto al que se produce en x. Descrito esto en forma diferente, puede afirmarse que la segunda derivada es una *medida de la tasa instantánea de cambio en la pendiente respecto al que se da en x.*

Examínese detenidamente la función $f(x) = -x^2$. La primera y segunda derivadas de esa función son

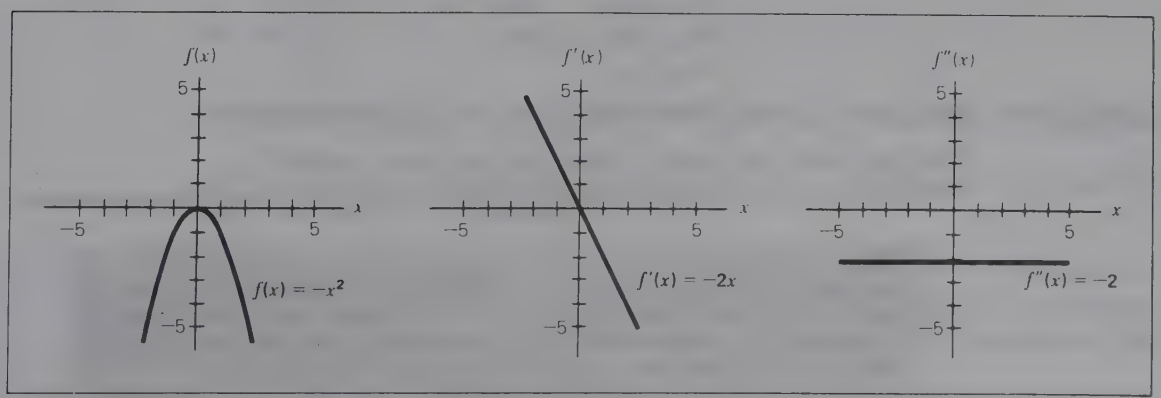
$$f'(x) = -2x \qquad f''(x) = -2$$

La figura 13.21 muestra las gráficas de f, f' y f''. Estas gráficas han sido trazadas en forma contigua, para facilitar algunas importantes observaciones. La función f es una parábola cóncava hacia abajo, con el vértice en (0, 0). Al observar el trazado de f, se advierte que la pendiente de la tangente es positiva a la izquierda del vértice, pero que se torna *menos positiva* conforme x se aproxima a 0. A la derecha del vértice la pendiente de la tangente es negativa y se torna *más negativa* (disminuye) conforme x aumenta. La gráfica de f' indica el valor de la pendiente en cualquier punto de f. Nótese que los valores de $f'(x)$ son positivos, pero que se vuelven menos positivos, al irse acercando x a 0 desde la izquierda. Y $f'(x)$ se hace más y más negativa a medida que el valor de x se vuelve más positivo. Así pues, la gráfica de f' es compatible con nuestras observaciones de la gráfica de f.

La segunda derivada es una medida de la tasa instantánea de cambio en la primera derivada o en la pendiente de la gráfica de una función. Dado que $f''(x) = -2$, esto significa que la tasa de cambio en la primera derivada es constante en toda la función. Más exactamente, $f''(x) = -2$ indica que en cualquier parte de la función la pendiente *está disminuyendo* a una tasa instantánea de 2 unidades por cada unidad que aumente x. Si se observa f' y su gráfica, f' es una función lineal con una pendiente de -2.

En algunos ejemplos anteriores del capítulo se describieron funciones que presentan la forma $d = f(t)$ donde d representa la distancia recorrida después del tiempo t. Se llegó entonces a la conclusión de que la velocidad instantánea en cualquier tiempo t estaba representada por la primera derivada $f'(t)$. La segunda derivada de este tipo de función $f''(t)$ ofrece una medida de la tasa instantánea de cambio *en la velocidad* respecto a un cambio en el tiempo. Esta segunda derivada, medida en unidades de distancia por unidad del cuadrado

FIGURA 13.21



del tiempo (por ejemplo pies/s^2 o km/h^2), representa la ***aceleración instantánea*** de un objeto. Si

$$d = f(t) = t^3 - 2t^2 + 3t$$

la expresión que representa la ***velocidad instantánea*** será

$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 3$$

y la expresión que representa la ***aceleración instantánea*** será

$$f''(t) = 6t - 4$$

Tercera derivada y derivadas de orden superior

Pueden determinarse otras derivadas para las funciones. Todas ellas son menos fáciles de entender desde un punto de vista intuitivo. No obstante, nos serán útiles más adelante y poseen un valor determinado en niveles más altos del análisis matemático.

DEFINICIÓN: DERIVADA DE *n-ésimo* ORDEN

La ***derivada de n-ésimo orden*** de f denotada por $f^{(n)}$ se calcula diferenciando la derivada de orden $n - 1$. Es decir, en x,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)]$$

EJEMPLO 41

En

$$f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$$

las derivadas de f son

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^5 - 10x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 2x - 1 \\
f''(x) &= 30x^4 - 40x^3 + 12x^2 - 18x + 2 \\
f'''(x) &= 120x^3 - 120x^2 + 24x - 18 \\
f^{(4)}(x) &= 360x^2 - 240x + 24 \\
f^{(5)}(x) &= 720x - 240 \\
f^{(6)}(x) &= 720 \\
f^{(7)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Todas las demás derivadas de orden superior serán también 0.

NOTA

Para las funciones polinomiales de *grado n*, la primera derivada es una función polinomial de grado $n - 1$. Cada derivada sucesiva es una función polinomial de un grado menos que la derivada anterior (hasta que el grado de una derivada sea 0).

Ejercicios de seguimiento de la sección 13.5

En los ejercicios 1-20, *a*) encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$, *b*) evalue $f'(1)$ y $f''(1)$ y *c*) exprese con palabras el significado de $f'(1)$ y de $f''(1)$.

1 $f(x) = 150$
2 $f(x) = 24 - 10x^2$
3 $f(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 10$
4 $f(x) = x^3 - 15x^2 + 10x$
5 $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 5$
6 $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x + 7$
7 $f(x) = x^4/4 - x^3/3 + 10x^2$
8 $f(x) = x^5/5 - x^3/3 + 100x$
9 $f(x) = 1/x$
10 $f(x) = (x^2 - 5)^4$
11 $f(x) = 25x^2 - 10x + 15$
12 $f(x) = -15x^3 + 20x^2$
13 $f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 20$
14 $f(x) = (x^3 - 2x)^4$
15 $f(x) = -10/x^2$
16 $f(x) = -5/x^3$
17 $f(x) = (4 - x)^5$
18 $f(x) = \sqrt{x + 3}$
19 $f(x) = \sqrt[3]{(8 + x)^2}$
20 $f(x) = (x^2 - 1)/(x)$

21 La altura de un objeto que se deja caer desde una altura de 1200 pies se describe por medio de la función

$$h = 1\,200 - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t en segundos.

a) ¿Cuál es la velocidad cuando $t = 3$? ¿Y cuando $t = 5$?
b) ¿Cuál es la aceleración si $t = 3$? ¿Y si $t = 5$?

22 Se lanza hacia arriba una pelota desde el techo de un edificio de 750 pies de alto. La pelota alcanzará una altura de h pies al cabo de t segundos según se describe con la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 50t + 750$$

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 5 segundos?
b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 5 segundos? (Un signo negativo indica una dirección hacia abajo.)
c) ¿Cuál es la aceleración de la pelota cuando $t = 0$? ¿Y cuando $t = 5$?

En los ejercicios 23-38, determine todas las derivadas de orden superior.

23 $f(x) = 18x^3 - 4x^2 + 6x$
24 $f(x) = 2{,}500$
25 $f(x) = mx + b$
26 $f(x) = -x^2/4 + 10x - 5$
27 $f(x) = x^6 - 6x^3 - 30x^2$
28 $f(x) = (x + 10)^4$
29 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
30 $f(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$
31 $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + 2x$
32 $f(x) = -x^9 + 7x^6 + 100$
33 $f(x) = (x - 2)^5$
34 $f(x) = (ax + b)^3$
35 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 15x$
36 $f(x) = 6x^5 + 5x^4 - 2x - 100$
37 $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2$
38 $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x - 1$

13.6 DIFERENCIACIÓN DE FORMAS FUNCIONALES ESPECIALES (OPCIONAL)

En esta sección trataremos de las técnicas con que se diferencian algunas formas funcionales no abarcadas por las reglas 1 a 7.

Regla de la cadena

La regla 7 (potencia de una función) se explicó sucintamente y sin prestarle la atención que merece. Según se señaló en la sección 13.5, esta regla es un caso especial de la *regla más general de la cadena*.

REGLA 8: REGLA DE LA CADENA
Si $y = f(u)$ es una función diferenciable y $u = g(x)$ es también una función diferenciable, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Recuerde el lector que en el capítulo 1 se estudiaron las funciones compuestas: aquellas cuyo valor depende de otras funciones. La regla de la cadena se aplica concretamente a las funciones compuestas. Pongamos el caso de dos funciones

$$y = f(u) = 20 - 3u$$

y

$$u = g(x) = 5x - 4$$

Nótese que el valor de y depende en definitiva de x. Esto se comprueba observando que, si x aumenta en 1 unidad, u se incrementa en 5 unidades. Y un aumento de 5 unidades en u da origen a un *decremento* de (3)(5) = 15 unidades en y. Si se desea averiguar cómo el valor de y responde ante los cambios de x, puede aplicarse la regla de la cadena.

Puesto que $\frac{dy}{du} = -3$

y $\frac{du}{dx} = 5$

entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-3)(5)$

$= -15$

EJEMPLO 42

En $y = f(u) = u^2 - 2u + 1$ y $u = g(x) = x^2 - 1$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (2u - 2)(2x)$$

Puede reescribirse dy/dx estrictamente en términos de x con sólo sustituir $u = x^2 - 1$. Esto nos da

$$\frac{dy}{dx} = [2(x^2 - 1) - 2](2x)$$
$$= (2x^2 - 4)(2x)$$
$$= 4x^3 - 8x$$

Con la regla 7 se aproximaría este problema reformulando primero $f(u)$ en términos de x. Es decir, puesto que $u = x^2 - 1$

$$y = u^2 - 2u + 1$$
$$= (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) + 1$$

La expresión de dy/dx se obtiene directamente como

$$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 - 1)(2x) - 4x$$
$$= 4x^3 - 8x$$

que es de nuevo el mismo resultado conseguido antes.

EJEMPLO 43

En $y - f(u) = u^3 - 5u$, donde $u = g(x) = x^4 + 3x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (3u^2 - 5)(4x^3 + 3)$$

Al reescribir esto en función de x se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = [3(x^4 + 3x)^2 - 5](4x^3 + 3)$$
$$= [3(x^8 + 6x^5 + 9x^2) - 5](4x^3 + 3)$$
$$= (3x^8 + 18x^5 + 27x^2 - 5)(4x^3 + 3)$$
$$= 12x^{11} + 72x^8 + 108x^5 - 20x^3 + 9x^8 + 54x^5 + 81x^2 - 15$$
$$= 12x^{11} + 81x^8 + 162x^5 - 20x^3 + 81x^2 - 15$$

Otras derivadas

La derivada dx/dy es una medida de la tasa instantánea de cambio de x en relación con el que se produce en y. En el caso de muchas funciones, quizá realmente se quiera conocer el valor de dx/dy. En algunos casos, una función de la forma $y\ f(x)$ puede resolverse explícitamente para x, creando con ello una función inversa de la forma $x = g(y)$. En otros casos tal vez sea posible despejar explícitamente x. La siguiente propiedad de la derivada es útil al determinar dx/dy.

REGLA 9

En una función diferenciable de la forma $y = f(x)$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \quad \text{a condición de que} \quad \frac{dy}{dx} \neq 0 \tag{13.8}$$

EJEMPLO 44

En $y = f(x) = 5x - 20$, puede despejarse x en términos de la variable y, creando para ello la función inversa

$$x = g(y)$$

o

$$x = 4 + \frac{y}{5}$$

La diferenciación de g respecto a y produce

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5}$$

Verifiquemos la respuesta con la propiedad expresada en la ecuación (13.8) y diferenciemos f en relación con x

$$\frac{dy}{dx} = 5$$

De acuerdo con la ecuación (13.8)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{5}$$

lo cual coincide con la respuesta original.

EJEMPLO 45

En la función $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, es extremadamente difícil despejar la función inversa $x = g(y)$. Sin embargo, puede determinarse dx/dy por ser diferenciable f y porque

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

Según la ecuación (13.8)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 - 6x} \qquad x \neq 0 \quad \text{or} \quad 2$$

REGLA 10: REGLA DEL PRODUCTO DE TRES FACTORES
Si $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$, donde u, v y w son diferenciables, entonces

$$f'(x) = u'(x)v(x)w(x) + v'(x)u(x)w(x) + w'(x)u(x)v(x)$$

EJEMPLO 46

En la función $f(x) = x^3(x^2 - 1)(x^3 + 1)$, la aplicación de la regla 10 nos da

$$f'(x) = 3x^2(x^2 - 1)(x^3 + 1) + 2x(x^3)(x^3 + 1) + 3x^2(x^3)(x^2 - 1)$$

Cuando $f'(x)$ se multiplica y se simplifica algebraicamente, el resultado será

$$f'(x) = 8x^7 - 6x^5 + 5x^4 - 3x^2$$

Para comprobar esta versión de la regla del producto, podría simplificarse f antes de diferenciar. Si se multiplica en el miembro derecho de f, se obtiene

$$f(x) = x^8 - x^6 + x^5 - x^3$$

que, al ser diferenciada, produce el mismo resultado

$$f'(x) = 8x^7 - 6x^5 + 5x^4 - 3x^2$$

REGLA 11: REGLA DE LA CADENA EXTENDIDA
Si $y = f(u)$, donde $u = g(v)$, $v = h(x)$ y f, g y h son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

EJEMPLO 47

Dadas las funciones

$$y = f(u) = u^2 - 3$$
$$u = g(v) = 2v + 5$$
y
$$v = h(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

entonces la aplicación de la regla 11 nos da

$$\frac{dy}{dx} = (2u)(2)(6x - 6)$$

Para reformular este resultado en términos de x, pueden sustituirse las funciones compuestas como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4u(6x - 6)\\ &= 4(2v + 5)(6x - 6)\\ &= (8v + 20)(6x - 6)\\ &= [8(3x^2 - 6x + 1) + 20](6x - 6)\\ &= (24x^2 - 48x + 28)(6x - 6)\\ &= 144x^3 - 432x^2 + 456x - 168\end{aligned}$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 13.6

En los siguientes ejercicios encuentre dy/dx.

1 $y = f(u) = 6u + 8$ y $u = g(x) = -5x + 10$
2 $y = f(u) = u^2 - 5$ y $u = g(x) = 20x - 8$
3 $y = f(u) = u^2 - 3u + 1$ y $u = g(x) = x^2 + 5$
4 $y = f(u) = u^3$ y $u = g(x) = x^2 + 5x + 4$
5 $y = f(u) = 10 - 5u^3$ y $u = g(x) = 3x + x^2$
6 $y = f(u) = u^3 - u^2 + 4$ y $u = g(x) = x^2 - 9$
7 $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^4/2$
8 $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 1}$ y $u = g(x) = x^6$
9 $y = f(u) = (u - 3)^5$ y $u = g(x) = x^3 - 5x$
10 $y = f(u) = \sqrt{u^3}$ y $u = g(x) = \sqrt{x}$
11 $y = f(u) = u^4 - u^2$ y $u = g(x) = x^3$
12 $y = f(u) = 25 - u^3$ y $u = g(x) = 4 - x + x^2$

En los ejercicios 13-26, determine dx/dy y exprese los valores para los cuales dx/dy no está definida.

13 $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 10x$
14 $f(x) = 20 - x/2$
15 $f(x) = 8x^2 - 6x + 15x$
16 $f(x) = 4x^4 - 6x^2$
17 $f(x) = (2x - 8)^4$
18 $f(x) = 1/(x^2 - 2x)^5$
19 $f(x) = 4x^3 - 12x + 50$
20 $f(x) = 10/x^4$

21 $f(x) = \sqrt{x - 5}$
22 $f(x) = \sqrt{8x - 2}$
23 $f(x) = (x^2 - 25)^4$
24 $f(x) = (16 - 4x^2)^5$
25 $f(x) = (x^3 - 27)^3$
26 $f(x) = (x^4 - 64)^4$

En los ejercicios 27-36, encuentre dy/dx.

27 $x = g(y) = a_2y^2 + a_1y + a_0$
28 $x = g(y) = y^2 - 5y + 3$
29 $x = g(y) = 5y^3 - 2y^2 + y$
30 $x = g(y) = (y^4 - 2y^3)^5$
31 $x = g(y) = my + b$
32 $x = g(y) = 4y^3 - 64y$
33 $x = g(y) = 5y/(4 - y^2)$
34 $x = g(y) = (3y^2 - 2y)/(4 - y^3)$
35 $x = g(y) = \sqrt{2y - 4y^3}$
36 $x = g(y) = \sqrt{y^5 + 3y^3 + y}$

En los ejercicios 37-44, calcule dy/dx.

***37** $y = f(x) = x^3\sqrt{x^2 - 1}\,(1 - x^3)^2$
***38** $y = f(x) = (x - 1)^5(x^2 + 5)^3x^4$
***39** $y = f(x) = x^5\sqrt[3]{x^2 - 3x}\,(x - 5)^4$
***40** $y = f(x) = (x - 3)^4(x^2 - 5x)^3(x^3)$
***41** $y = f(u) = 5u - 3$, donde $u = g(v) = v^2$ y $v = h(x) = 5x^3$
***42** $y = f(u) = u^2 - 2u$, donde $u = g(v) = 10 - 3v$ y $v = h(x) = x^2/2$
***43** $y = f(u) = u^3$, donde $u = g(v) = v^2$ y $v = h(x) = x^4$
***44** $y = f(u) = \sqrt{u}$, donde $u = g(v) = \sqrt[3]{v}$ y $v = h(x) = x^2$

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

asíntota horizontal 563
asíntota vertical 566
cociente de la diferencia 573
continuidad 566
derivada 583
derivada de *n-ésimo* orden 600
diferenciación 590
intervalo abierto 568
intervalo cerrado 568
intervalo semiabierto 568
límite de una función 554
línea secante 573
línea tangente 580
pendiente de una curva 581
regla de la cadena 601
segunda derivada 598
tasa instantánea de cambio 579
tasa promedio de cambio 571

■ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{(Cociente de la diferencia)} \qquad (13.5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{(Derivada)} \qquad (13.7)$$

Reglas de diferenciación

1 Si $f(x) = c, f'(x) = 0$ (Función constante)
2 Si $f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$ (Regla de la potencia)
3 Si $f(x) = c \cdot g(x), f'(x) = c \cdot g'(x)$ (Constante por función)
4 Si $f(x) = u(x) \pm v(x), f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ (Suma o diferencia)
5 Si $f(x) = u(x)v(x), f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ (Regla del producto)
6 Si $f(x) = u(x)/v(x), f'(x) = \dfrac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ (Regla del cociente)

7 Si $f(x) = [u(x)]^n$, $f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$ **(Potencia de una función)**

8 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ **(Regla de la cadena)**

9 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx}$ $\dfrac{dy}{dx} \neq 0$ **(Regla de la función inversa)**

10 Si $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$, $f'(x) = u'(x)v(x)w(x) + v'(x)u(x)w(x) + w'(x)u(x)v(x)$ **(Regla del producto de tres factores)**

11 Si $y = f(u)$, donde $u = g(v)$ y $v = h(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$ **(Regla extendida de la cadena)**

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-28 se relacionan con la sección 13.1. En los siguientes ejercicios calcule el límite indicado si es que existe.

1 $\lim_{x\to 4}\left[x^2\left(5x - 2 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

2 $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^5 - 3x + 8}{x^4 - 8x}$

3 $\lim_{x\to 5}\dfrac{3x^2 + 7x - 10}{2x + 5}$

4 $\lim_{x\to -1}(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

5 $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2 + 3}{x + 3}$

6 $\lim_{x\to -3}\dfrac{2x^2 + x - 15}{x + 3}$

7 $\lim_{x\to \infty}\dfrac{10}{x+5}$

8 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{-x^2 + 4}{x + 10}$

9 $\lim_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+12x^2 + 14}{x^2 - 7x + 7}$

10 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{2x+15}{x + 50}$

11 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{4x + 5}{-x + 3}$

12 $\lim_{x\to \infty}\dfrac{1/x}{1/2x}$

13 $\lim_{x\to -6}\dfrac{3x^2 + 16x - 12}{x + 6}$

14 $\lim_{x\to -4}\dfrac{4x^2 + 11x - 20}{x + 4}$

15 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{25 - 6x}{2x - 3}$

16 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3 - 2x^2 + 100}{-6x^3}$

En los siguientes ejercicios, determine si hay discontinuidades y, en caso de que existan, indique dónde se presentan.

17 $f(x) = x^6/(x^3 - 1)$

18 $f(x) = (x^2 + 9)/(16 - x^4)$

19 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

20 $f(x) = (x^2 - 9)/(64 - x^3)$

21 $f(x) = 25x^2/(24 - 8x)$

22 $f(x) = (3 - x)/(x^2 - 3x + 2)$

23 $f(x) = 1/(x^2 + 4)$

24 $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)/(x^2 + 6)$

25 $f(x) = \dfrac{4 - 5x}{x^3 - x^2 - 6x}$

26 $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x + 7}{x^3 - 9x}$

27 $f(x) = \begin{cases} 2/x^2 & \text{si } x \neq 6 \\ 10 & \text{si } x = 6 \end{cases}$

28 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x > 5 \\ -x^2 & \text{si } x < 5 \end{cases}$

Los ejercicios 29-53 se relacionan con la sección 13.2. En cada una de las siguientes funciones determine la tasa promedio de cambio en el valor de y al pasar de $x = 1$ a $x = 3$.

29 $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$

30 $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$

31 $y = f(x) = 4x^2 - 2x + 5$

32 $y = f(x) = 30x^2 - 10x$

33 $y = f(x) = 4x^3 - 2x^2$

34 $y = f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8$

35 $y = f(x) = -x^4$ **36** $y = f(x) = 1/x^2$
37 $y = f(x) = (x - 1)/(1 - x^2)$ **38** $y = f(x) = -x^3$
39 La población de una ciudad se ha incrementado anualmente como se indica en la siguiente tabla.

Año	Población, en millones
1980	2.75
1981	2.80
1982	2.88
1983	2.96
1984	3.10
1985	3.18

¿A qué tasa promedio cambió la población entre 1980 y 1985? ¿Y entre 1981 y 1983?

En los siguientes ejercicios, *a*) determine la expresión general de cociente de la diferencia y *b*) con él calcule la pendiente de la secante que une los puntos en $x = 1$ y $x = 2$.

40 $f(x) = -5x^2 + 3x$ **41** $f(x) = -8/x$
42 $f(x) = -100$ **43** $f(x) = 3x - 5$
44 $f(x) = 4x^2 - x + 5$ **45** $f(x) = x^2/5$
46 $f(x) = 20x^2 - 8x + 15$ **47** $f(x) = -8x^2 - 4x + 1$
48 $f(x) = 5x^3$ **49** $f(x) = -4x^3 + 8$
***50** $f(x) = x^3 - 1$ ***51** $f(x) = 10/x$
***52** $f(x) = ax + b$ ***53** $f(x) = ax^2 + bx + c$

Los ejercicios 54-63 se relacionan con la sección 13.3. En las siguientes funciones, *a*) calcule la derivada por medio del método del límite y *b*) determine los valores de x en los cuales la pendiente es 0.

54 $f(x) = -8x^2 + 4x$ **55** $f(x) = -5/x$
56 $f(x) = cx^2$ **57** $f(x) = -4x^2 + 2x$
***58** $f(x) = x^4$ ***59** $f(x) = x^4 - 4x$
60 $f(x) = (x^3/3) - 9x - 10$ **61** $f(x) = (x^3/3) - 16x + 45$
61 $f(x) = -10x^2 + 15x$ **63** $f(x) = ax^2 + bx$

Los ejercicios 64-95 se relacionan con la sección 13.4. En los siguientes ejercicios, obtenga la derivada.

64 $f(x) = 11/13$ **65** $f(x) = 25x^2 - 15$
66 $f(x) = 8(x - 4/x)$ **67** $f(x) = 15x^2/(1 - x^2)$
68 $f(x) = 24x^4 - 15x^3 + 100$ **69** $f(x) = 5x^4/3 + 2x^3$
70 $f(x) = (x^3 - 4)^3$ **71** $f(x) = \sqrt{x^7}$
72 $f(x) = (5x^2 - 10x)^5$ **73** $f(x) = (8 - x^3)^{3/2}$
74 $f(x) = (4x^3 - 3x^2 - 2x)^6$ **75** $f(x) = (12x^3 - 15x)^5$
76 $f(x) = x^2/(4 - x^3)$ **77** $f(x) = 5/(x^4 - 8)$
78 $f(x) = (x - 3x^2)/(x^3 + 3x)$ **79** $f(x) = (x^2 - 10x)/(x^3 + 5x^2 - x)$
80 $f(x) = (x - 10x^2 + x^3)/(1 - x)$ **81** $f(x) = (4 - x^2)(x^3 - 7x + 6)^5$
82 $f(x) = 10/(7x + 4x^2)^4$ **83** $f(x) = (ax^2 + bx + c)^p$
84 $f(x) = 1/\sqrt[3]{x}$ **85** $f(x) = x^2/\sqrt{x}$
86 $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 10}$ **87** $f(x) = (x - 7)(x^3 - 3x^2 + 2x)$
88 $f(x) = 8x^2/(7 - x^3)$ **89** $f(x) = (9 - x^2)(x + 3)^4$
90 $f(x) = 7/\sqrt{x - 1}$ **91** $f(x) = (3x^2 - 4x + 5)/(1 - x)$

*92 $f(x) = [(x - 5)\sqrt{x + 4}]/(1 - x)$
*93 $f(x) = [(x^2 + 3)/(4 - x)]^3$
*94 $f(x) = (x\sqrt{x^2 + 7})^{1/2}$
*95 $f(x) = [(x^2)^3]^4/(x^3)^2$

Los ejercicios 96-118 se relacionan con la sección 13.5. En los siguientes ejercicios calcule *a*) $f''(x)$ y *b*) $f''(2)$.

96 $f(x) = 45x^2$
97 $f(x) = 30 - 5x^2$
98 $f(x) = x^2 - 10x$
99 $f(x) = 7x^3 - 6x^2 + x - 20$
100 $f(x) = (x^2 + 5)/x^3$
101 $f(x) = (x^2 + 3x)^{1/2}$
102 $f(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/4}$
103 $f(x) = ax^2 + bx + c$
104 $f(x) = -8/x^3$
105 $f(x) = 50/x^2$
106 $f(x) = a/bx^2$
107 $f(x) = -\dfrac{c}{dx^3}$

108 Una pelota lanzada hacia arriba desde el techo de un edificio de 900 pies de alto alcanzará la altura de h pies al cabo de t segundos, según se describe con la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 80t + 900$$

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 3 segundos?
b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 3 segundos?
c) ¿Cuál es su aceleración cuando $t = 0$? ¿Y si $t = 3$?

En los siguientes ejercicios determine todas las derivadas de orden superior.

109 $f(x) = x^5 - 6x^2 + 3x$
110 $f(x) = 9x^3 + 5x^2 + 8x + 50$
111 $f(x) = (x + 15)^4$
112 $f(x) = (ax - b)^4$
113 $f(x) = 6x^6$
114 $f(x) = 7x^5$
115 $f(x) = (10 - 3x)^4$
116 $f(x) = (25 - 4x)^4$
117 $f(x) = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$
118 $f(x) = (4x)^6$

Los ejercicios 119-137 se relacionan con la sección 13.6. En los siguientes ejercicios calcule dy/dx.

119 $y = f(u) = u^3 - 4$ y $u = g(x) = x^3 - 1$
120 $y = f(u) = (2u + 3)^2$ y $u = g(x) = 2x^2 + 3x$
121 $y = f(u) = u^{1/3}$ y $u = g(x) = x^2 + 2$
122 $y = f(u) = \dfrac{6u + 1}{2 + u^2}$ y $u = g(x) = x^2$
123 $y = f(u) = \sqrt{u^2 + 3u}$ y $u = g(x) = \dfrac{1}{x}$

En los siguientes ejercicios, determine dx/dy y exprese los valores para los que dx/dy no está definida.

124 $y = f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x/2 + 1$
125 $y = f(x) = 3x^4 - 5x^2$
126 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
127 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
128 $y = f(x) = (4x - 12)^5$
129 $y = f(x) = (-3x + 36)^4$
130 $y = f(x) = \sqrt{x - 5}$
131 $y = f(x) = (9x^2 - 6x + 10)/(x - 5)$

En los siguientes ejercicios calcule dy/dx.

*132 $y = f(x) = x^2(5 - x^2)^{1/2}(x - 4)^4$
*133 $y = f(x) = \sqrt{x - 1}(x^3 + 5)(x + 1)^3$
*134 $y = f(x) = (x + 20)^2(x^2 - 3)^3/x^2$
*135 $y = f(u) = u - 5$, donde $u = g(v) = 3v^2$ y $v = h(x) = 3x - 1$
*136 $y = f(u) = 3u^2 - u + 5$, donde $u = g(v) = v + 3$ y $v = h(x) = 3x^3$
*137 $y = f(u) = u^3$, donde $u = g(v) = \sqrt{v}$ y $v = h(x) = x^2 - 4$

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 Determine

(*a*) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

(*b*) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{4}{(2x-1)/x}$

2 Determine si existen discontinuidades en f y, de ser así, dónde ocurren si

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{4x^2 - 2x + 5}$$

3 Determine dy/dx usando el método de límite si

$$f(x) = -6x^2 + 2x + 10$$

4 Encuentre $f'(x)$ si

(*a*) $f(x) = 6/\sqrt[5]{x^3}$

(*b*) $f(x) = 2x^6 - 9x^4 - 3x^2 + 90$

(*c*) $f(x) = (18 + x^2)/(x^4 + 6)^3$

5 Si se tiene $f(x) = 15x^2 - 75x - 35$, determine las localizaciones de cualesquier punto en la gráfica de $f(x)$, donde la pendiente es + 5.

6 Obtenga todas las derivadas de orden superior de f si

$$f(x) = \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x + 1$$

7 Calcule dy/dx si

$$y = f(u) = u^4 + 3u \quad \text{y} \quad u = g(x) = x^2 + 10$$

8 Determine dx/dy si $f(x) = 18x + 15$.

Apéndice: Pruebas de algunas reglas de diferenciación

La primera es "parcial" en cuanto demuestra la regla 2 cuando n es un entero positivo. La prueba de esta regla para calcular los otros valores de n rebasa el ámbito de este libro.

REGLA 2 MODIFICADA

Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

PRUEBA

$$f(x) = x^n$$
$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$$

Por el *teorema del binomio*, para n = un entero positivo,

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

Al sustituir en $f(x + \Delta x) - f(x)$ se obtiene

$$f(x + \Delta x) - f(x) = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n$$

Si se divide entre Δx y se toma como límite $\Delta x \to 0$, nos da

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n \right] \Big/ \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

o bien $$f'(x) = nx^{n-1}$$

REGLA 3

Si $f(x) = c \cdot g(x)$, donde c es una constante y g es una función diferenciable, entonces $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

PRUEBA

$$f(x) = c \cdot g(x)$$

$$f(x + \Delta x) = c \cdot g(x + \Delta x)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = c \cdot g(x + \Delta x) - c \cdot g(x)$$

$$= c[g(x + \Delta x) - g(x)]$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= c\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

o $$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

REGLA 4

Si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, donde u y v son diferenciables, entonces $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$. La prueba presentada se refiere a la "suma" de $u(x)$ y $v(x)$.

PRUEBA

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]$$
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x}$$
$$= \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

o bien $$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

REGLA 5

Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ donde u y v son diferenciables, entonces

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

PRUEBA

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x)$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$$

La adición y sustracción de la cantidad $u(x + \Delta x) \cdot v(x)$ en el miembro derecho dan por resultado

$$f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x) + u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x)v(x)$$
$$= u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)]$$
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x}$$
$$= u(x + \Delta x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v(x)\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

o bien $$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$$
$$= v'(x) \cdot u(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

REGLA 6

Si $f(x) = u(x)/v(x)$, donde u y v son diferenciables y $v(x) \neq 0$, entonces

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

PRUEBA

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f(x + \Delta x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$$

que puede reescribirse así

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

La adición y sustracción de la cantidad $[u(x)v(x)]/[v(x + \Delta x)v(x)]$ producen

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} + \frac{u(x) \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x) \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

Al rearreglar se obtiene

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) - v(x + \Delta x) \cdot u(x) + u(x) \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

$$= \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \Big/ \Delta x$$

$$= \frac{v(x)\dfrac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x)\dfrac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\dfrac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x)\dfrac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x)}$$

o bien $$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x) \cdot v(x)}$$

$$= \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

CAPÍTULO

14 OPTIMIZACIÓN: METODOLOGÍA Y APLICACIONES

14.1 DERIVADAS: INTERPRETACIONES ADICIONALES
14.2 IDENTIFICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS
14.3 CONSIDERACIONES DE DOMINIO RESTRINGIDO
14.4 TRAZADO DE CURVAS
14.5 APLICACIONES A LOS INGRESOS, COSTOS Y UTILIDADES
14.6 OTRAS APLICACIONES
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: MODELO DE LA CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mejorar el conocimiento del significado de la primera y segunda derivadas
- Reforzar la compresión de la naturaleza de la concavidad
- Ofrecer una metodología para determinar las condiciones de optimización de las funciones matemáticas
- Dar ejemplos de los métodos para el trazado de la forma general de las funciones matemáticas
- Dar ejemplos de varias aplicaciones de los procedimientos de optimización

En el presente capítulo se ampliarán las herramientas descritas en el capítulo 13. Mejoraremos la comprensión de la primera y segunda derivadas. Veremos cómo utilizarlas para describir el comportamiento de las funciones matemáticas. Uno de los principales objetivos del capítulo consiste en desarrollar un método con el cual determinar dónde una función alcanza sus valores máximos o mínimos. Se explicarán los procedimientos de ***optimización*** basados en

el cálculo y empleados para localizar los valores mínimos y máximos de una función. Por último, se darán ejemplos de muchas aplicaciones de estos procedimientos de optimización.

14.1 DERIVADAS: INTERPRETACIONES ADICIONALES

En esta sección se seguirá ampliando nuestro conocimiento de las derivadas.

Primera derivada

Según se mencionó en el capítulo 13, la primera derivada representa la tasa instantánea de cambio en $f(x)$ respecto a un cambio en x.

DEFINICIÓN: FUNCIÓN CRECIENTE
Se dice que la función f es una ***función creciente*** en un intervalo I si para cualesquier x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.*

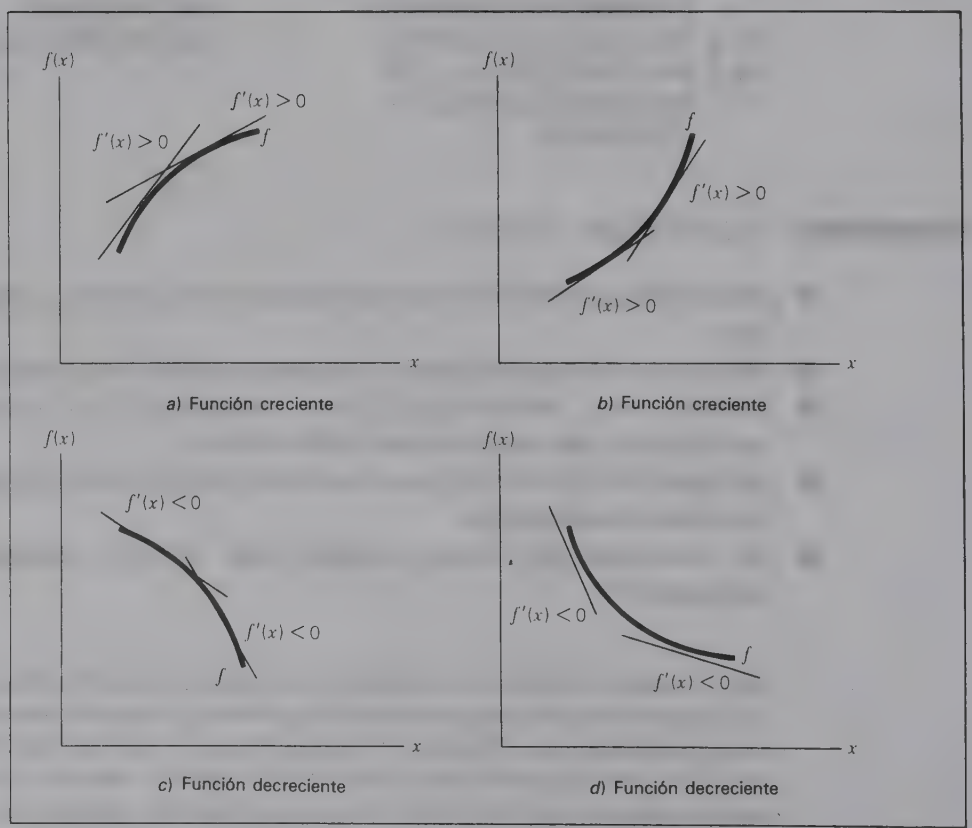


FIGURA 14.1
Relación entre $f'(x)$ y funciones crecientes/decrecientes.

Las funciones crecientes también pueden identificarse por la condiciones de la pendiente. *Si la primera derivada de f es positiva en todo un intervalo, entonces la pendiente será positiva y f será una función creciente en el intervalo.* Es decir, en cualquier punto del intervalo, un ligero incremento en el valor de x se acompañará de un aumento en el valor de $f(x)$. Las curvas de la figura 14.1*a* y de la figura 14.1*b* son las gráficas de funciones crecientes de x por ser positiva la pendiente de la tangente en cualquier punto.

DEFINICIÓN: FUNCIÓN DECRECIENTE
Se dice que la función f es una ***función decreciente*** en un intervalo I si para cualesquier x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.*

Como en el caso de las funciones crecientes, las decrecientes son identificables por las condiciones de la pendiente de la tangente. *Si la primera derivada de f es negativa a lo largo de todo un intervalo, entonces la pendiente será negativa y f será una función decreciente en el intervalo.* Es decir, en cualquier punto del intervalo, un aumento ligero en el valor de x se acompañará de una disminución en el valor de $f(x)$. Las curvas de las figuras 14.1*c* y *d* son las gráficas de las funciones decrecientes de x.

NOTA
Si una función es creciente (decreciente) en un intervalo, será creciente (decreciente) en cualquier punto del intervalo.

EJEMPLO 1

En $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$, determine los intervalos en que f puede describirse como *a*) una función creciente, *b*) una función decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

SOLUCIÓN

Para determinar si f es creciente o decreciente, primero habrá que calcular f':

$$f'(x) = 10x - 20$$

f será una función creciente cuando $f'(x) > 0$ o cuando

$$10x - 20 > 0$$

o

$$10x > 20$$

o bien

$$x > 2$$

f será una función decreciente cuando $f'(x) < 0$ o cuando

$$10x - 20 < 0$$

o

$$10x < 20$$

o bien

$$x < 2$$

*Desde el punto de vista técnico, éstas son definiciones de las funciones estrictamente crecientes (decrecientes).

f no será creciente ni decreciente cuando $f'(x) = 0$ *o cuando*

$$10x - 20 = 0$$

o

$$10x = 20$$

o bien

$$x = 2$$

En resumen, f es una función decreciente cuando $x < 2$, no es ni creciente ni decreciente cuando $x = 2$ y es creciente cuando $x > 2$. Trace la gráfica de f para comprobar si estas conclusiones parecen razonables.

Segunda derivada

La segunda derivada es la derivada de la primera. Si bien casi siempre se utilizará $f''(x)$ para representarla, podría expresarse mediante la notación

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

La segunda derivada es una medida de la tasa instantánea de cambio en dy/dx respecto a un cambio en x. Dicho de otra manera, indica la tasa a que la pendiente de la función está cambiando en relación con el cambio en x, sin importar si la pendiente de la función esté aumentando o disminuyendo en un instante determinado.

Si $f''(x)$ ***es negativa en un intervalo I de*** f***, la primera derivada estará disminuyendo en I. En una gráfica, la pendiente está disminuyendo de valor en el intervalo. Si*** $f''(x)$ ***es positiva en un intervalo I de*** f***, la primera derivada estará aumentando en I. Desde el punto de vista gráfico, la pendiente estará creciendo en ese intervalo.***

Examínese detenidamente la figura 14.2. Construya el lector mentalmente líneas tangentes o ponga un borde recto en la curva para representar la tangente en varios puntos. A lo largo de la curva de A a B la pendiente es ligeramente negativa cerca de A y se torna más negativa al acercarnos a B. En efecto, la

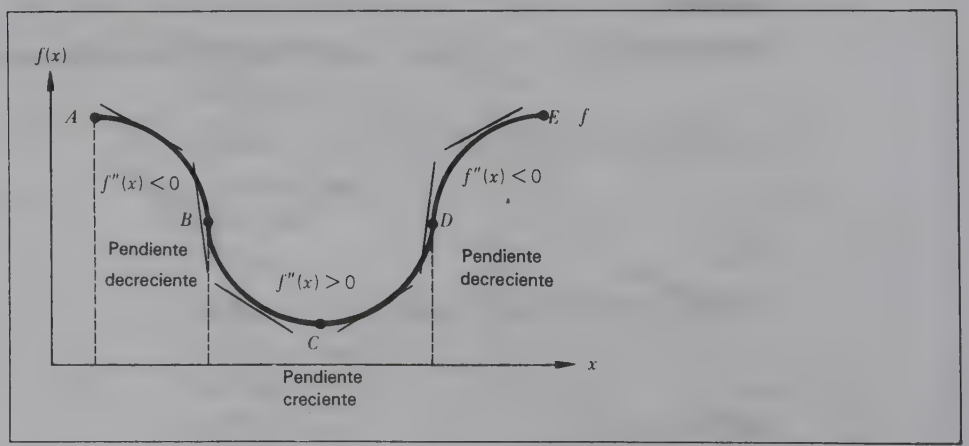


FIGURA 14.2
Relación entre $f'(x)$ y pendiente creciente/decreciente $[f'(x)]$.

pendiente de una tangente pasa de un valor de 0 en A a su valor más negativo en el punto B. Así pues, la pendiente estará disminuyendo de valor en el intervalo comprendido entre A y B, y cabe esperar que $f''(x)$ sea negativa en él (es decir, $f''(x) < 0$).

Una vez alcanzado su valor más negativo en el punto B, la pendiente sigue siendo negativa en el intervalo entre B y C; pero va haciéndose cada vez menos negativa, hasta que finalmente es 0 en C. Si la pendiente asume valores que están tornándose *menos negativos* (por ejemplo, -5, -4, -3, -2, -1, 0), estará aumentando de valor. Por tanto, cabe suponer que $f''(x)$ sea positiva en este intervalo, es decir que $f''(x) > 0$.

Entre C y D la pendiente se vuelve más positiva, asumiendo su máximo valor positivo en D. La pendiente está aumentando de valor en este intervalo, por lo cual cabría esperar que $f''(x)$ sea positiva.

Entre D y E la pendiente sigue siendo positiva, pero cada vez se vuelve menos positiva, hasta que finalmente es 0 en E. Si está adoptando valores que son positivos pero cada vez más pequeños (por ejemplo, 5, 4, 3, 2, 1, 0), estará disminuyendo de valor y cabe esperar que $f''(x)$ sea negativa en el intervalo.

En la figura 14.3 se sintetizan las condiciones de la primera y segunda derivadas para las cuatro regiones de la función. Tales relaciones pueden ser difíciles de entender. Estudie detenidamente esas figuras y vuelva a realizar el razonamiento lógico si es necesario.

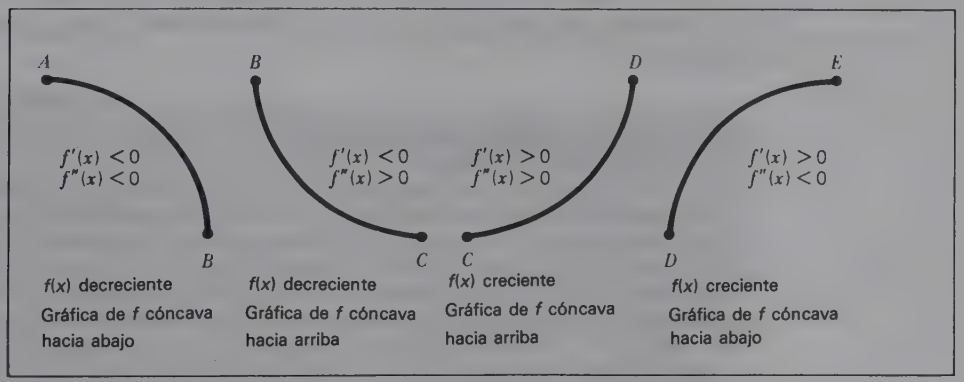


FIGURA 14.3 Características conjuntas de $f'(x)$ y $f'(x)$.

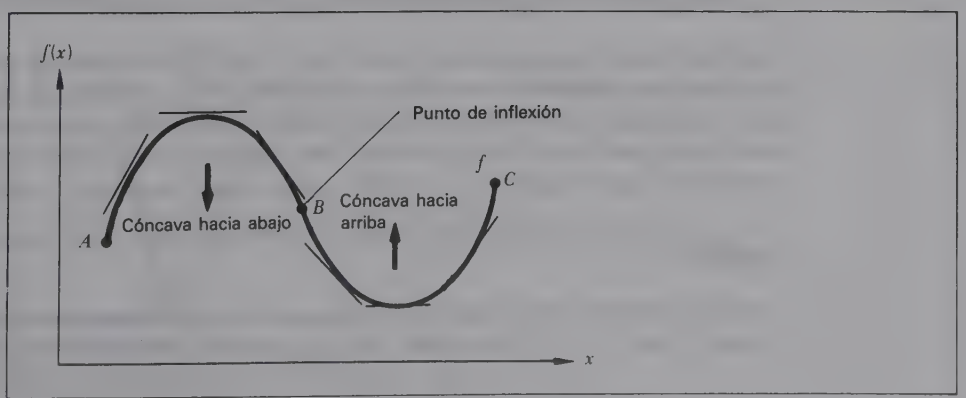


FIGURA 14.4 Representación de las condiciones de concavidad.

Concavidad y punto de inflexión

En el capítulo 12, se hizo una breve introducción a la notación de la concavidad. A continuación se da una definición más formal de la concavidad.

DEFINICIÓN: CONCAVIDAD
La gráfica de una función f es ***cóncava hacia arriba (b abajo)*** en un intervalo, si f' aumenta (disminuye) en todo éste.

La definición anterior significa que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba en un intervalo, si la pendiente *aumenta* a lo largo de todo él. Para cualquier punto dentro del mismo, *la curva que representa a f se hallará arriba de la línea tangente trazada en el punto*. De manera análoga, la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo, si la pendiente *decrece* a lo largo de todo él. Para cualquier punto dentro del mismo, *la curva que representa a f se encontrará debajo de la línea tangente trazada en el punto*.

En la figura 14.4 la gráfica de f es *cóncava hacia abajo* entre A y B, y es *cóncava hacia arriba* entre B y C. Nótese que entre A y B la curva se encuentra debajo de sus líneas tangentes y que entre B y C se halla arriba de ellas. El punto B es donde la concavidad deja de ser cóncava hacia abajo y empieza a ser cóncava hacia arriba. El punto donde la concavidad cambia se denomina ***punto de inflexión***. Por consiguiente, el punto B es un punto de inflexión.

Entre la segunda derivada y la concavidad de la gráfica de una función se dan relaciones que serán de gran valor más adelante en este capítulo. He aquí las relaciones:

RELACIONES ENTRE CONCAVIDAD Y LA SEGUNDA DERIVADA

I Si $f''(x) < 0$ en un intervalo $a \leq x \leq b$, la gráfica de f será *cóncava hacia abajo* en ese intervalo. Cuando cualquier punto $x = c$ dentro del intervalo, se dice que f es cóncava hacia abajo en $[c, f(c)]$.

II Si $f''(x) > 0$ en cualquier intervalo $a \leq x \leq b$, la gráfica de f será *cóncava hacia arriba* en ese intervalo. Para cualquier punto $x = c$ dentro del intervalo, se dice que f es cóncava hacia arriba en $[c, f(c)]$.

III Si $f''(x) = 0$ en cualquier punto $x = c$ en el dominio de f, no puede sacarse conclusión alguna sobre la concavidad en $[c, f(c)]$.

Hay que tener mucho cuidado para no invertir el fundamento lógico de las relaciones que acabamos de señalar. En virtud de la relación II *no pueden* hacerse afirmaciones sobre el signo de la segunda derivada si se conoce la concavidad de la gráfica de una función. Por ejemplo, no puede decirse que, si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo cuando $x = a$, $f''(a) < 0$.

EJEMPLO 2

Para determinar la concavidad de la gráfica de la función cuadrática generalizada $f(x) = ax^2 + bx + c$, se encontrarán antes la primera y segunda derivadas.

$$f'(x) = 2ax + b \quad \text{y} \quad f''(x) = 2a$$

Si $a > 0$, entonces $f''(x) = 2a > 0$. De acuerdo con la relación II, la gráfica de f es cóncava hacia arriba siempre que $a > 0$. Si $a < 0$, entonces $f''(x) = 2a < 0$. Según la relación I, la gráfica de f es cóncava hacia abajo siempre que $a < 0$. Esto concuerda perfectamente con lo dicho en el capítulo 12, donde se llegó a la conclusión de que, si $a > 0$, la gráfica de f es una parábola cóncava hacia arriba. Y, si $a < 0$, f se grafica como una parábola que es cóncava hacia abajo.

EJEMPLO 3

En $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, determine la concavidad de la gráfica de f si $x = -2$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

y

$$f''(x) = 6x - 4$$

La evaluación de $f''(x)$ cuando $x = -2$ nos da

$$f''(-2) = 6(-2) - 4 = -16$$

Puesto que $f''(-2) < 0$, la gráfica de f será cóncava hacia abajo cuando $x = -2$. Para determinar la concavidad si $x = 3$, se obtiene

$$f''(3) = 6(3) - 4 = 14$$

Dado que $f''(3) > 0$, la gráfica de f será cóncava hacia arriba cuando $x = 3$

EJEMPLO 4

Determine la concavidad de la gráfica de $f(x) = x^4$ con $x = 0$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2$$
$$f''(0) = 12(0)^2 = 0$$

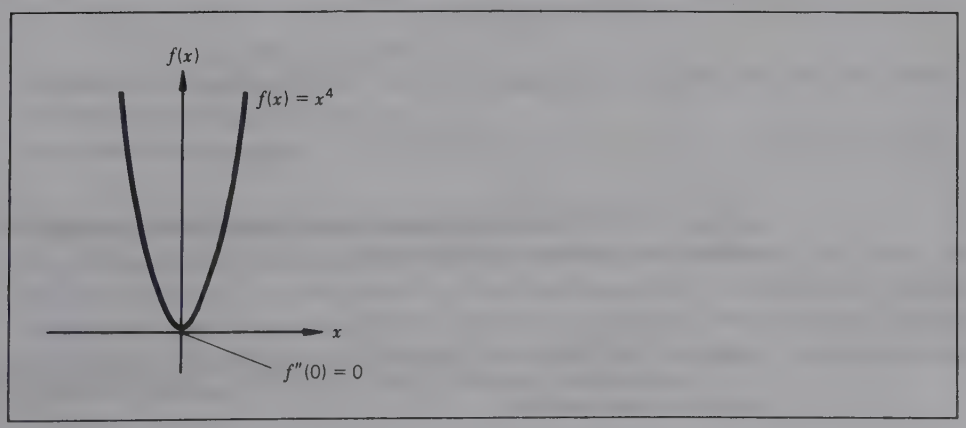


FIGURA 14.5 Ninguna conclusión sobre la concavidad.

Como $f''(0) = 0$, de acuerdo con la relación III no es posible hacer afirmación alguna sobre la concavidad cuando $x = 0$. Sin embargo, al sustituir un número suficiente de valores de x en f y, al graficar esos pares ordenados, se advierte que f presenta la forma que aparece en la figura 14.5. Y a partir de esta figura es obvio que la gráfica es cóncava hacia arriba si $x = 0$.

En ocasiones se necesitan localizar puntos de inflexión en la gráfica de una función. *Una condición necesaria (algo que debe ser verdadero) para que exista un punto de inflexión en $x = a$ es que $f''(a) = 0$.* Es decir, al calcular todos los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$, se encontrarán las *localizaciones idóneas* de los puntos de inflexión.* En algunas funciones, como $f(x) = x^4$ en el último ejemplo, la condición $f''(a) = 0$ no garantiza que exista un punto de inflexión cuando $x = a$.

Por tanto, una prueba práctica con que se identifican los puntos de inflexión es la siguiente:

PRUEBA DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN

I Encuentre todos los puntos a donde $f''(a) = 0$.

II Si $f''(x)$ cambia de signo al pasar por $x = a$, habrá un punto de inflexión cuando $x = a$.

La esencia de la prueba anterior consiste en seleccionar puntos situados ligeramente a la izquierda y derecha de $x = a$ y en determinar si la concavidad es distinta en ambos lados. Si $f''(x)$ es positiva a la izquierda y negativa a la derecha o viceversa, existe un punto de inflexión cuando $x = a$.

EJEMPLO 5

Para verificar que *no* existe un punto de inflexión si $x = 0$ para $f(x) = x^4$, se evalúa $f''(x)$ a la izquierda en $x = -0.1$ y a la derecha cuando $x = +0.1$

$$f''(-0.1) = 12(-0.1)^2$$
$$= 0.12 > 0$$

y

$$f''(+0.1) = 12(+0.1)^2$$
$$= 0.12 > 0$$

La segunda derivada tiene el mismo signo a la izquierda y derecha de $x = 0$, por lo cual no hay punto de inflexión con $x = 0$.

---

*Otros candidatos a puntos de inflexión ocurren donde $f''(x)$ es discontinua. Pero en este libro no encontraremos esos candidatos.

EJEMPLO 6

Para determinar la localización o localizaciones de todos los puntos de inflexión en la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2 + 10$$

se calcula

$$f'(x) = \frac{4x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + 2x$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$$

y

$$f''(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{2} + 2$$
$$= x^2 - 3x + 2$$

A continuación, $f''(x)$ se hace igual a 0 a fin de determinar las localizaciones idóneas:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

o bien

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

Por tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = 1$ y $x = 2$. Para $x = 1$, $f''(x)$ se evalúa a la izquierda y a la derecha de $x = 1$ cuando $x = 0.9$ y $x = 1.1$

$$f''(0.9) = (0.9)^2 - 3(0.9) + 2$$
$$= 0.81 - 2.7 + 2$$
$$= 0.11 > 0$$
$$f''(1.1) = (1.1)^2 - 3(1.1) + 2$$
$$= 1.21 - 3.3 + 2$$
$$= -0.09 < 0$$

El signo de $f''(x)$ cambia y por ello existe un punto de inflexión en $x = 1$. Cuando los valores de $x = 1.9$ y $x = 2.1$ se escogen para evaluar $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x = 2$,

$$f''(1.9) = -0.09 < 0$$
$$f''(2.1) = 0.11 > 0$$

Puesto que $f''(x)$ cambia de signo, se llega a la conclusión de que un punto de inflexión existe cuando $x = 2$.

Concavidad desde otra perspectiva

Se utilizarán las expresiones *concáva hacia arriba* y *cóncava hacia abajo* para describir el atributo de curvatura al que se da el nombre de concavidad. Pueden emplearse otros términos para describir esta cualidad. Por ejemplo, algunos escritores distinguen entre ***funciones estrictamente cóncavas*** y ***funciones estrictamente convexas***.

DEFINICIÓN: FUNCIÓN ESTRICTAMENTE CÓNCAVA (CONVEXA)
Una función estrictamente cóncava (convexa) posee la siguiente propiedad gráfica: si dos puntos cualesquiera A y B se encuentran en la curva que representa la función, cuando estén unidos por una recta todo el segmento AB se hallará debajo (arriba) de la curva menos en los puntos A y B.

La definición anterior puede ampliarse un poco para definir una ***función cóncava*** y una ***función convexa*** (en contraste con las funciones *estrictamente* cóncavas o convexas). Si se deja que el segmento de AB se encuentre debajo (arriba) de la curva *o en la curva*, a la función se le llama cóncava o convexa. La figura 14.6 incluye estas definiciones.

Ejercicios de seguimiento de la sección 14.1

En cada una de las siguientes funciones, *a*) determine si f está aumentando o disminuyendo cuando $x = 1$. Determine los valores de x para los cuales f es *b*) una función creciente, *c*) una función decreciente y *d*) ni creciente ni decreciente.

1 $f(x) = 28 + 4x$
2 $f(x) = 15x + 16$
3 $f(x) = x^2 + 6x + 20$
4 $f(x) = 8x^2 - 3x + 9$
5 $f(x) = x^3/3 - x^2/2$
6 $f(x) = x^3/3 - x^2/2 - 6x + 100$
7 $f(x) = x^4 - 2x^2$
8 $f(x) = 5x^5$
9 $f(x) = (x - 5)^{3/2}$
10 $f(x) = 3x^2/(x^2 - 1)$
11 $f(x) = 4x^2 - 6x + 12$
12 $f(x) = -x^2 + 20x$
13 $f(x) = 10x^2 - 40x + 50$
14 $f(x) = x^2/2 - 4x + 5$
15 $f(x) = (x + 4)^{3/2}$
16 $f(x) = (x - 5)^5$
17 $f(x) = (2x - 10)^6$
18 $f(x) = (5x - 20)^{10}$
19 $f(x) = \dfrac{(4x - 20)^{11}}{4}$
20 $f(x) = (2x - 16)^7$

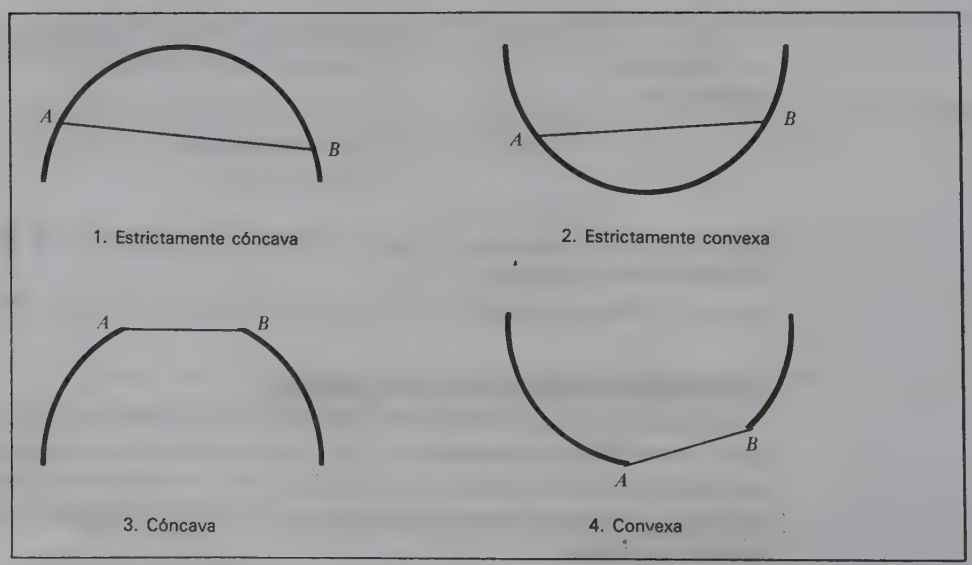


FIGURA 14.6 Funciones cóncavas y convexas.

En cada una de las siguientes funciones, use $f''(x)$ para determinar las condiciones de concavidad cuando $x = -1$ y $x = +4$.

21 $f(x) = -6x^2 + 5x - 3$
22 $f(x) = x^3 + 12x + 1$
23 $f(x) = x^2 - 4x + 9$
24 $f(x) = -x^2 + 5x$
25 $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
26 $f(x) = (x + 1)^3$
27 $f(x) = x^2 + 3x^3$
28 $f(x) = x^2/(1 + x)$
29 $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 10x$
30 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2$
31 $f(x) = x^3/3 - x^2/2 + 10x$
32 $f(x) = 5x^3/3 + 3x^2/2 - 5x + 25$
33 $f(x) = (x^2 - 1)^3$
34 $f(x) = (20 - 3x)^5$
35 $f(x) = (3x^2 + 2)^4$
36 $f(x) = (2x - 8)^4$
37 $f(x) = \sqrt{4x - 10}$
38 $f(x) = x^3/(1 - x)$

Si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, determine los valores de x para los cuales f es *a*) creciente, *b*) decreciente, *c*) cóncava hacia arriba y *d*) cóncava hacia abajo, si

***39** $f(x) = ax + b$
***40** $f(x) = b - ax$
***41** $f(x) = ax^2 + bx + c$
***42** $f(x) = -ax^2 - bx - c$
***43** $f(x) = ax^3$
***44** $f(x) = ax^4$

En cada una de las siguientes funciones identifique las localizaciones de los puntos de inflexión que haya.

45 $f(x) = x^3 + 9x^2$
46 $f(x) = 4x^3 + 24x^2$
47 $f(x) = x^4/12 - x^3/3 - 7.5x^2$
48 $f(x) = (3 + x)^4$
49 $f(x) = (x + 5)^3$
50 $f(x) = x^5/20 - x^3/6 + 25$
51 $f(x) = 20x^4 + 100$
52 $f(x) = (x - 1)/x$
53 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 10$
54 $f(x) = 5x^3 - 30x^2 + 25$
55 $f(x) = x^4/12 - x^3/6 - 3x^2$
56 $f(x) = x^4/12 - 7x^3/6 + 5x^2$
57 $f(x) = x^4/4 - 3x^2/2 + 100$
58 $f(x) = x^6/30 - x^2/2$
59 $f(x) = (5x - 10)^{5/2}$
60 $f(x) = (3x + 12)^{7/2}$
61 $f(x) = (x - 10)^5$
62 $f(x) = (x + 5)^4$

63 En la función de la figura 14.7, indique los valores de x para los cuales f es *a*) creciente, *b*) decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

64 En la función que aparece en la figura 14.8, indique los valores de x para los cuales f es *a*) creciente, *b*) decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

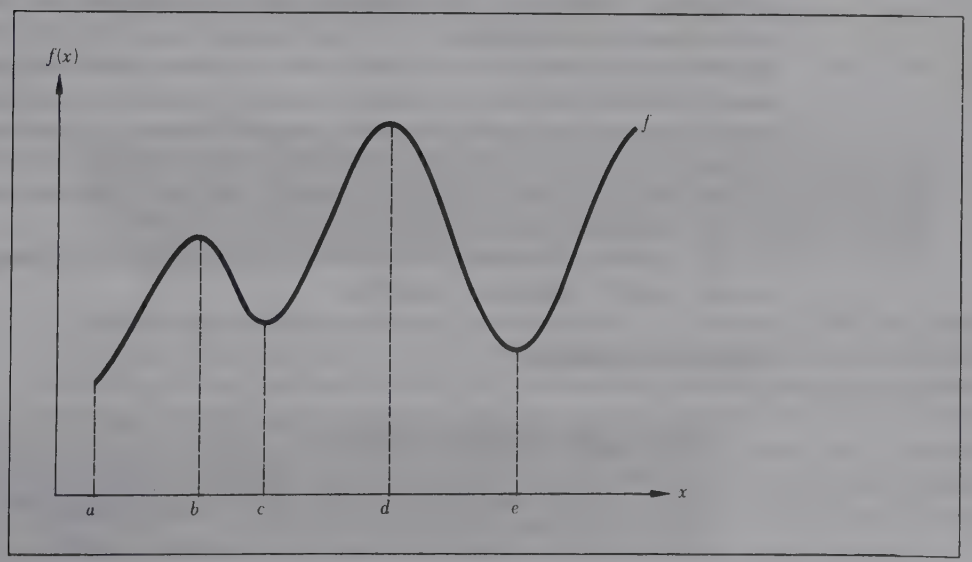


FIGURA 14.7

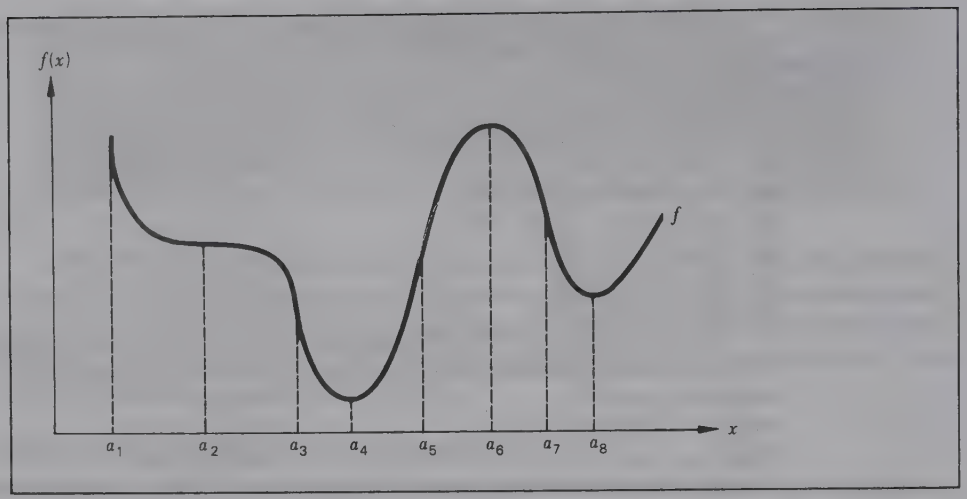


FIGURA 14.8

65 En la función de la figura 14.8, indique los valores de x para los cuales f es *a*) cóncava hacia arriba, *b*) cóncava hacia abajo *c*) de concavidad cambiante, *d*) cóncava y *e*) convexa.

66 En la función que se muestra en la figura 14.8, indique los valores de x para los cuales f es *a*) creciente a una tasa creciente, *b*) creciente a una tasa decreciente, *c*) decreciente a una tasa decreciente y *d*) decreciente a una tasa creciente.

14.2 IDENTIFICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En las aplicaciones de las matemáticas, con la función no lineal puede simbolizarse un criterio de decisión. Así, una función puede representar utilidades, ingresos, costos y niveles de contaminación, expresados en función de una variable que se encuentra, por lo menos en parte, bajo el control del que toma la decisión. Por ejemplo, las utilidades pueden expresarse en función del dinero destinado a la publicidad. Si el que adopta la decisión está en condiciones de determinar, dentro de ciertos límites, cuánto gastar en publicidad, una meta podría ser calcular esa cantidad en una forma que maximice las utilidades. Si x denota el dinero dedicado a la publicidad y $f(x)$ es la utilidad esperada, la gráfica de la función de utilidades podría presentar la forma general que se advierte en la figura 14.9. Si el encargado de la decisión desea encontrar el valor máximo de $f(x)$, éste ocurre en $[x^*, f(x^*)]$.

En la pesente sección se estudiarán las funciones con el propósito de localizar los valores máximo y mínimo.

Extremos relativos

DEFINICIÓN: MÁXIMO RELATIVO

Si f se define en un intervalo (b, c) que contenga $x = a$, se dice que f alcanza un ***máximo relativo (local)*** en $x = a$, si $f(a) \geq f(x)$ para todas las x dentro del intervalo (b, c).

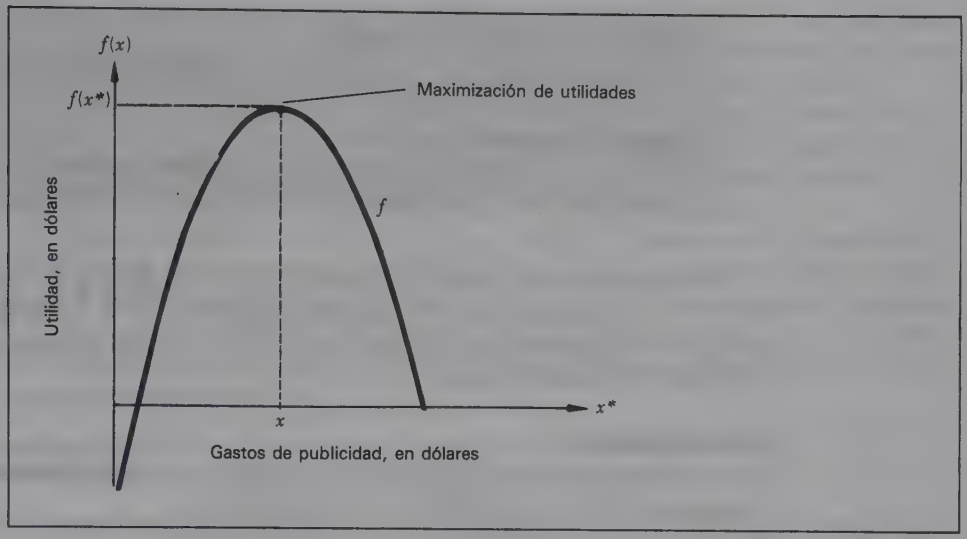


FIGURA 14.9
Utilidad = f (gastos de publicidad).

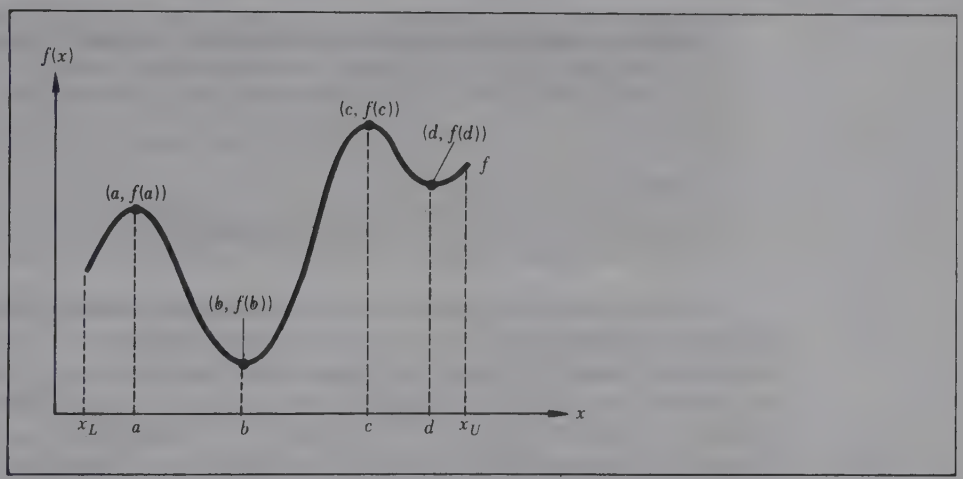


FIGURA 14.10
Extremos relativos.

DEFINICIÓN: MÍNIMO RELATIVO
Si f se define en un intervalo (b, c) que contenga $x = a$, se dice que f alcanza un ***mínimo relativo (local)*** en $x = a$, si $f(a) \leq f(x)$ para todas las x dentro del intervalo (b, c).

Ambas definiciones se centran en el valor de $f(x)$ dentro de un intervalo. Un máximo relativo se refiere a un punto donde el valor de $f(x)$ es mayor que el de $f(x)$ para los puntos cercanos. Un mínimo relativo designa un punto donde el valor de $f(x)$ es menor que el de $f(x)$ para los puntos cercanos. Si se emplean estas definiciones y se examina detenidamente la figura 14.10, se verá que f posee ***máximos relativos*** en $x = a$ y $x = c$. De manera análoga, f posee ***mínimos relativos*** en $x = b$ y $x = d$. En forma conjunta, se da el nombre de ***extremos relativos*** a unos y otros valores.

DEFINICIÓN: MÁXIMO ABSOLUTO
Se dice que una función f alcanza un ***máximo absoluto*** cuando $x = a$, si $f(a) > f(x)$ para cualquier otra x dentro del dominio de f.

DEFINICIÓN: MÍNIMO ABSOLUTO
Se dice que una función f alcanza un ***mínimo absoluto*** cuando $x = a$, si $f(a) < f(x)$ para cualquier otra x dentro del dominio de f.

Si consultamos de nuevo la figura 14.10, $f(x)$ llega a un máximo absoluto en $x = c$. Y alcanza el mínimo absoluto cuando $x = b$. Conviene señalar que un *punto en la gráfica de una función puede ser a la vez un máximo (mínimo) relativo y un máximo (mínimo) absoluto.*

Puntos críticos

Nos interesan de manera especial los máximos y mínimos relativos. Será muy importante saber identificarlos y distinguirlos.

CONDICIONES NECESARIAS DE LOS MÁXIMOS (MÍNIMOS) RELATIVOS
En la función f, las condiciones necesarias para que exista un máximo o mínimo relativo en $x = a$ (a contenida en el dominio de f) son:

1 $f'(a) = 0$

o bien

2 $f'(a)$ no está definida

Los puntos que satisfacen una de las dos condiciones de la definición anterior son *candidatos* para los máximos (mínimos) relativos. A esos puntos suele llamárseles ***puntos críticos***. Los puntos que cumplen con la condición 1 son aquellos de la gráfica de f donde la pendiente es 0. Las localizaciones de esos puntos se obtienen haciendo $f'(x)$ igual a 0 y despejando los valores de x (si los hay) que satisfagan la ecuación. Los puntos que cumplen con la condición 2 se ejemplifican por discontinuidades en f o por puntos donde no puede evaluarse $f'(x)$. Se da el nombre de ***valores críticos*** a los valores de x que están

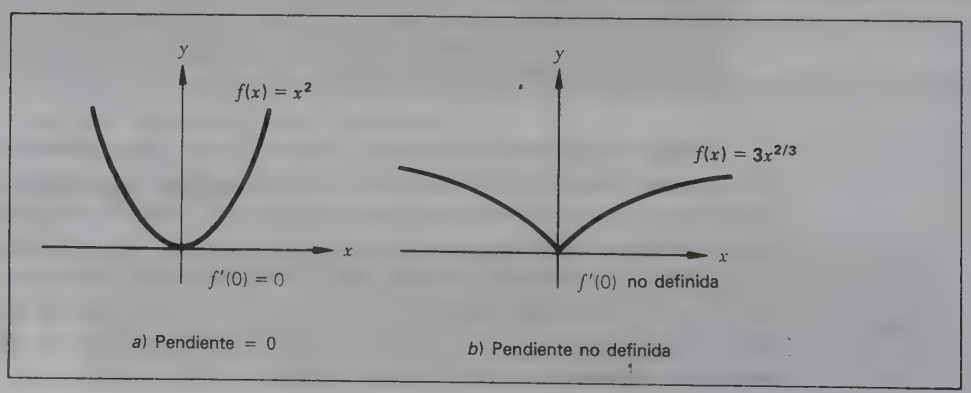


FIGURA 14.11 Puntos críticos.

dentro del dominio de f y que satisfacen la condición 1 o 2. A menudo esos valores se denotan con x^* a fin de distinguirlos de otros valores de x. Si se tiene un valor crítico de f, el punto crítico correspondiente es $[x^*, f(x^*)]$.

La figura 14.11 muestra las gráficas de dos funciones que tienen puntos críticos en (0, 0). En la función $f(x) = x^2$, que aparece en la figura 14.11*a*, $f'(x) = 2x$ y un valor crítico ocurre cuando $x = 0$. En el punto crítico (0, 0), la pendiente es 0 y la función alcanza un mínimo relativo.

Para la función $f(x) = 3x^{2/3}$, $f'(x) = 2/x^{1/3}$. Nótese que la condición 1 nunca puede satisfacerse por no haber puntos donde la pendiente de la tangente sea 0. Sin embargo, existe un valor crítico de $x = 0$ conforme a la condición 2. La derivada no está definida (no hay una sola línea tangente) en $x = 0$. Pero $f(0)$ está definida y el punto crítico (0, 0) es un mínimo relativo, como se advierte en la figura 14.11*b*.

EJEMPLO 7

Con objeto de determinar la localización o localizaciones de los puntos críticos en la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 100$$

se calcula la derivada f'.

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} - 6$$
$$= x^2 - x - 6$$

Si f' se hace igual a 0,

$$x^2 - x - 6 = 0$$

cuando

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Si los dos valores se hacen iguales a 0, dos valores críticos serán $x = 3$ y $x = -2$. Al sustituir esos valores en f, los puntos críticos resultantes son $(-2, 107\frac{1}{3})$ y $(3, 86\frac{1}{2})$.

Las únicas afirmaciones que pueden hacerse respecto al comportamiento de f en esos puntos es que la pendiente es 0. Y además en ninguna otra parte de la gráfica de f es la pendiente igual a 0. Se requieren más pruebas para determinar si hay un máximo o mínimo relativos cuando $x = 3$ y $x = -2$.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Qué comentarios pueden hacerse sobre la existencia de puntos críticos en las funciones constantes [por ejemplo, $f(x) = 10$]?

La figura 14.12 contiene diferentes puntos críticos donde $f'(x) = 0$. Las figuras 14.12*a* y *b* muestran puntos de los máximos y mínimos relativos, mientras que las figuras 14.12*c* y *d* incluyen dos tipos de puntos de inflexión. En

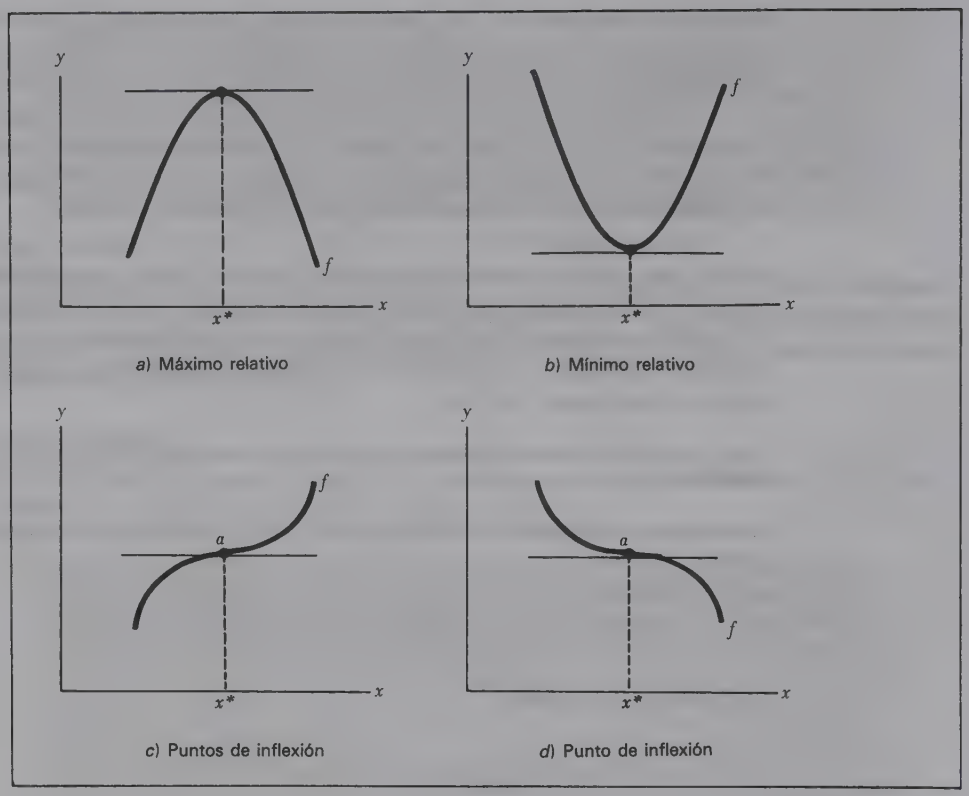


FIGURA 14.12 Puntos críticos donde $f''(x) = 0$.

la figura 14.12*c* la gráfica de la función presenta una pendiente de 0 en el punto *a*, y además está dejando de ser cóncava hacia abajo y empieza a ser cóncava hacia arriba. En la figura 14.12*d*, la gráfica tiene una pendiente de 0 y está realizando la transición de la concavidad hacia arriba a la concavidad hacia abajo.

En resumen, cualquier punto crítico donde $f'(x) = 0$ será un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de inflexión.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
En las funciones polinomiales f de grado n, el mayor número posible de puntos críticos donde $f'(x) = 0$ es $n - 1$. Así pues, una función f de grado 5 puede tener *un máximo de cuatro puntos* de la pendiente cero. ¿A qué se debe eso?

Prueba de la primera derivada

Cuando se desee localizar puntos de los máximos o mínimos relativos, el primer paso consiste en encontrar todos los puntos críticos en la gráfica de la función. Un punto crítico puede ser un máximo o mínimo relativo o bien un punto de inflexión, por lo cual hay que idear una prueba que los distinga. Se cuenta con varias pruebas. Una de ellas, fácil de entender intuitivamente es la ***prueba de la primera derivada***.

Después que se encuentran las localizaciones de los puntos críticos, esta prueba exige un examen de las condiciones de pendiente a la izquierda y derecha del punto crítico. En la figura 14.13 se incluyen las cuatro posibilidades del punto crítico junto con sus condiciones de pendiente a ambos lados de x^*. *Para un máximo relativo*, la pendiente será positiva a la izquierda (x_l) y negativa a la derecha (x_r). *Para un mínimo relativo* la pendiente es negativa a la izquierda y positiva a la derecha. *Para los puntos de inflexión*, la pendiente tiene el *mismo signo* a la izquierda o derecha del punto crítico.

A continuación se da otra manera de describir la prueba.

1 Para un máximo relativo, el valor de la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha.

2 En el caso de un mínimo relativo, el valor de la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.

3 Para los puntos de inflexión, el valor de la función es creciente *tanto* a la izquierda *como* a la derecha o decreciente a ambos lados.

En seguida se ofrece un resumen de la prueba de la primera derivada.

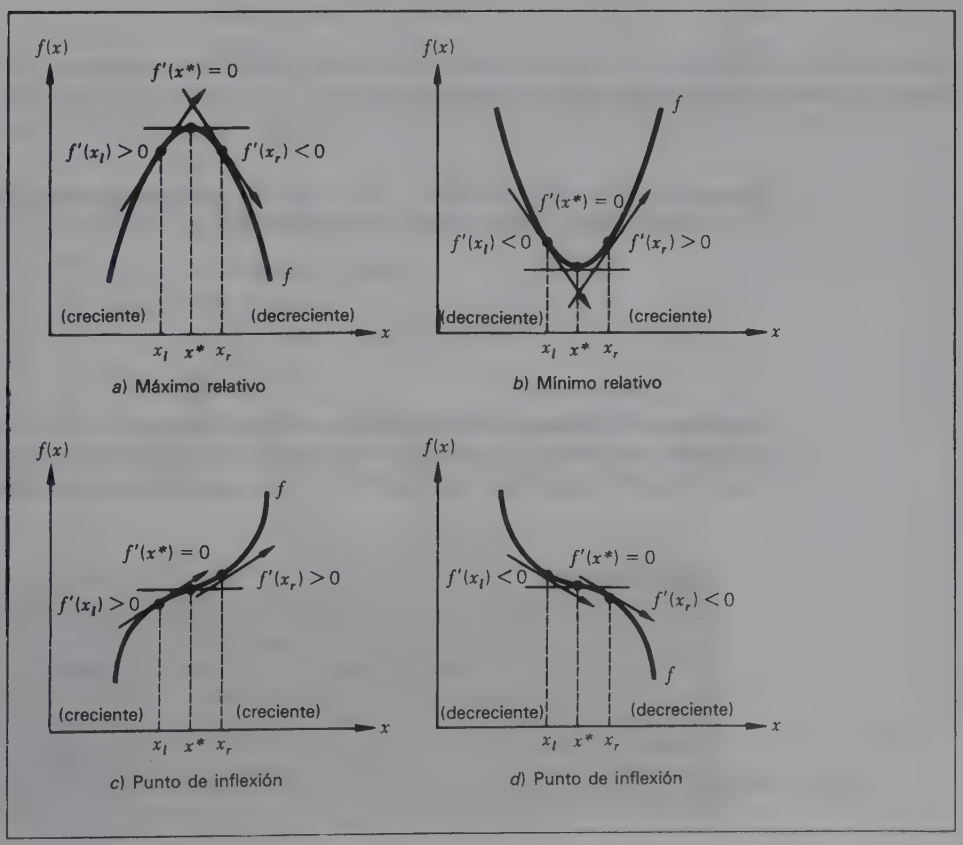


FIGURA 14.13 Prueba de la primera derivada.

PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA

I Se localizan todos los valores críticos de x^*.

II Para cualquier valor crítico x^*, determine el valor de $f'(x)$ a la izquierda (x_l) y a la derecha (x_r) de x^*.

i $f'(x_l) > 0$ y $f'(x_r) < 0$, habrá un máximo relativo de f en $[x^*, f(x^*)]$.

ii Si $f'(x_l) <$ y $f'(x_r) > 0$, existirá un mínimo relativo de f en $x^*, f(x^*)$.

iii Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en x_l y x_r, existe un punto de inflexión en $[x^*, f(x^*)]$.

EJEMPLO 8

Determine la localización o localizaciones de cualesquier puntos críticos en la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 12x - 10$ y también su naturaleza.

SOLUCIÓN

La primera derivada es

$$f'(x) = 4x - 12$$

Cuando se hace la primera derivada igual a 0,

$$4x - 12 = 0$$

o bien

$$4x = 12$$

y hay un valor crítico cuando

$$x = 3$$

Puesto que $f(3) = 2(3^2) - 12(3) - 10 = -28$, un punto crítico se encuentra en $(3, -28)$.

Para probar el punto crítico, seleccionaremos $x_l = 2.9$ y $x_r = 3.1$.

$$\begin{aligned} f'(2.9) &= 4(2.9) - 12 \\ &= 11.6 - 12 = -0.4 \\ f'(3.1) &= 4(3.1) - 12 \\ &= 12.4 - 12 = +0.4 \end{aligned}$$

La primera derivada es negativa (-0.4) a la izquieda de $x = 3$ y positiva $(+0.4)$ a la derecha; por tanto, el punto $(3, -28)$ será un mínimo relativo en f. Nótese que f es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cóncava hacia arriba.

ADVERTENCIA

Cuando se seleccionan x_l y x_r, hay que hallarse bastante cerca del valor crítico x^*. Si nos alejamos demasiado a la izquierda o a la derecha, puede llegarse a un resultado erróneo, como en la figura 14.14, donde un mínimo relativo podría considerarse como un máximo relativo. Hay un poco de libertad en la selección de x_l y x_r. Sin embargo, cuando exista más de un punto crítico x_l y x_r habrán de escogerse de modo que caigan entre el valor crítico que está siendo examinado y cualesquier valores adyacentes.

EJEMPLO 9

En el ejemplo 7 se determinó que la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 100$$

tiene puntos críticos en $(3, 86\frac{1}{2})$ y $(-2, 107\frac{1}{3})$. Para determinar la naturaleza de estos puntos críticos se examina la primera derivada

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

Al probar el punto crítico cuando $x = 3$, se selecciona $x_l = 2$ y $x_r = 4$.

$$f'(2) = (2)^2 - 2 - 6$$
$$= -4$$
$$f'(4) = (4)^2 - 4 - 6$$
$$= 6$$

Puesto que $f'(x)$ es negativa (f es decreciente) a la izquierda de $x = 3$ y positiva (f es creciente) a la derecha, ocurrirá un mínimo relativo para f cuando $x = 3$.

Al probar el punto crítico en $x = -2$, se escogerá $x_l = -3$ y $x_r = 2$.

$$f'(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6$$
$$= 6$$

De acuerdo con la prueba anterior, se sabe que $f'(2) = -4$. Puesto que $f'(x)$ es positiva (f está aumentando) a la izquierda de $x = -2$ y es negativa (f está disminuyendo) a la derecha, se presenta un máximo relativo para $f(x)$ cuando $x = -2$.

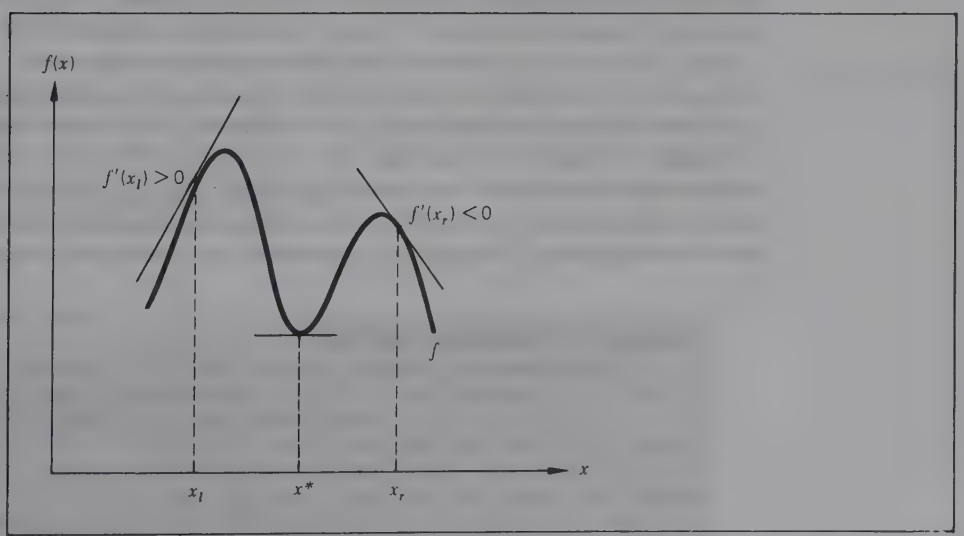


FIGURA 14.14
Aplicación errónea de la prueba de la primera derivada: mínimo relativo tomado erróneamente por máximo relativo.

EJEMPLO 10

La prueba de la primera derivada es también válida para los puntos críticos en que $f'(x)$ no está definida. Examínese la función $f(x) = 3x^{2/3}$, cuya gráfica aparece en la figura 14.11*b*. Para esta función, $f'(x) = 2/x^{1/3}$. Puesto que $f'(x)$ no está definida cuando $x = 0$, existirá un valor crítico conforme a la condición 2. Como $f(0) = 3(0)^{2/3}$, hay un punto crítico en (0, 0). Al utilizar la prueba de la primera derivada, seleccionaremos $x_l = -1$ y $x_r = 1$.

$$f'(-1) = \frac{2}{\sqrt[3]{-1}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

Dado que $f'(x)$ es negativa a la izquierda de $x = 0$ y positiva a la derecha, el mínimo relativo ocurre en el punto crítico (0, 0).

Prueba de la segunda derivada

La prueba más expedita de los puntos críticos donde $f'(x) = 0$ es la ***prueba de la segunda derivada***. En un sentido intuitivo, trata de determinar la concavidad de la función en un punto crítico $[x^*, f(x^*)]$. En la sección 14.1 se llegó a la conclusión de que si $f''(x) < 0$ es un punto de la gráfica de f, la curva será *cóncava hacia abajo* en él. Si $f''(x) > 0$ en un punto de la gráfica de f, la curva será *cóncava hacia arriba* en él. En consecuencia, la prueba de la segunda derivada indica la obtención del valor de $f''(x^*)$. Pero tiene mayor interés el *signo* de $f''(x^*)$. Si $f''(x^*) > 0$, sabemos que no sólo la pendiente es 0 en x^*, sino que la función f es cóncava hacia arriba en x^*. Si ahora consultamos las cuatro posibilidades del punto crítico en la figura 14.12, únicamente una es cóncava hacia arriba en x^*, y ese es el mínimo relativo de la figura 14.12*b*.

Si $f''x(^*) < 0$, la función será cóncava hacia abajo en x^*. Y al examinar la figura 14.12 se observa que tan sólo el punto crítico acompañado de condiciones de concavidad hacia abajo es el máximo relativo en la figura 14.12*a*.

Según se señaló en la sección 14.1, si $f''(x^*) = 0$, no es posible sacar conclusión alguna acerca de la concavidad en $[x^*, f(x^*)]$. Se requiere otra prueba como la de la primera derivada para precisar la naturaleza de estos puntos críticos determinados. He aquí un resumen de la prueba de la segunda derivada.

PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA

I Se encuentran todos los valores críticos x^*, tales que $f'(x^*) = 0$.

II Para cualquier calor crítico x^*, determine el valor de $f''(x^*)$.

i Si $f''(x^*) > 0$, la función será cóncava hacia arriba en x^* y habrá un *mínimo relativo* para f en $[x', f(x^*)]$.

ii Si $f''(x^*) < 0$, la función será cóncava hacia abajo en x^* y habrá un *máximo relativo* para f en $[x^*, f(x^*)]$.

iii Si $f''(x^*) = 0$, no puede sacarse conclusión alguna respecto a la concavidad en x^* ni respecto a la naturaleza del punto crítico. Se necesita otra prueba como la de la primera derivada.

EJEMPLO 11

Examine detenidamente la siguiente función en busca de puntos críticos y determine su naturaleza.

$$f(x) = -\tfrac{3}{2}x^2 + 6x - 20$$

SOLUCIÓN

Deberá reconocerse esta función como una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. También deberá haber un punto crítico que es un máximo relativo. Para confirmar esto, se calcula la primera derivada.

$$f'(x) = -3x + 6$$

Si se hace $f'(x)$ igual a 0,

$$-3x + 6 = 0$$
$$-3x = -6$$

y ocurre un punto crítico cuando

$$x = 2$$

el valor de $f(x)$ cuando $x = 2$ será

$$f(2) = -\tfrac{3}{2}(2^2) + 6(2) - 20$$
$$= -6 + 12 - 20 = -14$$

El único punto crítico ocurre en $(2, -14)$.

Si se continúa con la prueba de la segunda derivada,

$$f''(x) = -3$$

y

$$f''(2) = -3 < 0$$

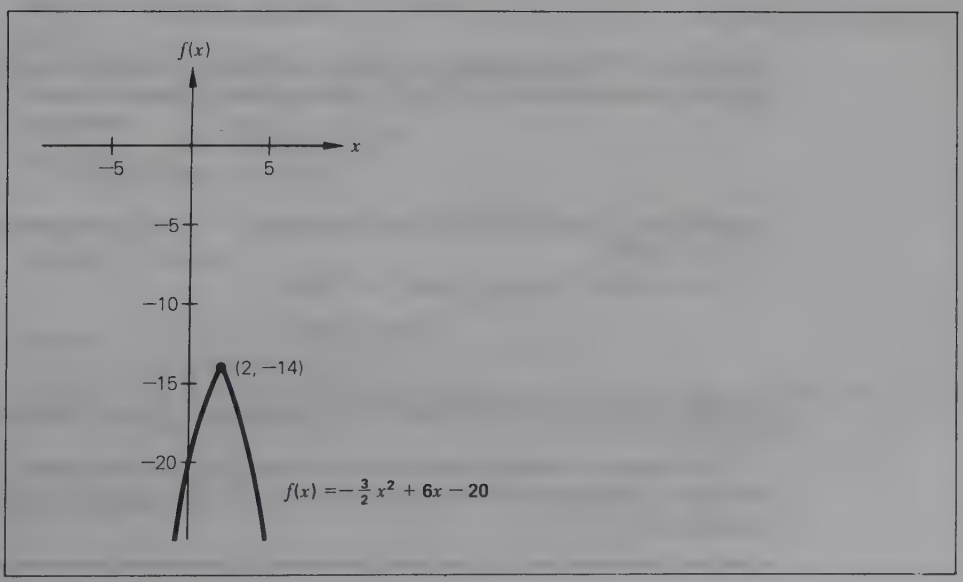


FIGURE 14.15 Relative maximum at $(2, -14)$.

Puesto que la segunda derivada es negativa en $x = 2$, puede extraerse la conclusión de que la gráfica de f es cóncava hacia abajo en este punto, y el punto crítico será un máximo relativo. En la figura 14.15 se ofrece una gráfica de la función.

EJEMPLO 12

Examine la siguiente función en busca de puntos críticos y determine su naturaleza si

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}$$

SOLUCIÓN

Si f' se identifica y se hace igual a 0,

$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{18x}{2}$$
$$= x^3 - 9x$$
$$x^3 - 9x = 0$$

cuando $x(x^2 - 9) = 0$

o cuando $x(x + 3)(x - 3) = 0$

Si los tres factores se hacen igual a 0, se obtienen los valores críticos cuando

$$x = 0 \quad x = -3 \quad \text{y} \quad x = 3$$

Luego de sustituir estos valores críticos en f cuando se afirma que los valores críticos ocurren en la gráfica de f en (0, 0), (−3, −81/4) y (3, −81/4).

La segunda derivada será

$$f''(x) = 3x^2 - 9$$

Para probar el punto crítico (0, 0),

$$f''(0) = 3(0^2) - 9$$
$$= -9 < 0$$

Puesto que $f''(0)$ es negativa, la función será cóncava hacia abajo en $x = 0$ y se presentará un *máximo relativo* en (0, 0). Para probar el punto crítico (−3, −81/4),

$$f''(-3) = 3(-3)^2 - 9$$
$$= 27 - 9 = 18 > 0$$

La gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x = -3$ y un *mínimo relativo* se presenta en (−3, −81/4),

Para probar el punto crítico (3, −81/4),

$$f''(3) = 3(3^2) - 9$$
$$= 27 - 9 = 18 > 0$$

La gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x = 3$ y un *mínimo relativo* ocurre en (3, −81/4).

En resumen, los mínimos relativos ocurren en f en los puntos (−3, −81/4) y (3, −81/4) y un máximo relativo se presenta en (0, 0). La figura 14.16 es un bosquejo de la gráfica de f.

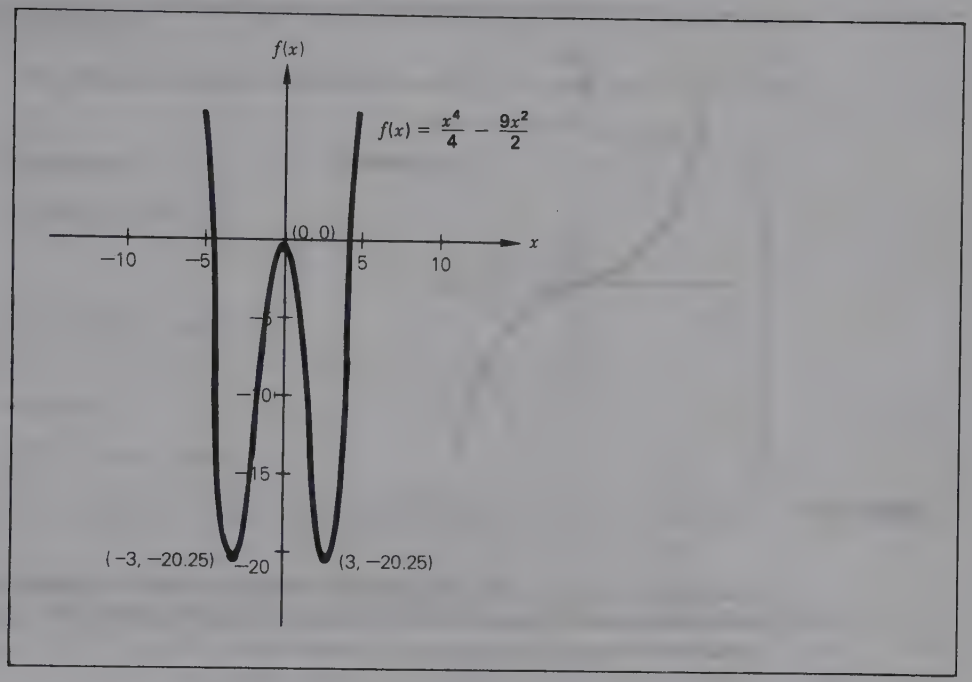


FIGURA 14.16

Cuando falla la prueba de la segunda derivada

Según se indicó al describir la prueba de la segunda derivada, si $f''(x^*) = 0$, la segunda derivada no permite sacar conclusión alguna sobre el comportamiento de f en x^*. Examínemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 13

Estudie la siguiente función en busca de puntos críticos y determine la naturaleza de éstos.

$$f(x) = -x^5$$

SOLUCIÓN

Si se tiene f,

$$f'(x) = -5x^4$$

Al hacer f' igual a 0,

$$-5x^4 = 0$$

cuando

$$x = 0$$

Así pues, existe un valor crítico de f cuando $x = 0$ y habrá un punto crítico en (0, 0). Y continuando con la prueba de la segunda derivada, se obtiene

$$f''(x) = -20x^3$$

En $x = 0$

$$f''(0) = -20(0)^3$$
$$= 0$$

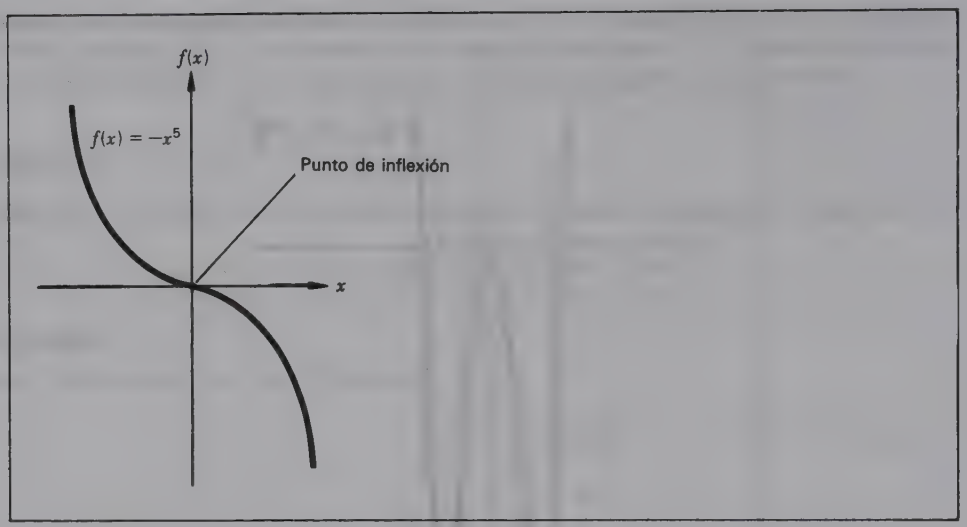


FIGURA 14.17

Si se aplica la prueba de la segunda derivada, no se saca ninguna conclusión respecto a la naturaleza del punto crítico. Puede utilizarse la prueba de la primera derivada para determinar la naturaleza del punto crítico. Si $x_l = -1$ y $x_r = 1$, entonces

$$\begin{aligned} f'(-1) &= -5(-1)^4 \\ &= -5 \\ f'(1) &= -5(1)^4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Puesto que $f'(-1)$ y $f(1)$ son negativas, un punto de inflexión se presenta en $x = 0$. En la figura 14.17 se da un bosquejo de la gráfica de la función.

Prueba de la derivada de orden superior (opcional)

Se dispone de varios métodos para llegar a una conclusión acerca de la naturaleza de un punto crítico cuando falla la prueba de la segunda derivada. Uno eficiente, aunque no fácil de comprender intuitivamente es la ***prueba de la derivada de orden superior***. Con ella siempre se conseguirán resultados concluyentes.

PRUEBA DE LA DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

I Si se tiene un punto crítico $[x^*, f(x^*)]$ en f, determine la derivada de más bajo orden cuyo valor sea no cero en el valor crítico x^*. Denote esta derivada como $f^{(n)}(x)$ donde n es su orden.

II Si el orden n de esta derivada es par, $f(x^*)$ será un *máximo relativo* cuando $f^{(n)}(x^*) < 0$ y un *mínimo relativo* cuando $f^{(n)}(x^*) > 0$.

III Si el orden n de la derivada es *impar*, el punto crítico será un *punto de inflexión*.

EJEMPLO 14

Identifique los puntos críticos (si los hay) y determine su naturaleza si

$$f(x) = (x - 2)^4$$

SOLUCIÓN

Primero calcule f'.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x - 2)^3(1) \\ &= 4(x - 2)^3 \end{aligned}$$

Si se hace f' igual a 0

$$4(x - 2)^3 = 0$$

cuando

$$x = 2$$

En este valor crítico

$$\begin{aligned} f(2) &= (2 - 2)^4 \\ &= (0)^4 = 0 \end{aligned}$$

Así pues, ocurre un punto crítico en (2, 0).

Para determinar la naturaleza del punto crítico, la segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4(3)(x - 2)^2 \\ &= 12(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Al hacer la evaluación de f'' en el valor crítico se obtiene

$$\begin{aligned} f''(2) &= 12(2 - 2)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

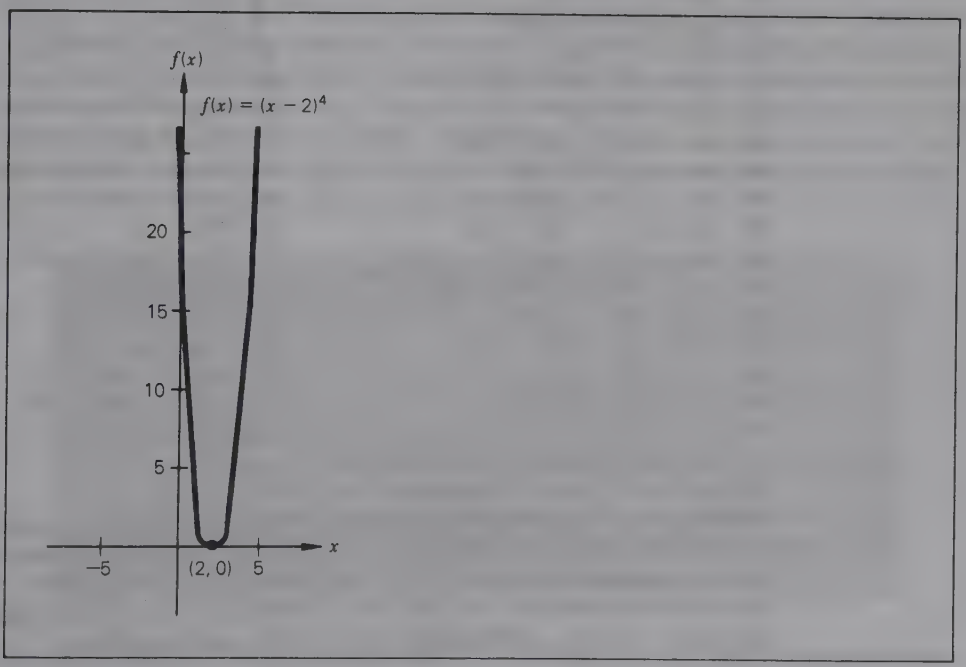


FIGURA 14.18

No hay una conclusión que se base en la prueba de la segunda derivada. Si se sigue empleando la prueba de la derivada de orden superior, la tercera derivada será

$$f'''(x) = 24(x - 2)$$

y

$$f'''(2) = 24(2 - 2) = 0$$

Puesto que $f''(2) = 0$, no existe una conclusión que se funde en la tercera derivada.

La cuarta derivada es

$$f^{(4)}(x) = 24$$

y

$$f^{(4)}(2) = 24$$

Ésta es la derivada de más bajo orden y no es igual a 0 cuando $x = 2$. Puesto que el orden de la derivada ($n = 4$) es par, existe un máximo o mínimo relativo en (2, 0). Para determinar cuál de los dos valores se presentan en este caso, se observa el signo de $f^{(4)}(2)$. Como $f^{(4)}(2) > 0$, puede concluirse que hay un mínimo relativo en (2, 0). La figura 14.18 contiene una gráfica de la función.

NOTA
La prueba de la segunda derivada es en realidad un caso especial de la prueba de la derivada de orden superior; el caso en que la derivada de orden más bajo no es igual a 0 es el de la segunda derivada ($n = 2$).

Ejercicios de seguimiento de la sección 14.2

En cada una de las siguientes funciones, determine la localización de todos los puntos críticos y su naturaleza.

1 $f(x) = 6x^2 - 48x + 100$
2 $f(x) = -x^3/3 + 5x^2 - 16x + 100$
3 $f(x) = 18x^3 + 25$
4 $f(x) = x^2 + 10x + 8$
5 $f(x) = -x^3 + 24$
6 $f(x) = -x^3/3 + 2.5x^2 - 4x$
7 $f(x) = x^4/4 - 9x^2/2$
8 $f(x) = x^4/4 - 25x^2/2$
9 $f(x) = x^5 - 25$
10 $f(x) = -5x^5 + 100$
11 $f(x) = 3x^2 - 48x + 15$
12 $f(x) = x^2/2 - 12x + 7$
13 $f(x) = -x^2/10$
14 $f(x) = -x^2/15 + 40$
15 $f(x) = x^3/3 - 8x^2 + 60x$
16 $f(x) = 2x^3/3 + x^2/2 - 10x$
17 $f(x) = 2x^5/5 - 32x$
18 $f(x) = -4x^5/5 + 324x - 250$
19 $f(x) = x^3/3 - x^2/2 - 6x$
20 $f(x) = x^3/6 - x^2$
21 $f(x) = x^4/4 - 8x^2 + 10$
22 $f(x) = 2x^2 - x^4/4$
23 $f(x) = x^5/5 - 3x^4/4 - 4x^3/3$
24 $f(x) = 2x^5/5 + x^4/4 - 5x^3$
25 $f(x) = -2x^3 - 10.5x^2 + 12x$
26 $f(x) = -x^5/5 + x$
27 $f(x) = 4x^3/3 + 10x^2$
28 $f(x) = x^6/6 - 8x^2 - 10$
29 $f(x) = (5x - 10)^3$
30 $f(x) = (x - 16)^4$
31 $f(x) = (2x - 5)^3$
32 $f(x) = -(4x - 2)^4$
33 $f(x) = (x^2 - 16)^4$
34 $f(x) = -(2x^2 - 8)^3$
***35** $f(x) = x/(x^2 + 1)$
***36** $f(x) = x(x + 2)^3$
***37** $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$
***38** $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$

***39 Prueba de la ecuación original** En la última sección se mencionó que se dispone de otras técnicas para determinar la naturaleza de los puntos críticos. Una de ellas consiste en comparar el valor de $f(x^*)$ con los de $f(x)$ a la izquierda y derecha de x^*. Examine detenidamente la figura 14.12 y establezca un grupo de reglas que permitan distinguir entre las posibilidades de los cuatro puntos críticos.

***40** Compare las eficiencias relativas asociadas a la realización de la prueba de la ecuación original y la prueba de la primera derivada de los puntos críticos.

***41** Compare las eficiencias relativas relacionadas con la realización de las pruebas de la primera derivada, la segunda derivada y la derivada de orden superior de los puntos críticos.

***42 Cuando falla la prueba de la segunda derivada: una alternativa** Cuando se tiene un valor crítico determinado cuando $f'(x) = 0$ y la falla de la prueba de la segunda derivada permite llegar a una conclusión, establezca un conjunto de reglas que lleven a una conclusión basada en la comprobación de las condiciones de concavidad a la izquierda y derecha del valor crítico.

14.3 CONSIDERACIONES DE DOMINIO RESTRINGIDO

En la última sección nos concentramos en los procedimientos con que se encuentran los máximos y mínimos relativos. En ésta examinaremos los métodos que ayuden a identificar los máximos y mínimos absolutos cuando el dominio de una función está restringido.

Cuando el dominio está restringido

Con mucha frecuencia en los problemas aplicados el dominio está restringido. Por ejemplo, si la utilidad P se expresa en función del número de unidades producidas x, es probable que x esté restringida a valores como $0 \leq x \leq x_u$. En este caso x está restringida a valores no negativos (no se producen cantidades negativas), los cuales son menores o iguales a algún límite superior x_u. El valor de x_u puede reflejar la capacidad de producción, definida por escasa mano de obra, pocas materias primas o por la capacidad física de la planta.

En la búsqueda del máximo o mínimo absolutos de una función, habrá que tener en cuenta no sólo los máximos y mínimos relativos de ella, sino también los ***puntos finales*** de su dominio. Por ejemplo, observe la función graficada en la figura 14.19. Nótese que el dominio de la función está restringido a valores comprendidos entre 0 y x_u y que el máximo absoluto de f ocurre en x_u, el punto final derecho del dominio. El mínimo absoluto se presenta en x_2, que es también un mínimo relativo en la función. En seguida se describe el procedimiento para identificar los extremos absolutos.

PROCEDIMIENTO PARA IDENTIFICAR LOS PUNTOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

Si se tiene la función continua f definida en el intervalo cerrado $[x_l, x_U]$:

I Localice todos los puntos críticos $[x^*, f(x^*)]$ que se hallen dentro del dominio de la función.* Prescinda de los valores críticos de x^* que se encuentren fuera del dominio.

II Calcule los valores de $f(x)$ en los dos puntos finales del dominio $[f(x_l)$ y $f(x_U)]$.

III Compare los valores de $f(x^*)$ para todos los puntos críticos relevantes con $f(x_l)$ y $f(x_U)$. El máximo absoluto es el mayor de estos valores. El mínimo absoluto es el menor de ellos.

*Recuérdese que los puntos críticos satisfacen la condición $f'(x) = 0$ o bien $f'(x)$ no está definida.

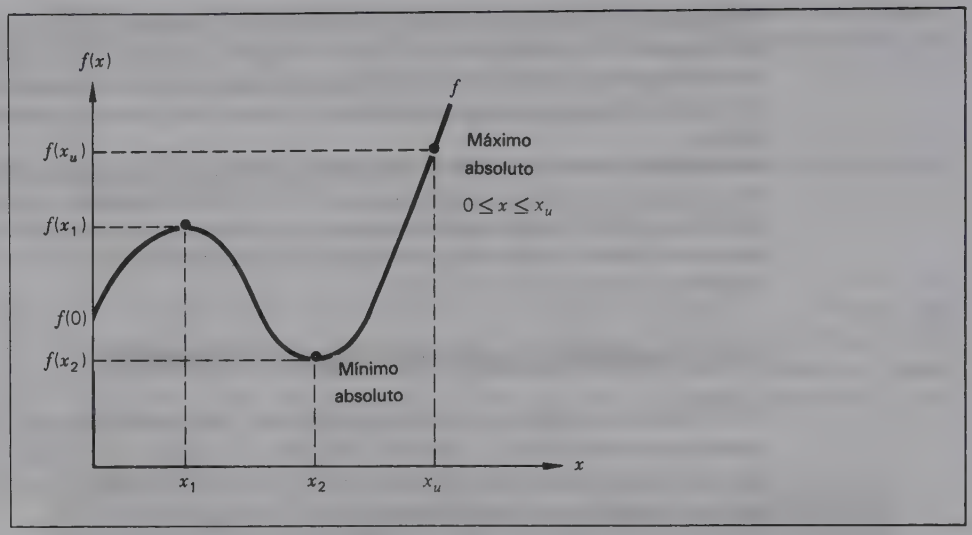


FIGURA 14.19

EJEMPLO 15

Determine las localizaciones y valores del máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + 5$$

donde $2 \leq x \leq 10$.

SOLUCIÓN

□ **Paso I** Al calcular la primera derivada se tiene

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{14x}{2} + 6$$
$$= x^2 - 7x + 6$$

Si se hace f' igual a 0,

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

o bien

$$(x - 6)(x - 1) = 0$$

Por tanto,

$$x = 6 \quad \text{y} \quad x = 1$$

El único valor crítico dentro del dominio de la función es $x = 6$.

$$f(6) = \frac{6^3}{3} - \frac{7(6^2)}{2} + 6(6) + 5$$
$$= 72 - 126 + 36 + 5 = -13$$

En consecuencia, un punto crítico ocurre en $(6, -13)$.

La segunda derivada es

$$f''(x) = 2x - 7$$

Para probar $x = 6$,

$$f''(6) = 2(6) - 7$$
$$= 5 > 0$$

Puesto que $f''(6) > 0$, un mínimo relativo se presenta en $(6, -13)$. Dado que $f'(x)$ se define para todas las x reales, no existen otros valores críticos.

□ **Paso II** Los valores de $f(x)$ en los puntos finales del dominio s<

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{7(2^2)}{2} + 6(2) + 5$$
$$= \tfrac{8}{3} - 14 + 12 + 5 = 5\tfrac{2}{3}$$

y

$$f(10) = \frac{(10)^3}{3} - \frac{7(10)^2}{2} + 6(10) + 5$$
$$= \frac{1{,}000}{3} - \frac{700}{2} + 65 = 48\tfrac{1}{3}$$

□ **Paso III** Al comparar $f(2)$, $f(6)$ y $f(10)$, se observa que el mínimo absoluto de -13 ocurre cuando $x = 6$ y que el máximo absoluto de $48\frac{1}{3}$ se presenta cuando $x = 10$. La figura 14.20 muestra una gráfica de la función

Ejercicios de seguimiento de la sección 14.3

En los siguientes ejercicios determine las localizaciones y valores del máximo y mínimo absolutos de f.

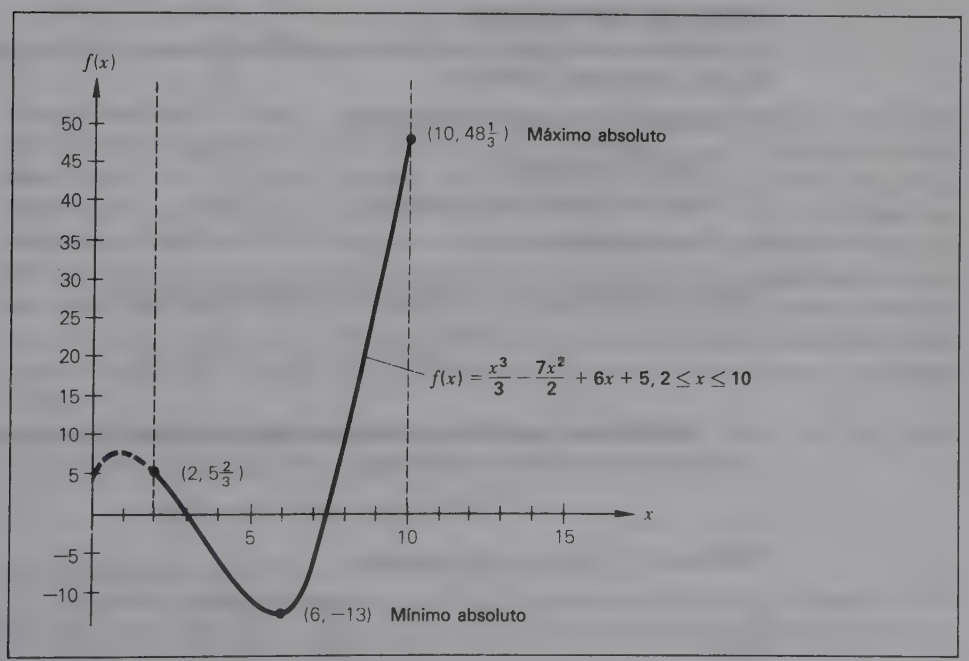


FIGURA 14.20

1 $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, donde $2 \le x \le 8$
2 $f(x) = -x^2 + 8x - 100$, donde $-2 \le x \le 4$
3 $f(x) = x^3 - 12x^2$, donde $2 \le x \le 10$
4 $f(x) = -2x^3 - 15x^2 + 10$, donde $-6 \le x \le +2$
5 $f(x) = x^5/5 - x - 25$, donde $3 \le x \le 8$
6 $f(x) = x^5/5 - 3x^4/4 + 2x^3/3 - 20$, donde $0 \le x \le 5$
7 $f(x) = x^6/6 - x^5 + 2.5x^4$, donde $0 \le x \le 4$
8 $f(x) = x^3 + 10$, donde $1 \le x \le 5$
9 $f(x) = -4x^2 + 6x - 10$, donde $0 \le x \le 10$
10 $f(x) = x^3/3 - x^2/2 - 6x$, donde $0 \le x \le 5$
11 $f(x) = x^4/4 - 4x^2 + 16$, donde $5 \le x \le 10$
12 $f(x) = x^4/4 - 7x^3/3 + 5x^2$, donde $0 \le x \le 4$
13 $f(x) = x^5/5 - 5x^4/4 - 14x^3/3 - 10$, donde $0 \le x \le 6$
14 $f(x) = x^4/4 - 8x^2 + 25$, donde $x \ge 0$
15 $f(x) = x^6/6 - x^5 + 2.5x^4$, donde $-5 \le x \le 5$
16 $f(x) = x^{2/3}$, donde $0 \le x \le 4$
17 $f(x) = x^{1/2}$, donde $4 \le x \le 16$
18 $f(x) = (x - 2)^{1/3}$, donde $0 \le x \le 10$

14.4 TRAZADO DE CURVAS

El trazado de funciones se facilita con la información adquirida en este capítulo. Podemos hacernos una idea de la forma general de la gráfica de una función sin determinar ni trazar un gran número de pares ordenados. En la presente sección se explican algunos de los determinantes fundamentales de la forma de la gráfica de una función y se dan ejemplos de procedimientos para trazar curvas.

Puntos de datos clave

Al determinar la forma general de la gráfica de una función, son fundamentales los siguientes atributos:

- Máximos y mínimos relativos
- Puntos de inflexión
- Intersecciones con los ejes x y y
- Dirección final

Esto se ejemplifica por medio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5$$

1 Máximos y mínimos relativos Para localizar los extremos relativos en f se calcula la primera derivada

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

Haciendo f' igual a 0 se obtiene

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

o bien

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

Los valores críticos ocurren en $x = 2$ y $x = 6$. Si esos valores se sustituyen en f

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - 4(2^2) + 12(2) + 5$$
$$= \tfrac{8}{3} - 16 + 24 + 5 = 15\tfrac{2}{3}$$

y

$$f(6) = \frac{6^3}{3} - 4(6^2) + 12(6) + 5$$
$$= 72 - 144 + 72 + 5 = 5$$

Así pues, existen valores críticos en $(2, 15\frac{2}{3})$. Una gráfica nos permite conocer que en estos puntos existen condiciones de pendiente cero, según se advierte en la figura 14.21*a*.

La segunda derivada de f es

$$f''(x) = 2x - 8$$

Para probar la naturaleza del punto crítico $(2, 15\frac{2}{3})$,

$$f''(2) = 2(2) - 8 = -4 < 0$$

Por consiguiente, un máximo relativo ocurre en $(2, 15\frac{2}{3})$. Para probar la naturaleza del punto crítico (6, 5),

$$f''(6) = 2(6) - 8$$
$$= 4 > 0$$

Por tanto, un mínimo relativo se presenta en (6, 5). La información adquirida hasta ahora nos permite obtener el trazado de f en el grado mostrado en la figura 14.21*b*.

2 Puntos de inflexión Se encuentran candidatos a puntos de inflexión cuando f'' se hace igual a 0 o bien cuando

$$2x - 8 = 0$$

o

$$x = 4$$

Si sustituimos $x = 4$ en f, podemos afirmar que el único candidato a un punto de inflexión ocurre en $(4, 10\frac{1}{3})$. Y sin verificar el signo de f'' a la izquierda y derecha de $x = 4$, puede llegarse a la conclusión de que el punto $(4, 10\frac{1}{3})$ es el único punto de inflexión en la gráfica de f. Ello obedece a que *debe haber* un punto de inflexión entre el máximo relativo en $(2, 15\frac{2}{3})$ y el mínimo relativo en (6, 5). *Para una función continua, la concavidad de la función debe cambiar entre los puntos críticos adyacentes*. El único candidato se halla entre los dos puntos críticos; cos; por tanto, debe ser un punto de inflexión. La información adquirida hasta aquí nos permite mejorar el trazado de $f(x)$ como se aprecia en la figura 14.21*c*.

3 Intersecciones con los ejes. La intersección con el eje y es un punto fácil de localizar. En este caso

$$f(0) = 5$$

La intersección con el eje y se presenta en (0, 5).

Según la función de que se trate, las intersecciones con el eje x pueden o no ser fáciles de encontrar. En esta función resultarán bastante difíciles de identi-

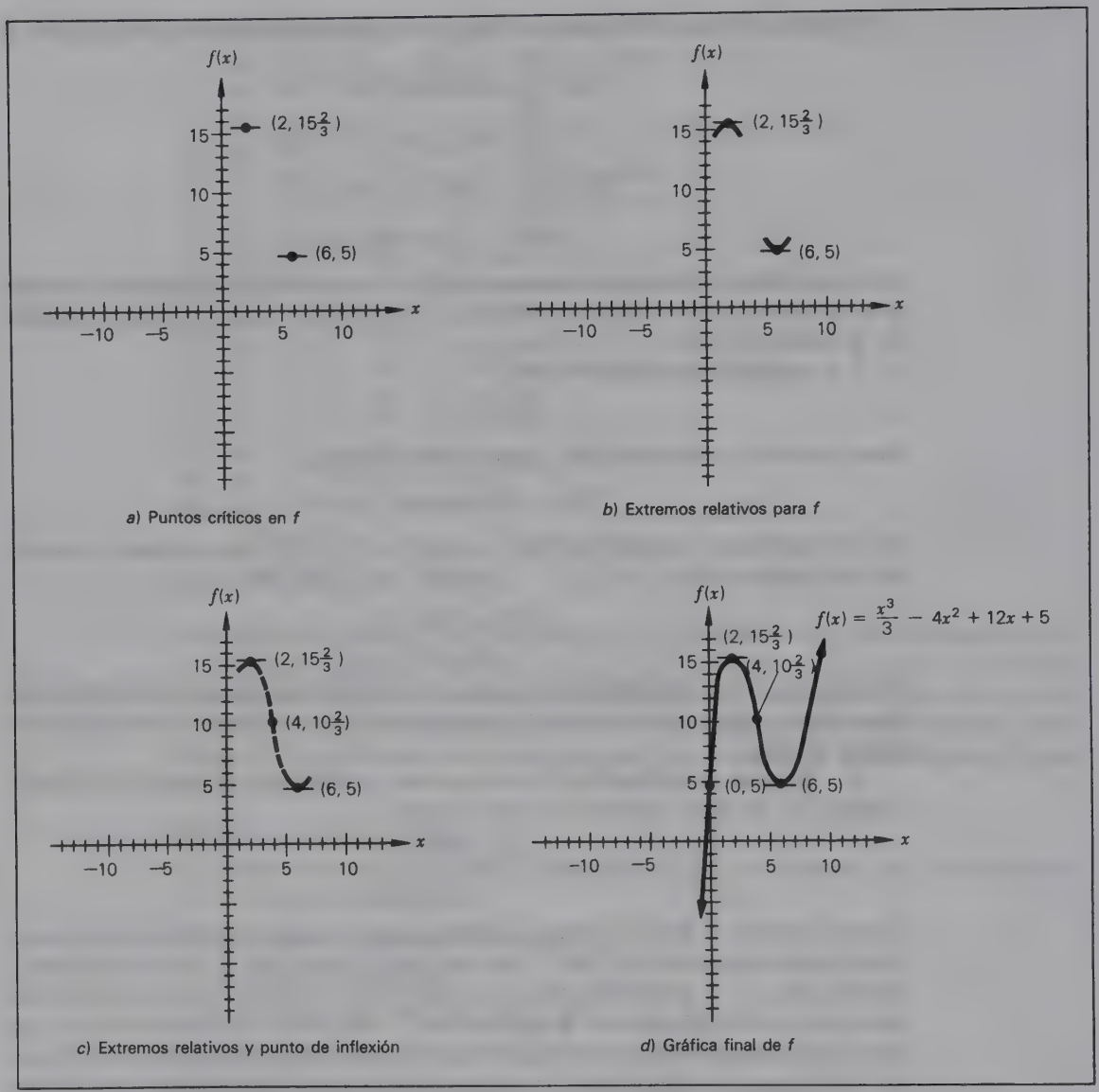


FIGURA 14.21
Desarrollo de la gráfica de $f(x) = x^3/3 - 4x^2 + 12x + 5$.

ficar. En el trazado de f no influirá mucho el hecho de conocer la localización exacta de una intersección con el eje x que existe para f.

4 Dirección final. Para f, el término de mayor potencia es $x^3/3$. Para determinar el comportamiento de f a medida que x se torne más positiva, es preciso observar el comportamiento de $x^3/3$ cuando x va haciéndose más positiva.

A medida que $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{x^3}{3} \to +\infty$

Por tanto,

a medida que $x \to +\infty$ $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5 \to +\infty$

De manera análoga,

a medida que $x \to -\infty$ $\dfrac{x^3}{3} \to -\infty$

y $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5 \to -\infty$

La figura 14.21*d* incorpora las intersecciones con los ejes y las direcciones finales al trazado de la curva.

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
En la función del ejemplo anterior, ¿qué información se tiene que excluya que las dos partes de la figura 14.22 sean las gráficas de $f(x) = x^3/3 = 4x^2 + 12x + 5$?

EJEMPLO 16

Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 8x^2$$

SOLUCIÓN

1 **Máximos y mínimos relativos** Para localizar los extremos relativos de f se obtiene la primera derivada

$$f'(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$$

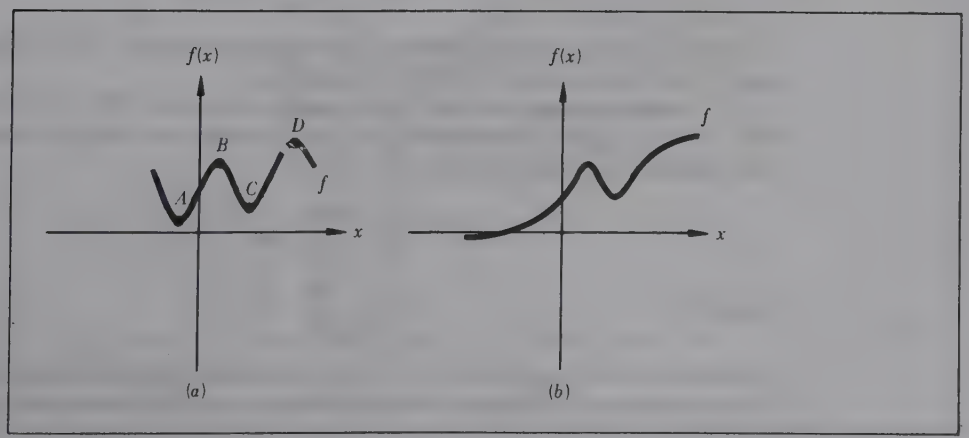


FIGURA 14.22

Al hacer f' igual a 0 se obtiene

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$
$$x(x^2 - 8x + 16) = 0$$

o bien

$$x(x - 4)(x - 4) = 0$$

Si los factores se hacen igual a 0, los valores críticos se obtienen en $x = 0$ y $x = 4$. Al sustituirlos en f nos da

$$f(0) = 0$$

y

$$f(4) = \frac{4^4}{4} - \frac{8(4^3)}{3} + 8(4^2)$$
$$= 64 - 170\tfrac{2}{3} + 128 = 21\tfrac{1}{3}$$

Por tanto, los puntos críticos ocurren en (0, 0) y (4, 21⅓).

Probando $x = 0$, se obtiene

$$f''(x) = 3x^2 - 16x + 16$$

y

$$f''(0) = 16 > 0$$

Un mínimo relativo ocurre en (0, 0).

Al probar $x = 4$,

$$f''(4) = 3(4)^2 - 16(4) + 17$$
$$= 48 - 64 + 16 = 0$$

No puede extraerse conclusión alguna sobre $x = 4$ que se base en la segunda derivada. Continuando con la prueba de la derivada de orden superior,

$$f'''(x) = 6x - 16$$

y

$$f'''(4) = 6(4) - 16$$
$$= 8 > 0$$

Puesto que el orden de la derivada es impar, un punto de inflexión ocurre en (4, 21⅓).

2 Puntos de inflexión Los candidatos a puntos de inflexión se encuentran al hacer f'' igual a 0 o cuando

$$3x^2 - 16x + 16 = 0$$
$$(3x - 4)(x - 4) = 0$$
$$x = \tfrac{4}{3} \quad \text{y} \quad x = 4$$

Ya hemos verificado que un punto de inflexión ocurre en (4, 21⅓). Confirme el lector que $(\frac{4}{3}, 8.69)$ es también un punto de inflexión.

3 Intersecciones con los ejes Cuando se calcula $f(0) = (0)^4/4 - 8(0)^3/3 + 8(0)^2 = 0$, se llega a la conclusión de que la interacción con el eje y ocurre en (0, 0). Para localizar las intersecciones con el eje x,

$$\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 8x^2 = 0$$

cuando

$$x^2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{8x}{3} + 8\right) = 0$$

Una raíz de esta ecuación es $x = 0$, lo cual indica que una intersección con el eje x se encuentra en (0, 0) (antes debimos observar que la intersección con el eje y es al

mismo tiempo una intersección con el eje x). Por medio de la fórmula cuadrática verifique que no haya raíces para la ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{8x}{3} + 8 = 0$$

Para f, el punto (0, 0) representa la única intersección con los ejes.

4 Dirección final El comportamiento final de $f(x)$ está ligado al del término $x^4/4$.

A medida que $x \to +\infty$ $\frac{x^4}{4} \to +\infty$ y $f(x) \to +\infty$

conforme $x \to -\infty$ $\frac{x^4}{4} \to +\infty$ y $f(x) \to +\infty$

Con la información recabada puede trazarse la forma aproximada de f como se aprecia en la figura 14.23

Ejercicios de seguimiento de la sección 14.4

En el presente capítulo hemos explicado la metodología para examinar las funciones

1 $f(x) = x^2 - 5x + 6$
2 $f(x) = x^3/3 - 5x^2 + 16x - 100$
3 $f(x) = x^3/3 - 2.5x^2 + 4x$
4 $f(x) = x^4/4 - 25x^2/2$
5 $f(x) = x^6/6 - 8x^2 - 10$
6 $f(x) = (6x - 12)^3$
7 $f(x) = (x^2 - 16)^4$
8 $f(x) = -(x - 5)^3$
9 $f(x) = -(x - 2)^4$
10 $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 - 30x$
11 $f(x) = x^5 - 25$
12 $f(x) = -5x^5 + 100$
13 $f(x) = x^3/3 - 8x^2 + 60x$
14 $f(x) = 2x^3/3 + x^2/2 - 10x$
15 $f(x) = 2x^5/5 - 32x$
16 $f(x) = -4x^3/5 + 324x - 250$
17 $f(x) = x^4/4 - 9x^2/2$
18 $f(x) = x^4/4 - 25x^2/2$
19 $f(x) = x^3/3 - 3.5x^2 - 30x$
20 $f(x) = x^3/3 - 5x^2 + 16x - 10$

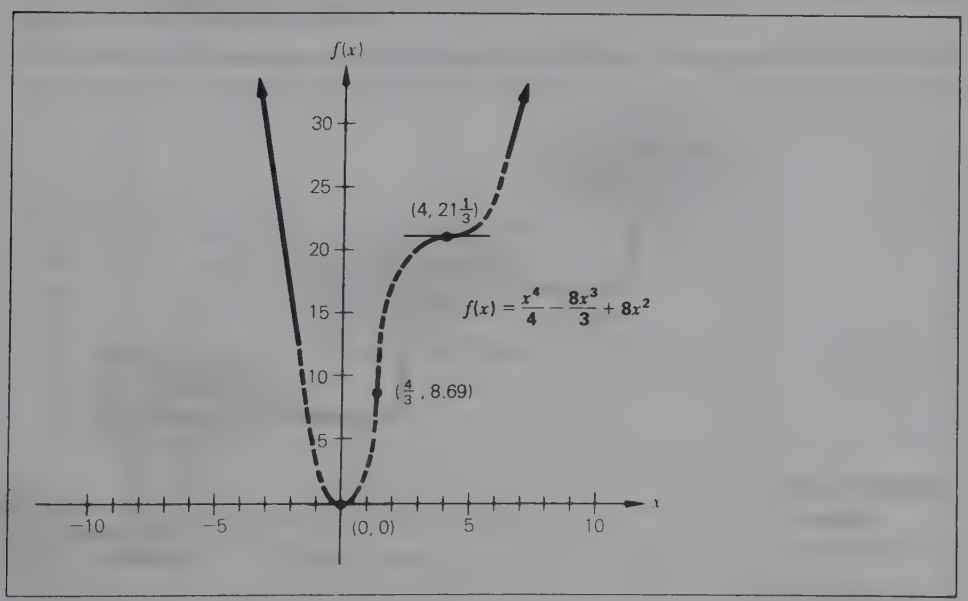


FIGURA 14.23

En este capítulo también hemos explicado los métodos con que se analizan las funciones para localizar los puntos máximos y mínimos. En las secciones restantes del capítulo se tratarán los problemas aplicados. Al empezar a leerlas, no olvide que esos problemas exigen una traducción de la formulación verbal del problema a una adecuada representación matemática. Hay que tener cuidado y definir las variables (incógnitas) con exactitud. Una vez obtenida una solución matemáticamente derivada, un elemento esencial del proceso lo constituye la traducción del resultado matemático a una recomendación práctica en el ámbito de la aplicación. La figura 14.24 es una representación esquemática de este proceso.

14.5 APLICACIONES A LOS INGRESOS, COSTOS Y UTILIDADES

Aplicaciones a los ingresos

Las siguientes aplicaciones se centran en la maximización de los ingresos. Recuérdese que el dinero que *entra* a una organización por la venta de productos o la prestación de servicios recibe el nombre de ***ingreso***. Y la manera más fundamental de calcular el ingreso total conseguido con la venta de un producto (o servicio) es

$$\boxed{\text{Ingreso total} = (\text{precio})(\text{cantidad vendida})}$$

En esta relación se supone que el precio de venta es igual para todas las unidades vendidas.

EJEMPLO 17

La demanda del producto de una compañía varía según el precio que le fije al producto. La compañía ha descubierto que el ingreso total anual R (expresado en miles de dólares) es una función del precio p (en dólares). En concreto,

$$R = f(p) = -50p^2 + 500p$$

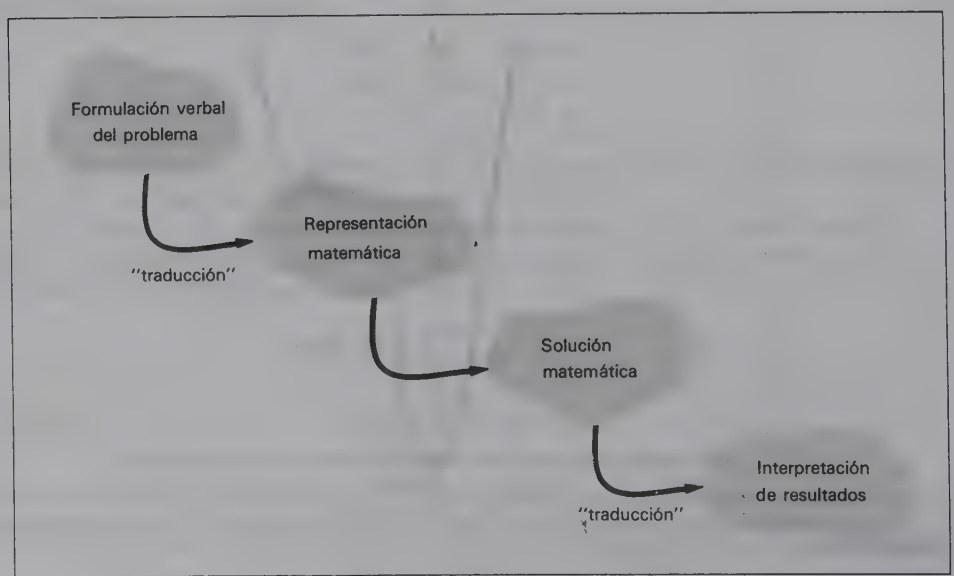


FIGURA 14.24 Proceso de solución de problemas.

a) Determine el precio que debería cobrarse con objeto de maximizar el ingreso total.

b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total anual?

SOLUCIÓN

a) En el capítulo 12 se dijo que la función de ingreso es cuadrática y que su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. En consecuencia el valor máximo de R ocurrirá en el vértice. La primera derivada de la función de ingreso es

$$f'(p) = -100p + 500$$

Si se hace f' igual a 0,

$$-100p + 500 = 0$$
$$-100p = -500$$

o un valor crítico ocurre cuando

$$p = 5$$

Existe un punto crítico en la gráfica de f, y se presenta cuando $p = 5$. Aunque sabemos que un máximo relativo ocurre cuando $p = 5$, verifiquemos formalmente esto por medio de la prueba de la segunda derivada:

$$f''(p) = -100 \quad \text{y} \quad f''(5) = -100 < 0$$

Por consiguiente, un máximo relativo ocurre en f cuando $p = 5$.

b) El valor máximo de R se calcula sustituyendo $p = 5$ en f, o sea

$$f(5) = -50(5^2) + 500(5)$$
$$= -1\,250 + 2\,500 = 1\,250$$

Así pues, se espera que el ingreso total anual se maximice en \$1250 (miles), es decir, \$1.25 millones cuando la empresa cobre \$5 por unidad. La figura 14.25 muestra una gráfica de la función de ingreso.

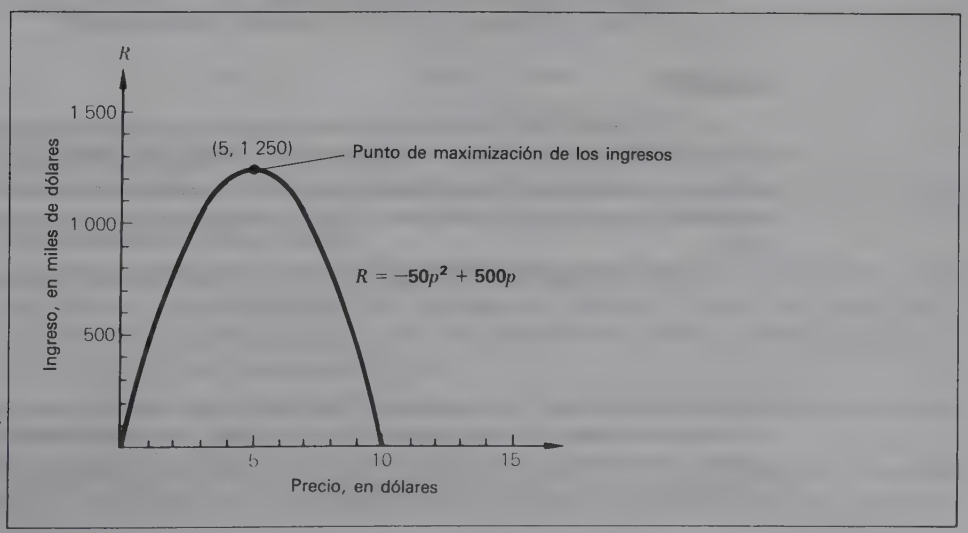


FIGURA 14.25 Función cuadrática de ingreso.

NOTA
Esto ya se mencionó antes en el libro cuando hablamos de las aplicaciones; sin embargo, vale la pena repetirlo. Es muy frecuente que los estudiantes resuelvan un problema expresado con palabras, encuentren la solución, pero que carezcan de la habilidad de interpretar los resultados dentro del marco de la aplicación. Si el lector queda atrapado en la mecánica de la obtención de una solución y pierde temporalmente su marco de referencia respecto al problema original, vuelva a leer el problema, fijándose especialmente en cómo se definen las variables. También repase las preguntas que se hacen en el problema. Esto le ayudará a recordar los objetivos y la dirección que deberá seguir.

EJEMPLO 18

Administración del transporte público Las autoridades de tránsito de una gran área metropolitana han aprobado la estructura de tarifas que rige el sistema de autobuses públicos de la ciudad. Se abandonó la estructura de tarifas por zona en la cual la tarifa depende del número de zonas por las cuales cruza el pasajero. El nuevo sistema tiene tarifas fijas: el pasajero puede viajar por el mismo precio entre dos puntos cualesquiera de la ciudad.

Las autoridades de tránsito han encuestado a los ciudadanos a fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa fija admitiera diferentes importes. Basándose en los resultados de la encuesta, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada de la demanda, la cual expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. En concreto, la función de demanda es

$$q = 10\,000 - 125p$$

donde q representa el número de pasajeros por día y p la tarifa en centavos.

a) Determine la tarifa que se cobraría con objeto de maximizar el ingreso diario por la tarifa de los autobuses.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo esperado?
c) ¿Cuántos pasajeros por día se esperan con esta tarifa?

SOLUCIÓN

a) El primer paso es determinar una función que exprese el ingreso diario según la tarifa p. Se escoge p como variable independiente porque se quería determinar la tarifa que produciría el ingreso máximo total. Por otra parte, la tarifa es una ***variable de decisión***, aquella cuyo valor puede fijar la administración de las autoridades de tránsito.

La expresión general del ingreso total es, como se señaló antes,

$$\boxed{R = pq}$$

Pero en esta forma R se expresa en función de dos variables: p y q. *En este momento* no podemos tratar de la optimización de funciones con más de una variable independiente. Sin embargo, la función de demanda establece una relación entre las variables p y q que permiten transformar dicha función en una en que R se expresa en función

de la variable independiente p. El miembro derecho de la función de demanda es una expresión formulada en términos de p, que equivale a q. Si con esta expresión se sustituye q en la función de ingreso, se obtiene

$$\begin{aligned} R &= f(p) \\ &= p(10\,000 - 125p) \end{aligned}$$

o bien

$$R = 10\,000p - 125p^2$$

La primera derivada es

$$f'(p) = 10\,000 - 250p$$

Si la derivada se hace igual a 0,

$$\begin{aligned} 10\,000 - 250p &= 0 \\ 10\,000 &= 250p \end{aligned}$$

y un valor crítico ocurre cuando

$$40 = p$$

La segunda derivada se obtiene y evalúa cuando $p = 40$ para determinar la naturaleza del punto crítico:

$$\begin{aligned} f''(p) &= -250 \\ f''(40) &= -250 < 0 \end{aligned}$$

Así pues, ocurre un máximo relativo para f cuando $p = 40$. la interpretación de este resultado es que el ingreso diario se maximizará cuando se cobre una tarifa fija de \$0.40 (40 centavos de dólar).

b)
$$\begin{aligned} f(40) &= 10\,000(40) - 125(40)^2 \\ &= 400\,000 - 200\,000 = 200\,000 \end{aligned}$$

Dado que la tarifa se expresa en centavos, el máximo ingreso diario esperado será de 200 000 centavos o sea \$2000.

c) El número de pasajeros que se espera diariamente con esta tarifa se calcula sustituyendo la tarifa en la función de demanda, es decir,

$$\begin{aligned} q &= 10\,000 - 125(40) \\ &= 10\,000 - 5\,000 \\ &= 5\,000 \text{ pasajeros por día} \end{aligned}$$

La figura 14.26 contiene una gráfica de la función de ingreso diario.

Aplicaciones a los costos

Según se mencionó antes, los costos representan *salidas* de efectivo para la organización. La mayor parte de las empresas buscan el modo de reducirlas al mínimo. En la presente sección se dan aplicaciones que se refieren a la minimización de alguna medida del costo.

EJEMPLO 19

Administración de inventario Un problema común de las organizaciones es determinar qué cantidad de un artículo deberá conservarse en almacén. Para los minoristas,

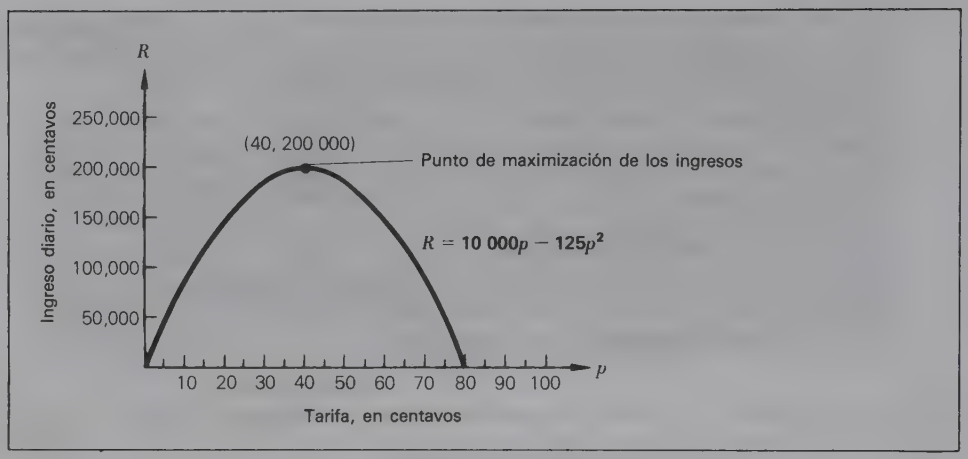


FIGURA 14.26 Función cuadrática de ingreso.

el problema se relaciona a veces con el número de unidades de cada producto que ha de mantenerse en inventario. Para los productores consiste en decidir qué cantidad de cada materia prima debe estar disponible. Este problema se identifica con un área o especialidad, denominada ***control*** o ***administración de inventario***. Por lo que respecta a la pregunta de cuánto "inventario" ha de conservarse, el hecho de tener demasiado poco o mucho inventario puede acarrear costos.

Un minorista de bicicletas motorizadas ha analizado los datos referentes a los costos, habiendo determinado una función de costo que expresa el costo anual de comprar, poseer y mantener el inventario en función del tamaño (número de unidades) de cada pedido de bicicletas que coloca. He aquí la función de costo:

$$C = f(q) = \frac{4\,860}{q} + 15q + 750\,000$$

donde C es el costo anual del inventario, expresado en dólares, y q denota el número de bicicletas ordenadas cada vez que el minorista repone la oferta.

a) Determine el tamaño de pedido que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuál se espera que sea el costo mínimo anual del inventario?

SOLUCIÓN

a) La primera derivada es

$$f'(q) = -4\,860q^{-2} + 15$$

Si f' se hace igual a 0,

$$-4\,860q^{-2} + 15 = 0$$

cuando

$$\frac{-4\,860}{q^2} = -15$$

La multiplicación de ambos miembros por q^2 y su división entre -15 producen

$$\frac{4\,860}{15} = q^2$$

$$324 = q^2$$

y un valor crítico existe en

$$18 = q$$

La naturaleza del punto crítico se comprueba al obtener f'':

$$f''(q) = 9\,720q^{-3}$$
$$= \frac{9\,720}{q^3}$$

Al evaluar el valor crítico se obtiene

$$f''(18) = \frac{9\,720}{(18)^3}$$
$$= 1.667 > 0$$

Los costos anuales del inventario se minimizarán cuando se pidan 18 bicicletas cada vez que el minorista reponga las existencias.

b) Los costos anuales mínimos del inventario se determinan calculando $f(18)$, o sea

$$f(18) = \frac{4\,860}{18} + 15(18) + 750\,000$$
$$= 270 + 270 + 750\,000 = \$750\,540$$

La figura 14.27 es una gráfica de la función de costo.

EJEMPLO 20

Minimización del costo promedio por unidad El costo total de la producción de q unidades de cierto producto se describe por medio de la función

$$C = 100\,000 + 1\,500q + 0.2q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares. Determine cuántas unidades q deberían fabricarse a fin de minimizar el *costo promedio por unidad*.

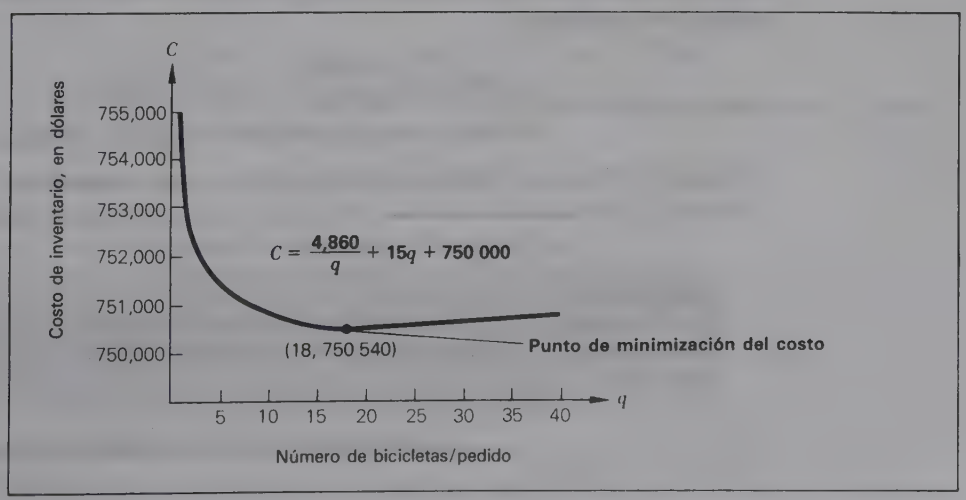


FIGURA 14.27 Función de costo de inventario.

SOLUCIÓN

El costo promedio por unidad se calcula dividiendo el costo total entre el número de unidades producidas. Por ejemplo, si el costo total de la fabricación de 10 unidades de un producto es de \$275, el costo promedio por unidad será \$275/10 = \$27.50. Así pues, la función que representa el costo promedio por unidad en este ejemplo es

$$\overline{C} = f(q) = \frac{C}{q} = \frac{100\,000}{q} + 1\,500 + 0.2q$$

La primera derivada de la función del costo promedio es

$$f'(q) = -100\,000q^{-2} + 0.2$$

Si f' se hace igual a 0,

$$0.2 = \frac{100\,000}{q^2}$$

o bien

$$q^2 = \frac{100\,000}{0.2}$$
$$= 500\,000$$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros, se tiene un valor crítico de

$$q = 707.11 \text{ (unidades)}$$

La naturaleza del punto crítico se determina por medio de la prueba de la segunda derivada:

$$f''(q) = 200\,000q^{-3}$$
$$= \frac{200\,000}{q^3}$$
$$f''(707.11) = \frac{200\,000}{(707.11)^3}$$
$$= 0.00056 > 0$$

Por tanto, un mínimo relativo ocurre para f cuando $q = 707.11$. Este costo promedio mínimo por unidad es

$$f(707.11) = \frac{100\,000}{707.11} + 1500 + 0.2(707.11)$$
$$= 141.42 + 1500 + 141.42 = \$1782.84$$

La figura 14.28 es una gráfica de la función de costo promedio.

EJERCICIO

En el ejemplo 20, ¿cuál es el costo total de fabricación en este nivel de producción?* ¿Cuáles son las dos formas en que puede calcularse esta cifra?

**Respuesta*: \$1 260 663.90.

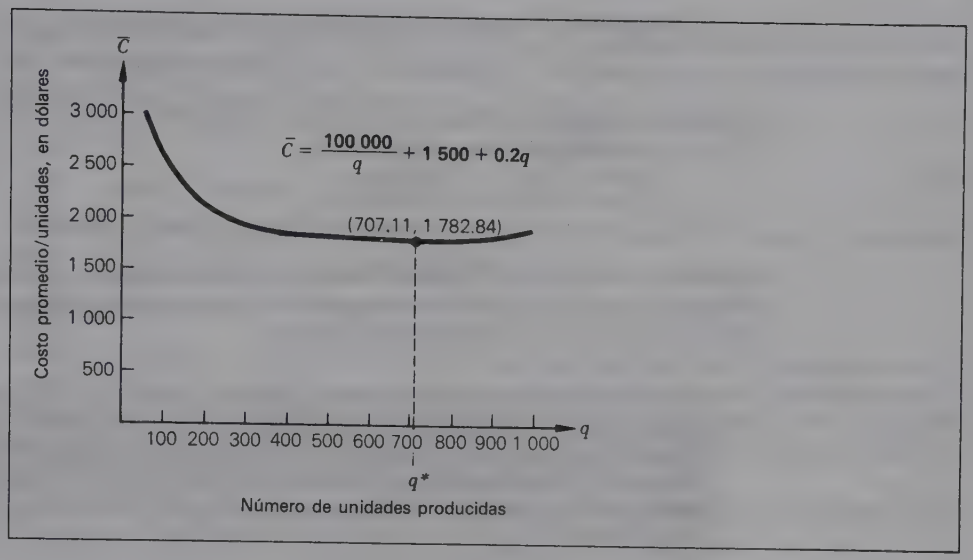


FIGURA 14.28 Función del costo promedio.

Aplicaciones a las utilidades

Esta sección contiene dos ejemplos que se refieren a la maximización de utilidades.

EJEMPLO 21

Asignación de la fuerza de ventas En el ejemplo 1 del capítulo 12 se explicó la *ley de rendimientos decrecientes* como un caso de una función no lineal. Una importante compañía que vende cosméticos y productos de belleza y que se especializa en la venta domiciliaria (casa por casa) descubrió que la respuesta de las ventas a la asignación de más representantes se ajusta a la ley de los rendimientos decrecientes. En un distrito regional de ventas, la compañía ha averiguado que *la utilidad anual P, expresada en cientos de dólares, es una función del número de representantes x asignados a ese distrito*. Específicamente, la función que relaciona esas dos variables es la siguiente:

$$P = f(x) = -12.5x^2 + 1\,375x - 1\,500$$

a) ¿Qué número de representantes producirá la utilidad máxima en el distrito?
b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

SOLUCIÓN

a) La derivada de la función de utilidad es

$$f'(x) = -25x + 1\,375$$

Si f' se hace igual a 0,

$$-25x = -1\,375$$

o bien, ocurre un valor crítico cuando

$$x = 55$$

Al comprobar la naturaleza del punto crítico, se obtiene

$$f''(x) = -25 \quad \text{y} \quad f''(55) = -25 < 0$$

Así pues, un máximo relativo ocurre para f cuando $x = 55$.

b) La utilidad máxima esperada es

$$\begin{aligned} f(55) &= -12.5(55)^2 + 1\,375(55) - 1\,500 \\ &= -37\,812.5 + 75\,625 - 1\,500 = 36\,312.5 \end{aligned}$$

Podemos concluir que la utilidad anual será maximizada en un valor de \$36 312.5 (cientos), es decir \$3 631 250 si se asignan 55 representantes al distrito. La figura 14.29 ofrece una gráfica de la función de utilidad.

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Qué representan en la figura 14.29 las intersecciones con el eje *x*? Interprete el significado de la intersección con el eje *y*. Explique la ley de rendimientos decrecientes en su aplicación a la forma de esta función de utilidad.

EJEMPLO 22

Energía solar Un fabricante ha ideado un nuevo diseño para los paneles solares de colección. Según los estudios de mercadoctenia que se han realizado, la demanda anual de los paneles dependerá del precio al que se venden. La función de su demanda ha sido estimada así:

$$\boxed{q = 100\,000 - 200p} \qquad \textbf{(14.1)}$$

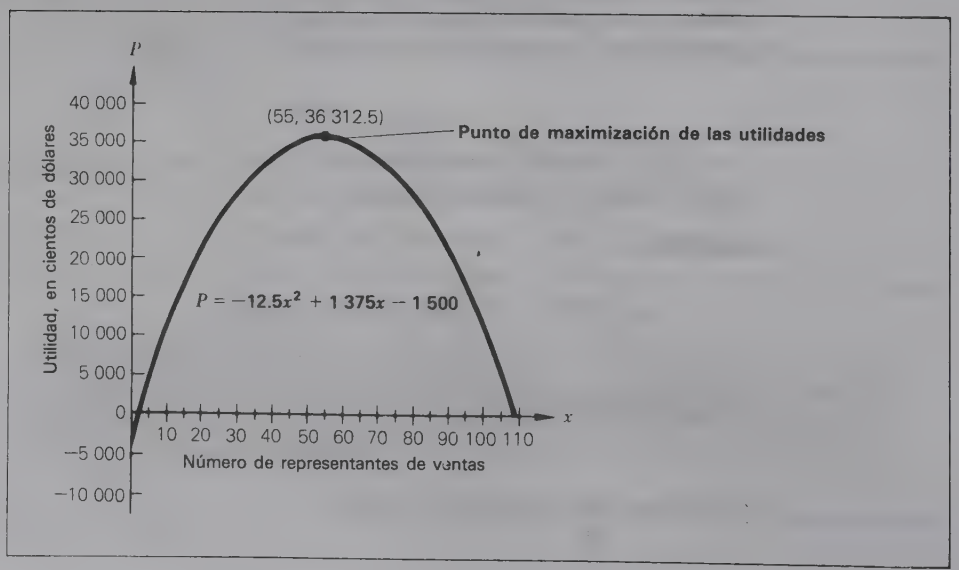


FIGURA 14.29 Función de utilidad.

donde q es el número de unidades demandadas al año y p representa el precio en dólares. Los estudios de ingeniería indican que el costo total de la producción de q paneles está representado muy bien por la función

$$\boxed{C = 150\,000 + 100q + 0.003q^2} \tag{14.2}$$

Formule la función de utilidad $P = f(q)$ que exprese la utilidad anual P en función del número de unidades q que se producen y venden.

SOLUCIÓN

Se nos ha pedido desarrollar una función que exprese la utilidad P en términos de q. A diferencia del ejemplo 21, *hay que construir* la función de utilidad. La ecuación (14.2) es una función del costo total formulado en términos de q; por tanto, ese componente de la función de utilidad ya está disponible. No obstante, se necesita formular una función del ingreso total expresada en términos de q.

Una vez más debe recordarse la estructura básica para calcular el ingreso total:

$$\boxed{R = pq} \tag{14.3}$$

Como queremos que R se exprese en términos de q, necesitamos reemplazar p en la ecuación (14.3) por una expresión equivalente que puede derivarse de la función de demanda. Al despejar p en la ecuación (14.1), se obtiene

$$200p = 100\,000 - q$$

o bien

$$\boxed{p = 500 - 0.005q} \tag{14.4}$$

Puede sustituirse el miembro derecho de esta ecuación en la ecuación (14.3) pata producir la función de ingreso

$$\begin{aligned} R &= (500 - 0.005q)q \\ &= 500q - 0.005q^2 \end{aligned}$$

Ahora que las funciones de ingreso y de costo han sido expresadas en términos de q, es posible definir la función de utilidad como

$$\begin{aligned} P &= f(q) \\ &= R - C \\ &= 500q - 0.005q^2 - (150\,000 + 100q + 0.003q^2) \\ &= 500q - 0.005q^2 - 150\,000 - 100q - 0.003q^2 \end{aligned}$$

o bien

$$P = -0.008q^2 + 400q - 150\,000$$

EJERCICIO

En el ejemplo 22, determine 1) el número de unidades q que deberían producirse para maximizar la utilidad anual; 2) el precio que tendría que cobrarse por cada panel para generar una demanda igual a la respuesta de la parte 1), y 3) la máxima utilidad anual.*

*Respuesta: 1) q = 25 000 unidades, 2) p = \$375, 3) \$4 850 000.

EJEMPLO 23

Dominio retringido En el último ejemplo suponga que la capacidad de producción anual del fabricante es de 20 000 unidades. Resuelva de nuevo el ejemplo 22 con esta restricción adicional.

SOLUCIÓN

Con la restricción adicional, el dominio de la función se define como $0 \leq q \leq 20\,000$. De acuerdo con la sección 14.3, recuérdese que deben compararse los valores de $f(q)$ en los puntos finales del dominio con los de $f(q^*)$ para cualquier valor q^* donde $0 \leq q^* \leq 20\,000$.

El único punto crítico en la función de utilidades ocurre en $q = 25\,000$, que se encuentra fuera del dominio. Por ello, la utilidad será maximizada en uno de los puntos finales. Al evaluar $f(q)$ en ellos se obtiene

$$f(0) = -150\,000$$

y

$$\begin{aligned} f(20\,000) &= -0.008(20\,000)^2 + 400(20\,000) - 150\,000 \\ &= -3\,200\,000 + 8\,000\,000 - 150\,000 = 4\,650\,000 \end{aligned}$$

La utilidad se maximiza en un valor de \$4 650 000 cuando $q = 20\,000$ o cuando el fabricante opera a toda su capacidad.

El precio que debería fijarse se calcula sustituyendo $q = 20\,000$ en la ecuación (14.4), o sea

$$\begin{aligned} p &= 500 - 0.005(20\,000) \\ &= 500 - 100 = \$400 \end{aligned}$$

La figura 14.30 contiene una gráfica de la función de utilidad.

Aproximación marginal a la maximización de utilidades

Otro método para calcular el punto de maximización de utilidades es el ***análisis marginal***. Este método, que goza de gran aceptación entre los economistas, examina los *efectos incrementales* en la rentabilidad. Si una firma está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende *una* unidad más.

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades, es preciso que se cumplan las siguientes condiciones:

CONDICIONES PARA USAR LA APROXIMACIÓN MARGINAL

I Deberá ser posible identificar por separado las funciones de ingreso total y de costo total.

II Las funciones de ingreso y costo habrán de formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.

Ingreso marginal Uno de los dos conceptos más importantes del análisis marginal es el del ingreso marginal. *El **ingreso marginal** es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio.* Si cada unidad de un

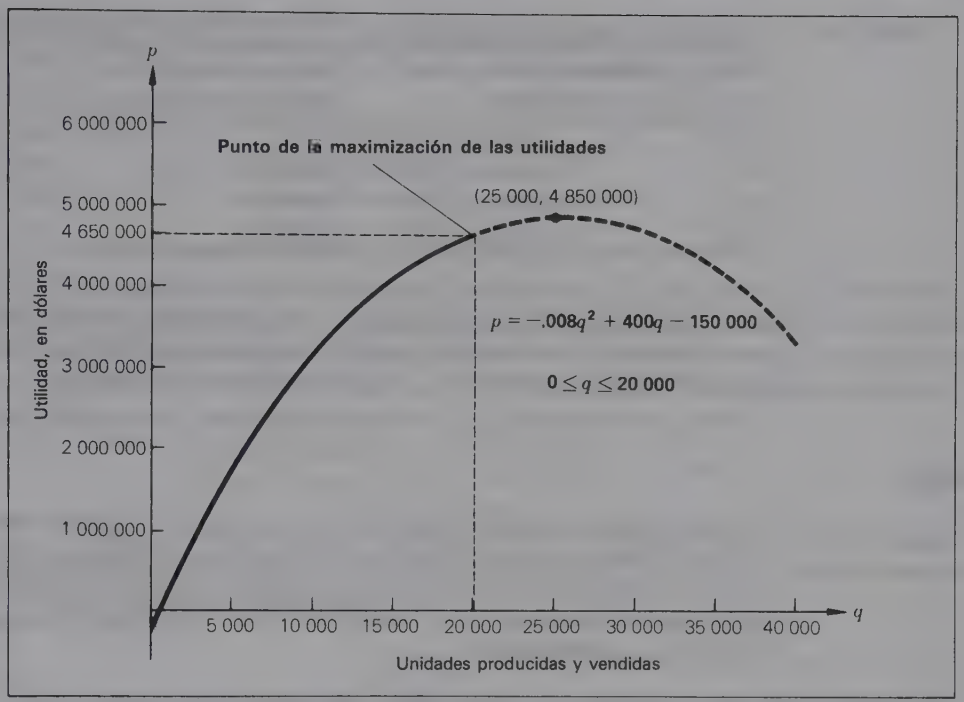


FIGURA 14.30 Dominio restringido de la función de utilidad.

producto se vende al mismo precio, el ingreso marginal será siempre igual al precio. Por ejemplo, la función lineal de ingreso

$$R = 10q$$

representa una situación donde cada unidad se vende a \$10. El ingreso marginal logrado con la venta de una unidad más es de \$10 en cualquier nivel de producción q.

En el ejemplo 22 una función de demanda para los paneles solamente se expresó así:

$$q = 100\,000 - 200p$$

A partir de esta función de demanda se formuló la función no lineal de ingreso total

$$\boxed{R = f_1(q) = 500q - 0.005q^2} \qquad \textbf{(14.5)}$$

El ingreso marginal en este ejemplo no es constante. Esto se mostró al calcular el ingreso total para distintos niveles de producción. La tabla 14.1 contiene estos cálculos para algunos valores de q. La tercera columna representa el ingreso marginal asociado al paso de un nivel de producción a otro. Nótese que, si bien las diferencias son ligeras, los valores del ingreso marginal están cambiando en cada nivel de producción.

Para una función del ingreso total $R(q)$, la derivada $R'(q)$ representa la tasa instantánea de cambio en el ingreso total con un cambio del número de unida-

TABLA 14.1 CÁLCULO DEL INGRESO MARGINAL

Nivel de producción q	Ingreso total $f_1(q)$	Ingreso marginal $\Delta R = f_1(q) - f_1(q-1)$
100	\$49 950.00	
101	\$50 448.995	\$498.995
102	\$50 947.98	\$498.985
103	\$51 446.955	\$498.975

des vendidas. R' también representa una expresión general de la pendiente de la gráfica de la función del ingreso total. En el análisis marginal, la derivada se emplea para representar el ingreso marginal, es decir,

$$\boxed{MR = R'(q)} \tag{14.6}$$

La derivada, según se explicó en el capítulo 13, ofrece una aproximación a los cambios reales que se dan en el valor de una función. Por consiguiente, R' puede emplearse para aproximar el ingreso marginal obtenido con la venta de la siguiente unidad. Si se calcula R' para la función del ingreso en la ecuación (14.5), se obtiene

$$R'(q) = 500 - 0.010q$$

Para aproximar el ingreso marginal logrado con la venta de la centésima primera unidad, se evalúa R' cuando $q = 100$, o sea

$$\begin{aligned} R'(100) &= 500 - 0.010(100) \\ &= 500 - 1 = 499 \end{aligned}$$

Y ésta es una aproximación muy cercana al valor real (\$498.995) del ingreso marginal que aparece en la tabla 14.1

Costo marginal El otro concepto central del análisis marginal lo constituye el costo marginal. *El **costo marginal** es el costo adicional en que se incurre al producir y vender una unidad más de un producto o servicio.* Las funciones lineales del costo suponen que el costo variable por unidad sea constante; en ellas el costo marginal es el mismo en cualquier nivel de producción. Un ejemplo de ello es la función de costo

$$C = 150\,000 + 3.5q$$

donde el costo variable por unidad es \$3.50.

Una función no lineal de costo caracteriza por costos marginales variables. Esto se ejemplifica en la función de costo

$$\boxed{C = f_2(q) = 150\,000 + 100q + 0.003q^2} \tag{14.7}$$

que se utilizó en el ejemplo 22. Puede mostrarse que los costos marginales realmente flctúan en distintos niveles de producción si se calculan los valores de esos costos para algunos valores de q. Este cálculo se da en la tabla 14.2.

TABLA 14.2 CÁLCULO DEL COSTO MARGINAL

Nivel de producción q	Costo total $f_2(q)$	Costo marginal $\Delta C = f_2(q) - f_2(q-1)$
100	\$160 030.00	
101	\$160 130.603	\$100.603
102	\$160 231.212	\$100.609
103	\$160 331.827	\$100.615

En una función de costo total C, la derivada $C'(q)$ representa la tasa instantánea de cambio del costo total suponiendo que haya un cambio en el número de unidades producidas. $C'(q)$ representa además una expresión general para la pendiente de la gráfica de la función del costo total. En el análisis marginal, la derivada se usa para representar el costo marginal, esto es

$$\boxed{MC = C'(q)} \tag{14.8}$$

Como en el caso de R', C' puede emplearse para aproximar el costo marginal asociado a la producción de la siguiente unidad. La derivada de la función de costo en la ecuación (14.7) es

$$C'(q) = 100 + 0.006q$$

Para aproximar el costo marginal debido a la producción de la centésima primera unidad, se evalúa C' en $q = 100$, o sea

$$\begin{aligned} C'(100) &= 100 + 0.006(100) \\ &= \$100.60 \end{aligned}$$

Si se compara este valor con el verdadero (\$100.603) en la tabla 14.2, se advierte que ambos están muy cercanos entre sí.

Análisis de la utilidad marginal Como se indicó antes, este análisis se ocupa del efecto que se opera en las utilidades si se produce y vende una unidad adicional. Mientras el ingreso adicional conseguido con la venta de la siguiente unidad sea mayor que el costo de producirla y venderla, habrá una utilidad neta con su producción y venta, aumentando también la utilidad total. Pero si es menor que el costo de producir y vender la unidad adicional, habrá una pérdida neta en esa unidad y disminuirá la utilidad total. A continuación se da una regla práctica para saber si debe o no producirse una unidad adicional (suponiendo que la utilidad sea de capital importancia).

REGLA PRÁCTICA:
¿DEBERÍA PRODUCIRSE UNA UNIDAD ADICIONAL?

I Si $MR > MC$, se producirá la siguiente unidad.
II Si $MR < MC$, no se producirá la siguiente unidad.

En muchas situaciones de producción, el ingreso marginal rebasa al costo marginal en niveles más bajos de producción. A medida que aumenta el nivel de producción (cantidad producida), disminuye la cantidad en que el ingreso

marginal excede al costo marginal. Con el tiempo se llega a un nivel en que $MR = MC$. Más allá de este punto $MR < MC$, y la utilidad total empieza a disminuir al incrementarse la producción. Así pues, desde un punto de vista teórico, si puede identificarse el punto donde la última unidad producida y vendida $MR = MC$, la utilidad total será maximizada. Este nivel de producción que maximiza la utilidad puede identificarse por medio de la siguiente condición.

CRITERIO DE MAXIMIZACIÓN DE LAS UTILIDADES
Se producirá hasta alcanzar el nivel de producción en que

$$MR = MC \tag{14.9}$$

Expresado en términos de las derivadas, el criterio anterior recomienda producir hasta el punto donde

$$\boxed{R'(q) = C'(q)} \tag{14.10}$$

Esta ecuación es un resultado natural de la diferenciación de la ecuación de utilidad

$$P(q) = R(q) - C(q)$$

y de hacer la derivada igual a 0:

$$P'(q) = R'(q) - C'(q)$$

y $$P'(q) = 0$$

cuando $$R'(q) - C'(q) = 0$$

o bien $$R'(q) = C'(q)$$

CONDICIÓN SUFICIENTE DE LA MAXIMIZACIÓN DE UTILIDADES
Si se tiene un nivel de producción q^* en que $R'(q) = C'(q)$ (o sea $MR = MC$), la producción de q^* dará por resultados la maximización de utilidades si

$$R''(q^*) < C''(q^*) \tag{14.11}$$

EJEMPLO 24

Resuelva de nuevo el ejemplo 22 por medio de la aproximación marginal.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 22

$$R = 500q - 0.005q^2$$

y $$C = 150\,000 + 100q + 0.003q^2$$

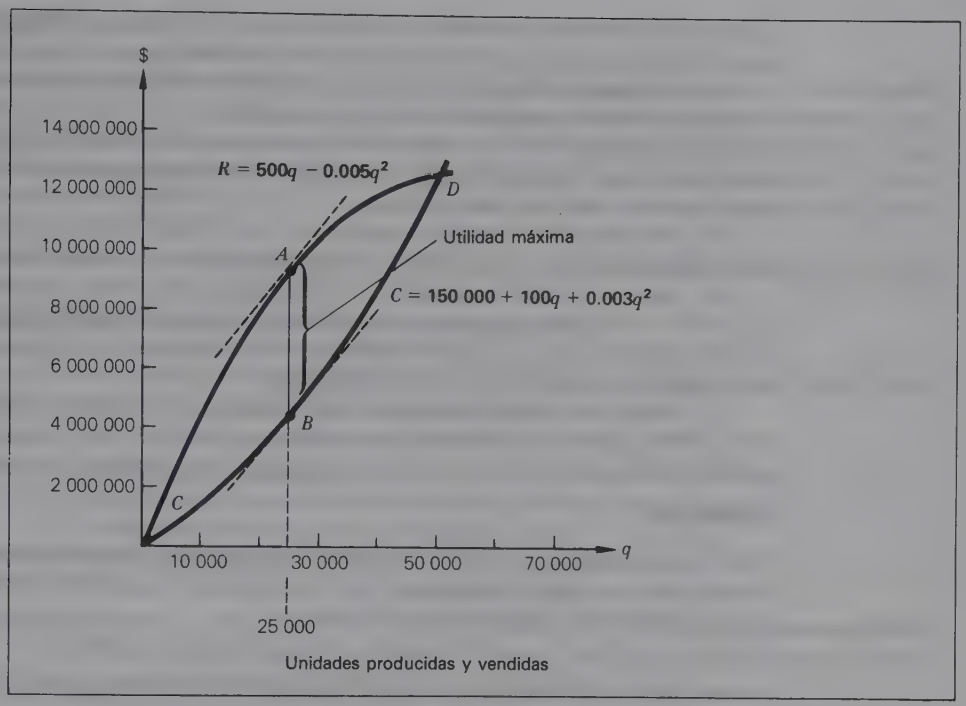


FIGURA 14.31 Análisis marginal: maximización de utilidades.

Las funciones de ingreso y costo son distintas y ambas se expresan en términos del nivel de producción q, las dos condiciones para efectuar el análisis marginal quedan satisfechas. Ya se ha determinado que

$$R'(q) = 500 - 0.01q$$

y

$$C'(q) = 100 + 0.006q$$

Por tanto,

$$R'(q) = C'(q)$$

cuando

$$500 - 0.01q = 100 + 0.006q$$

$$-0.016q = -400$$

o

$$q = 25\,000$$

Puesto que

$$R''(q) = -0.01 \quad \text{y} \quad C''(q) = 0.006$$

$$R''(q^*) < C''(q^*)$$

o

$$-0.01 < 0.006$$

y hay un máximo relativo en la función de utilidad cuando $q = 25\,000$. La figura 14.31 presenta las gráficas de $R(q)$ y $C(q)$.

Hagamos una pausa para examinar detenidamente la figura 14.31. Vale la pena hacer las siguientes observaciones.

1 Los puntos C y D representan los puntos donde se intersecan las funciones de ingreso y de costo. Estas últimas representan puntos de equilibrio.

2 Entre los puntos C y D, la función de ingreso se halla arriba de la de costo, lo cual indica que el ingreso total es mayor que el costo total y que se lograrán utilidades dentro de este intervalo. Para los niveles de producción a la derecha de D, la fun-

ción de costo se halla arriba de la de ingresos, lo cual indica que el costo total es mayor que el ingreso total, resultando de ello una utilidad negativa (pérdida).

3 La distancia *vertical* que separa las gráficas de las dos funciones representa la utilidad o pérdida, según el nivel de la producción.

4 En el intervalo $0 \leq q \leq 25\,000$, la pendiente de la función de ingreso es positiva y mayor que la pendiente de la función de costo. Expresado en términos de MR y MC, $MR > MC$ en este intervalo.

5 Por otra parte, en el intervalo $0 \leq q \leq 25\,000$ la distancia vertical entre las dos curvas aumenta y esto indica que la utilidad está aumentando en el intervalo.

6 En $q = 25\,000$ las pendientes en los puntos A y B son iguales, lo cual indica que $MR = MC$. Asimismo, en $q = 25\,000$, la distancia vertical que separa las dos curvas es mayor que en cualquier otro punto de la región de utilidades; por tanto, éste es el punto de la maximización de utilidades.

7 Para $q > 25\,000$, la pendiente de la función de ingreso es positiva pero es menos positiva para la función de costo. Así pues, $MR < MC$ y disminuye para cada utilidad adicional por unidad, lo cual ocasiona una pérdida más allá del punto D.

EJEMPLO 25

En el ejemplo 23, se nos pidió determinar el número de representantes de ventas x que producirían una utilidad máxima P en una empresa de cosméticos y artículos de belleza. La función de utilidades se formuló así:

$$P = f(x) = -12.5x^2 + 1\,375 - 1\,500$$

Con el método del análisis marginal, detrmine el número de representantes que producirían la utilidad máxima para la empresa.

SOLUCIÓN

No es posible aplicar el método del análisis marginal en este ejemplo porque no pueden identificarse las funciones de ingreso y costo totales que se combinaron para formar la función de utilidad. No se satisfizo la condición 1 del empleo del análisis marginal.

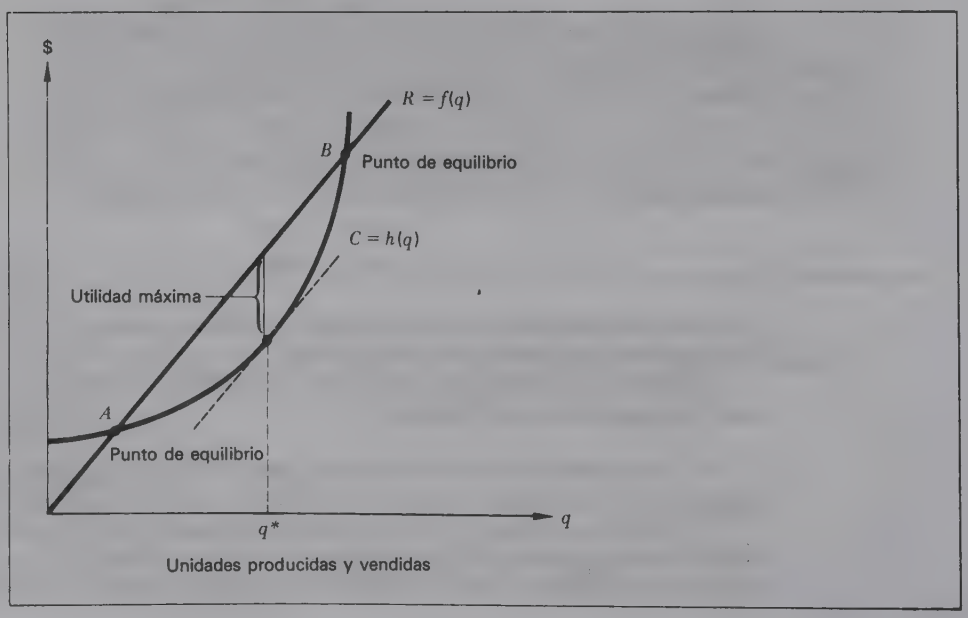


FIGURA 14.32 Funciones lineal de ingreso/ cuadrática de costo.

EJEMPLO 26

La figura 14.32 muestra una gráfica de la función lineal de ingreso y de la función no lineal de costo. A la izquierda de q^*, la pendiente de la función de ingreso excede la de la función de costo, lo cual indica que $MR > MC$. En q^* las pendientes de ambas funciones son iguales. Y la distancia vertical que las separa es mayor que q^* que en cualquiera otro valor de q entre los puntos A y B. Estos dos son los puntos de equilibrio.

Ejercicios de seguimiento de la sección 14.5

1 Una compañía ha descubierto que el ingreso total es una función del precio fijado a su producto. En concreto, la función del ingreso total es

$$R = f(p) = -20p^2 + 1\,960p$$

donde p es el precio en dólares.

a) Determine el precio p que produce el máximo ingreso total.

b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?

2 La función de demanda del producto de una firma es

$$q = 300\,000 - 75p$$

donde q representa el número de unidades demandadas y p indica su precio en dólares.

a) Determine el precio que deberá cobrarse para maximizar el ingreso total.

b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?

c) ¿Cuántas unidades se espera que se demanden?

3 La utilidad anual de una compañía depende del número de unidades producidas. Específicamente, la función que describe la relación existente entre la utilidad P (expresada en dólares) y el número de unidades producidas x es

$$P = -0.12x^2 + 6\,000x - 25\,000\,000$$

a) Determine el número de unidades x que producirán la utilidad máxima.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

4 Administración de playas Una comunidad, situada en una zona vacacional, está tratando de escoger una tarifa de estacionamiento que fijará a la playa del pueblo. En la zona hay otras playas, y todas ellas compiten por atraer a los bañistas. El municipio ha optado por la siguiente función que expresa el número promedio de automóviles por día q en términos de la tarifa de estacionamiento p expresada en centavos.

$$q = 10{,}000 - 20p$$

a) Determine la tarifa que debería cargarse para maximizar los ingresos diarios de la playa.

b) ¿Cuál se espera que sea el máximo ingreso diario de la playa?

c) ¿Cuántos automóviles se esperan en un día promedio?

5 Administración de los impuestos de importación El gobierno estadounidense está estudiando la estructura de los impuestos de importación para los televisores de color traídos de otros países. El gobierno está tratando de determinar el impuesto que impondrá a cada aparato. Sabe bien que en la demanda de los televisores importados repercutirá ese impuesto. Estima que la demanda D, medida en cientos de televisores, guarda relación con el impuesto de importación t, medido en centavos, de acuerdo con la función

$$D = 80\,000 - 20t$$

a) Determine el impuesto de importación que produce los máximos ingresos fiscales en la importación de los televisores.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo?
c) ¿Cuál será la demanda de los televisores importados de color con este impuesto?

6 Un fabricante ha calculado una función de costo que expresa el costo anual de la compra, posesión y mantenimiento del inventario de sus materias primas en términos del tamaño de cada pedido. He aquí la función de costo:

$$C = \frac{625\,000}{q} + 10q + 150\,000$$

donde q es el tamaño de cada pedido (en toneladas) y C el costo anual del inventario.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuáles se esperan que sean los mínimos costos de inventario?

7 En el ejercicio 6 suponga que la cantidad máxima de materias primas que puede aceptarse en un embarque cualquiera es de 225 toneladas.
a) Con esta restricción, determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuál son los mínimos costos anuales del inventario?
c) ¿Qué relación tienen estos resultados con los del ejercicio 6?

8 Un gran distribuidor de balones de baloncesto está prosperando mucho porque en su país ese deporte se ha ido convirtiendo en uno de los favoritos del pueblo. Uno de los principales problemas del distribuidor es matener al ritmo de la demanda de los balones. Los compra periódicamente a un fabricante de artículos deportivos. El costo anual de la compra, posesión y mantenimiento del inventario de los balones se describe por medio de la función

$$C = \frac{20\,000\,000}{q} + 5q + 200\,000$$

donde q es el tamaño de pedido (en docenas de balones) y C indica el costo anual de inventario.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuáles se espera que sean los costos mínimos de inventario?

9 El distribuidor del ejercicio 8 cuenta con instalaciones de almacenamiento para recibir un máximo de 1500 docenas de balones en cada embarque.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice los costos anuales de inventario.
b) ¿Cuáles son los costos mínimos de inventario?
c) ¿Qué relación guardan estos resultados con los obtenidos en el ejercicio 8?

10 El costo total de producir q unidades de cierto producto se describe por medio de la función

$$C = 4\,000\,000 + 300q + 0.01q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares.
a) ¿Cuántas unidades deberán producirse a fin de minimizar el *costo promedio por unidad*?
b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?
c) ¿Cuál es el costo total de producción en este nivel de producción?

11 El costo total de fabricar q unidades de cierto producto se describe con la función

$$C = 1\,000\,000 + 15\,000q + 02.5q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares.

a) Determine cuántas unidades q deberían producirse con objeto de minimizar *el costo promedio por unidad.*

b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?

c) ¿Cuál es el costo total de producción en este nivel de producción?

12 Resuelva nuevamente el ejercicio 11 si la capacidad máxima de producción es de 1000 unidades.

13 **Servicios públicos** Una compañía de televisión por cable ha averiguado que su rentabilidad depende de la tarifa mensual que cobra a sus clientes. Específicamente, la relación que describe la utilidad anual P (en dólares) en función de la tarifa mensual de renta r (en dólares) es la siguiente:

$$P = -50\,000r^2 + 2\,500\,000r - 5\,000\,000$$

a) Determine la tarifa de renta mensual que dé por resultado la utilidad máxima.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

14 En el ejercicio 13 suponga que la comisión local de servicios públicos ha impuesto a la compañía la obligación de no cobrar una tarifa mayor que $20.

a) ¿Cuál tarifa produce la utilidad máxima a la compañía?

b) ¿Cuál es el efecto que la decisión de la comisión tiene en la rentabilidad de la empresa?

15 Una compañía estima que la demanda de su producto fluctúa con su precio. La función de la demanda es

$$q = 180\,000 - 250p$$

donde q es el número de unidades demandadas y p el precio en dólares. El costo total de producir q unidades se estima con la función

$$C = 350\,000 + 300q + 0.001q^2$$

a) Determine cuántas unidades q deberían producirse con objeto de maximizar la utilidad anual.

b) ¿Qué precio debería fijarse?

c) ¿Cuál se espera que sea la utilidad anual?

16 Resuelva el ejercicio anterior, usando la aproximación marginal para maximizar las utilidades.

17 Si en el ejercicio 15 la capacidad anual es de 40 000 unidades, ¿cuántas unidades darán por resultado la utilidad máxima?

18 Una manera equivalente de resolver el ejemplo 18 consiste en expresar el ingreso total en función de q, el número de pasajeros por día. Formule la función $R = g(q)$ y determine el número de pasajeros q que produzca el máximo ingreso total. Verifique que el valor máximo de R y el precio que debería fijarse sean los mismos que los que se obtuvieron en el ejemplo 18.

19 Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 50\,000 + 20q + 0.0001q^2$$
$$R(q) = 60q - 0.004q^2$$

a) Por medio de la aproximación marginal determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

20 Una empresa vende cada unidad de un producto en $75. El costo total de producir x (mil) unidades se describe mediante la función

$$C(x) = 1\,200 - 20x^2 + x^3$$

donde $C(x)$ se mide en miles de dólares.

a) Utilice la aproximación marginal para determinar el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es el ingreso total en este nivel de producción? ¿El costo total? ¿Las utilidades totales?

21 La función de utilidad de una firma es

$$P(q) = -10q^2 + 36\,000q - 45\,000$$

a) Con la aproximación marginal, determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

22 Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 1\,000{,}000 + 300q + 0.005q^2$$
$$R(q) = 2\,000q - 0.004q^2$$

a) Mediante la aproximación marginal determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

23 Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 25\,000 + 40q + 0.005q^2$$
$$R(q) = 100q - 0.01q^2$$

a) Con la aproximación marginal determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

24 En la figura 14.33 se describe una función de costo total $C(q)$ y una de ingreso total $R(q)$. Explique la importancia económica de los cuatro niveles de producción q_1, q_2, q_3 y q_4.

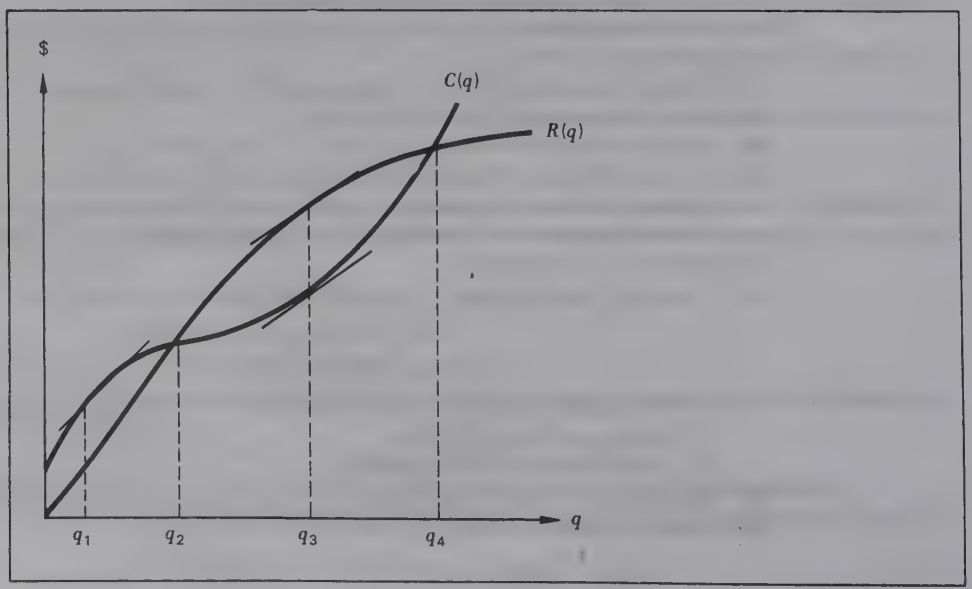


FIGURA 14.33

14.6 OTRAS APLICACIONES

Los siguientes ejemplos constituyen aplicaciones adicionales de los procedimientos de optimización

EJEMPLO 27

Bienes raíces A un gran conglomerado multinacional le interesa comprar terrenos de primera calidad y provistos de paseos de entablado en uno de los principales lugares de veraneo en el océano. El conglomerado quiere adquirir un lote rectangular situado en ese lugar. La única restricción es que tenga una superficie de 100 000 pies cuadrados. La figura 14.34 ofrece un diagrama del terreno: x es el frente del paseo de entablado y y indica la profundidad del lote (medidos ambos en pies).

El dueño de la propiedad ha fijado a los lotes un precio de $5000 por pie de frente a lo largo del paseo de entablado y de $2000 por pie de profundidad a partir del paseo. El conglomerado desea determinar las dimensiones del lote que minimicen el costo total de compra.

Consulte la figura 14.34. El costo total de compra de un lote que tenga las dimensiones de x pies por y pies es

$$C = 5\,000x + 2\,000y \tag{14.12}$$

donde C es el costo en dólares.

El problema radica en determinar los valores de x y y que minimicen C. Sin embargo, C se expresa en función de dos variables, y todavía no podemos manejar las funciones que consten de dos variables independientes.

El conglomerado ha estipulado que la superficie del lote debe ser de 100 000 pies cuadrados, de manera que la relación existente entre x y y es

$$xy = 100\,000 \tag{14.13}$$

Conocida esta relación, puede despejarse una de las variables en términos de la otra. Por ejemplo,

$$y = \frac{100\,000}{x} \tag{14.14}$$

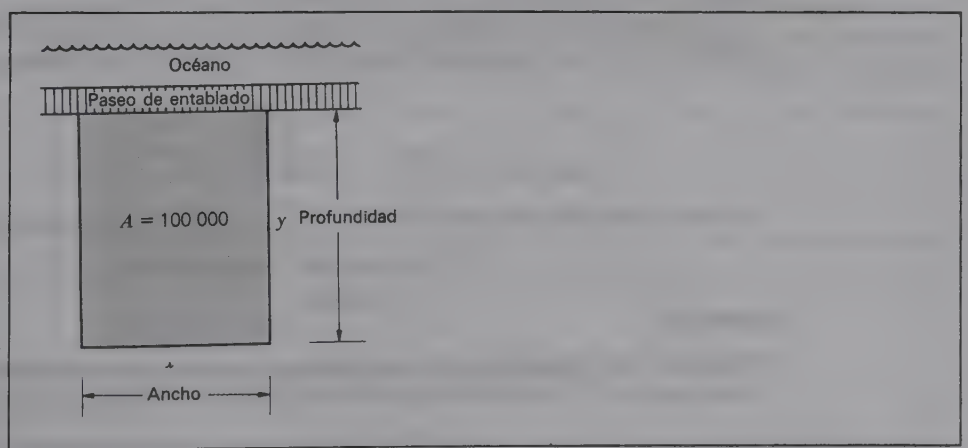


FIGURA 14.34

Puede sustituirse el miembro derecho de esta ecuación en la función de costo siempre que aparezca la variable y, o sea

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= 5\,000x + 2\,000\frac{100\,000}{x} \\ &= 5\,000x + \frac{200\,000\,000}{x} \end{aligned} \tag{14.15}$$

La ecuación (14.15) es una reformulación de la ecuación (14.12), sólo que en términos de una variable independiente. Ahora podemos buscar el valor de x que minimice el costo de compra C.

La primera derivada es

$$C'(x) = 5\,000 - 200\,000\,000x^{-2}$$

Si C' se hace igual a 0,

$$\begin{aligned} 5{,}000 &= \frac{200\,000\,000}{x^2} \\ x^2 &= \frac{200\,000\,000}{5\,000} \\ &= 40\,000 \end{aligned}$$

o bien los valores críticos ocurren en

$$x = \pm 200$$

El punto crítico en $x = -200$ carece de sentido. Para probar $x = 200$

$$\begin{aligned} C''(x) &= 400\,000\,000x^{-3} \\ &= \frac{400\,000\,000}{x^3} \\ C''(200) &= \frac{400\,000\,000}{(200)^3} \\ &= \frac{400\,000\,000}{8\,000\,000} = 50 > 0 \end{aligned}$$

Así pues, un mínimo relativo ocurre para C en $x = 200$.

Los costos totales se minimizarán cuando el ancho del lote sea de 200 pies. La profundidad del mismo se obtendrá al sustituir $x = 200$ en la ecuación (14.14), esto es,

$$\begin{aligned} y &= \frac{100\,000}{200} \\ &= 500 \end{aligned}$$

Si el lote es de 200 pies por 500 pies, el costo total será minimizado en un valor de

$$\begin{aligned} C &= \$5\,000(200) + \$2\,000(500) \\ &= \$2\,000\,000 \end{aligned}$$

EJEMPLO 28

Respuesta ante situaciones de emergencias: modelo de localización En el ejemplo 15 del capítulo 12, se explicó un problema en que tres ciudades de veraneo aceptaron

construir y sostener un servicio de respuesta en casos de emergencia donde residirían los paramédicos y se conservarían los camiones de rescate. La cuestión clave que se discutió fue la ubicación del servicio. El criterio seleccionado fue escoger la ubicación de manera que minimizara S, o sea la suma de los productos de las poblaciones veraniegas de cada pueblo y el cuadrado de la distancia entre el pueblo y el servicio. La figura 14.35 muestra las localizaciones relativas de las tres ciudades.

Se determinó que la función de criterio que debía ser minimizada era

$$S = f(x) = 450x^2 - 19{,}600x + 241{,}600$$

donde x es la ubicación del servicio en relación con el punto cero de la figura 14.35. (Quizá el lector quiera volver a leer el ejemplo 15 de la página 540.) Si se conoce la función de criterio, la primera derivada será

$$f'(x) = 900x - 19{,}600$$

Si hacemos f' igual a 0,

$$900x = 19{,}600$$

y un valor crítico ocurre en

$$x = 21.77$$

Al comprobar la naturaleza del punto crítico se obtiene

$$f''(x) = 900$$
$$f''(21.77) = 900 > 0$$

Así pues, un mínimo relativo se presenta para f cuando $x = 21.77$. El criterio S se minimiza en $x = 21.77$, y el servicio deberá localizarse como se indica en la figura 14.36.

EJEMPLO 29

Sustitución de equipo Una decisión que afrontan muchas organizaciones es determinar el momento óptimo para reemplazar equipo muy importante. Los equipos principales se caracterizan a menudo por dos componentes de costos: *costo de capital* y *costo de operación*. El ***costo de capital*** es el costo de compra menos su valor de salvamento. Si una máquina cuesta $ 10 000 y luego se vende en $2000, el costo de capital es de $8000. El ***costo de operación*** comprende los gastos de poseer y mantener un equipo. La gasolina, el aceite, los seguros y la reparación son costos asociados a la posesión y operación de un vehículo y pueden considerarse como costos de operación.

Algunas organizaciones se concentran en el *costo promedio de capital* y en el *costo promedio de operación* cuando determinan el momento de sustituir un equipo. Esos costos

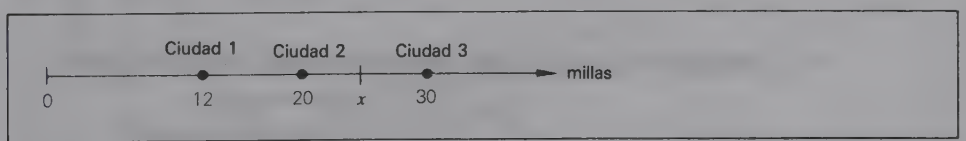


FIGURA 14.35

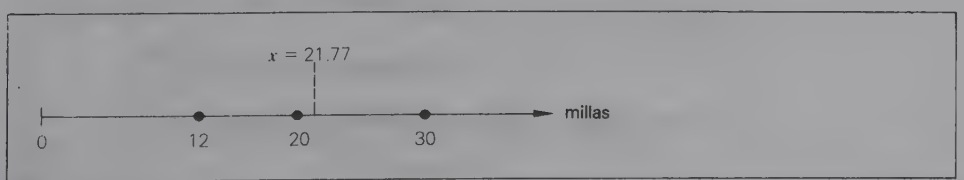


FIGURA 14.36

tienden a compensarse mutuamente. Esto es, cuando uno aumenta el otro disminuye. El costo promedio de capital de un equipo tiende a disminuir con el tiempo. En el caso de un automóvil nuevo cuyo valor decrece de \$12 000 a \$9000 en el primer año, el costo promedio de capital por año es de \$3000. Si el valor disminuye en \$2000 al cabo de 5 años, el costo promedio de capital será

$$\frac{\$12\,000 - \$2\,000}{5} = \frac{\$10\,000}{5} = \$2\,000 \text{ por año}$$

El costo promedio de operación tiende a incrementarse con el tiempo, a medida que el equipo pierde eficiencia y se requiere más mantenimiento. Por ejemplo, el costo promedio anual de operación de un automóvil tiende a elevarse a medida que el vehículo envejece.

Una compañía de taxis de una gran ciudad quiere determinar cuánto tiempo debería conservar sus vehículos. Cada taxi viene totalmente equipado a un precio de \$18 000. La compañía estima que el costo promedio de capital y el costo promedio de operación son una función de x, o sea el número de millas que recorre cada unidad. El valor de recuperación (salvamento) del automóvil, en dólares, se expresa mediante la función

$$S(x) = 16\,000 - 0.1x$$

Ello significa que el automóvil disminuye su valor en \$2000 tan pronto empieza a ser conducido y que luego su valor decae a una tasa de \$0.10 por milla.

El costo promedio de operación, expresado en dólares por milla, se estima por medio de la función

$$O(x) = 0.0000003x + 0.15$$

Determine el número de millas que el carro debería recorrer antes de ser reemplazado, si el objetivo es minimizar la *suma* de los costos promedio de capital y de operación.

SOLUCIÓN

El costo promedio de capital por milla es igual al costo de compra menos el valor de recuperación, todo ello dividido entre el número de millas recorridas, esto es,

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{18\,000 - (16\,000 - 0.10x)}{x} \\ &= \frac{2\,000 + 0.10x}{x} \\ &= \frac{2\,000}{x} + 0.10 \end{aligned}$$

La suma de los costos promedio de capital y de operación es

$$\begin{aligned} f(x) &= O(x) + C(x) \\ &= 0.0000003x + 0.15 + \frac{2\,000}{x} + 0.10 \\ &= 0.0000003x + 0.25 + \frac{2\,000}{x} \\ f'(x) &= 0.0000003 - 2\,000x^{-2} \end{aligned}$$

Si hacemos f' igual a 0,

$$0.0000003 = \frac{2\,000}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{2.000}{0.0000003}$$

$$= 6\,666\,666\,666.67$$

o un valor crítico ocurre cuando

$$x = 81\,649.6$$

Al comprobar dicho valor, se obtiene

$$f''(x) = 4\,000x^{-3}$$

$$= \frac{4\,000}{x^3}$$

$$f''(81\,649.6) = \frac{4\,000}{(81\,649.6)^3} > 0$$

Por tanto, un mínimo relativo ocurre para f cuando $x = 81\,649.6$,

$$f(81\,649.6) = 0.0000003(81\,649.6) + 0.25 + \frac{2\,000}{81\,649.6}$$

$$= 0.02450 + 0.25 + 0.02450 = 0.299$$

Los costos promedio de capital y de operación se minimizan a un valor de \$0.299 por milla cuando un taxi recorre 81 649.6 millas. Los costos totales de capital y de operación serán iguales a (costo/milla) · (número de millas), o sea

$$(\$0.299)(81\,649.6) = \$24\,413.23$$

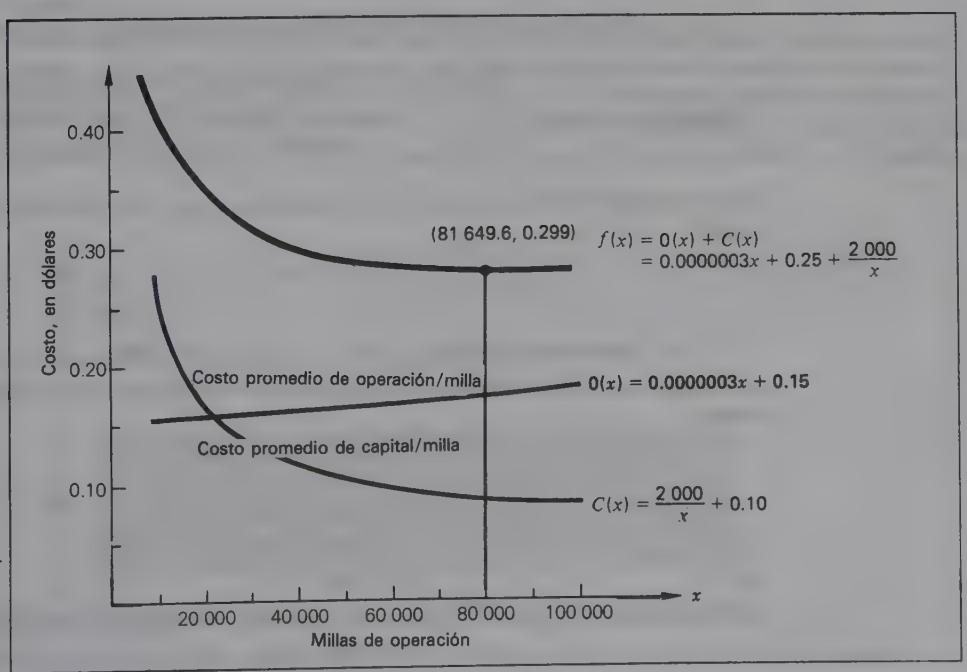


FIGURA 14.37

La figura 14.37 muestra las funciones de los dos costos componentes y la función del costo total. Adviértase que el costo promedio de operación por milla $O(x)$ aumenta al elevarse los valores de x y que el costo promedio de capital por milla $C(x)$ disminuye con los valores crecientes de x.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Exhibe un comportamiento asintótico $f(x)$? Y si lo hace, ¿de qué tipo es?

EJEMPLO 30

Planeación de la compensación El fabricante de un producto perecedero ofrece un incentivo salarial a los conductores de sus camiones de carga. Una entrega normal tarda un promedio de 20 horas. A los conductores se les paga una tarifa de \$10 por hora hasta un *máximo* de 20 horas. Si el viaje tarda más de 20 horas, los conductores reciben una remuneración de apenas 20 horas. Se les da un incentivo por hacer el viaje en menos (pero no mucho menos) de 20 horas. Por cada hora de ahorro, el sueldo por hora aumenta en \$1.

a) Determine la función $w = f(x)$ cuando w es igual al sueldo por hora en dólares y x indica el número de horas requeridas para realizar el viaje.
b) ¿Qué tiempo de viaje x maximizará el sueldo del conductor por viaje?
c) ¿Cuál es el sueldo por hora relacionado con este tiempo de viaje?
d) ¿Cuál es el sueldo máximo?
e) ¿Qué relación guarda este salario con el recibido por un viaje de 20 horas?

SOLUCIÓN

a) La función del sueldo por hora debe expresarse en dos partes.

$$\text{Sueldo por hora} = \begin{cases} \$10 + \$1 \times (\text{el número de horas de viaje es menor que 20}) \\ \qquad\qquad (\text{cuando el tiempo del viaje es menor que 20 horas}) \\ \$10 \qquad\quad (\text{cuando el tiempo del viaje es 20 horas o más}) \end{cases}$$

Si se conocen las definiciones de las variables de x y w, esta función puede reformularse así:

$$w = f(x) = \begin{cases} 10 + 1(20 - x) & 0 \le x < 20 \quad \textbf{(14.16}a\textbf{)} \\ 10 & x \ge 20 \quad \textbf{(14.16}b\textbf{)} \end{cases}$$

b) El sueldo de un conductor S por viaje será de \$10/hora × 20 horas = 200, si el tiempo del viaje es mayor o igual a 20 horas. En caso de que sea menor que 20 horas,

$$\begin{aligned} S &= g(x) \\ &= wx \\ &= [10 + 1(20 - x)]x \\ &= (30 - x)x \\ &= 30x - x^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(14.17)}$$

A fin de examinar g para un máximo relativo, se calcula la derivada

$$g'(x) = 30 - 2x$$

Y haciendo g' igual a 0,

$$30 - 2x = 0$$
$$30 = 2x$$

y se presenta un valor crítico cuando

$$15 = x$$

Para verificar el comportamiento de $g(x)$ cuando $x = 15$,

$$g''(x) = -2$$

y

$$g''(15) = -2 < 0$$

En consecuencia, ocurre un máximo relativo en g cuando $x = 15$ o cuando un viaje tarda 15 horas.

c) El sueldo por hora asociado a un viaje de 15 horas de duración es

$$w = 10 + 1(20 - 15)$$
$$= 10 + 5 = \$15$$

d) El sueldo del conductor relacionado con un viaje de 15 horas de duración se calcula evaluado $g(15)$. Si se sustituye $x = 15$ en la ecuación (14.17),

$$S = 30(15) - 15^2$$
$$= 450 - 225 = \$225$$

También podríamos haber llegado a esta respuesta multiplicando el sueldo por hora de \$15 por el tiempo del viaje de 15 horas.

e) El sueldo de \$225 por un viaje de 15 horas es \$25 más que el que se paga por un tiempo de viaje de 20 horas o más.

EJEMPLO 31

Construcción de oleoductos Una compañía petrolera está planeando construir un oleoducto para llevar petróleo desde un gran pozo hasta el punto donde será cargado en tanques y transportado a las refinerías. La figura 14.38 muestra las localizaciones relativas del sitio de perforación A y el punto de destino C. Los puntos A y C son las riberas opuestas de un río de 25 millas de ancho. El punto C se halla también a 100 millas

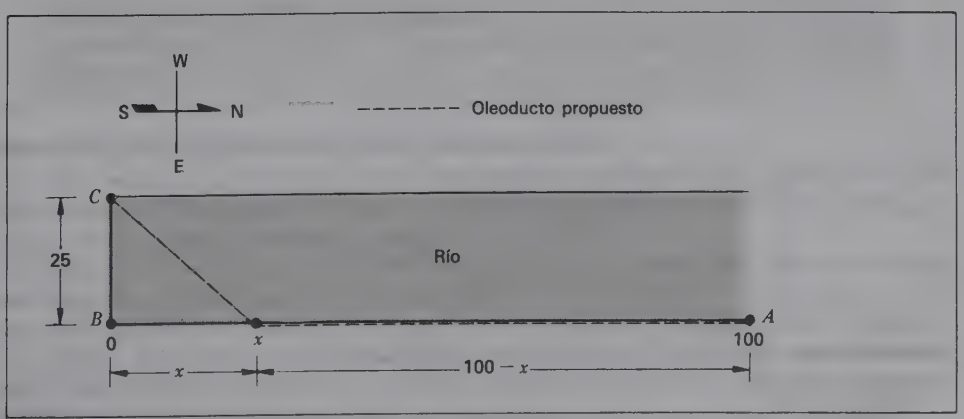


FIGURA 14.38

al sur de A a lo largo del río. La compañía petrolera propone construir un oleoducto que pase por el sur de la ribera del río y que en algún punto x lo atraviese hasta el punto C. Los costos de construcción son \$100 000 por milla a lo largo de la ribera del río y \$200 000 por milla para la sección que cruza el río. Determine el punto de cruce x que reduzca al mínimo los costos de construcción del oleoducto.

SOLUCIÓN

Los costos de construcción se calcularon conforme a la fórmula

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Costo} = {} & \$100\,000/\text{milla (millas del oleoducto a lo largo del río)} \\ & + \$200\,000/\text{milla (millas del oleducto que cruza el río)}\end{aligned}} \qquad \textbf{(14.18)}$$

La distancia entre el punto A y el punto de cruce x es $(100 - x)$ millas.

TEOREMA DE PITÁGORAS
En un triángulo recto con base a, altura b e hipotenusa c,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

o bien

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Véase la figura 14.39.

Empleando el teorema de Pitágoras, la longitud de la sección del oleoducto situada debajo del agua y comprendida entre C y x es

$$\sqrt{x^2 + (25)^2}$$

Al aplicar la ecuación (14.18), el costo total de construcción del oleoducto, C (expresado en miles de dólares), es

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= 100(100 - x) + 200\sqrt{x^2 + (25)^2} \\ &= 10{,}000 - 100x + 200\sqrt{x^2 + 625} \\ &= 10{,}000 - 100x + 200(x^2 + 625)^{1/2} \end{aligned} \qquad \textbf{(14.19)}$$

Para examinar la f correspondiente a cualesquier mínimos relativos se calcula la derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= -100 + 200(\tfrac{1}{2})(x^2 + 625)^{-1/2}(2x) \\ &= -100 + 200x(x^2 + 625)^{-1/2} \\ &= -100 + \frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} \end{aligned}$$

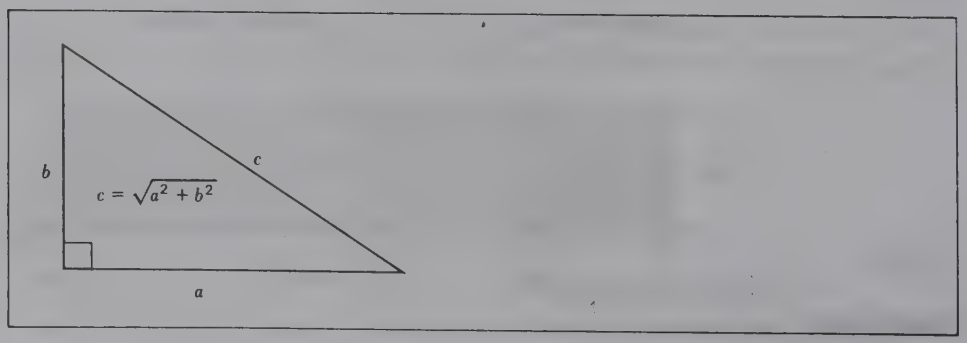


FIGURA 14.39 Teorema de Pitágoras.

Al hacer f' igual a cero,

$$-100 + \frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} = 0$$

$$\frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} = 100$$

$$\frac{200x}{100} = (x^2 + 625)^{1/2}$$

$$2x = \sqrt{x^2 + 625} \qquad \textbf{(14.20)}$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuacion (14.20),

$$4x^2 = x^2 + 625$$
$$3x^2 = 625$$
$$x^2 = 208.33$$

y un valor crítico (relevante) ocurre cuando $x = 14.43$. (Una raíz negativa carece de sentido.)

EJERCICIO
Con la prueba de la segunda derivada verifique que f tenga un mínimo relativo cuando $x = 14.43$.

El ejercicio anterior deberá comprobar que se presenta un mínimo relativo cuando $x = 14.43$, esto es, que el oleoducto deberá cruzar el río después de que haya avanzado 85.57 millas al sur. Los costos totales de la construcción (en miles de dólares) pueden calcularse sustituyendo $x = 14.43$ en la ecuación (14.19), o sea

$$\begin{aligned} C &= 10\,000 - 100(14.43) + 200\sqrt{(14.43)^2 + 625} \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 200\sqrt{833.22} \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 200(28.86) \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 5\,772 \\ &= 14\,329(\$1\,000\text{s}) \\ &= \$14\,329\,000 \end{aligned}$$

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Qué otro procedimiento podría usarse para calcular el costo mínimo total de $14 329 000?

Ejercicios de seguimiento de la sección 14.6

1 Una persona desea cercar un jardín rectangular que tendrá una superficie de 1296 pies cuadrados. Determine la dimensiones que crearán la superficie deseada, pero que requerirán la longitud mínima de cerca.

2 El dueño de un rancho quiere construir un corral rectangular de jineteo que tenga una superficie de 6000 metros cuadrados. Si el corral es como el de la figura 14.40, determine las dimensiones x y y que requerirán la longitud mínima de cerca. (*Sugerencia*: formule una función para la longitud total de la cerca, expresada en términos de x y y. Recordando entonces que $xy = 6000$, reformule la función de longitud en términos de x o de y.)

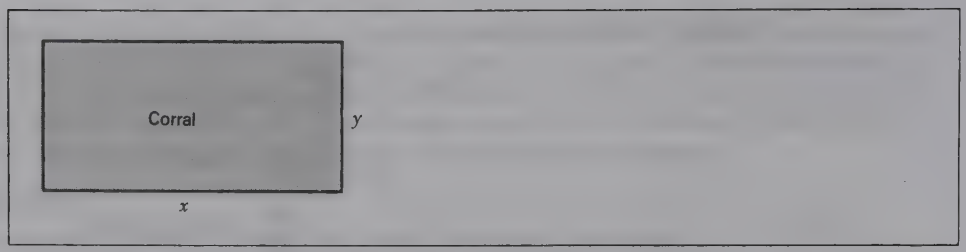


FIGURA 14.40

3 Un pequeño club de una playa ha recibido 400 metros de barrera de flotación para encerrar una superficie de nado. Se pretende crear la máxima superficie rectangular de nado con los 400 metros de barrera de flotación. La figura 14.41 muestra el diseño propuesto. Adviértase que la barrera de flotación se necesita únicamente en tres lados del área de nado. Determine las dimensiones de x y y que produzcan la máxima superficie de nado. ¿Cuál es la superficie máxima? (*Sugerencia*: recuerde que $x + 2y = 400$.)

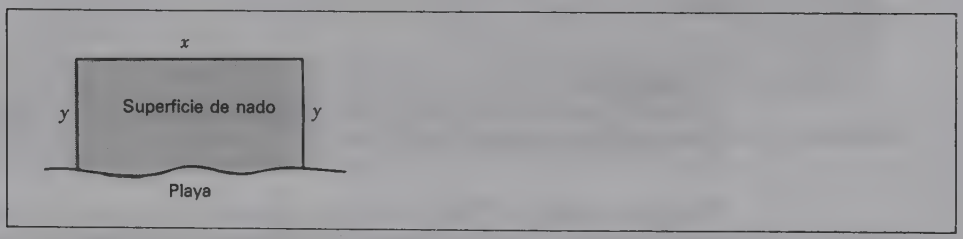


FIGURA 14.41

4 Un distribuidor de automóviles desea crear un área de estacionamiento cerca de un gran puerto de Estados Unidos para almacenar los automóviles nuevos procedentes de Japón. El área deberá tener una superficie total de 1 000 000 de metros cuadrados y sus dimensiones serán las que se indican en la figura 14.42. Por consideraciones de seguridad, la sección de la cerca en la parte frontal del lote será más sólida y alta que la que se use a los lados y en la parte posterior. El costo de la cerca en la sección frontal es de $40 por metro y la que se utilizará en los otros tres lados costará $20 por metro. Determine las dimensiones de x y y que den por resultado un costo mínimo total de la cerca. ¿Cuál es el costo mínimo? (*Sugerencia*: $xy = 1\ 000\ 000$.)

5 La figura 14.43 contiene un patio de recreación que será cercado dentro de una prisión. Además de cercar el área, una sección de la cerca deberá dividir la superficie total a la mitad. Si se cuenta con 4800 pies de cerca, determine las dimensiones de x y y que aumentan al máximo el área incluida. ¿Cuál es la superficie máxima? (*Sugerencia*: $2x + 3y = 4000$.)

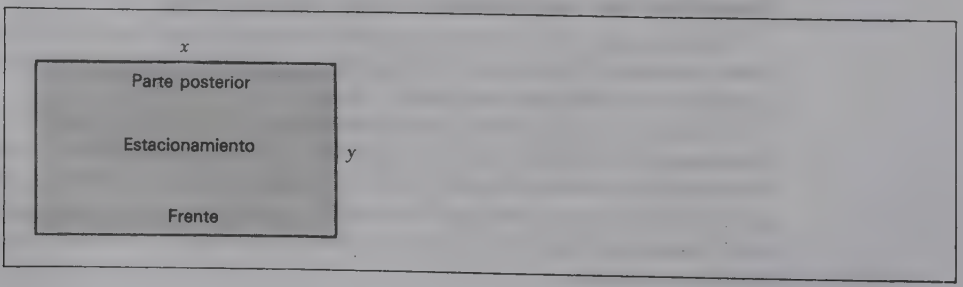


FIGURA 14.42

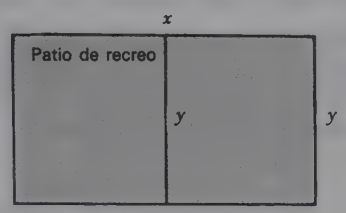


FIGURE 14.43

6 Un fabricante desea ubicar un almacén entre tres ciudades. Las localizaciones relativas de las ciudades se observan en la figura 14.44. El objetivo es situar el almacén de modo que minimice la suma de los cuadrados de las distancias que separan a cada ciudad y al almacén. ¿A qué distancia del punto de referencia deberá ubicarse el almacén?

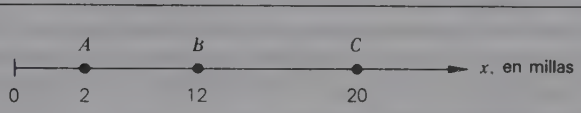


FIGURA 14.44

7 **Organización para el mantenimiento de la salud** La figura 14.45 contiene las localizaciones relativas de tres ciudades. Una organización destinada al mantenimiento de la salud desea construir una clínica satélite para darles servicio. La localización de la clínica x deberá ser tal que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre la clínica y cada ciudad. El criterio que se aplicará puede expresarse así.

Minimice $$S = \sum_{j=1}^{3} (x_j - x)^2$$

donde x_j es la localización de la ciudad j y x es la localización de la clínica. Determine la ubicación de x que minimice S.

***8** En el ejercicio 7, suponga que las ciudades 1, 2, 3 cuentan con 10 000, 5000 y 8000 personas, respectivamente, las cuales son miembros de la organización para el mantenimiento de la salud. Suponga asimismo que esta institución ha establecido su criterio de localización como la minimización de

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\begin{array}{c} \text{miembros de la} \\ \text{organización en} \\ \text{la ciudad} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{cuadrado de la} \\ \text{distancia entre la} \\ \text{ciudad } j \text{ y la} \\ \text{clínica} \end{array} \right)$$

o sea $$S = \sum_{j=1}^{3} n_j (x_j - x)^2$$

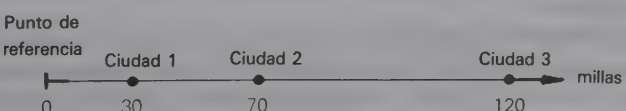


FIGURA 14.45

donde n_j es el número de miembros que habitan en la ciudad j. Determine la localización x que minimice S.

9 Un departamento de policía compra nuevos carros de patrulla en \$22 000. El departamento estima que los costos promedio de capital y de operación son una función de x, el número de millas que recorrerá el carro de patrulla. El valor de recuperación de una unidad (en dólares) se expresa por medio de la función

$$S(x) = 19\,000 - 0.12x$$

El costo promedio de operación, expresado en dólares por milla, se estima mediante la función

$$O(x) = 0.0000006x + 0.18$$

a) Determine cuántas millas deberá recorrer el carro de patrulla antes de su sustitución si el objetivo es minimizar la suma de los costos promedio de capital y de operación por milla.
b) ¿Cuál es el costo mínimo por milla?
c) ¿Cuál se espera que sea el valor de recuperación?

10 Una gran aerolínea compra un tipo particular de avión a un costo de \$40 000 000. La compañía estima que los costos promedio de capital y de operación son una función de x, o sea el número de horas de vuelo. El valor de recuperación de un avión (en dólares) se expresa mediante la función

$$S(x) = 36\,000\,000 - 10\,000x$$

El costo promedio de operación, expresado en dólares por hora de vuelo, se estima por medio de la función

$$O(x) = 500 + 0.40x$$

a Determine cuántas horas deberá volarse un avión antes de la sustitución, si el objetivo es minimizar la suma los costos promedio de capital y de operación por hora.
b ¿Cuál es el costo mínimo por hora?
c ¿Cuál se espera que sea el valor de recuperación?

11 Un club de esquí de una universidad está organizando un viaje a un sitio de esquiar. El precio del viaje es \$100 si 50 o menos personas se inscriben para la excursión. Por cada excursionista después de 50, el precio que se cobra *a todos* disminuye en \$1. Por ejemplo, si se inscriben 51 personas, cada una pagará \$99. Sea x el número de excursionistas después de 50.

a) Determine la función que expresa el precio por persona p en función de x.
b) En la parte (*a*), ¿existe una restricción en el dominio?
c) Formule la función $R = h(x)$, que exprese el ingreso total R en función de x.
d) ¿Qué valor de x produce el valor máximo de R?
e) ¿Cuántas personas se inscribirán en el viaje?
f) ¿Cuál es el valor máximo de R?
g) ¿Qué precio por boleto produce el ingreso máximo?
h) ¿Podría el club generar más ingresos aceptando 50 o un número menor de personas?

12 Plan de incentivos salariales Un fabricante ofrece un incentivo salarial a personas que trabajan en un producto en particular. El tiempo normal para terminar una unidad del mismo es de 15 horas. A los empleados se les paga una tarifa de \$6 por hora hasta un máximo de 15 horas por unidad en que trabajen (si un empleado tarda 20

horas en terminar una unidad, sólo se le paga por las 15 horas). Existe un incentivo para los empleados que terminan una unidad en menos de 15 horas. Por cada hora menos de 15, el sueldo por hora aumenta en \$1.50. Sea x el número de horas que se necesitan para terminar una unidad.

a) Determine la función $w = f(x)$, donde w es el sueldo por hora en dólares.
b) ¿Qué tiempo x maximizará los sueldos totales de un empleado por terminar una unidad?
c) ¿Cuál es el sueldo por hora asociada a este tiempo por unidad x?
d) ¿Cuál es el sueldo máximo por unidad?
e) ¿Qué relación guarda este sueldo con los que se ganan al terminar una unidad en 15 o más horas?

13 Construcción de oleoductos Una gran compañía petrolera está planeando construir un oleoducto para llevar petróleo crudo desde un pozo hasta un punto donde se embarcará en tanques y será transportado a las refinerías. La figura 14.46 muestra las localizaciones relativas del sitio de perforación A y el punto de destino C. Los puntos A y C se hallan en lados opuestos de un río, que tiene 20 millas de ancho. El punto C se encuentra también a 20 millas al sur de A, a lo largo del río.

La compañía petrolera planea construir un oleoducto que vaya al sur a lo largo de la ribera oriental del río y en algún punto, x, cruce el río hacia el punto C. Los costos de construcción son \$50 000 por milla a lo largo de la ribera del río y de \$100 000 por milla en la sección que lo atraviesa. Hay compromisos entre tomar una ruta de A a B a C o una que cruce el río antes de llegar al punto B. La primera ruta sólo tiene una sección de 20 millas a lo largo del río con un costo más alto de construcción por milla, pero la longitud total del oleoducto es mayor. La ruta que cruza antes de alcanzar el punto B es más corta en total, pero tiene una mayor longitud a lo largo del río. Determine el punto de cruce x que reduzca al mínimo los costos de construcción. ¿Cuál es el costo mínimo de construcción?

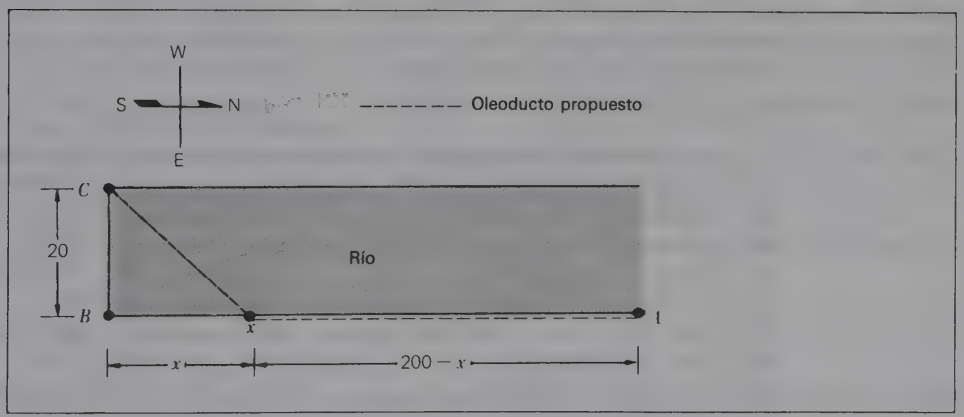


FIGURA 14.46

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

concavidad 620
consideraciones de dominio restringido 641
dirección final 646
funciones cóncavas 624
funciones convexas 624
función creciente 616
función decreciente 617
máximo (mínimo) absoluto 628
máximo (mínimo) relativo 628
prueba de la derivada de orden superior 638
prueba de la primera derivada 630
prueba de la segunda derivada 634
puntos críticos 628
punto de inflexión 620
valores críticos 628

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-24 se relacionan con la sección 14.1. En los siguientes ejercicios, determine los intervalos en que f es *a*) creciente, *b*) decreciente, *c*) ni creciente ni decreciente, *d*) cóncava hacia arriba y *e*) cóncava hacia abajo.

1 $f(x) = 2x^2 - 5x + 8$
2 $f(x) = 20 - 4x + x^2$
3 $f(x) = x^3 - 27x$
4 $f(x) = 2x^5$
5 $f(x) = b$
6 $f(x) = 5x^2 - 20x + 100$
7 $f(x) = 4x^2 - 2x + 6$
8 $f(x) = x^3/3 - x^2 + x - 5$
9 $f(x) = x^3/3 + 2x^2 + 4x$
10 $f(x) = (x - 5)^4$
11 $f(x) = (x + 3)^5$
12 $f(x) = (2x - 8)^3$

En los siguientes ejercicios identifique las localizaciones de los puntos de inflexión si los hay.

13 $f(x) = -x^5$
14 $f(x) = 3x^4/2$
15 $f(x) = 8x^3 - 2x^2 + 150$
16 $f(x) = x^4/12 + x^3 + 4x^2$
17 $f(x) = x^5/20 - x^3/6$
18 $f(x) = (x + 4)^3$
19 $f(x) = (x - 1)^5$
20 $f(x) = x^4/12 + x^3/6 - 3x^2 + 120$
21 $f(x) = x^3/6 - x^2 + 9$
22 $f(x) = x^6$
23 $f(x) = x^4/6 + 5x^3 + 12x^2 - 4$
24 $f(x) = 2x^6 - x^5$
25 $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^4$
26 $f(x) = (2x - 7)^4$

Los ejercicios 27-46 se relacionan con la sección 14.2. En las siguientes funciones determine la localización de todos los puntos críticos y su naturaleza.

27 $f(x) = 2x^2 - 16x + 30$
28 $f(x) = -x^2/2 + 8x + 7$
29 $f(x) = 4x^4$
30 $f(x) = x^4 - 25x^2/2$
31 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 40$
32 $f(x) = -2x^3 + 3x^2/2 + 3x + 1$
33 $f(x) = x^5 - x^4 - x^3/3$
34 $f(x) = (-x + 2)^6$
35 $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 10$
36 $f(x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2 + 80$
37 $f(x) = 2x + 50/x$
38 $f(x) = 96\sqrt{x} - 6x$
39 $f(x) = 3x^3 - x^2/2 + 5x$
40 $f(x) = 5x^3 - x^2 + 12x$
41 $f(x) = (2x - 5)^4$
42 $f(x) = (x + 5)^3$
43 $f(x) = (x + 4)^5$
44 $f(x) = (3x - 9)^4$
45 $f(x) = x^4/4 + x^3 + x^2 + 5$
46 $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 9$

Los ejercicios 47-56 se relacionan con la sección 14.3.

En las siguientes funciones determine la localización y los valores del máximo y mínimo absolutos.

47 $f(x) = 3x^2 - 48x + 30$, donde $0 \le x \le 10$
48 $f(x) = 2x^2 - 5x + 15$, donde $-1 \le x \le 4$
49 $f(x) = 2x^3/3 + 3x^2 + 4x - 1$, donde $-3 \le x \le 5$
50 $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 - 30x$, donde $0 \le x \le 10$

51 $f(x) = 2x^5/5 - 27x^2$, donde $-2 \le x \le 3$
52 $f(x) = -x^6 + x^4 + 2x^3/3$, donde $-2 \le x \le 4$
53 $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5.5x^2 + 6$, donde $-1 \le x \le 1$
54 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, donde $-3 \le x \le 5$
55 $f(x) = -2x^3 + 3x^2/2 + 3x + 1$, donde $-2 \le x \le 4$
56 $f(x) = (-x + 2)^4$, donde $0 \le x \le 3$

Los ejercicios 57-64 se relacionan con la sección 14.4. Dibuje la gráfica de las siguientes funciones.

57 $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 + 12x$
58 $f(x) = (10 - x)^3$
59 $f(x) = (x + 5)^3$
60 $f(x) = 2x^5/5 + x^4/4 - x^3 + 1$
61 $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 9$
62 $f(x) = x^4/4 + x^3 + x^2 + 5$
63 $f(x) = (x + 3)^3$
64 $f(x) = x^4 - 25x^2/2$

Los ejercicios 65-82 se relacionan con las secciones 14.5 y 14.6.

65 Una firma vende cada unidad de un producto en \$400. La función de costo que describe el costo total C en términos del número de unidades producidas y vendidas x es

$$C(x) = 40x + 0.25x^2 + 250$$

a) Formule la función de utilidad $P = f(x)$.
b) ¿Cuántas unidades deberían producirse y venderse a fin de maximizar la utilidad total?
c) ¿Cuál es el ingreso total en este nivel de producción?
d) ¿Cuál es el costo total en este nivel de producción?

66 Vuelva a resolver el ejercicio 65 aplicando la aproximación marginal.

67 Un agente viajero está organizando una excursión en avión a un conocido lugar vacacional. Ha cotizado un precio de \$500 por persona si 100 o más se inscriben en el vuelo. Por cada persona que rebase esa cifra, el precio que se cobra *a todas* disminuirá en \$5. Por ejemplo, si 101 personas se inscriben, cada una pagará \$495. Sea x el número de personas después de 100.

a) Determine la función que exprese el precio por persona p en términos de x, o sea $p = f(x)$.
b) En la parte (*a*) ¿existe una restricción en el dominio?
c) Formule la función $R = h(x)$, que exprese el ingreso total de los boletos R en función de x.
d) ¿Qué valor de x aumentará al máximo el de R?
e) ¿Cuál es el valor máximo de R?
f) ¿Qué precio por boleto produce el máximo R?

68 El costo total de fabricar q unidades de cierto producto se describe con la función

$$C = 25\,000\,000 + 500q + 0.01q^2$$

a) Determine cuántas unidades q deberían producirse a fin de minimizar el *costo promedio por unidad*.
b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?
c) ¿Cuál es el costo total de producción en este nivel de producción?

69 Una ley de la economía establece que el costo promedio por unidad se minimiza cuando el costo marginal es igual al costo promedio. Muestre que esto se cumple en el caso de la función de costo del ejercicio 68.

70 La función cuadrática del costo total para un producto es

$$C = ax^2 + bx + c$$

donde x es el número de unidades producidas y vendidas y C se expresa en dólares. El producto se vende a un precio de p dólares por unidad.

a) Construya la función de utilidad en términos de x.
b) ¿Qué valor de x genera una utilidad máxima?
c) ¿Qué restricción garantiza que un máximo relativo ocurra en este valor de x?
d) ¿Qué restricciones a, b, c y p aseguran que $x > 0$?

71 Un campo petrolero consta actualmente de 10 pozos, cada uno de los cuales produce 400 barriles de petróleo al día. Se estima que con cada nuevo pozo que se perfore, el rendimiento por pozo disminuirá en 10 barriles diarios. Determine el número de pozos que deben perforarse a fin de maximizar el producto total diario del campo petrolero. ¿Cuál es la producción máxima?

72 Va a construirse un pequeño almacén que tendrá una superficie total de 10 000 pies cuadrados. El edificio se dividirá como se aprecia en la figura 14.47. Los costos se estimaron a partir de las dimensiones de las paredes exteriores e interiores. Los costos son \$200 por pie de pared exterior más \$80 por pie de pared interior. *a*) Determine las dimensiones que minimicen los costos de construcción. *b*) ¿Cuáles son los costos mínimos?

73 Una caja rectangular abierta se construirá cortando los ángulos cuadrados de una pieza de 60 × 60 pulgadas de cartón grueso y doblando los extremos como se ve en la figura 14.48. *a*) Determine el valor de x que produzca la caja de volumen máximo. *b*) ¿Cuál es el volumen máximo?

***74** El United Parcel Post exige que los paquetes de correo se ajusten a determinadas dimensiones. En concreto, la longitud y la circunferencia no deben ser mayores que 84 pulgadas. *a*) Calcule las dimensiones (r y l) de un paquete cilíndrico que maximicen el volumen del paquete. (*Sugerencia*: vea la figura 14.49 y recuerde que $V = \pi r^2 l$). *b*) ¿Cuál es la circunferencia del paquete? *c*) ¿Cuál es el volumen máximo?

75 Problema de carteles La figura 14.50 es el diagrama de un cartel que está siendo diseñado para una campaña política. El área impresa deberá contener 1200 pies cuadrados. Un margen de 6 pulgadas deberá aparecer a ambos lados del material mismo y un margen de 4 pulgadas en la parte superior e inferior.

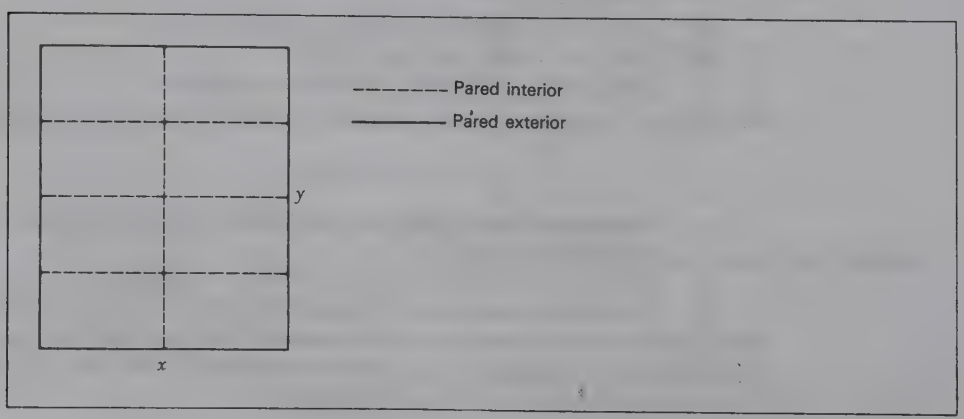


FIGURA 14.47

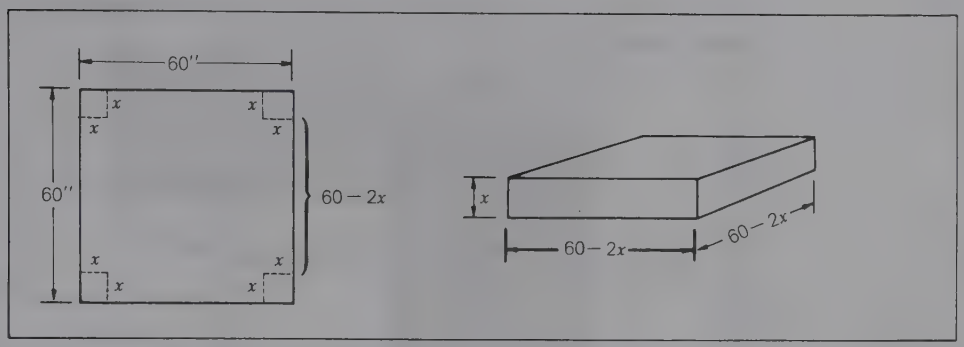


FIGURA 14.48

a) Determine las dimensiones de la superficie impresa que minimicen el *área* del cartel.
b) ¿Cuáles son las dimensiones óptimas del cartel?
c) ¿Cuál es la superficie mínima del cartel?

***76** Una persona quiere comprar una propiedad rectangular a fin de construir un almacén. Éste deberá tener una superficie de 16 000 pies cuadrados. Los reglamentos de zonificación estipulan que deberá haber un mínimo de 2 pies entre el edificio y los límites laterales del lote y por lo menos 30 pies entre el edificio y los límites frontal y posterior del lote. La figura 14.51 es un diagrama del lote propuesto.

a) Determine las dimensiones del almacén que minimicen el área del lote.
b) ¿Cuáles son las dimensiones óptimas del lote?
c) ¿Cuál es la superficie mínima del lote?

77 Determine dos números x y y cuya suma sea 80 y cuyo producto sea lo más grande posible. ¿Cuál es el producto máximo de los dos números?

78 Determine dos números positivos cuyo producto sea 60 y cuya suma sea lo más grande posible. ¿Cuál es la suma mínima?

***79 Biatlón** Una mujer va a participar en un biatlón de carrera y natación. El recorrido tiene una longitud variable y se muestra en la figura 14.52. Cada participante correrá (o caminará) desde el punto de arranque a lo largo del río. Deben cruzarlo a nado; pero el punto de cruce x debe ser elegido por cada participante.

Esta concursante estima que alcanzará un promedio de 5 millas por hora en la parte correspondiente a la carrera y 1 milla por hora en la parte correspondiente al nado. Desea minimizar su tiempo en el evento.

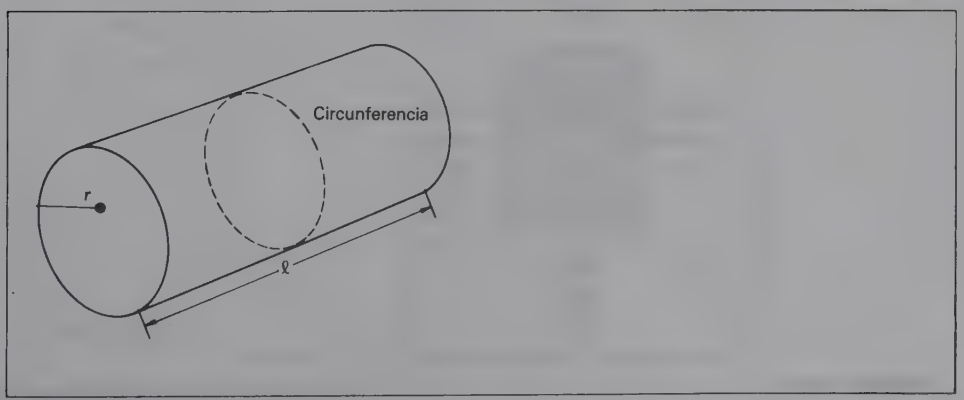


FIGURA 14.49

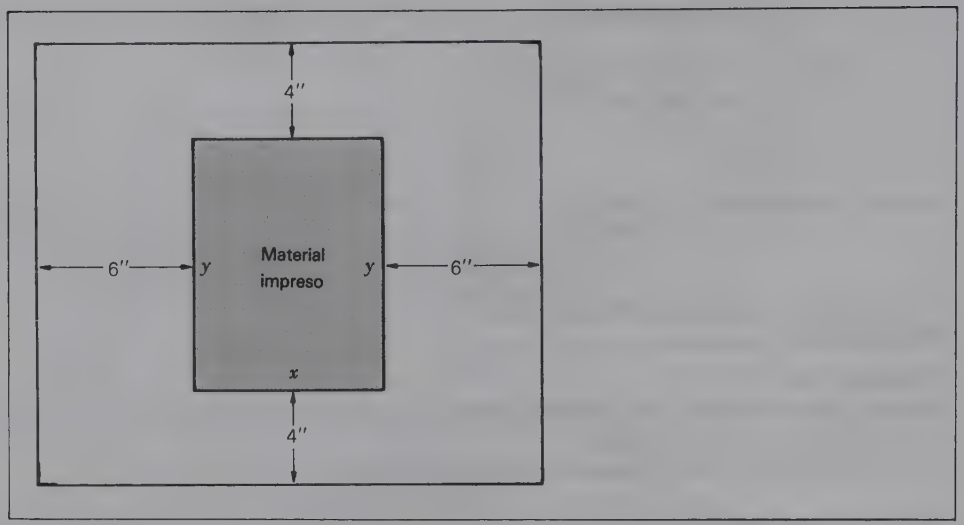


FIGURA 14.50

a) Determine el punto de cruce x que producirá el menor tiempo.
b) ¿Cuál se espera que sea el tiempo mínimo?
c) ¿Qué relación tiene este tiempo con el que se logra si la participante corre las 25 millas (el punto de cruce se halla en $x = 0$)?

Sugerencia: tiempo = distancia ÷ velocidad u horas = millas ÷ millas/hora; por otra parte,

$$t_{\text{total}} = t_{\text{carrera}} + t_{\text{nada}}$$

***80 Manejo de desperdicios sólidos** Un municipio está planeando construir una instalación para el tratamiento de desperdicios sólidos. Uno de los principales componentes de la planta es un pozo para revolver. El pozo será circular y deberá tener una capacidad de 2 millones de pies cúbicos. Los ingenieros municipales han estimado que los costos de construcción serán una función de la superficie de la base del pozo y su pa-

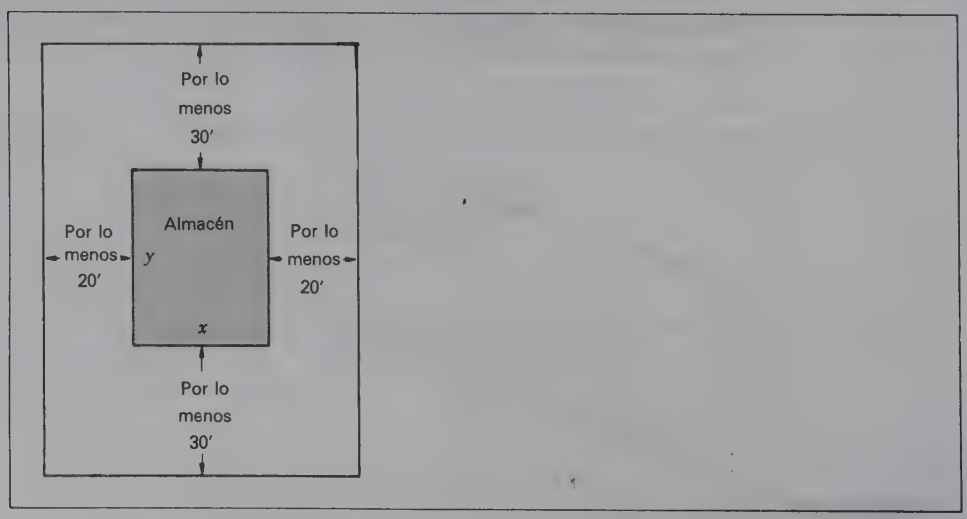


FIGURA 14.51

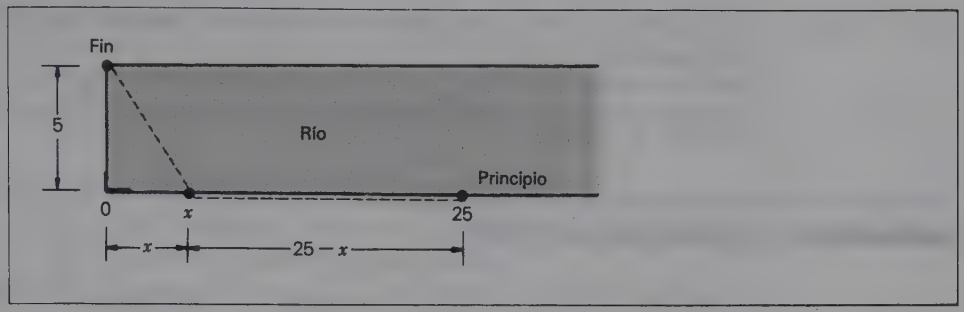


FIGURA 14.52

red. Esos costos se estiman en \$30 por pie cuadrado en la base del pozo y en \$50 por pie cuadrado de la superficie de la pared. La figura 14.53 es un diagrama del pozo. Nótese que r es igual al radio del pozo en pies y h es la profundidad en pies. Determine las dimensiones r y h que ofrezcan una capacidad de 2 millones de pies cúbicos al costo mínimo de construcción (*Sugerencia*: la superficie A de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$, la superficie A de un cilindro circular de radio r y altura h es $A = 2\pi rh$ y el volumen V es $V = \pi r^2 h$.)

***81 Elasticidad de la demanda** Si se tiene una función de demanda de un producto y un punto especificado (p, q) en la función de demanda, la *elasticidad de la demanda* será la razón.

$$\eta = \frac{\text{cambio porcentual en la cantidad demandada}}{\text{cambio porcentual del precio}}$$

Esta razón indica la respuesta de la demanda ante los cambios de precio en el punto (p, q). Puede demostrarse (y se demostrará en el ejemplo 27 del capítulo 16) que en (p, q)

$$\eta = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

Si $\eta > 1$, se dice que la demanda es *elástica* en (p, q), lo cual significa que el cambio porcentual en la demanda es mayor que el que se opera en el precio (por ejemplo, un cambio de 1% en el precio origina un cambio mayor que 1% en la demanda). Si $\eta < 1$, se dice que la demanda es *inelástica*. Si $\eta = 1$, la demanda es *elástica unitaria*. *a*) interprete lo que significa si $\eta < 1$, *b*) interprete lo que significa si $\eta = 1$. *c*) En la función de

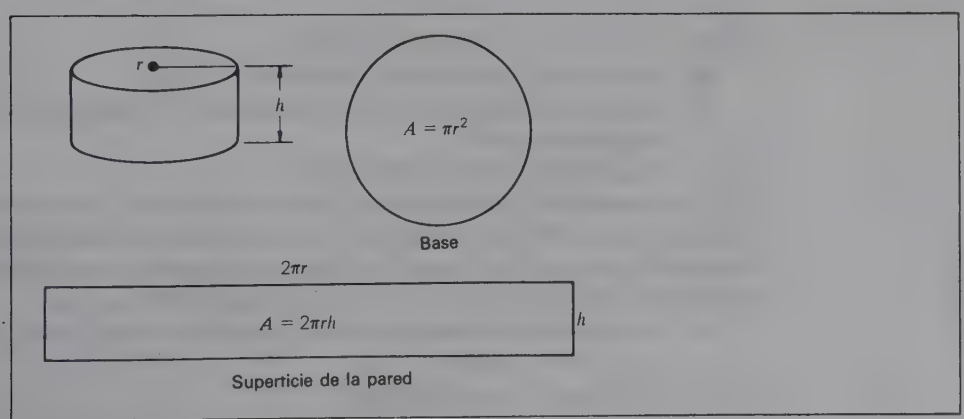


FIGURA 14.53

la demanda $q = 400 - 2.5p$, determine la expresión general de η. *d*) ¿Cuál es la elasticidad cuando $p = 50$?

*82 En relación con el ejercicio 81, *a*) determine el valor de p que produzca $\eta = 1$. *b*) ¿Qué valores de p darán origen a una *demanda elástica*? *c*) ¿Qué valores de p producen una *demanda inelástica*?

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 En $f(x) = -8x^2 = 24x - 15$, ¿para qué valores de x es f una función creciente?

2 Trace una parte de una función que reúna las características que $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$.

3 En la función $f(x) = x^3/3 - 2x^2 - 21x + 1$, determine la localización de todos los puntos críticos y determine su naturaleza.

4 En $f(x) = x^4/12 - x^2$, identifique la localización de los puntos de inflexión.

5 La función $f(x) = -x^3/3 - x^2/2 + 2x$ tiene puntos críticos en $x = 1$ y $x = -2$. Si el dominio de f es $-1 \leq x \leq 2$, determine las localizaciones y valores del máximo y mínimo absolutos.

6 Trace la gráfica de la función $f(x) = (x - 4)^3$.

7 La función de demanda de un producto es

$$q = f(p) = 50\,000 - 7.5p$$

donde q es la cantidad demandada y p es el precio en dólares. Formule la función del ingreso total $R = g(p)$.

8 La función del ingreso total para un producto es

$$R = f(x) = -3x^2 + 200x$$

donde R se mide en cientos de dólares y x es el número de unidades vendidas (en cientos). El costo total de producir x unidades (cientos) se describe con la función

$$C = g(x) = 2x^2 - 150x + 5{,}000$$

donde C se mide en cientos de dólares.

a) Formule la función de utilidad $P = h(x)$.

b) ¿Cuántas unidades deberían producirse y venderse a fin de maximizar la utilidad total?

c) ¿Cuál es la utilidad máxima?

9 Un importador quiere cercar una superficie de almacenamiento situada cerca de los muelles de embarque. La superficie se usará para el almacenamiento temporal de las cajas. La superficie deberá ser rectangular con un área de 100 000 pies cuadrados. La cerca costará $10 por pie.

a) Determine las dimensiones de la superficie que reduzcan al mínimo los costos de la cerca.

b) ¿Cuál es el costo mínimo?

10 Un minorista ha decidido que el costo anual C de comprar, poseer y mantener uno de sus productos se comporta conforme a la función

$$C = f(q) = \frac{20\,000}{q} + 0.5q + 50\,000$$

donde q es el tamaño (en unidades) de cada orden comprada a los proveedores.

a) ¿Qué cantidad de orden q produce un costo mínimo anual?

b) ¿Cuál es el costo mínimo anual?

MINICASO:

MODELO DE LA CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO (CEP)

Este modelo es un modelo clásico de inventario. Su finalidad es encontrar la cantidad que debe pedirse de un objeto con el fin de minimizar los costos totales de inventario. El modelo supone tres componentes del costo: *costo de pedido, costo de mantenimiento de inventario* y *costo de compra*. Los costos de pedido son los que implican colocar y recibir una orden. Son los gastos que se destinan a cubrir los salarios de las personas que realizan la requisición de los productos, que procesan los trámites, que reciben los productos y que los ponen en el inventario. Se supone que se realizan cada vez que se hace un pedido.

Los costos de mantenimiento de inventario, algunas veces llamados *costos de conservación*, incluyen componentes como el costo del espacio de almacenamiento, seguros, sueldos del personal encargado del control de inventario, obsolescencia y los costos de oportunidad debidos al hecho de tener la inversión en el inventario. Estos costos a menudo se expresan como porcentaje del valor promedio del inventario disponible (por ejemplo, 25% al año). El costo de compra no es más que el costo de los elementos del inventario.

Aunque el modelo de la cantidad económica de pedido admite variaciones, el modelo básico hace las siguientes suposiciones: 1) la demanda de los productos se conoce y es constante (o casi constante), 2) el tiempo transcurrido entre colocar y recibir un pedido (*tiempo de espera*) se conoce con certidumbre, 3) las cantidades del pedido tienen siempre el mismo tamaño y 4) la reposición del inventario es instantánea (es decir, todo el pedido se recibe en un lote).

Si se supone el marco temporal de 1 año, los costos totales del inventario serán

$$TC = \text{costo anual de pedidos} + \text{costo anual de mantenimiento de inventario} + \text{costo anual de compras}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{número de}\\ \text{pedidos por año}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{costo de}\\ \text{pedidos por}\\ \text{orden}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{inventario}\\ \text{promedio}\\ \text{de unidades}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{valor por}\\ \text{unidad}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{costo de}\\ \text{mantenimiento}\\ \text{de inventario}\\ \text{en porcentaje}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{demanda}\\ \text{anual}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{precio de}\\ \text{compra por}\\ \text{unidad}\end{array}\right)$$

Si

D = *demanda anual en unidades*
C_o = *costo de pedido por orden*
C_h = *costo de mantenimiento de inventario (expresado como porcentaje del valor promedio del inventario disponible)*

p = *precio de compra por unidad*
q = *cantidad de pedido*

los costos anuales de inventario pueden expresarse en función de la cantidad de pedido q como sigue:

$$TC = f(q) = \frac{D}{q}C_o + \frac{q}{2}pC_h + pD$$

Requisitos:

a) Para un elemento determinado del inventario, $D = 5000$, $C_o = \$125$, $p = \$100$ y $C_h = 0.20$. Determine el valor de q que minimice los costos anuales totales del inventario. ¿Cuáles son los costos anuales mínimos del inventario? ¿Cuántos pedidos deben hacerse cada año? ¿Cuáles son los costos anuales de los pedidos? ¿Y cuáles son los costos anuales de mantenimiento de inventario?

b) La cantidad de pedido que minimiza los costos anuales del inventario recibe el nombre de "cantidad económica de pedido" cuyas siglas en español son CEP. Usando la función generalizada de costos, determine la expresión general de la cantidad de pedido q que minimice el costo anual del inventario. (*Sugerencia*: encuentre la derivada respecto a q, suponiendo que D, C_o, p y C_h sean constantes.)

c) Pruebe que el valor crítico de q no produce un mínimo relativo en la función de costo.

d) Con la expresión de q obtenida en la parte (*b*), demuestre que los costos anuales de los pedidos equivalen al costo anual de mantenimiento de inventario cuando se opera al nivel de cantidad económica de pedido.

e) Los costos anuales del inventario pueden expresarse en términos del número de pedidos que se hacen por año, N, reconociendo que $N = D/q$. Reescriba la función generalizada de costo en términos de N y no en términos de q. Determine la expresión general del valor de N que minimice los costos anuales del inventario. Confirme que el valor crítico de N no origine un mínimo relativo en la función de costo.

CAPÍTULO

15 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

15.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES
15.2 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES
15.3 DERIVADAS Y SU APLICACIÓN
15.4 FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y SUS DERIVADAS
15.5 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: ¿TIEMPO DEL FALLECIMIENTO

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Explicar la naturaleza de las funciones exponenciales: sus características estructurales y su comportamiento gráfico
- Exponer las reglas de derivación de las funciones exponenciales y dar ejemplos de su uso
- Presentar varias aplicaciones de las funciones exponenciales
- Explicar la naturaleza de los logaritmos y la equivalencia entre formas exponenciales y logarítmicas
- Describir las características de las funciones logarítmicas y sus derivadas
- Presentar varias aplicaciones de las funciones logarítmicas

Dos clases de funciones matemáticas que tienen importantes aplicaciones en la administración, economía y las ciencias son las ***funciones exponenciales*** y las ***funciones logarítmicas***. En este capítulo se analizará su naturaleza y se proporcionarán ejemplos de su aplicación.

15.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

RECORDATORIO DE ÁLGEBRA
Algunas propiedades importantes de los exponentes y radicales se repiten aquí para que el lector las repase. Suponga que a y b sean números positivos y que m y n tengan un valor real.

Propiedad 1: $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

Ejemplos: $2^2 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$
$x^5 x^{-3} = x^{5-3} = x^2$

Propiedad 2: $\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \qquad b \neq 0$

Ejemplos: $\dfrac{3^6}{3^3} = (3)^{6-3} = 3^3 = 27$

$\dfrac{x^4}{x} = x^{4-1} = x^3$

Propiedad 3: $(b^m)^n = b^{mn}$

Ejemplos: $(10^3)^2 = 10^{(3)(2)} = 10^6 = 1\,000\,000$
$(x^{-2})^5 = x^{(-2)(5)} = x^{-10}$

Propiedad 4: $a^m b^m = (ab)^m$

Ejemplos: $3^4 2^4 = [(3)(2)]^4 = 6^4 = 1{,}296$
$x^2 y^2 = (xy)^2$

Propiedad 5: $b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$

Ejemplos: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
$x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$

Propiedad 6: $b^0 = 1 \qquad b \neq 0$

Ejemplos: $5\,000^0 = 1$
$(xy)^0 = 1$ siempre que $xy \neq 0$

Propiedad 7: $b^{-m} = \dfrac{1}{b^m} \qquad b \neq 0$

Ejemplos: $(2)^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{x^{-2}} = \frac{1}{1/x^2} = 1\frac{x^2}{1} = x^2$$

Si el lector no sabe mucho de exponentes, radicales y sus propiedades, le recomendamos repasar la sección A.5 del apéndice A.

Características de las funciones exponenciales

DEFINICIÓN: FUNCIÓN EXPONENCIAL
Una ***función exponencial*** de la forma $y = f(x)$ es aquella en que la variable independiente x aparece como exponente o como parte de un exponente.

Entre los ejemplos de las funciones exponenciales figuran

$$f(x) = 10^x$$
$$g(x) = (2)^{x^2-5}$$

y

$$h(x) = 10(3)^{x/2}$$

Hay varias clases de funciones exponenciales. Una de las más importantes es la que tiene la forma

$$\boxed{y = f(x) = ab^{mx}} \qquad (15.1)$$

donde a, b y m son constantes de valor real. Una restricción es que $b > 0$, pero $b \neq 1$.

A fin de hacerse una idea del comportamiento de las funciones exponenciales, se examinarán algunas de la forma $y = b^x$ [suponiendo que $a = m = 1$ en la ecuación (15.1)].

EJEMPLO 1

A continuación se trazará la gráfica de la función $f(x) = 2^x$. Esta función puede trazarse determinando un conjunto de pares ordenados que satisfagan la función. En la tabla 15.1 se ofrece una muestra de valores supuestos de x y los valores correspondientes de $f(x)$.

TABLA 15.1

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
$f(x) = 2^x$	1	2	4	8	0.5	0.25	0.125

RECORDATORIO DE ALGEBRA
La propiedad 7 ($b^{-m} = 1/b^{-m}$, $b \neq 0$) debe usarse para evaluar 2^x cuando x es negativa.

En la figura 15.1 nótese que f es una función creciente. Es decir, cualquier aumento en el valor de x produce un incremento en el valor de $f(x)$. Otra manera de expresar eso es señalar que la pendiente de cualquier tangente en la curva es positiva. Finalmente, la gráfica de f es asintótica respecto a la porción negativa del eje x. A medida que x se acerca al infinito negativo ($x \to -\infty$), $f(x)$ se aproxima a un valor de 0 pero sin llegar a alcanzarlo.

EJEMPLO 2

$f(x) = b^x$ donde $b > 1$ La figura 15.2 muestra las gráficas de tres funciones exponenciales f, g y h.

$$f(x) = 2^x$$
$$g(x) = 2.5^x$$
$$h(x) = 3^x$$

Adviértase que cada función tiene una base positiva b, siendo el tamaño de b la única diferencia entre ellas. Las funciones se grafican juntas para ilustrar algunas características de su conjunto.

$$f(x) = b^x \text{ donde } b > 1$$

Examine atentamente la figura 15.2 y confirme las siguientes características de este conjunto de funciones.

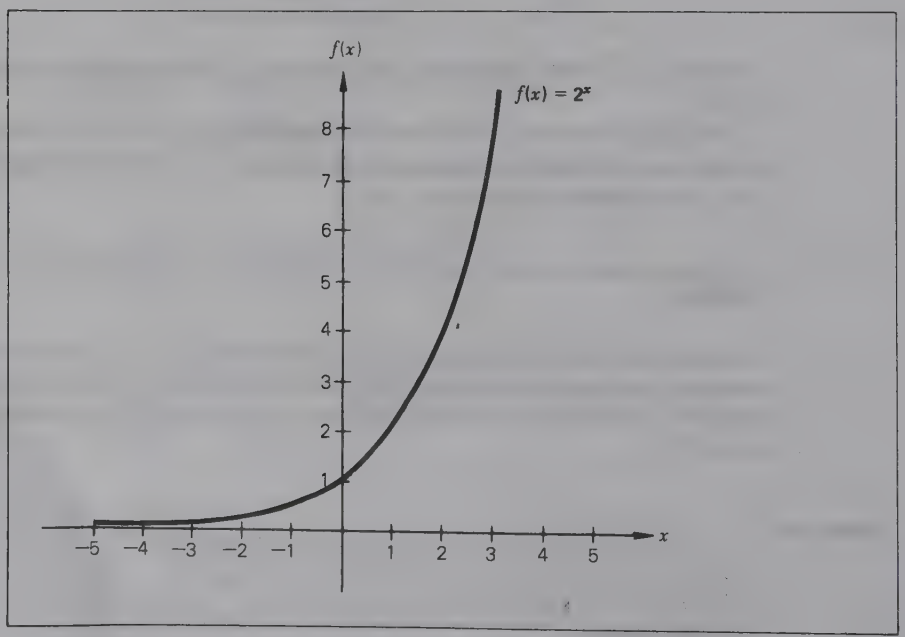


FIGURA 15.1

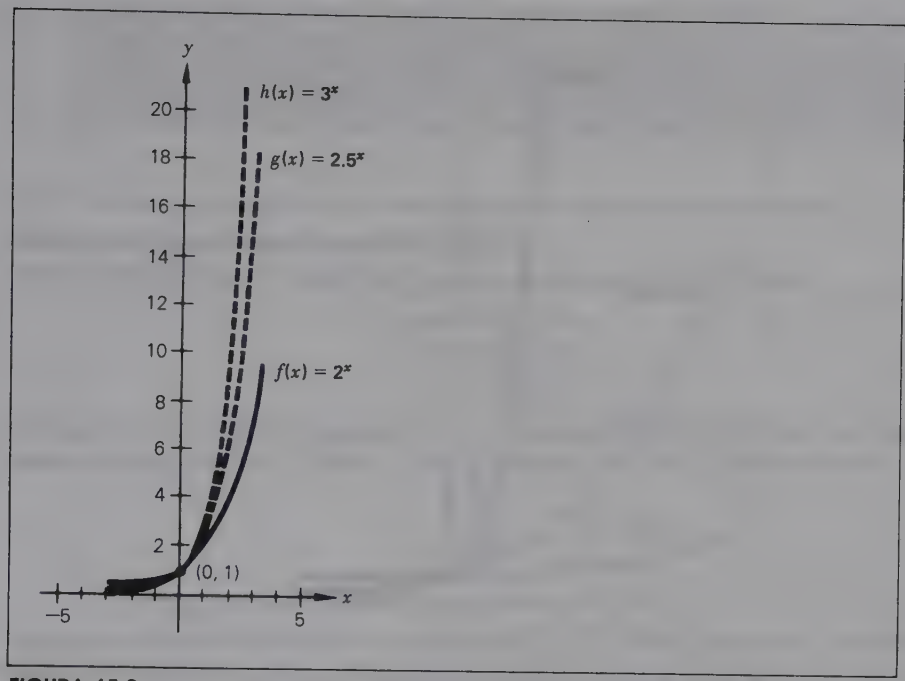


FIGURA 15.2
$f(x) = b^x$, $b > 1$.

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES $f(x) = b^x$ donde $b > 1$

I Cada función se define para todos los valores de x. El dominio de f es el conjunto de los números reales.

II La gráfica de f se encuentra íntegramente sobre el eje x (el rango es el conjunto de los números reales positivos).

III La gráfica de f es *asintótica* respecto al eje x. En otras palabras, el valor de y se acerca al de 0 pero sin alcanzarlo, a medida que x se aproxima al infinito.

IV La intersección con el eje y ocurre en (0,1).

V y es una función creciente de x; esto es, en el dominio de la función cualquier aumento de x se acompaña de un incremento de y. Más exactamente, esta propiedad indica que, cuando $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.

VI Cuanto mayor sea la magnitud de la base b, más aumentará la tasa en $f(x)$ al elevarse el valor de x.

Esta clase de funciones es particularmente útil en el modelado de los *procesos de crecimiento*. Se explicarán ejemplos de estos tipos de aplicaciones en la siguiente sección.

EJEMPLO 3

$f(x) = b^x$ donde $0 < b < 1$ La figura 15.3 ilustra las gráficas de tres funciones exponenciales

$$f(x) = (0.2)^x$$

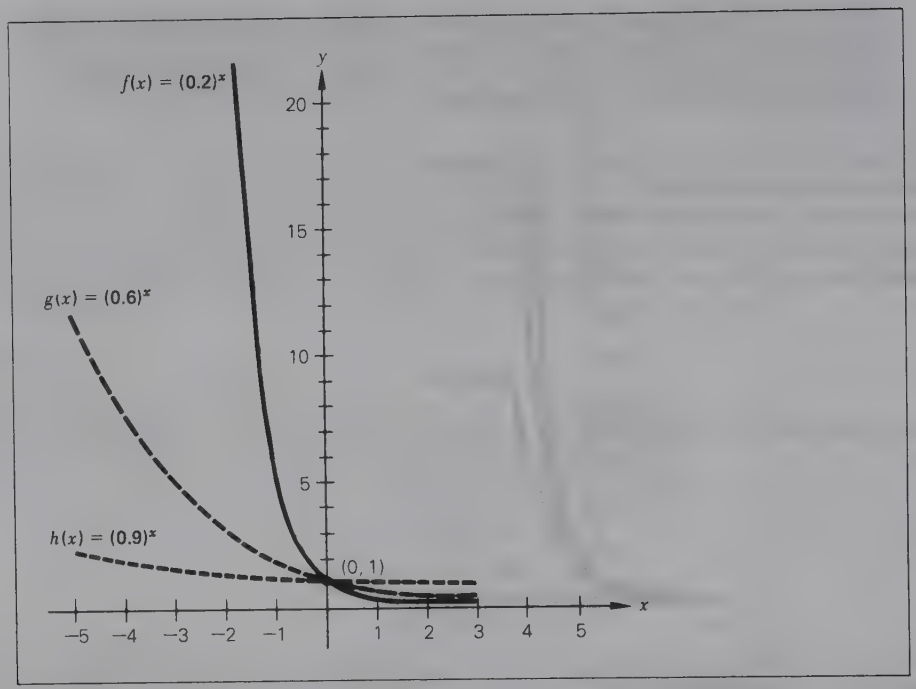


FIGURA 15.3
$f(x) = b^x$, $0 < b < 1$.

$$g(x) = (0.6)^x$$
$$h(x) = (0.9)^x$$

Estas funciones son representativas del conjunto de funciones exponenciales $f(x) = b^x$ donde $0 < b < 1$. Las tres funciones mostradas difieren sólo en la magnitud de b. Examine detenidamente la figura 15.3 y confirme las siguientes características de este conjunto de funciones.

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES $f(x) = b^x$, $0 < b < 1$

I Cada función se define para todos los valores de x (el dominio es el conjunto de los números reales).

II La gráfica de f está en su totalidad arriba del eje x (el rango es el conjunto de los números reales positivos).

III La gráfica de f es asintótica respecto al eje x. Es decir, el valor de y se aproxima al de 0 pero sin alcanzarlo, conforme x se acerca al infinito positivo.

IV La intersección con el eje y ocurre en (0,1).

V y es una función decreciente de x; esto es, cualquier aumento en el valor de x se acompaña de un decremento en el valor de y. Más exactamente, esta propiedad indica que, si $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

VI Cuanto menor sea la magnitud de la base b, más alta será la tasa de disminución de $f(x)$ al aumentar el valor de x.

Esta clase de funciones es particularmente útil en el modelado de los *procesos de deterioro*. Se darán ejemplos de tales aplicaciones en la siguiente sección.

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Cuáles son las características gráficas de la función exponencial $f(x) = b^x$, donde $b = 1$?

Funciones exponenciales de base *e*

Una clase especial de funciones exponenciales presenta la forma

$$y = f(x) = ae^{mx} \tag{15.2}$$

La base de esta función exponencial es e, que es un número irracional aproximadamente igual a 2.71828. El valor exacto de e se define mediante

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Aunque no nos detendremos a explicar el origen de esta constante, se lograrán algunas intuiciones en esta exposición respecto al motivo por el cual se emplea una constante tan poco común como base de una clase tan usada de funciones exponenciales. Y, en efecto, las funciones exponenciales de base e se aplican mucho más que cualquiera otra clase de ellas.

Dos funciones exponenciales especiales de este tipo son $y = e^x$ y $y = e^{-x}$. En la figura 15.4 se dan las gráficas de una y otra. A fin de trazarlas, hay que calcular los valores de $(2.71828...)^x$ y $(2.71828...)^{-x}$. Esto puede resultar un proceso tedioso en extremo, pero son cálculos que se efectúan frecuentemente y por ello los valores de e^x y e^{-x} se encuentran ampliamente disponibles. La mayor parte de las calculadoras manuales traen las funciones e^x o e^{-x}. Los valores también se obtienen de las tablas como la tabla 1 en la solapa posterior del libro.

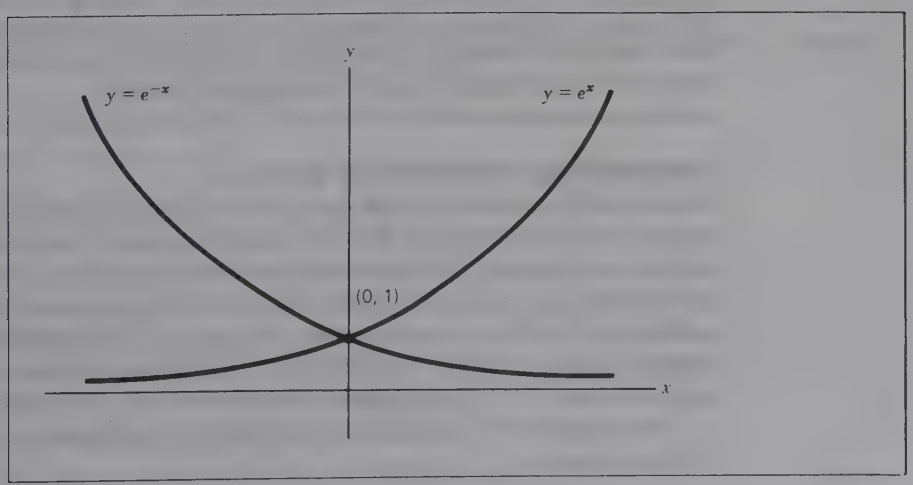


FIGURA 15.4

EJEMPLO 4

Funciones exponenciales modificadas Ciertas aplicaciones de las funciones exponenciales incluyen funciones de la forma

$$y = f(x) = 1 - e^{-mx} \tag{15.3}$$

TABLA 15.2

x	0	1	2	3	4
e^{-x}	1	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183
$1 - e^{-x}$	0	0.6321	0.8647	0.9502	0.9817

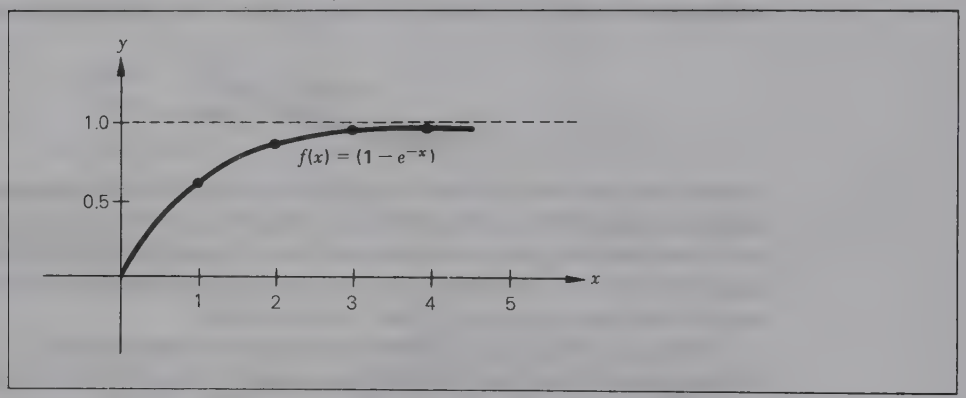


FIGURA 15.5 Función exponencial moficada

A fin de dar ejemplos de estas funciones exponenciales modificadas, se grafica la función $f(x) = 1 - e^{-x}$ donde $x \geq 0$. La tabla 15.2 contiene algunos puntos de datos muestra de esa función. Su gráfica aparece en la figura 15.5. Obsérvese que la gráfica de la función es asintótica respecto a la línea $y = 1$. Conforme aumenta el valor de x, el valor de y se acerca al de 1 pero sin alcanzarlo nunca. Ello se debe a que el segundo término e^{-x} se acerca pero no llega a alcanzar el valor de 0, a medida que x aumenta de valor. Quizá el comportamiento de e^{-x} se entienda mejor si se reescribe e^{-x} como $1/e^{x}$. Conforme aumenta el valor de x, el denominador se torna más grande y el cociente $1/e^{x}$ se aproxima a 0 pero sin alcanzarlo jamás.

Conversión en funciones de base e

Se mencionó con anterioridad que las funciones exponenciales de base e se prefieren a las que tienen otra base b. También aquí el lector entenderá el motivo de esto muy pronto. Es interesante señalar lo siguiente: en esta sección se verá que las funciones exponenciales con otra base que no sea e pueden ser transformadas en funciones equivalentes de base e. Ello obedece a que cualquier número positivo b puede expresarse de modo equivalente como alguna potencia de la base e; es decir, puede encontrarse un exponente n tal que $e^{n} = b$.

Para explicar lo anterior con un ejemplo, supóngase que tenemos una función exponencial

$$f(x) = 3^x$$

donde la base es 3. Para convertir f en una función equivalente de base e, es preciso expresar la base en términos de e. Se desea determinar el exponente que produzca

$$e^n = 3$$

De acuerdo con la tabla 1 (solapa anterior) se observa que

$$e^{1.1} = 3.0042$$

o bien

$$e^{1.1} \doteq 3$$

Por tanto, la función original puede expresarse así:

$$f(x) = 3^x \doteq (e^{1.1})^x$$

o

$$f(x) \doteq e^{1.1x}$$

Para probar la equivalencia de estas funciones, calcularemos $f(2)$ por medio de las formas de base 3 y de base e.

Base 3: $f(2) = 3^2 = 9$

Base e: $f(2) = e^{1.1(2)} = e^{2.2}$

Según la tabla 1, $e^{2.2} = 9.0250$

La diferencia ($9.0250 - 9 = 0.0250$) es atribuible al hecho de que no pudimos encontrar el valor exacto de n que produce $e^n = 3$ en la tabla 1. El valor de $n = 1.1$ se aproxima pero no lo alcanza. Para mejorar la aproximación puede recurrirse a tablas más pormenorizadas, a una calculadora manual con una función e^x o bien a los logaritmos.

Ejercicios de seguimiento de la sección 15.1

1 ¿Cuál de las siguientes funciones puede considerarse como una función exponencial? Para las que no lo son, indique por qué.

(*a*) $y = f(x) = (\pi)^{x^2}$, donde $\pi = 3.14\ldots$

(*b*) $y = h(x) = \sqrt[x]{0.50}$

(*c*) $y = v(t) = (4)^{t^2-2t+1}$

(*d*) $u = v(t) = \sqrt[4]{t^3}$

(*e*) $g = h(x) = 1/e^{2x-1}$

(*f*) $y = f(x) = \sqrt{2x^5}$

(*g*) $y = f(x) = (0.5)^{x-6}$

(*h*) $y = h(z) = 10^{\sqrt{z}}$

2 *a*) Grafique las funciones

$$y = f(x) = 2^x$$

$$y = g(x) = 2^{1.5x}$$

$$y = h(x) = 2^{2x}$$

b) Si las funciones anteriores se comparan con la ecuación (15.1), las diferencias se encuentran en los valores del parámetro m. Examine las gráficas de la parte *a*). ¿Qué conclusiones pueden sacarse sobre el comportamiento de las funciones exponenciales y el valor de m?

3 *a*) Grafique las funciones

$$y = f(x) = 2^x$$
$$y = g(x) = 0.5(2)^x$$
$$y = h(x) = 2(2)^x$$

b) Si las funciones anteriores se comparan con la ecuación (15.1), las diferencias están en los valores del parámetro a. De acuerdo con las gráficas de la parte *a*), ¿qué conclusiones pueden sacarse respecto al comportamiento de las funciones exponenciales y el valor de a?

En cada una de las siguientes funciones exponenciales, calcule $f(0)$, $f(-3)$ y $f(1)$.

4 $f(x) = 3^{x^2}$
5 $f(x) = 2^{x/2}$
6 $f(x) = e^x$
7 $f(x) = e^{-x/2}$
8 $f(x) = e^{x-2}$
9 $f(x) = e^{x^2/2}$
10 $f(x) = 1 - e^{0.5x}$
11 $f(x) = 10(1 - e^{2x})$
12 $f(x) = e^{-x}/2$
13 $f(x) = 5e^{-x}/2$
14 $f(x) = (2)^{x^2-2x+1}$
15 $f(x) = (3)^{4-x^2}$
16 $f(x) = 4(1 - e^x)$
17 $f(x) = 3(4 - e^{2x})$
18 $f(x) = 10 - x - e^x$
19 $f(x) = x^2 + 3x - 4e^x$

Grafique las siguientes funciones.

20 $f(x) = e^{x/2}$
21 $f(x) = e^x/2$
22 $f(x) = 0.5e^{x^2}$
23 $f(x) = -2e^x$
24 $f(x) = 5(1 - e^x)$
25 $f(x) = -2(1 - e^x)$
26 $f(x) = e^{-x/2}$
27 $f(x) = 1 - e^{0.5x}$
28 $f(x) = 2(1 - e^{-x})$
29 $f(x) = 4(1 - e^x)$

Convierta las siguiente funciones exponenciales en las funciones exponenciales equivalentes de base e.

30 $f(x) = (1.6)^x$
35 $f(t) = 10(0.3)^t$
32 $f(x) = (0.6)^x$
37 $f(t) = -2(90)^t$
31 $f(x) = (2)^{x^2}$
39 $f(u) = 5(0.6)^u(1.6)^{2u}$
33 $f(x) = (2.25)^{x/2}$
41 $f(z) = (10)^z(5)^z$
34 $f(t) = 5(1.6)^{t^2}$
43 $f(x) = (0.5)^{x/2}(3)^{x^2}$
36 $f(t) = 2.5(20)^t$
40 $f(z) = 2(16)^{z^2}$
38 $f(u) = 3(0.5)^u$
42 $f(x) = (0.4)^x(0.8)^{x/2}$

15.2 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales tienen una aplicación determinada en los *procesos de crecimiento* y en los *procesos de deterioro* (*decaimiento*). Entre los ejemplos de los procesos del primer tipo cabe señalar el crecimiento de la población, la valuación de activos, la inflación, el crecimiento de la tasa en que se usan determinados recursos (entre ellos la energía) y el crecimiento del producto nacional bruto. Los ejemplos de los procesos de decaimiento incluyen el valor decreciente de ciertos activos como la maquinaria, la disminución de la incidencia de ciertas enfermedades a medida que se perfeccionan la tecnología y la investigación médicas, la disminución del poder adquisitivo de los consumidores y el deterioro de la eficiencia de una máquina conforme envejece. La figura 15.6 contiene datos que describen un proceso de crecimiento y otro de declinación

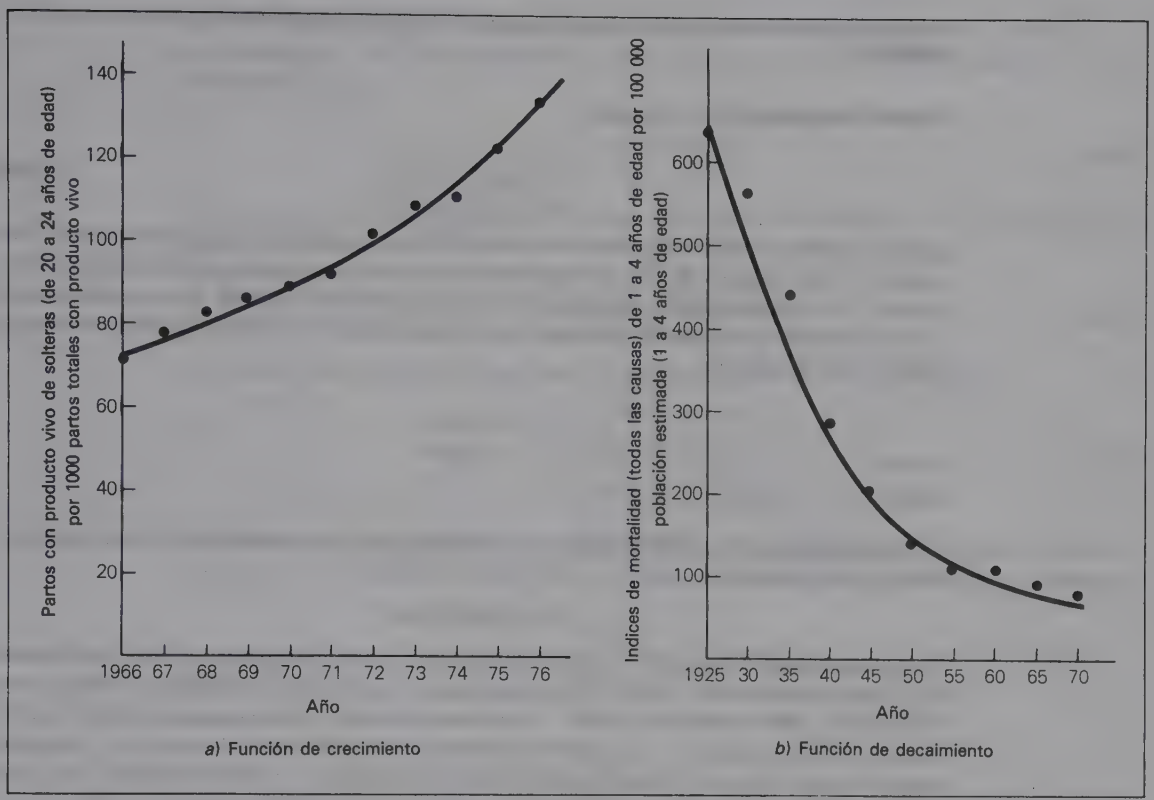


FIGURA 15.6
Fuente: Division of Vital Statistics, National Center for Health Statistics.

(deterioro). Examine el lector los datos y reflexione sobre las razones del evidente fenómeno de crecimiento (declinación).

Cuando un proceso de crecimiento se caracteriza por un incremento porcentual constante de valor, se le da el nombre de ***proceso de crecimiento exponencial***. Cuando un proceso de declinación se caracteriza por una disminución porcentual constante de valor, recibe el nombre de ***proceso de decaimiento exponencial***. Si la población de un país crece constantemente a una tasa de 8%, el proceso de crecimiento puede describirse mediante una *función de crecimiento exponencial*. Si la frecuencia de la mortalidad infantil decrece de manera continua a una tasa de 5%, el proceso de decaimiento puede describirse con una *función de decaimiento exponencial*.

Aunque las funciones exponenciales de crecimiento y decaimiento suelen expresarse en función del tiempo, la variable independiente puede presentar otro elemento que no sea el tiempo. Prescindiendo de la naturaleza de la variable independiente, el efecto es que *incrementos iguales en la variable independiente producen cambios porcentuales constantes (aumentos o disminuciones) en el valor de la variable dependiente*.

En los siguientes ejemplos se ilustran algunas de las áreas de aplicación de las funciones exponenciales.

EJEMPLO 5

Interés compuesto La ecuación

$$\boxed{S = P(1 + i)^n} \tag{15.4}$$

puede emplearse para determinar la cantidad S que aumentará una inversión de P dólares, si recibe interés de $i\%$ por periodo compuesto para n periodos de interés compuesto.* S se llama *interés compuesto* y P recibe el nombre de *capital*. Si se considera que S es una función de n, puede pensarse que la ecuación (15.4) tiene la forma de la ecuación (15.1). Es decir,

$$S = f(n)$$

o bien

$$S = ab^{mn}$$

donde $a = P$, $b = 1 + i$ y $m = 1$.

Suponga que $P = \$1000$ y que $i = 0.08$ por año. La ecuación (15.4) se convierte en $S = f(n)$, o sea

$$S = (1\,000)(1.08)^n$$

Para determinar el valor de S cuando n tenga un valor cualquiera, se necesita evaluar el término exponencial $(1.08)^n$. Si se desea saber a qué suma ascenderá \$1000 al cabo de 35 años, debe evaluarse $(1.08)^{23}$. Como este tipo de cálculo es muy común, los valores de la expresión $(1 + i)^n$ pueden determinarse mediante las teclas de funciones especiales que vienen en muchas calculadoras manuales o mediante tablas. La tabla I de la página T.0 puede servir para evaluar $(1 + 0.08)^{25}$. Según esa tabla,

$$(1 + 0.08)^{25} = 6.8485$$

y

$$f(25) = 1\,000(1.08)^{25} = 1\,000(6.8485) = \$6\,848.50$$

EJEMPLO 6

Interés compuesto: capitalización continua Cuando la capitalización del interés ocurre más de una vez al año, puede reformularse la ecuación (15.4) como

$$\boxed{S = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}} \tag{15.5}$$

donde *i es la tasa de interés anual, m es el número de periodos de capitalización por año y t es el número de años*. El producto mt indica el número de periodos de capitalización a lo largo de t años.

Los bancos se valen a menudo de modelos de ***capitalización continua*** en las cuentas de ahorros a fin de promover su negocio. La capitalización continua significa que la capitalización se realiza de modo constante. Otra manera de concebirla es recordar que hay un número infinito de periodos de capitalización cada año. En la ecuación

*Suponiendo que se reinviertan los intereses acumulados.

(15.5) la capitalización continua denota que se determina el valor de S conforme m se aproxima a $+\infty$. Puesto que i/m puede escribirse como $1/(m/i)$, la ecuación (15.5) se reescribirá así:

$$S = P\left(1 + \frac{1}{m/i}\right)^{mt} \tag{15.6}$$

Y como mt puede reescribirse en la forma $(m/i)\,(it)$, la ecuación (15.6) se reformulará como

$$S = P\left[\left(1 + \frac{1}{m/i}\right)^{m/i}\right]^{it} \tag{15.7}$$

Cuando se explicaron las funciones exponenciales de base e, se dijo que

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}} \tag{15.8}$$

Confirme que la expresión entre corchetes posea la misma estructura que la ecuación (15.8) y que, como m, el número de periodos de capitalización por año, se aproxime a $+\infty$,

$$\left[1 + \frac{1}{m/i}\right]^{m/i} \to e = 2.718\ldots$$

o bien

$$\lim_{m\to\infty}\left[1 + \frac{1}{m/i}\right]^{m/i} = e$$

Por consiguiente, en el caso de la capitalización continua, la ecuación (15.7) se simplifica y nos da

$$\boxed{S = Pe^{it}} \tag{15.9}$$

EJEMPLO 7

En el ejemplo 5, se calculó la cantidad a que ascenderá una inversión de \$1000 si se invierte a 8% anual durante 25 años capitalizable anualmente. Si los \$1000 ganan 8% por año capitalizado continuamente, la inversión crecerá y alcanzará la suma

$$\begin{aligned} S &= \$1\,000e^{0.08(25)} \\ &= 1\,000e^{2.0} \end{aligned}$$

Si consultamos la tabla 1 en la solapa anterior del libro, tenemos

$$e^{2.0} = 7.3891$$

y

$$\begin{aligned} S &= \$1\,000(7.3891) \\ &= \$7\,389.10 \end{aligned}$$

Al comparar este valor con el que se consiguió en el ejemplo 5, la capitalización continua produce un interés adicional de \$7389.10 − \$6848.50 = \$540.60 durante el periodo de 25 años. En la figura 15.7 se incluye una gráfica de la función de inversión.

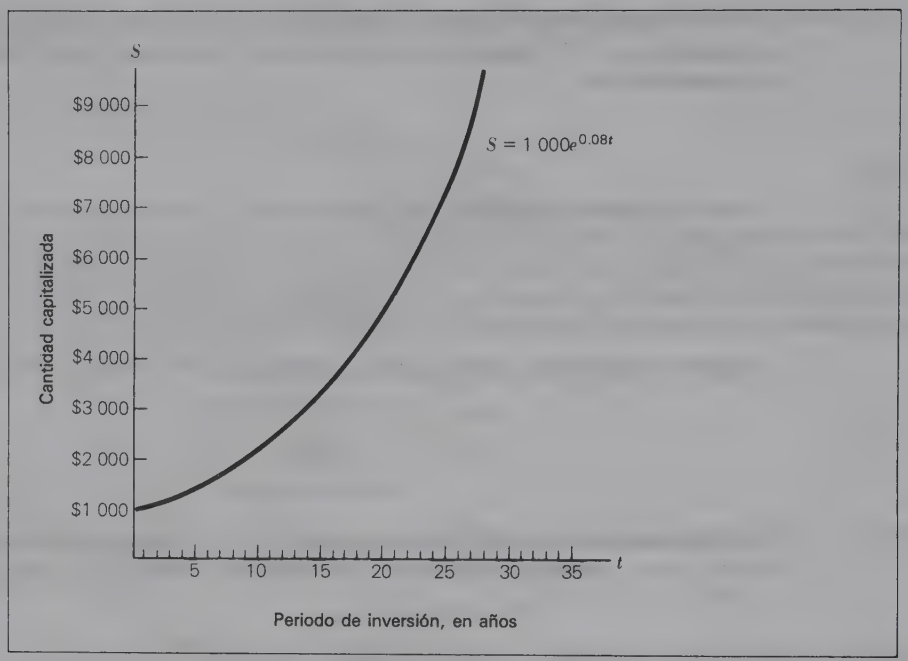


FIGURA 15.7

EJEMPLO 8

Proceso de crecimiento exponencial: población Según se mencionó al inicio de esta sección, los *procesos de crecimiento exponencial* se caracterizan por un incremento porcentual constante del valor con el tiempo. Tales procesos se describen mediante la función general

$$V = f(t)$$

o bien

$$\boxed{V = V_0 e^{kt}} \qquad \textbf{(15.10)}$$

donde *V es el valor de la función en el tiempo t, V_0 indica el valor de la función cuando $t = 0$, k denota la tasa porcentual de crecimiento y t es el tiempo medido en las unidades apropiadas* (horas, días, semanas, años, etc.).

La población de un país fue de 100 millones en 1970. Ha estado creciendo desde ese año en forma exponencial y a una tasa constante de 4% por año. He aquí la función que describe el tamaño de la población P (en millones)

$$\begin{aligned} P &= f(t) \\ &= 100e^{0.04t} \end{aligned}$$

donde 100 (millones) es la población en $t = 0$ (1970) y 0.04 es la tasa porcentual del crecimiento exponencial.

La población proyectada para 1995 (suponiendo un crecimiento anual continuo a la misma tasa) se obtiene al evaluar $f(25)$, donde $t = 25$ corresponde a 1995. La población proyectada para el país es

$$\begin{aligned} P &= f(25) \\ &= 100e^{0.04(25)} \\ &= 100e \\ &= 271.83 \text{ (millones)} \end{aligned}$$

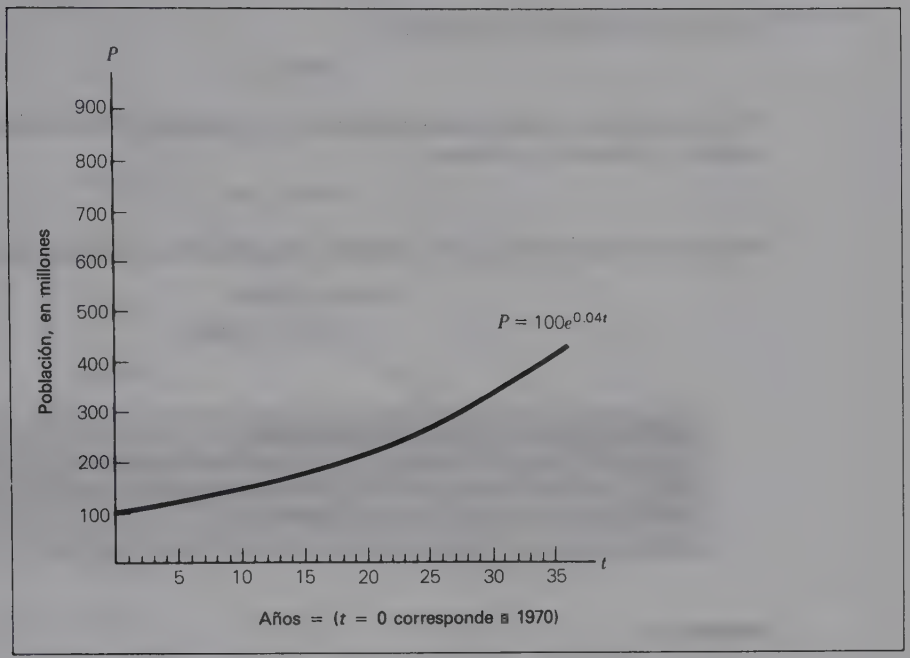


FIGURA 15.8

Una gráfica de la función de población aparece en la figura 15.8.

EJEMPLO 9

Procesos de crecimiento exponencial (continúa) Una pregunta de interés para las funciones de crecimiento es la siguiente: ¿cuánto tardará el valor de la función en aumentar en algún múltiplo? En el ejemplo 8 quizá desee saberse cuánto tiempo se requiere para que se duplique una población. En la ecuación (15.10), el valor de V_0 se duplicará cuando

$$\frac{V}{V_0} = 2$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación (15.10) entre V_0, se obtiene

$$\frac{V}{V_0} = e^{kt}$$

Por tanto, el valor se duplicará cuando

$$e^{kt} = 2$$

He aquí un ejemplo de lo anterior: la población mencionada en el ejemplo 8 se duplicará cuando $V = 200$, o sea

$$200 = 100e^{0.04t}$$

La división de ambos miembros entre 100 nos da

$$2 = e^{0.04t}$$

En la tabla 1 vemos que

$$e^{0.69} = 2$$

He aquí una mejor aproximación

$$e^{0.69314} \doteq 2$$

Para determinar cuánto tarda en duplicarse la población de 100 millones, hay que encontrar el valor de t que hace

$$e^{0.69314} = e^{0.04t}$$

Estas expresiones serán iguales cuando lo sean también sus exponentes o bien cuando

$$0.04t = 0.69314$$

o

$$t = 17.33 \text{ años}^*$$

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Qué relación existirá entre V y V_0 si se triplica el valor? ¿Si se cuaduplica? ¿Y si se aumenta en 50%? Determine cuánto tardarán en presentarse estos valores en el último ejemplo.

EJEMPLO 10

Funciones de decaimiento exponencial Un ***proceso de decaimiento exponencial*** se caracteriza por una disminución porcentual constante del valor con el tiempo. Tales procesos pueden describirse mediante la función general

$$V = f(t)$$

o bien

$$\boxed{V = V_0 e^{-kt}} \qquad \textbf{(15.11)}$$

donde V es el valor de la función en el tiempo t, V_0 es el valor de la función en $t = 0$ y k indica la tasa porcentual de decaimiento (algunas veces denominada *constante de decaimiento*). Compare la ecuación (15.11) con la ecuación (15.10) y observe las diferencias.

El valor de reventa V (expresado en dólares) de cierto equipo industrial se comporta conforme a la función $V = f(t) = 100\,000e^{-0.1t}$, donde t = años transcurridos desde la compra original.

a) ¿Cuál es el valor original de una pieza del equipo?

b) ¿Cuál es el valor esperado de reventa al cabo de 5 años? ¿Y al cabo de 10 años?

SOLUCIÓN

a) El valor original es el valor de V cuando $t = 0$. Si $t = 0$

$$\begin{aligned} V &= 100\,000e^{-0.1(0)} \\ &= 100\,000e^{0} \\ &= 100\,000 \end{aligned}$$

* Despejar t puede ser fácil si el lector entiende los logaritmos. Otro método equivalente sería calcular los logaritmos naturales (sección 15.4) de ambos miembros de la ecuación $2 = e^{0.04t}$ e igualarlos, despejando t.

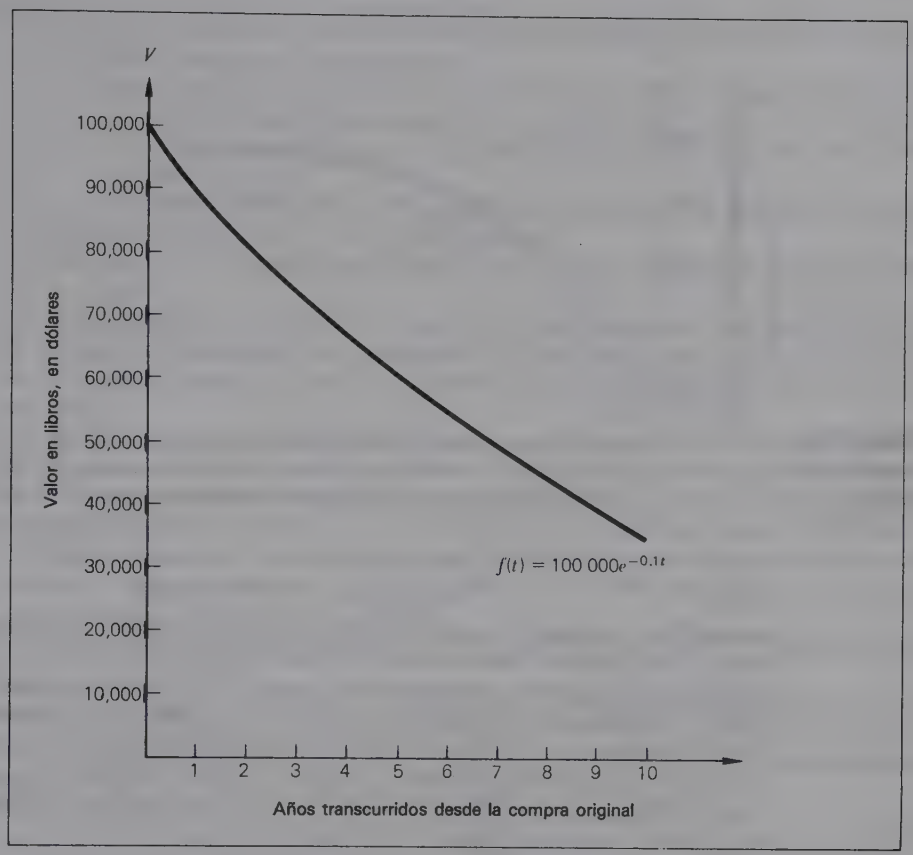


FIGURA 15.9 Función de depreciación.

Por consiguiente, el valor original $V_0 = \$100\,000$.

$$
\begin{aligned}
(b) \quad f(5) &= 100\,000e^{-0.1(5)} \\
&= 100\,000e^{-0.5} \\
&= 100\,000(0.6065) \qquad \text{(de la tabla 1)} \\
&= \$60\,650 \\
f(10) &= 100\,000e^{-0.1(10)} \\
&= 100\,000e^{-1} \\
&= 100\,000(0.3679) \qquad \text{(de la tabla 1)} \\
&= \$36\,790
\end{aligned}
$$

La figura 15.9 presenta una gráfica de esta función de decaimiento.

EJEMPLO 11

Cobranza Una gran institución financiera ofrece tarjetas de crédito que pueden emplearse a nivel internacional. Los ejecutivos desean saber cuánto tarda la cobranza de las cuentas por cobrar de los créditos en un mes determinado. Los datos reunidos durante algunos años revelan que el porcentaje de cobranza de los créditos concedidos en un mes cualquiera es una función exponencial del tiempo transcurrido desde la emisión de la tarjeta. Más exactamente, la función que aproxima esta relación es

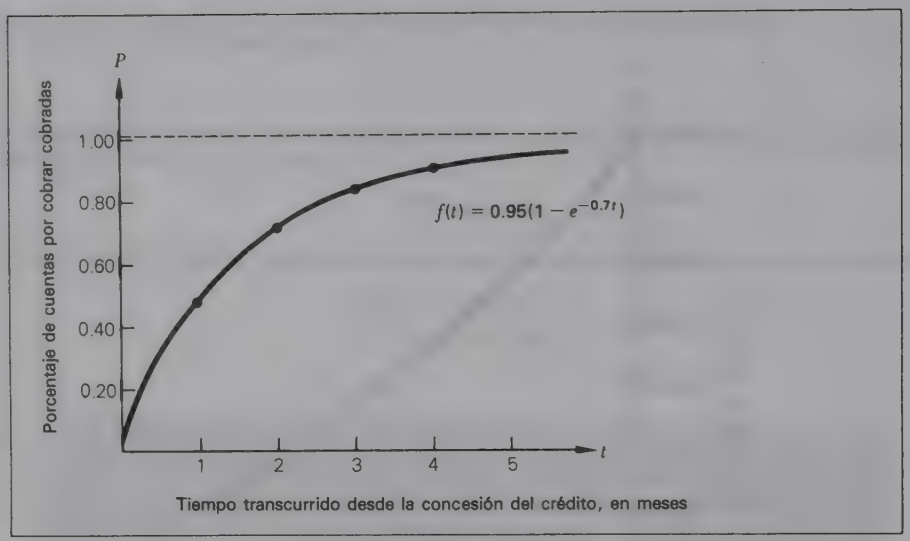


FIGURA 15.10 Función de respuesta a la cobranza.

$$P = f(t)$$

o bien

$$P = 0.95(1 - e^{-0.7t}) \qquad t \geq 0$$

donde *P es el porcentaje de cuentas por cobras (en dólares) cobrado t meses después de conceder el crédito.* Los puntos de datos muestra de esta función se incluyen en la tabla 15.3 Los valores de $e^{-0.7t}$ pueden obtenerse en la tabla 1 de la solapa anterior. La función se trazó en la figura 15.10. Nótense las cifras de la tabla 15.3. Cuando $t = 0$, $f(t) = 0$, lo cual indica que no se han cobrado las cuentas al momento de conceder el crédito. Cuando $t = 1$, la función tiene un valor de 0.4782. Ello indica que, al cabo de un mes, 47.82% de las cuentas por cobrar (en dólares) habrán sido cobradas. Después de 2 meses, se habrá cobrado 71.56% de las cuentas.

TABLA 15.3

t	0	1	2	3	4
$e^{-0.7t}$	1	0.4996	0.2466	0.1225	0.0608
$1 - e^{-0.7t}$	0	0.5034	0.7534	0.8775	0.9392
$0.95(1 - e^{-0.7t})$	0	0.4782	0.7156	0.8336	0.8922

PUNTOS PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN

¿A qué valor se aproxima *P* cuando *t* aumenta sin límite. ¿Por qué el valor de *P* nunca será 1? ¿Piensa el lector que un dominio restringido se aplicará en esta clase de aplicación?

Ejercicios de seguimiento de la sección 15.2.

1 Se hace una inversión de \$500 000 que gana intereses a la tasa de 10% por año. Si el interés se capitaliza continuamente

a) Determine la función exponencial que exprese el interés compuesto en términos de los años de inversión *t*.

b) ¿Cuál será el crecimiento que obtendrán \$500 000, si se invierten durante 5 años? ¿Y si se invierten durante 10 años?

2 Se realiza una inversión de \$800 000 que ganan interés a una tasa de 14% por año. Si el interés se capitaliza continuamente,

a) Determine la función exponencial que exprese el interés compuesto S en términos de los años de la inversión t.

b) ¿Qué crecimiento alcanzarán los \$800 000 si se invierten durante 10 años? ¿Durante 20 años?

3 En el ejercicio 1, determine la duración o tiempo requerido para que la inversión duplique su valor. Para que se cuadruplique.

4 En el ejercicio 2, determine el tiempo que tarda la inversión en duplicar su valor. En triplicarla.

5 Se hace una inversión de \$2 millones, que gana intereses a una tasa de 8% anual. Si el interés se capitaliza continuamente, *a*) ¿qué crecimiento alcanzará la inversión si se invierte durante 10 años? *b*) ¿Durante 25 años? *c*) ¿Cuánto tardará en aumentar en 50%?

6 Se realiza una inversión de \$750 000, que gana intereses a una tasa de 12% anual. Si el interés se capitaliza continuamente, *a*) ¿qué crecimiento alcanzará la inversión si se invierte durante 10 años? *b*) ¿Durante 20 años? *c*) ¿Cuánto tardará en aumentar en 150%?

7 Crecimiento de la población La población P de un país sudamericano ha estado creciendo exponencialmente a una tasa constante de 2.8% anual. En el 1 de enero de 1975 la población era de 50 millones.

a) Escriba la función general de crecimiento exponencial $P = f(t)$ para la población del país.

b) Si la tasa y el patrón de crecimiento continúan como son actualmente, ¿qué población se espera que habrá a principios de 1990? ¿Y a comienzos del año 2000?

8 En el ejercicio 7, determine el año en que se supone que la población se habrá duplicado. ¿En qué año la población habrá aumentado en 50%?

9 Desperdicios sólidos En una gran ciudad norteamericana, las toneladas anuales de desperdicios sólidos (basura) han ido aumentando en una tasa exponencial de 7% por año. Suponga que las toneladas diarias actuales son 4000 y que no han cambiado la tasa ni el patrón de crecimiento.

a) ¿Qué tonelaje diario se espera que se produzca al cabo de 10 años?

b) La actual capacidad de eliminación de los desperdicios sólidos es de 6000 toneladas por día. ¿Cuándo será insuficiente esa capacidad?

10 El valor de reventa V de un equipo industrial se comporta conforme a la ecuación

$$V = 750\,000e^{-0.05t}$$

donde t = años transcurridos desde la compra original.

a) ¿Cuál era el valor original de la pieza del equipo?

b) ¿Cuál es el valor esperado de reventa después de 5 años?

11 En el ejercicio 10, ¿cuánto tarda el valor de reventa de los activos en alcanzar 25% de su valor original?

12 Especies en peligro de extinción El Ministerio del Interior de Estados Unidos estimó que el número de venados de una especie era 80 000 al iniciarse el año 1980. Según las estimaciones de los científicos, la población de la especie muestra una disminución exponencial a una tasa de 6% por año.

a) Escriba la función de decaimiento $P = f(t)$ donde P indica el número de venados y t es el tiempo (en años) medido a partir de 1980.

b) ¿Cuál se espera que sea la población en el año 2000 si la tasa de decaimiento permanece inalterada o constante?

13 En el ejercicio 12, ¿cuándo se espera que la población llegue a 40 000?

14 En los tres últimos años, los precios de los bienes raíces en una zona del país han

ido aumentando a una tasa exponencial de 10% al año. Una casa se compró en $80 000 hace 3 años.

a) ¿Cuál es el valor estimado en el momento actual?

b) Suponiendo que el aumento de valor continúe a la misma tasa, ¿cuál será su valor al cabo de 5 años?

15 Una institución de caridad está planeando una campaña de recaudación de fondos. Por experiencia sabe que las aportaciones totales son una función de la duración de la campaña. En una ciudad se ha determinado una función de respuesta, la cual indica el porcentaje de la población R que hará un donativo en términos del número de días t de la campaña. La función es

$$R = 0.7(1 - e^{-0.05t})$$

a) ¿Qué porcentaje de la población hará un donativo después de 10 días? ¿Y después de 20 días?

b) ¿Cuál es el límite superior del valor de R?

16 Un gran banco ofrece una tarjeta de crédito que puede usarse en el país y fuera de él. Los datos recabados a lo largo del tiempo revelan que el porcentaje de cobranza de las tarjetas concedidas en un mes cualquiera es una función exponencial del tiempo transcurrido después de otorgarlas. En concreto, la función que aproxima esta relación es

$$P = f(t) = 0.9(1 - e^{-0.08t}), \qquad t \geq 0$$

donde P es el porcentaje de cuentas por cobrar (en dólares) cobradas t meses después de conceder la tarjeta.

a) ¿Qué porcentaje se espera cobrar al cabo de 1 mes?

b) ¿Qué porcentaje se espera cobrar al cabo de 3 meses?

c) ¿Qué valor aproxima P al aumentar t sin límite.

17 Respuesta a la publicidad Una gran compañía disquera vende casetes y álbumes sólo por correo directo. La publicidad se lleva a cabo a través de una red de televisión. La amplia experiencia adquirida en este tipo de promoción de ventas permite a los analistas determinar la respuesta esperada a un programa publicitario. Más exactamente, la función de respuesta a los álbumes y casetes de música clásica es $R = f(t) = 1 - e^{-0.05t}$, donde R es el porcentaje de clientes en el mercado meta que actualmente adquieren el álbum o el casete y t es el número de veces que el anuncio aparece en un programa televisivo a nivel nacional.

a) ¿Qué porcentaje del mercado meta se espera que compre una oferta de música clásica si los anuncios se muestran una vez por televisión? ¿5 veces? ¿10 veces? ¿20 veces?

b) Grafique la función de respuesta $R = f(t)$.

15.3 DERIVADAS Y SU APLICACIÓN

Derivadas de las funciones exponenciales

Cualquier función exponencial de base b ($b > 0$) puede expresarse en una forma equivalente de base e; por eso nos concentraremos en las funciones de base e y en sus derivadas exclusivamente. A fin de encontrar las derivadas de estas funciones, se necesita la siguiente regla.

REGLA 1
Si $f(x) = e^{u(x)}$, donde u es diferenciable, entonces

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

EJEMPLO 12

Considere, por ejemplo, la función $f(x) = e^x$. Si aplicamos la regla 1, el exponente $u(x) = x$. Al aplicar la regla 1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

Este resultado es una razón importante para centrarnos en las funciones de base e. El resultado especial es que *la función e^x y su derivada son idénticas.* Desde el punto de vista gráfico, la interpretación es que, para cualquier valor de x, la pendiente de la gráfica de $f(x) = e^x$ será exactamente igual al valor de la función. Calcular la derivada de $f(x) = e^x$ es muy fácil si se compara con las funciones de base b.*

EJEMPLO 13

Pongamos el caso de la función $f(x) = e^{-x^2+2x}$. Si se aplica la regla 1,

$$f'(x) = (-2x + 2)e^{-x^2+2x}$$

EJEMPLO 14

En el ejemplo 8 se explicaron los procesos de crecimiento exponencial. La función generalizada del crecimiento exponencial se presentó en la ecuación (15.10) como

$$V = f(t) = V_0e^{kt}$$

Ya se señaló que estos procesos se caracterizan por una tasa porcentual constante de crecimiento. Para verificarlo, se obtendrá la derivada

$$f'(t) = V_0(k)e^{kt}$$

que puede escribirse así:

$$f'(t) = kV_0e^{kt}$$

La derivada representa la tasa instantánea de cambio en el valor V respecto a un cambio en t. La *tasa porcentual de cambio* deberá encontrarse mediante la razón

$$\frac{\text{Tasa instántanea de cambio}}{\text{Valor de la función}} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

Para esta función,

$$\begin{aligned} \frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{kV_0e^{kt}}{V_0e^{kt}} \\ &= k \end{aligned}$$

* Para ejemplificar esto, considérese la siguiente regla de la derivada: si $f(x) = b^x$, $f'(x) = b^x \ln b$, donde ln es el logaritmo natural (de base e) de b.

Lo anterior confirma que, en una función exponencial de crecimiento de la forma de la ecuación (15.10), k representa la tasa porcentual de crecimiento. Puesto que k es una constante, la tasa será igual para todos los valores de t.

EJEMPLO 15

Examine la siguiente función para cualesquier puntos críticos y determine su naturaleza.

$$f(x) = -10\,000e^{-0.03x} - 120x + 10\,000$$

SOLUCIÓN

si se calcula f' y se hace igual a 0,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -10\,000(-0.03)e^{-0.03x} - 120 \\ &= 300e^{-0.03x} - 120 \end{aligned}$$

$$300e^{-0.03x} - 120 = 0$$

donde $$300e^{-0.03x} = 120$$

o cuando $$e^{-0.03x} = \frac{120}{300} = 0.4$$

Si consultamos la tabla 1 observamos

$$e^{-0.92} \doteq 0.4$$

Por consiguiente, $$e^{-0.03x} \doteq 0.4$$

cuando $$-0.03x = -0.92$$

o se presenta un valor crítico si $$x = 30.67$$

El único punto crítico ocurre cuando $x = 30.67$.

Continuando con la prueba de la segunda derivada, se tiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= 300(-0.03)e^{-0.03x} \\ &= -9e^{-0.03x} \\ f''(30.67) &= -9e^{-0.03(30.67)} \\ &= -9e^{-0.92} \\ &= -9(0.4) \\ &= -3.6 < 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, se presenta un *máximo relativo* cuando $x = 30.67$. El valor correspondiente de $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(30.67) &= -10\,000e^{-0.03(30.67)} - 120(30.67) + 10\,000 \\ &= -10\,000(0.4) - 3\,680.4 + 10\,000 = 2\,319.6 \end{aligned}$$

El máximo relativo se presenta en (30.67, 2319.6). La figura 15.11 contiene una gráfica de la función.

EJEMPLO 16

Cobranza En el ejemplo 11 se explicó la cobranza de cuentas por cobrar en créditos concedidos a los usuarios de tarjetas de crédito. La institución financiera determinó que el porcentaje de cuentas por cobrar P (en dólares) cobradas t meses después de otorgar el crédito es

$$P = 0.95(1 - e^{-0.7t})$$

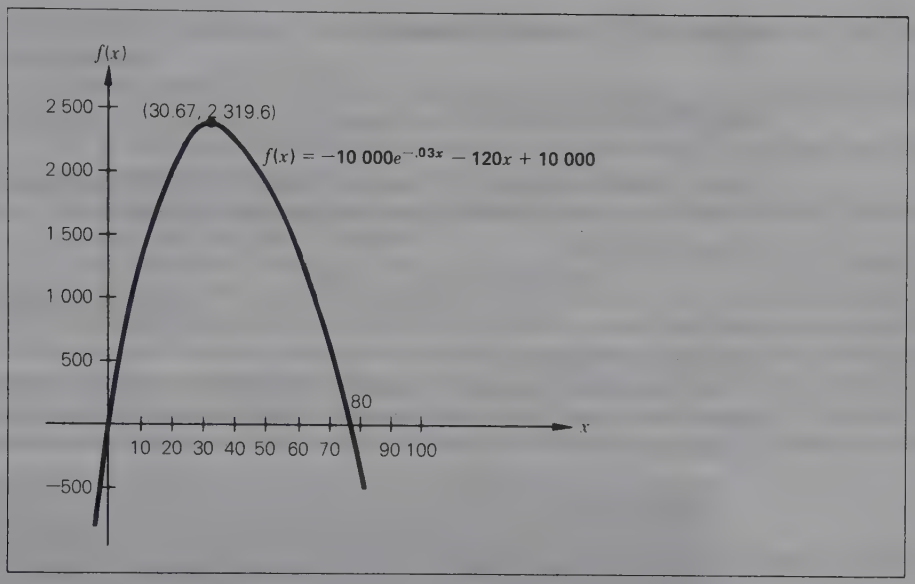


FIGURA 15.11

El crédito promedio concedido en cualquier mes es de \$100 millones. La institución financiera estima que, *por cada 100 millones de nuevos créditos* otorgados en un mes, se necesitan actividades de cobranza con un valor de \$1 millón mensual. Es decir, si hoy se otorga un crédito, costará \$1 millón mensual a la institución tratar de cobrar esas cuentas. Determine cuántos meses se deben mantener los esfuerzos de cobranza si el objetivo es maximizar la *cobranza neta* N (dólares cobrados menos los costos de cobranza).

SOLUCIÓN

Si se conceden créditos por \$100 millones, la cantidad de cuentas cobradas (en millones de dólares) será

(Importe del crédito) (porcentaje de cuentas cobradas)

o bien $$(100)(0.95)(1 - e^{-0.7t})$$

Por tanto, las cobranzas netas N se describen mediante la función

Cobranzas netas = cantidad cobrada − costos de cobranza

o
$$\begin{aligned} N &= f(t) \\ &= (100)(0.95)(1 - e^{-0.7t}) - (1)t \\ &= 95(1 - e^{-0.7t}) - t \\ &= 95 - 95e^{-0.7t} - t \end{aligned}$$

La primera derivada es

$$f'(t) = 66.5e^{-0.7t} - 1$$

Si f' se hace igual a 0,

$$\begin{aligned} 66.5e^{-0.7t} &= 1 \\ e^{-0.7t} &= 0.01503 \end{aligned}$$

De acuerdo con la tabla 1 de la solapa anterior

$$e^{-4.2} = 0.0150$$

Así pues, $e^{-0.7t} = 0.01503$ cuando

$$-0.7t = -4.2$$

y un valor crítico ocurre si

$$t = 6$$

El único punto crítico en f se presenta cuando $t = 6$. A manera de ejercicio se deja al lector la confirmación de que un máximo relativo ocurre en $t = 6$. Las cobranzas netas máximas son

$$\begin{aligned} f(6) &= 95 - 95e^{-0.7(6)} - 6 \\ &= 95 - 95(0.0150) - 6 = 95 - 1.425 - 6 = 87.575 \end{aligned}$$

o sea \$87.575 millones.

Por cada \$100 millones de créditos otorgados, las cobranzas netas serán maximizadas en un valor de \$87.575 millones si los esfuerzos de cobranza duran 6 meses.

EJERCICIO

1) Verifique que el punto crítico en $t = 6$ es un máximo relativo; y 2) ¿cuál es la cantidad total (bruta) recaudada en el periodo de 6 meses?*

Ejercicios de seguimiento de la sección 15.3

Encuentre f' para las siguientes funciones exponenciales.

1 $f(x) = e^x/2$
2 $f(x) = e^x$
3 $f(x) = 18e^{x^2}$
4 $f(x) = -6e^{x/2}$
5 $f(x) = (5e^x)^4$
6 $f(x) = 8x^2e^x$
7 $f(x) = 3xe^{x^2}$
8 $f(x) = (e^x - 6)^3$
9 $f(x) = e^x/x$
10 $f(x) = 2x^2/e^x$
11 $f(x) = (e^x)^3$
12 $f(x) = \sqrt{e^{2x}}$
13 $f(x) = e^{x^2-5x}$
14 $f(x) = e^{x^3-x^2}$
15 $f(x) = 10xe^{x^2}$
16 $f(x) = 25e^{x/2}(x^3)$
17 $f(x) = 5x^3e^{(1-x)}$
18 $f(x) = 8x^5e^{x^3}$
19 $f(x) = e^{x^2}/x^3$
20 $f(x) = e^{x^3-5x}/(x^4 - 5x^2)$
21 $f(x) = (25 - e^x)^5$
22 $f(x) = (10 - x^2 + e^x)^3$
23 $f(x) = (1 - e^{-0.05x})^4$
24 $f(x) = x^3(12 - e^{x^2})^3$

En cada una de las siguientes funciones, determine la localización de los puntos críticos y su naturaleza.

25 $f(x) = e^x$
26 $f(x) = e^{-x}$
27 $f(x) = 1\,000e^{-0.10x} + 100x - 150$
28 $f(x) = -4\,000e^{-0.01x} - 40x + 1\,000$
29 $f(x) = e^{4x+10}$
30 $f(x) = -500e^{-0.09x} + 30x$
31 $f(x) = -1\,500e^{-0.05x} - 100x + 4\,500$
32 $f(x) = xe^{-x}$
33 $f(x) = -5\,000e^{-0.02x} - 50x + 5\,000$
34 $f(x) = 2\,000e^{-0.05x} + 200x - 3\,000$
35 $f(x) = 10\,000e^{-0.03x} - 120x + 10\,000$
36 $f(x) = 1\,000e^{-0.02x} + 10x - 1\,250$

37 Una institución de caridad está planeando una campaña de recaudación de fondos en una gran ciudad de Estados Unidos que tiene una población de 3 millones de habitantes. El porcentaje de la población que hará un donativo se estima por medio de la función

$$R = 1 - e^{-0.02x}$$

---

*Respuesta: \$93.575 millones.

donde R es el porcentaje de la población y x indica el número de días de duración de la campaña.

Por experiencia se sabe que la aportación promedio en esta ciudad es de \$4 por donante. Los costos de la campaña se estiman en \$20 000 diarios.

a) ¿Cuantos días deberá durar la campaña para maximizar los ingresos netos (aportaciones totales menos costos totales) de la campaña?

b) ¿Qué ingresos netos se esperan recabar? ¿Qué porcentaje de la población se espera que haga un donativo?

38 Una compañía distribuidora de discos vende discos y casetes exclusivamente por correo. La publicidad se realiza en las estaciones locales de televisión. Está planeándose un gran programa promocional para una importante área metropolitana en favor de un nuevo álbum de música country (música folklórica). La audiencia meta (las personas a quienes interesa este tipo de álbum) se estima en 800 000. Por experiencia se sabe que, en esta ciudad y para este tipo de álbum, el porcentaje del mercado meta R que adquirirá un álbum o casete es una función de duración de la campaña publicitaria t. En concreto, esta *función de respuesta de ventas* es

$$R = 1 - e^{-0.025t}$$

El margen de utilidad en cada álbum es \$2.50. Los costos de publicidad incluyen un costo fijo de \$20 000 y un costo variable de \$2500 diarios.

a) Determine cuánto deberá durar la campaña para que se maximicen las *utilidades netas* (utilidad bruta menos costos de publicidad).

b) ¿Cuál es la utilidad máxima neta esperada?

c) ¿Qué porcentaje del mercado meta se espera que compre el álbum?

39 Suponga, en el ejemplo 16, que la cantidad promedio de créditos concedidos mensualmente sea \$150 millones y que los costos mensuales de cobranza asciendan a \$0.5 millones. Vuelva a resolver el problema.

40 Un departamento de policía ha descubierto que el índice de crímenes que se cometen diariamente en la ciudad depende del número de oficiales asignados a cada turno. En concreto, la función que describe esta relación es

$$N = f(x) = 500 - 10xe^{-0.025x}$$

donde N es la tasa promedio de crímenes diarios y x denota el número de oficiales asignados a cada turno. Calcule el número de oficiales que producirán la mínima tasa promedio de criminalidad por día. ¿Cuál mínima tasa promedio de crímenes diarios?

41 Las utilidades anuales de una empresa se expresan en función del número de vendedores contratados. La función de utilidades es

$$P = 40(x)e^{-0.002x}$$

donde P es la utilidad expresada en miles de dólares y x indica el número de vendedores.

a) Determine el número de vendedores que maximizarán la utilidad anual.

b) ¿Cuál se espera que sea la utilidad máxima?

15.4 FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y SUS DERIVADAS

En la presente sección se explica otra clase de funciones que guardan relación directa con las funciones exponenciales.

Logaritmos

El ***logaritmo*** es la *potencia* a la que debe ser elevada una *base* para que produzca determinado número (es decir, el logaritmo es un exponente). Considere la ecuación

$$2^3 = 8$$

El exponente 3 puede considerarse el logaritmo (con base 2) del número 8. En otras palabras, *3 es la potencia a la que debe ser elevado el 2 para generar el número 8*. Esta propiedad logarítmica puede expresarse así:

$$3 = \log_2 8$$

En general,

$$\boxed{y = b^x \iff x = \log_b y \text{ para } b > 0}$$

Nos ocuparemos de situaciones donde la base b esté restringida a valores positivos diferentes de 1.

EJEMPLO 17

A continuación se ofrecen algunas proposiciones de pares equivalentes de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Ecuación logarítmica	Ecuación exponencial
$4 = \log_2 16$	$\iff 2^4 = 16$
$2 = \log_{10} 100$	$\iff 10^2 = 100$
$3 = \log_3 27$	$\iff 3^3 = 27$
$-1 = \log_{10} 0.1$	$\iff 10^{-1} = 0.1$

Ecuación exponencial	Ecuación logarítmica
$10^4 = 10{,}000$	$\iff 4 = \log_{10} 10{,}000$
$4^3 = 64$	$\iff 3 = \log_4 64$
$5^2 = 25$	$\iff 2 = \log_5 25$
$10^{-2} = 0.01$	$\iff -2 = \log_{10} 0.01$

Las dos bases de mayor uso de los logaritmos son la base 10 y la base e. Casi todos los lectores seguramente tendrán experiencia con los de *base 10*, llamados también ***logaritmos comunes***.* Los logaritmos que usan $e = 2.718\ldots$ como base reciben el nombre de ***logaritmos naturales***.† Esta clase de logaritmos proviene del empleo de las funciones exponenciales que tienen e por base.

Los logaritmos comunes pueden denotarse por

---

* Algunas veces a éstos se les llama logaritmos *briggsianos* (en honor de H. Briggs, quien fue el primero en usarlos).

† A los logaritmos naturales se les da el nombre de logaritmos *neperianos*, en honor del escocés, John Napier.

$$x = \log_{10} y$$

Sin embargo, como la mayor parte de los cálculos de logaritmos incluye la base 10, una forma más frecuente de expresarlos es

$$x = \log y$$

donde la base, aunque no se indica, es implícitamente 10. Los logaritmos de base e o naturales pueden denotarse con

$$x = \log_e y$$

pero más comúnmente se indican por medio de

$$x = \ln y$$

Un logaritmo que tenga una base b que no sea 10 ni e deberá expresarse como

$$x = \log_b y$$

Los procedimientos con que se calculan los valores de los logaritmos comunes no se explicarán aquí. Los ejemplos presentados en el libro se referirán exclusivamente a los logaritmos naturales. La tabla 2 (de la solapa posterior) contiene valores de logaritmos naturales. Si no se desea utilizar tablas, pueden emplearse las calculadoras manuales científicas que tienen una función de logaritmos naturales para determinar estos valores.

Propiedades de los logaritmos

Con los logaritmos pueden conseguirse ciertas eficiencias, cuando se necesita calcular números muy grandes o muy pequeños. Tales eficiencias pueden atribuirse en parte a ciertas propiedades de los logaritmos. A continuación se describen algunas de las propiedades más importantes.

Propiedad 1. $\log_b uv = \log_b u + \log_b v$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \log_{10}[(100)(1\,000)] &= \log_{10} 100 + \log_{10} 1\,000 \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln 8\,000 &= \ln[(40)(200)] \\ &= \ln 40 + \ln 200 \\ &= 3.6889 + 5.2983 \qquad \text{(de la tabla 2)} \\ &= 8.9872 \end{aligned}$$

Propiedad 2. $\log_b \dfrac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$

Ejemplos:

$$\log_{10} \frac{10\,000}{100} = \log_{10} 10\,000 - \log_{10} 100$$

$$= 4 - 2 = 2$$

$$\ln 37.5 = \ln \frac{75}{2}$$
$$= \ln 75 - \ln 2$$
$$= 4.3175 - 0.6931 \quad \text{(de la tabla 2)}$$
$$= 3.6244$$

Propiedad 3. $\log_b u^n = n \log_b u$

Ejemplos:
$$\log_{10} 100^2 = 2 \log_{10} 100$$
$$= 2(2) = 4$$
$$\ln 10{,}000 = \ln(100)^2$$
$$= 2 \ln 100$$
$$= 2(4.6052) \quad \text{(de la tabla 2)}$$
$$= 9.2104$$

Propiedad 4. $\log_b b = 1$

Ejemplos:
$$\log_{10} 10 = 1 \quad (10^1 = 10)$$
$$\ln e = 1 \quad (e^1 = e)$$

Propiedad 5. $\log_b 1 = 0$

Ejemplos:
$$\log_{10} 1 = 0 \quad (10^0 = 1)$$
$$\ln 1 = 0 \quad (e^0 = 1)$$

Propiedad 6. $b^{\log_b x} = x$

Ejemplo:
$$10^{\log_{10} 100} = 10^2 = 100$$

Propiedad 7. $\log_b b^x = x$

Ejemplo:
$$\log_2 2^5 = 5$$

Solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

A lo largo del libro hemos tenido que despejar las raíces de ecuaciones. En general, estas últimas han sido de forma polinomial (casi siempre lineales, cuadráticas o cúbicas). En los siguientes ejemplos se explica la solución de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

EJEMPLO 18

Para resolver la ecuación logarítmica,

$$\ln x^2 + \ln x = 9$$

se aplica la propiedad 3, y el resultado será

$$\begin{aligned} 2 \ln x + \ln x &= 9 \\ 3 \ln x &= 9 \\ \ln x &= 3 \end{aligned}$$

De acuerdo con la tabla 2, ln 20 = 2.9957. En consecuencia, puede afirmarse que $x = 20$ es la raíz de la ecuación dada.

EJEMPLO 19

Para resolver la ecuación logarítmica

$$\ln(x^2 + 2) - \ln x^2 = 2$$

Se aplica la propiedad 2 al miembro izquierdo de la ecuación y se obtiene

$$\ln \frac{x^2 + 2}{x^2} = 2$$

Nuestro conocimiento de las relaciones logarítmicas nos permite reescribir esta ecuación en la forma exponencial equivalente

$$e^2 = \frac{x^2 + 2}{x^2}$$

o bien, de la tabla 1,

$$\begin{aligned} 7.3891 &= \frac{x^2 + 2}{x^2} \\ 7.3891\, x^2 &= x^2 + 2 \\ 6.3891\, x^2 &= 2 \\ x^2 &= \frac{2}{6.3891} \\ x^2 &= 0.3130 \end{aligned}$$

y

$$x = \pm 0.5595$$

EJEMPLO 20

Para resolver la ecuación exponencial

$$e^{2x} = 5$$

el logaritmo natural se toma en ambos miembros de la ecuación, produciendo

$$\ln e^{2x} = \ln 5$$

o bien

$$2x = \ln 5$$

De acuerdo con la tabla, ln 5 es igual a 1.6094 y

$$\begin{aligned} 2x &= 1.6094 \\ x &= 0.8047 \end{aligned}$$

EJEMPLO 21

En el ejemplo 15 se resolvió la ecuación

$$e^{-0.03x} = 0.4$$

por medio de la tabla 1. Otro método consistiría en calcular el logaritmo natural de ambos miembros de la ecuación y se obtendría

$$\ln e^{-0.03x} = \ln 0.4$$

o

$$-0.03x = \ln 0.4$$

En la tabla 2, se observa que ln 0.4 es −0.9163 y

$$-0.03x = -0.9163$$

$$x = \frac{-0.9163}{-0.03} = 30.54$$

que es una solución más exacta que la conseguida en el ejemplo 15.

Funciones logarítmicas

Cuando una variable se expresa en términos del logaritmo de otra, a la función se le llama ***función logarítmica***.

Una ***función logarítmica*** presenta la forma

$$y = f(x) = \log_b u(x) \qquad (15.12)$$

donde $b > 0$, pero $b \neq 1$.

Los siguientes son ejemplos de funciones logarítmicas:

$$f(x) = \log x$$
$$f(x) = \ln x$$
$$f(x) = \log(x - 1)$$
$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$$

EJEMPLO 22

Supóngase que se desea graficar la función $y = \ln x$, donde $x > 0$. La función $y = \ln x$ puede graficarse utilizando dos procedimientos. Si los valores de ln x están disponibles (por medio de tablas o de una calculadora manual), la función se puede graficar directamente. Empleando la tabla 2 que viene al final del libro, los valores muestra de ln x se incluyen en la tabla 15.4. La forma general de esta función se indica en la figura 15.12.

TABLA 15.4

x	0.1	0.5	1	10	100	200	300
ln x	−2.3026	−0.6932	0	2.3026	4.6052	5.2983	5.7038

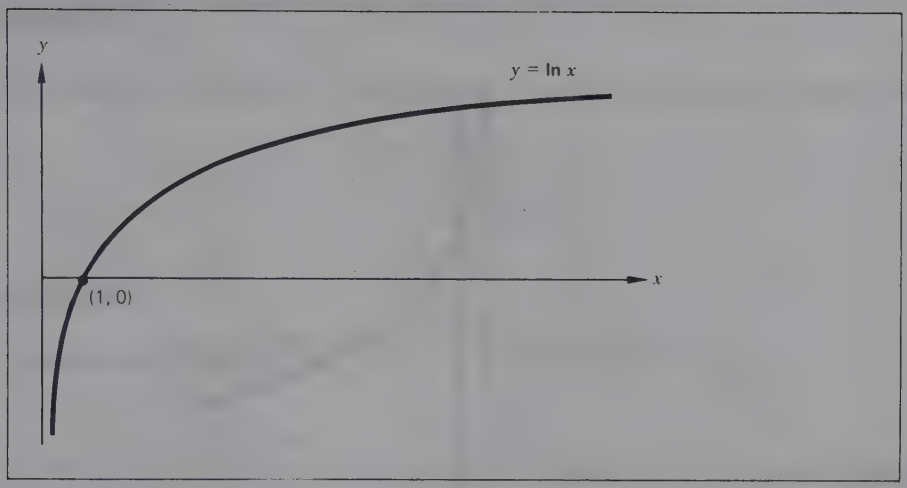


FIGURA 15.12

Otro procedimiento con que se grafica una función logarítmica consiste en reescribir la función en su forma exponencial equivalente. La forma exponencial equivalente de $y = \ln x$ es

$$e^y = x$$

Si *se suponen los valores de y* y se obtienen los valores correspondientes de x, podrá generarse un conjunto de puntos de datos. La tabla 1 puede usarse para evaluar e^y. Los puntos de datos muestra se dan en la tabla 15.5. Si se grafican (recordando que x es la variable independiente en la función de interés $y = \ln x$), la gráfica será idéntica a la de la figura 15.12.

TABLA 15.5

y	-1	-0.5	0	1	2	3	4
$x = e^y$	0.3679	0.6065	1.000	2.7183	7.3891	20.086	54.598

Un examen de la figura 15.12 revela que la función de logaritmos naturales $y = \ln x$ es una función creciente; por otra parte, $y > 0$ cuando $x > 1$, $y = 0$ cuando $x = 1$ y $y < 0$ cuando $0 < x < 1$.

EJEMPLO 23

Para graficar la función logarítmica

$$y = 5 - 3\ln(x + 1) \qquad x > -1$$

se determinan pares ordenados de valores (x, y). La tabla 15.6 presenta valores muestra. En la figura 15.13 se ofrece una gráfica de la función. Obsérvese que la función decrece monotónicamente y que la curva tiene una asíntota vertical de $x = -1$.

TABLA 15.6

x	-0.5	0	1	2	5	10
$y = 5 - 3\ln(x + 1)$	7.0796	5	2.9204	1.7042	-0.3754	-2.1937

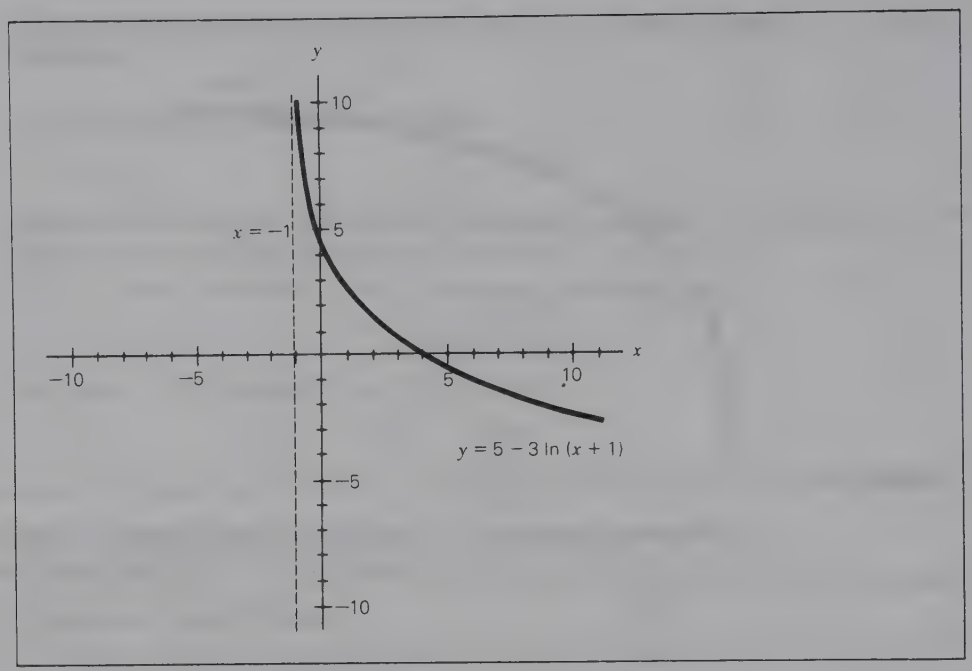


FIGURA 15.13

Derivadas de funciones logarítmicas

REGLA 2
Si $f(x) = \ln u(x)$ donde u es diferenciable, entonces

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

EJEMPLO 24

Considere la función

$$f(x) = \ln x$$

Si se hace $u(x) = x$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

La derivada de $f(x) = \ln x$ es

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

EJEMPLO 25

Considérese la función $f(x) = \ln (5x^2 - 2x + 1)$. La aplicación de la regla 2 nos da

$$u(x) = 5x^2 - 2x + 1$$

y

$$f'(x) = \frac{10x - 2}{5x^2 - 2x + 1}$$

EJEMPLO 26

Examinemos la función

$$f(x) = x \ln x$$

en busca de valores extremos. Primero, la derivada se calcula aplicando la regla del producto como

$$f'(x) = 1 \ln x + \frac{1}{x} x$$
$$= \ln x + 1$$

Si hacemos f' igual a 0

$$\ln x + 1 = 0 \quad \text{cuando} \quad \ln x = -1$$

La ecuación exponencial equivalente es

$$x = e^{-1}$$

Según la tabla 1

$$e^{-1} = 0.3679$$

Por tanto, ocurre un valor crítico cuando $x = 0.3679$.

Para determinar la naturaleza del punto crítico en $x = 0.3679$, la segunda derivada es

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

y

$$f''(0.3679) = \frac{1}{0.3679} = 2.7181 > 0$$

En consecuencia, se presenta un mínimo relativo en f si $x = 0.3679$.

Ejercicios de seguimiento de la sección 15.4

En cada una de las siguientes ecuaciones exponenciales, escriba la ecuación logarítmica equivalente.

1 $2^5 = 32$
2 $5^2 = 25$
3 $6^4 = 1\,296$
4 $4^3 = 64$
5 $3^5 = 243$
6 $7^3 = 343$
7 $5^4 = 625$
8 $8^4 = 4\,096$
9 $10^3 = 1\,000$
10 $4^6 = 4\,096$
11 $2^{-3} = \frac{1}{8}$
12 $5^{-2} = 0.04$
13 $(0.5)^{-3} = 8$
14 $(0.2)^{-4} = 625$
15 $(0.1)^{-4} = 10{,}000$
16 $(0.4)^{-3} = 15.625$
17 $4^{-3} = 0.015625$
18 $2^{-4} = 0.0625$
19 $(0.25)^{-2} = 16$
20 $(0.2)^{-3} = 125$

En cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas, escriba la ecuación exponencial equivalente.

21 $\log_2 64 = 6$
22 $\log_2 128 = 7$
23 $\log_4 256 = 4$
24 $\log_4 64 = 3$
25 $\log_3 81 = 4$
26 $\log_3 729 = 6$
27 $\log_2 0.25 = -2$
28 $\log_2 0.0625 = -4$
29 $\log_5 625 = 4$
30 $\log_5 3125 = 5$
31 $\log_{0.1} 1\,000 = -3$
32 $\log_{0.1} 10\,000 = -4$
33 $\log_{0.2} 625 = -4$
34 $\log_{0.2} 25 = -2$
35 $\log_{0.25} 16 = -2$
36 $\log_{0.25} 64 = -3$
37 $\ln 3 = 1.0986$
38 $\ln 5 = 1.6094$
39 $\ln 20 = 2.9957$
40 $\ln 100 = 4.6052$

Por medio de la tabla 2, determine los valores de los siguientes logaritmos.

41 $\ln 40$
42 $\ln 600$
43 $\ln 200$
44 $\ln 80$
45 $\ln 17.5$
46 $\ln 0.1$
47 $\ln 0.5$
48 $\ln 0.75$
49 $\ln 160$
50 $\ln 0.01$
51 $\ln 425$
52 $\ln 10\,000$
53 $\ln 150$
54 $\ln 750$
55 $\ln 1\,600$
56 $\ln 2\,400$
57 $\ln 25\,000$
58 $\ln 1\,000{,}000$
59 $\ln 1\,050$
60 $\ln 675$

Resuelva las siguientes ecuaciones.

61 $\ln x^3 - \ln x = 2$
62 $3 \ln 2x - 4 = 2 \ln 2x$
63 $x \ln x - \ln x = 0$
64 $x^2 \ln x - 4 \ln x = 0$
65 $\ln(x + 1) - \ln x = 0.5$
66 $\ln(x^2 + 3) - \ln x^2 = 1$
67 $e^{3x} = 20$
68 $e^{-2x} = 40$
69 $5e^{x^2} = 400$
70 $e^{-0.25x} = 16$
71 $3e^{2x} = 60$
72 $e^{2.5x} = 40$
73 $5e^{-1.5x} = 125$
74 $3e^{-2x} = 75$
75 $2 \ln x^4 - \ln x^2 = 12$
76 $x^2 \ln x - 9 \ln x = 0$
77 $x^4 \ln x - \ln x = 0$
78 $\ln(x - 3) - \ln x = 1.5$
79 $10e^{5x} = 25$
80 $3e^{-0.5x} = 10$

Grafique las siguientes funciones logarítmicas.

81 $f(x) = \ln(x/4)$
82 $f(x) = \ln x^3$
83 $f(x) = -2 \ln(x + 8)$
84 $f(x) = 10 - 3 \ln x$
85 $f(x) = \ln(x^2 + 10)$
86 $f(x) = \ln(3x - 5)$
87 $f(x) = \ln(x^2 - 5) + 10$
88 $f(x) = \ln(10 - x) - 5$
89 $f(x) = \ln(x + 3)/2$
90 $f(x) = 10 - \ln x$

***91** En la siguiente función logarítmica general

$$y = a \ln(x + b) - c$$

donde a, b y c son constantes, determine la expresión de a), la intersección con el eje x y b) la intersección con el eje y.

*92 En la función exponencial general

$$y = -e^{kx} + c$$

donde k y c son constantes, determine la expresión a) de la intersección con el eje x y b) de la intersección con el eje y.

En las siguientes funciones logarítmicas calcule f'.

93 $f(x) = \ln(6x)$
94 $f(x) = \ln(x/4)$
95 $f(x) = \ln(x^2 + 8)$
96 $f(x) = \ln(x^3 + 3x^2 + 6)$
97 $f(x) = x^3 \ln x$
98 $f(x) = (x + 3) \ln x^3$
99 $f(x) = 28x/\ln x$
100 $f(x) = [\ln x]^4$
101 $f(x) = \ln(5x^4 - 6x^3)$
102 $f(x) = x^5 - 5 \ln(x^2 - 6)$
103 $f(x) = 5x^3 \ln x$
104 $f(x) = (\ln x)/x^2$
105 $f(x) = 3x^2 \ln x^2$
106 $f(x) = (x^3 - 2x)/\ln x$
107 $f(x) = [\ln(x - 5)]^3$
108 $f(x) = [\ln(20 - x^2)]^4$
109 $f(x) = \ln(15 - x)/x$
110 $f(x) = \ln x/\ln(x + 1)$

En las siguientes funciones logarítmicas localice los puntos críticos y determine su naturaleza.

111 $f(x) = \ln 30x - 6x$
112 $f(x) = 4 + \ln x$
113 $f(x) = \ln x - x^2/4$
114 $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$
115 $f(x) = -4 \ln x - x^2/2 + 5x$
116 $f(x) = -10 \ln x - x^2/2 + 7x$
117 $f(x) = x^2 \ln x$
118 $f(x) = 8x \ln x$
119 $f(x) = x^2 \ln x/2$
120 $f(x) = \ln 5x - 10x$
121 $f(x) = \ln 10x + 20x$
122 $f(x) = \ln 8x - x^2$
123 $f(x) = \ln 18x - x^2$
124 $f(x) = \ln 50x - x^2$
125 $f(x) = \ln 24x - x^3$
126 $f(x) = \ln 81x - x^3$

15.5 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS

En los siguientes ejemplos se explican las aplicaciones de las funciones logarítmicas.

EJEMPLO 27

Crecimiento bacteriano Se cree que muchas clases de bacterias tienen un crecimiento exponencial según funciones de la forma

$$\boxed{P = f(t) = P_0 e^{kt}} \qquad \textbf{(15.13)}$$

donde P es la población en el tiempo t, P_0 indica la población cuando $t = 0$ y k es la constante de crecimiento (tasa porcentual de crecimiento). Las funciones de crecimiento exponencial se describen en la sección 15.3. Determine el periodo que se requiere para que una población inicial duplique su tamaño.

SOLUCIÓN

Si se duplica una población inicial,

$$\frac{P}{P_0} = 2$$

Si ambos miembros de la ecuación (15.13) se dividen entre P_0,

$$\frac{P}{P_0} = e^{kt}$$

La población se duplicará cuando

$$e^{kt} = 2$$

Tomando el logaritmo natural de ambos miembros de esta ecuación

$$kt = \ln 2$$

y el tiempo requerido para la duplicación es

$$\boxed{t = \frac{\ln 2}{k}} \qquad \textbf{(15.14)}$$

Si la constante de crecimiento de determinada bacteria es 0.4 y t se expresa en horas, el tiempo que tarda la población en duplicarse será

$$t = \frac{\ln 2}{0.4}$$
$$= \frac{0.6932}{0.4} = 1.733 \text{ horas}$$

PUNTO PARA REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN
¿Es el tiempo de duplicación, determinado en la ecuación (15.14), adecuado sólo para que se duplique el tamaño de la población inicial o es un tiempo generalizado para la población en *cualquier* momento?

EJEMPLO 28

Vida media Una función de decaimiento exponencial tiene la forma general

$$\boxed{V = V_0 e^{-kt}} \qquad \textbf{(15.15)}$$

donde *V es el valor de la función en el tiempo t, V_0 indica el valor de la función cuando $t = 0$ y k es la constante de decaimiento (tasa porcentual de decaimiento).* Muchos procesos naturales se caracterizan por el comportamiento de decaimiento (deterioro) exponencial. Uno de ellos es el proceso de desintegración de algunas sustancias radiactivas. Una medida frecuentemente citada al examinarlas es su ***vida media***. Es el tiempo que una cantidad de sustancia tarda en ser reducida por un factor de ½. En las funciones de decaimiento exponencial de la forma de la ecuación (15.15), la vida media es una función de la constante de decaimiento.

Supóngase que la cantidad de una sustancia radiactiva se calcula por medio de la ecuación (15.15). La cantidad de la sustancia se reducirá a la mitad cuando

$$\frac{V}{V_0} = 0.5$$

o cuando

$$e^{-kt} = 0.5$$

Tomando el logaritmo natural de ambos lados de esta ecuación,

$$-kt = \ln 0.5$$

y

$$\boxed{t = \frac{\ln 0.5}{-k}} \qquad \textbf{(15.16)}$$

La constante de desintegración del estroncio 90 es $k = 0.0244$, donde t se mide en años. Una cantidad de estroncio 90 se reducirá a la mitad de su tamaño si

$$t = \frac{\ln 0.5}{-0.0244}$$
$$= \frac{-0.6932}{-0.0244} = 28.40 \text{ años}$$

EJEMPLO 29

Administración de la asistencia social Una oficina recién creada de asistencia pública está tratando de calcular el número de analistas que debe contratar para procesar las solicitudes de ayuda. Un grupo de expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de procesar una solicitud es una función del número de analistas x. En concreto, la función de costo es

$$C = f(x) = 0.001x^2 - 5 \ln x + 60$$

Determine el número de analistas que deberían ser contratados a fin de minimizar el costo promedio por solicitud.

La derivada de f es

$$f'(x) = 0.002x - 5\frac{1}{x}$$
$$= 0.002x - \frac{5}{x}$$

Si hacemos f' igual a 0,

$$0.002x = \frac{5}{x}$$
$$0.002x^2 = 5$$
$$x^2 = \frac{5}{0.002}$$
$$x^2 = 2\,500$$

y un valor crítico ocurre cuando

$$x = 50$$

El valor de $f(x)$ en el punto crítico es

$$f(50) = 0.001(50)^2 - 5 \ln 50 + 60$$
$$= 0.001(2\,500) - 5(3.912) + 60 = 2.5 - 19.56 + 60 = \$42.94$$

Para verificar la naturaleza del punto crítico,

$$f''(x) = 0.002 + 5x^{-2}$$
$$= 0.002 + \frac{5}{x^2}$$
$$f''(50) = 0.002 + \frac{5}{(50)^2}$$
$$= 0.002 + \frac{5}{2\,500} = 0.002 + 0.002 = 0.004 > 0$$

Por consiguiente, ocurre un mínimo relativo para f si $x = 50$. El costo promedio de procesamiento por solicitud se minimiza a un valor de \$ 42.94 cuando se contrata a 50 analistas. La figura 15.14 ofrece una gráfica de la función de costo/promedio.

EJEMPLO 30

Elasticidad de la demanda Un concepto muy importante de la economía y la teoría de precios es la ***elasticidad de la demanda ante los precios*** o simplemente, ***elasticidad de la demanda.*** Si se conoce la *función de demanda* de un producto y un punto particular (p, q) en la función, la elasticidad de la demanda es la razón

$$\frac{\text{Cambio porcentual de la cantidad demandada}}{\text{Cambio porcentual del precio}}$$

Esta razón es la medida de la respuesta relativa de la demanda ante el cambio del precio. En el caso de funciones no lineales de demanda, la respuesta relativa varía de un punto a otro en la función. En el cálculo de la elasticidad de la demanda en un punto determinado, la elasticidad de la demanda representa una *medida instantánea* de la respuesta relativa.

La ecuación (15.17) es la fórmula con que se calcula la elasticidad de la demanda η.

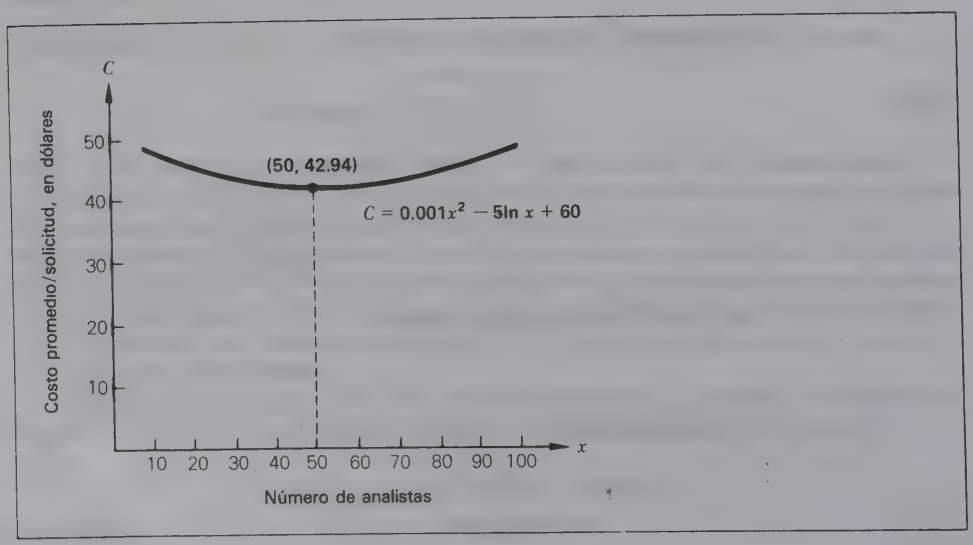


FIGURA 15.14

$$\eta = -\frac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = -\frac{dq/q}{dp/p} = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \tag{15.17}$$

En las funciones típicas, las siguientes funciones se asignan a distintos valores de η.

- *Caso 1* ($\eta > 1$): el cambio porcentual de la demanda es mayor que el del precio (por ejemplo, un cambio de 1% en el precio produce un cambio mayor que 1% en la demanda). En estas regiones de una función de demanda, se dice que la demanda es ***elástica.***
- *Caso 2* ($\eta < 1$): el cambio porcentual de la demanda es menor que el del precio. En estas regiones de la función de demanda, se dice que la demanda es ***inelástica.***
- *Caso 3* ($\eta = 1$): el cambio porcentual de la demanda es igual al del precio. En estas regiones de la función de demanda, se dice que la demanda es ***elástica por unidad.***

Considere la relación de demanda

$$p = 200 - 25 \ln q \tag{15.18}$$

Para determinar el valor de η, hay que calcular dq/dp. Sería un poco difícil despejar q en la ecuación (15.18). No obstante, a partir de la ecuación (13.8), si se obtiene dp/dq se sabe que

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{dp/dq} \qquad \frac{dp}{dq} \neq 0$$

De acuerdo con la ecuación (15.18)

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{25}{q}$$

Por tanto,

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{-25/q}$$
$$= -q/25$$

En caso de un nivel de demanda de 100, el precio correspondiente será

$$\begin{aligned} p &= 200 - 25 \ln 100 \\ &= 200 - 25(4.6052) \qquad \text{(de la tabla 2)} \\ &= 84.87 \end{aligned}$$

En este punto en la función de demanda la elasticidad de la demanda es

$$\begin{aligned} \eta &= \left(-\frac{84.87}{100}\right)\left(-\frac{100}{25}\right) \\ &= 3.3948 \end{aligned}$$

La interpretación de este resultado es que la respuesta relativa e instantánea de la demanda ante un cambio de precio se da a una tasa de 3.3948 a 1. Es decir, un incremento de 1% (o un decremento de 1%) en el precio producirá (aproximadamente) una disminución (aumento) de 3.3948% en la demanda. La demanda es elástica en este punto.

Ejercicios de seguimiento de la sección 15.5

1 Una compañía está contratando personal para que labore en su planta. Para el trabajo que se desempeñará, los expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de realizar la tarea es una función del número de personas contratadas x. En concreto,

$$C = f(x) = 0.005x^2 - 0.49 \ln x + 5$$

a) Determine el número de personas que deberían ser contratadas para minimizar el costo promedio.
b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio?

2 En la relación de demanda del ejemplo 30,

$$p = 200 - 25 \ln q$$

a) Determine la elasticidad de la demanda cuando esta última es 100 y
b) Determine la elasticidad de la demanda cuando esta última es 150.

3 En la relación de demanda

$$p = 800 - 75 \ln q$$

determine la elasticidad de la demanda cuando esta última es 200.

4 Un cultivo de la bacteria *E. coli* está creciendo en un medio que consta de sales inorgánicas y glucosa. La bacteria tiene una población inicial de 10^6 por milímetro y crece a una tasa exponencial con una constante de desarrollo de $k = 0.8$.

a) Determine la función de crecimiento exponencial $f(t)$ donde t se da en horas.
b) ¿Cuál es el tiempo de duplicación?
c) ¿Cuál es el tiempo de triplicación?

5 Una bacteria determinada crece a una tasa exponencial con una constante de crecimiento $k = 0.40$. La bacteria tiene una población inicial de 10^5 por mililitro.

a) Determine la función de crecimiento exponencial $f(t)$ donde t se da en horas.
b) ¿Cuál es el tiempo de duplicación?
c) ¿Cuál es el tiempo de triplicación?

6 Un cultivo de levadura crece a una tasa exponencial. La población del cultivo se duplica al cabo de 3 horas. Determine la constante de crecimiento k.

7 Una sustancia radiactiva tiene una constante de desintegración $k = 0.350$. Si t se mide en horas, determine la vida media de la sustancia. ¿Cuál es su cuarto de vida (el tiempo que tarda en reducirse la cantidad en ¼)?

8 Un isótopo radiactivo con el cual se examina la glándula tiroides tiene una constante de desintegración $k = 0.150$. Si en la corriente sanguínea se introduce un trazador de 4 unidades del isótopo,

a) Determine la función de decaimiento exponencial $f(t)$ donde t se da en días.
b ¿Qué cantidad de radiactividad se espera que quede en la sangre después de 8 días?
c) ¿Cuál es la vida media del isótopo?

9 Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 20 000 años. Determine la constante de decaimiento k.

10 La cantidad de un medicamento contenida en la corriente sanguínea puede describirse mediante una función de decaimiento exponencial, donde t se expresa en horas. Si la vida media de medicamento es 4 horas, ¿cuál será la constante de decaimiento k?

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

capitalización continua 706
conversion en funciones de base e 702
elasticidad de la demanda 732
función exponencial 697
funciones exponenciales de base e 701
función exponencial modificada 702
logaritmo 720
logaritmo común 720
logaritmo natural 720
proceso de decaimiento exponencial 705
proceso de crecimiento exponencial 705
solucion de ecuaciones logarítmicas y exponenciales 722

■ FÓRMULAS IMPORTANTES

$S = P(1 + i)^n$ Monto compuesto (15.4)

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (15.8)

$S = Pe^{it}$ Monto compuesto (capitalización continua) (15.9)

$V = V_0e^{kt}$ Proceso de crecimiento exponencial (15.10)

$V = V_0e^{-kt}$ Proceso de decaimiento exponencial (15.11)

$t = \frac{\ln 2}{k}$ Tiempo de duplicación (crecimiento exponencial) (15.14)

$t = \frac{\ln 0.5}{-k}$ I vida media (decaimiento exponencial) (15.16)

$\eta = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ Elasticidad de la demanda (15.17)

Si $f(x) = e^{u(x)}, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

$y = b^x \iff x = \log_b y$

Si $y = \ln u(x), f'(x) = u'(x)/u(x)$

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-18 se relacionan con la sección 15.1. En cada una de las siguientes funciones exponenciales calcule $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.

1 $f(x) = e^{x/3}$
2 $f(x) = e^{x^2/4}$
3 $f(x) = 5(1 - e^x)$
4 $f(x) = 4(1 - e^{2x})$
5 $f(x) = e^{-2x}$
6 $f(x) = e^{-0.5x}$
7 $f(x) = x^2e^x$
8 $f(x) = x^3e^{-x}$
9 $f(x) = 4 - 3^x$
10 $f(x) = x/e^x$

Convierta las siguientes funciones en funciones exponenciales de base e.

11 $f(x) = (2.8)^x$
12 $f(x) = 20(2.56)^{x^2}$
13 $f(x) = 5(.2)^{x/2}$
14 $f(x) = -6(85)^{x/3}$
15 $f(x) = 3^x$
16 $f(x) = 5(100)^{x^2}$
17 $f(x) = 20/(5)^x$
18 $f(x) = 15/(40)^x$

Los ejercicios 19-26 se relacionan con la sección 15.2.

19 Valor presente: capitalización continua Si se supone una capitalización continua, el valor presente P de S dólares en t años en el futuro puede expresarse con la función

$$P = f(t) = Se^{-it}$$

Suponiendo un interés de 10% por año capitalizado constantemente, ¿qué suma debería depositarse hoy si se desea obtener \$100 000 en un plazo de 12 años?

20 La población de una especie de peces se ha estimado en 300 millones. Los científicos sospechan que la población tiene un crecimiento exponencial a una tasa de 5.5% por año. Si la tasa y el patrón de crecimiento se mantienen estables, ¿cuál se espera que sea la población al cabo de 20 años?

21 Servicios públicos El número de teléfonos que se instalan diariamente en una ciudad es de 150. Los funcionarios de la compañía de teléfonos piensan que el número de aparatos instalados cada día seguirá aumentando exponencialmente a una tasa de 6% por año. Si esa tendencia se cumple, ¿cuál se espera que sea la tasa diaria de instalaciones dentro de 10 años? ¿Y dentro de 20 años?

22 La población de una especie en peligro de extinción ha ido *disminuyendo* exponencialmente a una tasa de 5% por año. Si la población actual es de 800 000, ¿cuál se espera que sea la población en 10 años? ¿Y en 20 años?

23 Asignación de vigilancia policiaca Un departamento de policía descubrió que la tasa promedio de crímenes diarios depende del número de oficiales que asigne a cada turno. La función que describe esta relación es

$$\begin{aligned} N &= f(x) \\ &= 250 - 6xe^{-0.03x} \end{aligned}$$

donde N es la tasa promedio de crímenes diarios y x denota el número de oficiales asignados a cada turno. ¿Cuál es la tasa promedio de crímenes diarios si se asignan 20 oficiales? ¿Y si se asignan 40?

24 Confiabilidad de los productos Un fabricante de baterías usada en radios portátiles, juguetes, lámparas, etc., estima que el porcentaje P de baterías fabricadas que tienen una vida útil de t horas como mínimo se describe mediante la función

$$P = f(t) = e^{-0.25t}$$

¿Qué porcentaje de baterías se espera que dure 8 horas por lo menos? ¿12 horas por lo menos?

25 Curvas de aprendizaje Las funciones exponenciales sirven a veces para describir el proceso de aprendizaje. Una de ellas presenta la forma

$$y = f(x) = a - be^{-kx} \tag{15.19}$$

donde a, b y k son positivas. En esta función general de la *curva de aprendizaje*, y representa alguna medida del grado de aprendizaje y k el número de reforzamientos del aprendizaje.

Los ingenieros industriales han estudiado un trabajo particular en una línea de montaje. La función

$$y = f(x) = 120 - 80e^{-0.30x}$$

es la función de la curva de aprendizaje que describe el número de unidades terminadas por hora y para un empleado normal en términos del número de horas de experien-

cia x que él tiene en el trabajo. *a*) ¿Cuál es la tasa por hora al cabo de 1 hora de experiencia? *b*) ¿Y al cabo de 10 horas?

26 Con la función de curva de aprendizaje dada en el último ejercicio, grafique $f(x)$. ¿Tiene un límite superior en el valor de y?

Los ejercicios 27-48 se relacionan con la sección 15.3. Calcule f' en cada una de las siguientes funciones.

27 $f(x) = 15e^{x^2-2x}$
28 $f(x) = 3x^4e^{x^2}$
29 $f(x) = x^2/e^{x^3}$
30 $f(x) = (2x^3 - 6x)^5e^{x/2}$
31 $f(x) = (20 - 5e^{x^2})^5$
32 $f(x) = (a - be^{-x})^c$
33 $f(x) = -5x^4e^{x^2}$
34 $f(x) = 10x^2e^{x^3}$
35 $f(x) = x^5/e^x$
36 $f(x) = 4x^3/e^{2x^2}$
37 $f(x) = e^x/(1 - e^x)$
38 $f(x) = (e^{x^2} - 5)/e^{-x}$

En las siguientes funciones, encuentre la localización de todos los puntos críticos y determine su naturaleza.

39 $f(x) = 30x - e^x$
40 $f(x) = 2.5x + e^{-0.5x}$
41 $f(x) = e^{(x-0.2x^2)}$
42 $f(x) = 40x - e^{0.1x} + 50$
43 $f(x) = 10x - e^{0.2x}$
44 $f(x) = e^{(2x-0.1x^2)}$
45 $f(x) = 40x - e^{2x}$
46 $f(x) = 3.5x - e^{1.5x}$

47 La función de demanda de un producto es

$$q = f(p) = 35\,000e^{-0.05p}$$

donde q es la cantidad demandada (en unidades) y p es el precio (en dólares). *a*) Determine el valor de p que produzca un ingreso máximo total. *b*) ¿Cuál es el ingreso máximo total?

48 Una organización de investigación de mercados piensa que, si una compañía gasta x millones de dólares en publicidad por televisión, las utilidades totales pueden estimarse con la función

$$P = f(x) = 50x^2e^{-0.5x}$$

donde P se mide en millones de dólares. *a*) ¿Cuánto deberá destinarse a la publicidad por televisión con objeto de maximizar las utilidades totales? *b*) ¿Cuál es la utilidad máxima?

Los ejercicios 49-74 se relacionan con la sección 15.4. Resuelva las siguientes ecuaciones.

49 $\ln x^4 - \ln x^2 = 8$
50 $x^2 \ln x - 64 \ln x = 0$
51 $x \ln x - 6 \ln x = 0$
52 $e^{x^2} = 400$
53 $e^{-5x} = 80$
54 $5e^{-0.2x} = 20$
55 $x \ln x + 5 \ln x = 0$
56 $e^{3x^2} = 150$

En las siguientes funciones, encuentre f'.

57 $f(x) = \ln ax^3$
58 $f(x) = \ln(ax^3 + bx^2 + c)$
59 $f(x) = x^2\ln(x + 5)$
60 $f(x) = (\ln x + 3x)^4$
61 $f(x) = e^x/\ln 8x$
62 $f(x) = e^{x^3}/\ln x^2$
63 $f(x) = x^4 \ln(x^2 - 5)$
64 $f(x) = 5x^3/\ln x^3$
65 $f(x) = [\ln x]^4$
66 $f(x) = [\ln(x - 8)]^3$
67 $f(x) = [x/\ln x]^3$
68 $f(x) = (x^3 - 3x^2)/\ln(x + 4)$

En las siguientes funciones localice los puntos críticos y determine su naturaleza.

69 $f(x) = \ln 50x - 15x$
70 $f(x) = 8x^2 \ln x$
71 $f(x) = 80x - 20 \ln x$
72 $f(x) = 0.5x^2 - 4x - 5 \ln x + 50$
73 $f(x) = 45x - 5 \ln x$
74 $f(x) = \ln 20x - 2x$

Los ejercicios 75-81 se relacionan con la sección 15.5.

75 En la relación de demanda

$$p = 1\,600 - 80 \ln q$$

determine la elasticidad de la demanda cuando esta última es 200.

76 Un cultivo de bacterias crece a una tasa exponencial. Su población se duplica en 8 horas. Determine la constante de crecimiento k.

77 Un isótopo radiactivo con que se examina la glándula tiroides tiene una constante de desintegración $k = 0.150$. Si en la corriente sanguínea se introduce un trazador de 20 unidades del isótopo, *a*) determine la función de decaimiento exponencial $f(t)$ donde t se da en días. *b*) ¿Qué cantidad del isótopo se espera que se encuentre en la sangre al cabo de 10 días? *c*) ¿Cuál es la vida media del isótopo?

78 Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 40 000 años. Determine la constante de decaimiento k.

79 Retención de la memoria Se efectuó un experimento para investigar los efectos que el tiempo tiene en la memoria de una persona. Se pidió a los sujetos observar una fotografía que contenía muchos objetos distintos. Luego de estudiarla, se les dijo que retuvieran el mayor número posible de ellos. En diferentes intervalos de tiempo después de esto, se les pediría recordar el máximo número posible. Con base en el experimento se preparó la siguiente función.

$$\overline{R} = f(t) = 84 - 25 \ln t \qquad t \geq 1$$

En esta función $\overline{R}$ representa la retención porcentual promedio en términos del tiempo transcurrido desde que se estudió la fotografía (medido en horas). Un valor de $\overline{R} = 50$ debería indicar que en el tiempo correspondiente t, la retención promedio del grupo experimental fue 50%. *a*) ¿Cuál es la retención porcentual promedio después de 1 hora? *b*) ¿Después de 10 horas? *c*) Encuentre la expresión de la tasa de cambio en $\overline{R}$ respecto al tiempo. *d*) ¿Cuál es la retención porcentual máxima?

80 Una nueva oficina de asistencia social quiere determinar cuántos analistas debe contratar para procesar las solicitudes. Se estima que el costo promedio C de procesar una solicitud es una función del número de analistas x. En concreto, la función de costo es

$$C = 0.005x^2 - 16 \ln x + 70$$

a) Si el objetivo es minimizar el costo promedio por solicitud, determine el número de analistas que deberían contratarse.

b) ¿Cuál se espera que sea el costo promedio mínimo de procesar una solicitud?

81 Una empresa ha estimado que el costo promedio de producir una unidad $\overline{C}$ fluctúa con el número de unidades fabricadas x. La función del costo promedio es

$$\overline{C} = 0.002x^2 - 1\,000 \ln x + 7\,500$$

donde $\overline{C}$ se expresa en dólares por unidad y x se expresa en cientos de unidades.

a) Determine el número de unidades que se producirán a fin de minimizar el costo promedio de producción por unidad.

b) ¿Cuál se espera que sea el costo promedio mínimo por unidad?

c) ¿Cuáles se espera que sean los costos totales de producción?

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 En la función $f(x) = 1800e^{-x}$, determine $f(5)$.

2 Una inversión de \$10 000 recibe un interés de 9% por año capitalizable continuamente. ¿Cuál es la cantidad capitalizada S si la inversión se hace por un periodo de 25 años? ¿Qué interés se ganará durante ese periodo?

3 En

$$3^8 = 6\,561$$

escriba la ecuación logarítmica equivalente.

4 Determine la localización y naturaleza de los puntos críticos en

$$f(x) = e^{-x^2+3}$$

5 Determine la localización y naturaleza de los puntos críticos en

$$f(x) = x(\ln x)$$

6 Una institución de caridad está planeando una campaña de recaudación de fondos en una gran ciudad. La población de la ciudad es de 2.5 millones . El porcentaje de la población que hará un donativo se describe por medio de la función

$$R = 1 - e^{-0.075x}$$

donde R es el porcentaje de la población y x indica el número de días que dura la campaña. Se sabe por experiencia que la aportación promedio por donador es \$2. Los costos de la campaña se estiman en \$6000 por día. Formule la función $N = f(x)$ que exprese las utilidades netas N (aportaciones totales menos costos totales) en términos de x. (*Nota*: éste es un problema de formulación.)

MINICASO

¿TIEMPO DEL FALLECIMIENTO?

Sí colocamos un objeto en un ambiente más frío, su temperatura tiende a corresponder a la del medio que lo rodea. El modelo matemático que describe este proceso es

$$T = f(t) = ae^{-kt} + C \qquad \textbf{(15.20)}$$

donde T es la temperatura del objeto t unidades de tiempo después de ser puesto en el ambiente más frío, que tiene la temperatura C. La figura 15.15 es la gráfica de la función.

Las leyes de la física en que se funda este proceso tienen muchas e importantes aplicaciones. Una de ellas consiste en determinar el tiempo del fallecimiento de una persona, tarea que suele desempeñar el forense. Supóngase que se descubre un cadáver en un departamento. El forense llega a las 3 de la tarde y se da cuenta de que la temperatura del cuerpo es 86.9 °F y que la del departamento es 70 °F. El forense espera una hora y luego vuelve a tomar la temperatura del cadáver, y ésta es de 86.0 °F. El forense debe determinar el tiempo del fallecimiento. [*Sugerencias*: primero, suponga que la temperatura corporal en el momento del fallecimiento fue de 98.6 °F y que en la ecuación (15.20) $t = 0$ corresponde al tiempo del fallecimiento. Esta información, junto con la temperatura ambiente, permite determinar a y C en la ecuación (15.20).] Segundo, sabemos que t horas después de la muerte la temperatura corporal era 86.9 °F y $t + 1$ hora después de la muerte era 86.0 °F.

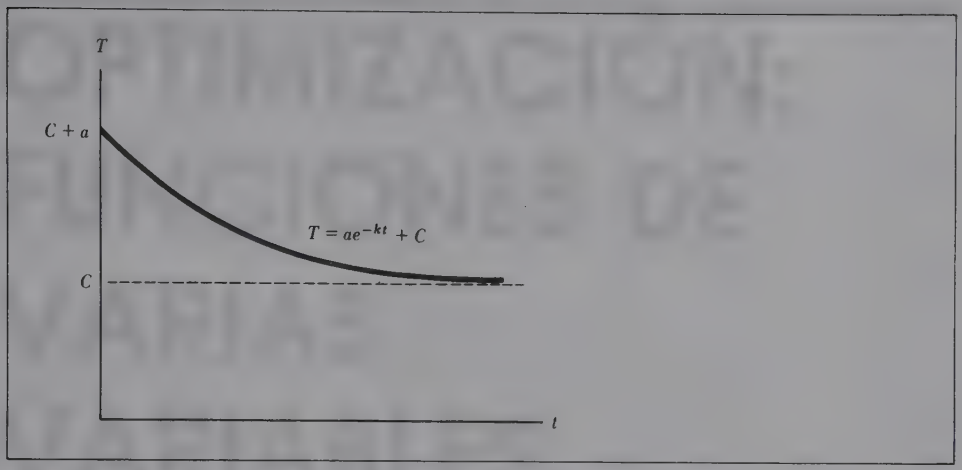


FIGURA 15.15

CAPÍTULO

16 OPTIMIZACIÓN: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

16.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES BIVARIADAS
16.2 DERIVADAS PARCIALES
16.3 OPTIMIZACIÓN DE LAS FUNCIONES BIVARIADAS
16.4 APLICACIONES DE LA OPTIMIZACIÓN BIVARIADA
16.5 OPTIMIZACIÓN DE *n* VARIABLES
16.6 OPTIMIZACIÓN SUJETA A RESTRICCIONES
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: MODELO DE INVENTARIO DE PEDIDOS RETRASADOS

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Lograr que el alumno conozca el cálculo de las funciones que contienen dos variables independientes
- Dar ejemplos de la representación gráfica de funciones en tres dimensiones
- Ofrecer un panorama general de los procedimientos de optimización para funciones que contienen más de dos variables independientes
- Introducir la naturaleza y métodos de optimización de las funciones sujetas a condiciones de restricción

En los capítulos 13 a 15 se ofreció una metodología para analizar las funciones que contienen una variable independiente. En las aplicaciones reales un criterio u objetivo de decisión se basa a menudo en más de una variable. Cuando las funciones incluyen más de una variable independiente, se llaman ***funciones multivariadas*** o ***funciones de varias variables***. Se cuenta con métodos del cálculo diferencial para examinarlas y determinar los valores óptimos (máximos y mínimos). Al estudiar algunos de esos procedimientos en el presente capítulo, se verá que se parecen a los que se aplicaron a las funciones de una variable independiente.

Este capítulo se concentrará inicialmente en las ***funciones bivariadas*** (las que contienen dos variables independientes). Se describirán sus gráficas y luego se dará una explicación de las derivadas de esas funciones y su interpretación. A continuación se expondrán los métodos para obtener sus valores óptimos. Luego vendrá una sección en que se comentan las aplicaciones de las funciones bivariadas. La explicación abarcará la optimización de las funciones de n variables. El tema de la *optimización restringida* se aborda en la última sección del capítulo.

16.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES BIVARIADAS

Representación gráfica

Una función que incluye una variable dependiente z y dos variables independientes x y y puede representarse con la notación

$$\boxed{z = f(x, y)} \qquad \textbf{(16.1)}$$

Ya antes en el libro se dijo que el número de variables presentes en una función determina el número de dimensiones necesarias para graficarla. Se requieren dos dimensiones para trazar las funciones de una sola variable, y en cambio hacen falta tres dimensiones para graficar las funciones bivariadas.

Según se señaló en el capítulo 4, las funciones lineales que contienen una variable independiente tienen una gráfica de *líneas rectas* en dos dimensiones. Las funciones lineales que incluyen dos variables independientes se grafican como *planos* en tres dimensiones. En general, las funciones no lineales que contienen una variable independiente se grafican como curvas en dos dimensiones. Y la gráfica de las funciones no lineales que contienen dos variables independientes son *superficies curvas* en tres dimensiones. Entre los ejemplos de superficies no lineales se encuentran la superficie ondulante de un campo de golf, la pendiente de terreno para esquiar y la vela de un bote de navegación. Un punto importante es que estas funciones se representan con *superficies*, no con sólidos.

Trazado de funciones bivariadas

Aunque la graficación en tres dimensiones es difícil, se dispone de técnicas que pueden aplicarse en algunos casos para trazar la forma general de la gráfica de una función bivariada. El material que se explica a continuación se entenderá mejor si se conocen las gráficas de estas funciones.

Considérese la función bivariada

$$z = f(x,y) = 25 - x^2 - y^2 \tag{16.2}$$

donde $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$. A fin de trazar esta función, se fijará el valor de una de las variables independientes y se graficará la función resultante. Por ejemplo, si hacemos $y = 0$, la función f se convierte en

$$z = 25 - x^2 - 0^2$$

o bien

$$z = 25 - x^2 \tag{16.3}$$

Al fijar el valor de una de las variables, la función se reformula en términos de una variable independiente. Es decir, una vez especificado el valor de la variable independiente, el de la variable dependiente varía con el valor de la restante variable independiente. Dada la ecuación (16.3), la tabla 16.1 indica algunos valores de x y los resultantes valores de z.

La figura 16.1 es una gráfica parcial de la función con el valor de y fijado en 0. Si hacemos $y = 0$, la gráfica de la ecuación (16.3) debe estar en el plano xz. Un estudio detenido de la ecuación (16.3) revela que la relación entre z y x es cuadrática. Y la gráfica de la figura 16.1 forma parte de una parábola cóncava hacia abajo.

TABLA 16.1

x	0	1	2	3	4	5
$z = 25 - x^2$	25	24	21	16	9	0

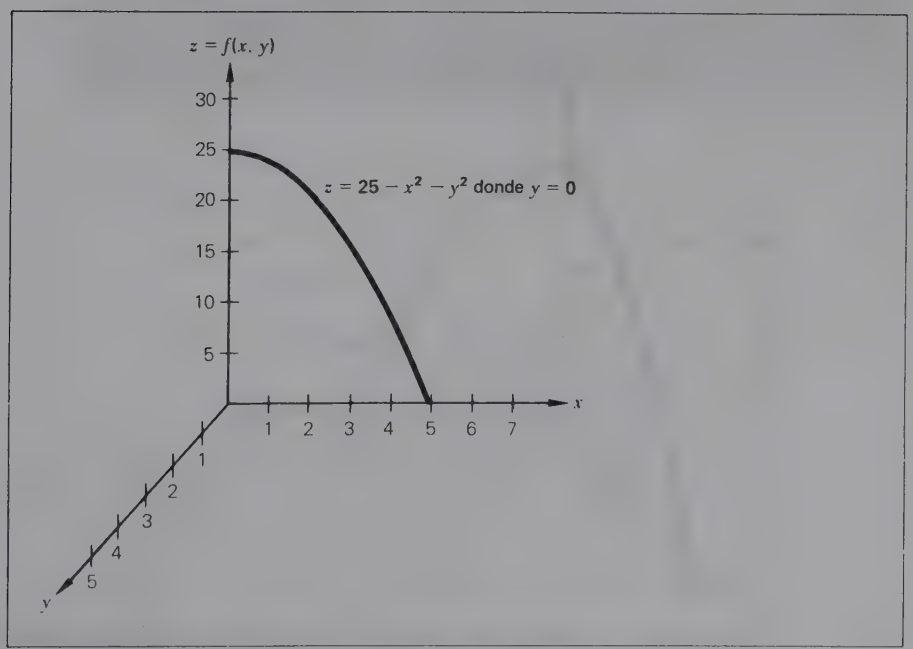


FIGURA 16.1
Gráfica parcial de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

Si hacemos $x = 0$ en la función original, f se transforma en

$$z = 25 - 0^2 - y^2$$

o bien

$$z = 25 - y^2 \tag{16.4}$$

La tabla 16.2 ofrece algunos valores de y y los valores resultantes de z.

La figura 16.2 es una gráfica parcial de $f(x, y)$. Con $x = 0$, la gráfica de la ecuación (16.4) se encuentra en el plano yz. La ecuación (16.4) indica una relación cuadrática entre y y z. Y si el lector examina atentamente la figura 16.2 en una dirección paralela al eje x, verá que la gráfica de esta ecuación es una parte de la parábola cóncava hacia abajo. La figura 16.3 contiene lo que el lector vería si observara a lo largo del eje x.

DEFINICIÓN: TRAZO

Si $z = f(x, y)$, un ***trazo*** es la gráfica de f cuando una variable se mantiene constante.

En relación con la figura 16.2, las dos partes de f que allí se muestran son *trazos*. Una es un trazo cuando $y = 0$, y la otra es un trazo donde $x = 0$. Cada trazo representa una *costilla* en la superficie que simboliza la función.

TABLA 16.2

y	0	1	2	3	4	5
$z = 25 - y^2$	25	24	21	16	9	0

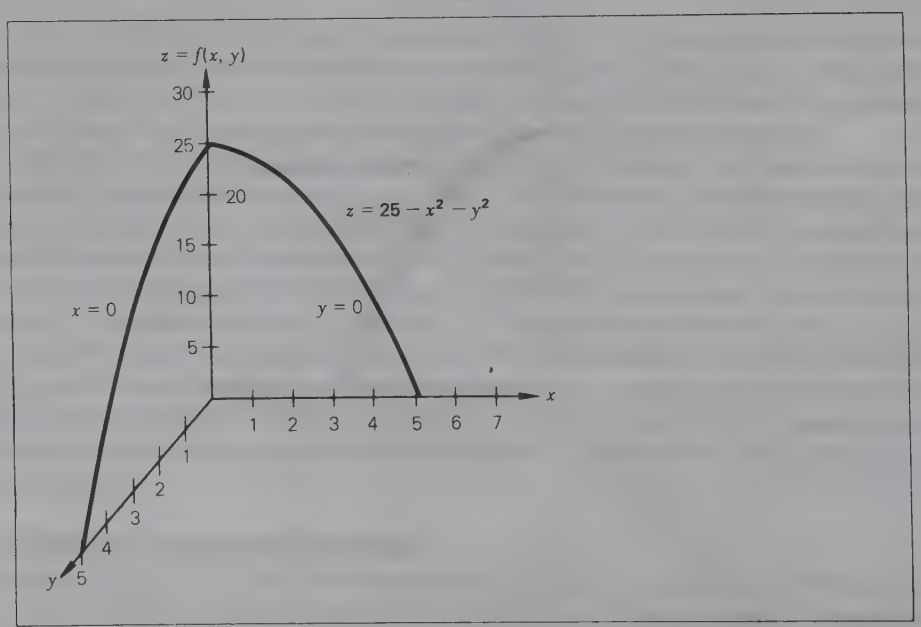


FIGURA 16.2
Gráfica parcial de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

La figura 16.4 presenta una gráfica de la función que incluye otros cuatro trazos más. Haciendo $y = 1$, la función se convierte en

$$f(x,y) = 25 - x^2 - 1^2$$
$$= 24 - x^2$$

El trazo que representa a esta función es paralelo al plano xz y se encuentra 1 unidad fuera, a lo largo del eje positivo y. De manera análoga, haciendo $y = 3$, tenemos

$$f(x,y) = 25 - x^2 - 3^2$$
$$= 16 - x^2$$

El trazo que representa a esta función tiene una gráfica paralela al plano xz y tres unidades fuera a lo largo del eje y.

También se han dibujado los trazos haciendo que $x = 1$ y $x = 3$. Estos seis trazos en combinación comienzan a parecerse a la estructura esquelética de la superficie. Y si tuviéramos que graficar más trazos asociados con otros supuestos valores de x y y, obtendríamos una representación más exacta de la superficie que representa a f.

En consecuencia, un procedimiento que en ocasiones ofrece una gráfica aproximada de una función de la forma $z = f(x, y)$ consiste en suponer valores selectos de x y y y graficar los trazos que representan las funciones resultantes.

NOTA

Conviene tener presente en este momento una observación importante en relación con la gráfica de una función $f(x, y)$. *Siempre que mantenemos constante x, el trazo resultante se grafica en un plano paralelo al plano yz. Siempre que mantenemos constante y, la gráfica del trazo resultante se hace en un plano paralelo al plano xz.*

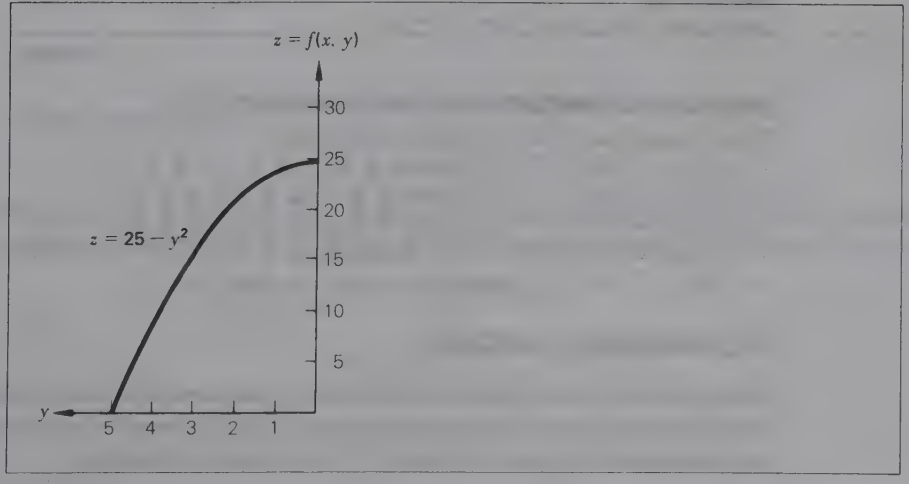


FIGURA 16.3 Trazo con $x = 0$ visto a lo largo del eje x.

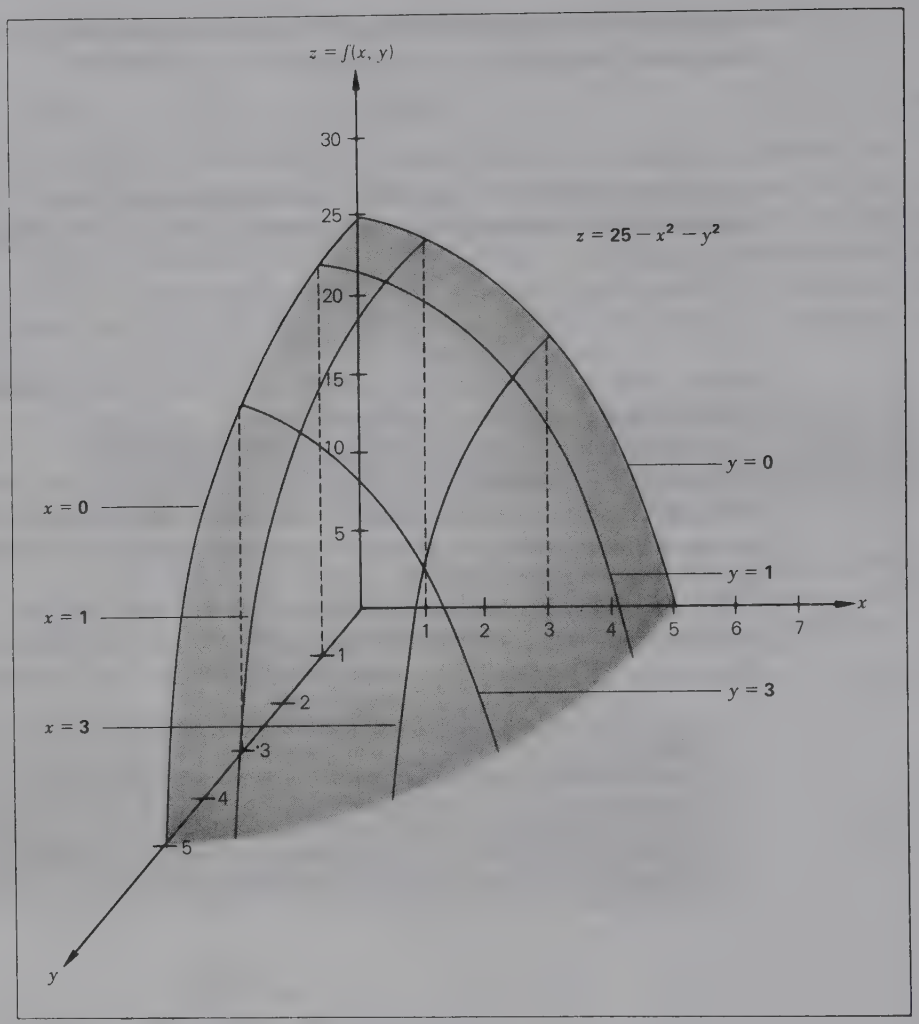


FIGURA 16.4
Gráfica de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

Ejercicios de seguimiento de la sección 16.1

Trace la gráfica de las siguientes funciones.

1 $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 4$
2 $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 3$
3 $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$
4 $f(x,y) = 25 - x^2/4 - y^2/4$, donde $0 \leq x \leq 10$ y $0 \leq y \leq 10$
5 $f(x,y) = x^2 + y^2$, donde $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$

16.2 DERIVADAS PARCIALES

Aunque más complejo, el cálculo de las funciones bivariadas se asemeja mucho al de las funciones de una sola variable. En la presente sección hablaremos de las derivadas de estas funciones y de su interpretación.

Derivadas de funciones bivariadas

En las funciones de una sola variable, la derivada representa la tasa instantánea de cambio en la variable dependiente respecto al que se opera en la variable dependiente. En las funciones bivariadas, también es posible definir las derivadas. Nos centraremos en las ***derivadas parciales*** que representan la tasa instantánea de cambio en la variable dependiente, pero con respecto a los cambios de las dos variables independientes, tomadas por separado. En una función $z = f(x, y)$, puede calcularse una derivada parcial respecto a cada variable independiente. La derivada parcial tomada respecto a x se denota con

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{o} \quad f_x$$

La derivada parcial tomada respecto a y se indica mediante

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{o} \quad f_y$$

Aunque ambas formas pueden utilizarse para denotar la derivada parcial, nos serviremos de la notación con subíndices f_x o f_y en este capítulo.

DEFINICIÓN: DERIVADA PARCIAL

En la función $z = f(x, y)$, la ***derivada parcial*** de z respecto a x en (x, y) es

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

a condición de que exista el límite. La derivada parcial de z respecto a y en (x, y) es

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre que exista el límite.

EJEMPLO 1

Considere la función

$$f(x, y) = 3x^2 + 5y^3$$

Para calcular la derivada parcial respecto a x, se usará el método del *límite marginal* explicado en la sección 13.3. Primero, se forma el cociente de la diferencia como

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{3(x + \Delta x)^2 + 5y^3 - (3x^2 + 5y^3)}{\Delta x} \\ &= \frac{3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 5y^3 - 3x^2 - 5y^3}{\Delta x}\end{aligned}$$

que, al simplificarse, nos da

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta x} &= \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x)}{\Delta x} \\ &= 6x + 3\Delta x\end{aligned}$$

La derivada parcial es

$$\begin{aligned}f_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x) \\ &= 6x\end{aligned}$$

Nótese que al calcular f_x, estamos examinando los efectos que producen los cambios de x (es decir, Δx); la otra variable independiente se mantiene constante.

La derivada parcial tomada respecto a y puede obtenerse de modo similar.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y} &= \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \\ &= \frac{3x^2 + 5(y + \Delta y)^3 - (3x^2 + 5y^3)}{\Delta y} \\ &= \frac{3x^2 + 5(y^3 + 3y^2\Delta y + 3y\Delta y^2 + \Delta y^3) - 3x^2 - 5y^3}{\Delta y} \\ &= \frac{3x^2 + 5y^3 + 15y^2\Delta y + 15y\Delta y^2 + 5\Delta y^3 - 3x^2 - 5y^3}{\Delta y} \\ &= \frac{\Delta y(15y^2 + 15y\Delta y + 5\Delta y^2)}{\Delta y} \\ &= 15y^2 + 15y\Delta y + 5\Delta y^2\end{aligned}$$

La derivada parcial es

$$\begin{aligned}f_y &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0}(15y^2 + 15y\Delta y + 5\Delta y^2) \\ &= 15y^2\end{aligned}$$

Al determinar f_y, estamos examinando los efectos de los cambios de y (o sea, Δy); se mantiene constante la otra variable independiente.

EJEMPLO 2

Considere la función

$$f(x,y) = 5x^2y$$

Al aplicar el método del límite marginal se calculan las derivadas parciales,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\\ &= \frac{5(x+\Delta x)^2y-5x^2y}{\Delta x}\\ &= \frac{5(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)y-5x^2y}{\Delta x}\\ &= \frac{\cancel{5x^2y}+10xy\Delta x+5y\Delta x^2-\cancel{5x^2y}}{\Delta x}\\ &= \frac{\cancel{\Delta x}(10xy+5y\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}\\ &= 10xy+5y\Delta x\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}f_x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(10xy+5y\Delta x)\\ &= 10xy\end{aligned}$$

Para determinar f_y

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y} &= \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\\ &= \frac{5x^2(y+\Delta y)-5x^2y}{\Delta y}\\ &= \frac{\cancel{5x^2y}+5x^2\Delta y-\cancel{5x^2y}}{\Delta y}\\ &= 5x^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}f_y &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}5x^2\\ &= 5x^2\end{aligned}$$

Por fortuna, las derivadas parciales se obtienen más fácilmente empleando las mismas reglas de diferenciación utilizadas en los tres últimos capítulos. La única excepción es que, *cuando se encuentra una derivada parcial respecto a una variable independiente, se supone que se mantiene constante a la otra.* Por ejemplo, al calcular la derivada parcial respecto a x, se supone que y es constante. Y un punto muy importante es que *la variable que se supone constante debe tratarse como una constante al aplicar las reglas de diferenciación.*

EJEMPLO 3

Encuentre las derivadas parciales respecto a x y y para la función

$$f(x,y) = 5x^2 + 6y^3$$

SOLUCIÓN

Primero, para determinar la derivada parcial respecto a x se supondrá que y es constante. Al diferenciar término por término, se observa que la derivada de $5x^2$ respecto a x es $10x$. Al diferenciar el segundo término, no se olvide que se supone que y es constante. Así pues, este término presenta la forma general

$$\mathbf{6(constante)^3}$$

que es simplemente una constante. Una constante no cambia de valor al hacerlo otras variables (o, como se señaló en el capítulo 13, la derivada de una constante es 0), por lo cual la derivada del segundo término es 0. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} f_x &= 10x + 0 \\ &= 10x \end{aligned}$$

Al encontrar la derivada parcial respecto a y, se supone que se mantiene constante la variable x. Al diferenciar término por término, $5x^2$ se considera como constante ya que x se supone constante y la derivada es 0. La derivada de $6y^3$ respecto a y es $18y^3$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} f_y &= 0 + 18y^2 \\ &= 18y^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Encuentre f_x y f_y para la función

$$f(x, y) = 4xy$$

SOLUCIÓN

Para calcular f_x, se supone que y es constante. El término $4xy$ tiene la forma de un producto. Para diferenciar tales términos de producto, pueden aplicarse dos métodos. El primero consiste en usar simplemente la regla del producto. Al considerar $4xy$ como el producto $4x$ y y, con la regla de producto se obtiene

$$f_x = (4)(y) + (0)(4x)$$

o bien

$$f_x = 4y$$

Otro método consiste en recordar cuál variable se supone que era constante. Cuando se mantiene constante y, puede rearreglarse $4xy$ para que tenga la forma

$$\mathbf{f(x, y) = constante \cdot x}$$

o bien

$$f(x, y) = (4y)x$$

Al agrupar 4 y y, este término presenta la forma general de una constante $4y$ por x. Y la derivada de una constante multiplicada por x es la constante, o

$$f_x = 4y$$

Para calcular f_y, se supone que x es constante. Al aplicar la regla del producto se obtiene

$$f_y = (0)(y) + (1)(4x)$$

o bien

$$f_y = 4x$$

O, usando el otro procedimiento, el factor $4x$ es constante (al mantener constante x) y puede considerarse que f tiene la forma

$$f(x,y) = \textbf{constante}\quad y$$
$$= (4x)y$$

La derivada con respecto a y es la constante, o bien

$$f_y = 4x$$

EJEMPLO 5

Encuentre f_x y f_y si

$$f(x,y) = -10xy^3$$

SOLUCIÓN

Para calcular f_x, deberá suponerse que y es constante. Esta función puede rearreglarse (mental o explícitamente) para que tenga la forma

$$\textbf{(constante)}x \quad \text{o} \quad (-10y^3)x$$

donde $-10y^3$ es constante. La derivada es

$$f_x = -10y^3$$

Para f_y, puede considerarse que la función tiene la forma

$$\textbf{(constante)}y^3 \quad \text{o} \quad (-10x)y^3$$

La derivada respecto a y es

$$\textbf{(constante)}(3y^2)$$

o bien

$$f_y = -30xy^2$$

Recuérdese que la regla del producto puede servir para obtener las derivadas de las formas de producto.

EJEMPLO 6

Calcule f_x y f_y si

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

SOLUCIÓN

Al aplicar las reglas de diferenciación de las funciones exponenciales,

$$f_x = 2xe^{x^2+y^2}$$
$$f_y = 2ye^{x^2+y^2}$$

EJEMPLO 7

Encuentre f_x y f_y si

$$f(x, y) = (3x - 2y^2)^3$$

SOLUCIÓN

Al recordar la potencia de una regla de función se obtiene

$$\begin{aligned} f_x &= 3(3x - 2y^2)^2(3) \\ &= 9(3x - 2y^2)^2 \\ f_y &= 3(3x - 2y^2)^2(-4y) \\ &= -12y(3x - 2y^2)^2 \end{aligned}$$

Interpretación de las derivadas parciales

Una interpretación de las derivadas parciales es la de la tasa instantánea de cambio. Como en el caso de las funciones de una sola variable, las derivadas parciales pueden emplearse para aproximar los cambios de valor de la variable dependiente, si se produce un cambio en *una* de las variables independientes. Por ejemplo, f_x puede servir para aproximar el cambio de $f(x, y)$, cuando se da un cambio en x y se supone que y es constante. La derivada parcial f_y puede utilizarse para aproximar el cambio de $f(x, y)$, si se opera un cambio en y, si se supone que x es constante. El siguiente ejemplo ilustra esta interpretación.

EJEMPLO 8

Interrelaciones de la demanda de varios productos Hasta ahora hemos supuesto que la demanda de un producto depende exclusivamente de su precio. Así, las *funciones de demanda* analizadas presentan la forma

$$q = f(p)$$

Con frecuencia, la demanda de un producto o servicio recibe el influjo no sólo de su precio, sino también de los precios de otros productos o servicios. La ecuación (16.5) es una función de demanda que expresa la cantidad demandada del producto 1 (q_1) en términos de su precio (p_1) y también de los precios de otros dos productos (p_2 y p_3), todos ellos expresados en dólares.

$$\boxed{q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 10\,000 - 2.5p_1 + 3p_2 + 1.5p_3} \qquad \textbf{(16.5)}$$

Las derivadas parciales de esta función de demanda ofrecen una medida de la respuesta instantánea de la demanda ante los cambios en los precios de los tres productos. Por ejemplo,

$$f_{p_1} = -2.5$$

sugiere que, si p_2 y p_3 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 *disminuirá* a una tasa instantánea de 2.5 unidades por cada unidad (dólar) que aumente p_1. De modo análogo, las derivadas parciales

$$f_{p2} = 3 \quad \text{y} \quad f_{p3} = 1.5$$

indican las tasas instantáneas de cambio en la demanda asociada a los que se producen en los precios de los otros dos productos. $f_{p2} = 3$ sugiere que la demanda del producto 1 aumentará a una tasa instantánea de 3 unidades por cada unidad (dólar) que aumente p_2 (se mantienen constantes p_1 y p_3) $f_{p3} = 1.5$ indica que la demanda del producto 1 *crecerá* a una tasa instantánea de 1.5 unidades por cada unidad (dólar) que p_3 aumente (se mantienen constantes p_1 y p_2).

Hagamos en seguida un par de observaciones. En primer lugar, esta función de demanda es lineal y las correspondientes derivadas parciales son constantes. Es decir, las tasas instantáneas de cambio son realmente iguales en cualquier parte del dominio de la función de demanda. En segundo lugar, el hecho de que la demanda del producto 1 *aumente* al incrementarse los precios de los productos 2 y 3 revela una interdependencia entre los tres productos. Éste es el tipo de relación que cabría esperar que exista entre ***productos en competencia***. Entre los ejemplos de este tipo de bienes conviene citar las diferentes marcas de un mismo producto (por ejemplo, las llantas radiales) o los productos que pueden servir para satisfacer una necesidad determinada (como margarina y mantequilla, carnes de res y pollo). En el caso de esta categoría de bienes de consumo cabría esperar que, conforme crezca el precio de un producto, disminuye su demanda y la de los productos en competencia aumenta. De manera análoga, a medida que desciende el precio de un producto, cabría esperar que su demanda aumente y la de los productos de la competencia disminuya. Éste es el tipo de comportamiento ejemplificado por la función de demanda en la ecuación (16.5) y sus derivadas parciales.

EJERCICIO

En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 120\,000 - 0.5p_1^2 - 0.4p_2^2 - 0.2p_3^2$$

1) Calcule todas las derivadas parciales. 2) Si los precios actuales de los tres productos son $p_1 = 10$, $p_2 = 20$ y $p_3 = 30$, evalúe las derivadas parciales e interprete su significado. 3) ¿Qué sugerirán la función de demanda y sus derivadas parciales respecto a la interdependencia entre los tres productos?*

EJEMPLO 9

Gastos de publicidad Un fabricante nacional estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos hechos en la publicidad por radio y televisión. La función que especifica esta relación es

$$z = 50\,000x + 40\,000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$$

donde *z es el número de unidades vendidas al año, x denota la cantidad destinada a la publicidad por televisión* y *y indica la cantidad gastada en la publicidad por radio (ambas en miles).*

*Respuesta: (1) $f_{p1} = -p_1$, $f_{p2} = -0.8p_2$, $f_{p3} = -0.4p_3$; (2) $f_{p1}(10, 20, 30) = -10$, $f_{p2}(10, 20, 30) = -16$, $f_{p3}(10, 20, 30) = -12$; (3) son productos complementarios.

Suponga que la empresa está gastando actualmente \$40 000 en la publicidad por televisión ($x = 40$) y \$20 000 en la publicidad por radio ($y = 20$). Con estos gastos,

$$\begin{aligned} f(40,20) &= 50\,000(40) + 40\,000(20) - 10(40)^2 - 20(20)^2 - 10(40)(20) \\ &= 2\,000\,000 + 800\,000 - 16\,000 - 8{,}000 - 8\,000 = 2\,768\,000 \end{aligned}$$

o se proyecta que se vendan 2 768 000 unidades.

Supóngase que queremos determinar el efecto en las ventas anuales si se destinan \$1000 o más dólares a la publicidad por televisión. La derivada parcial f_x debería darnos una aproximación del efecto: su derivada parcial es

$$f_x = 50\,000 - 20x - 10y$$

Como queremos conocer la tasa instantánea de cambio y como los gastos son actualmente \$40 000 y \$20 000, evaluamos f_x cuando $x = 40$ y $y = 20$:

$$\begin{aligned} f_x(40,20) &= 50\,000 - 20(40) - 10(20) \\ &= 50\,000 - 800 - 200 = 49\,000 \end{aligned}$$

Al evaluar la derivada parcial, puede afirmarse que un incremento de los gastos de \$1000 destinados a la televisión debería producir ventas adicionales aproximadamente de 49 000 unidades.

Para determinar la exactitud de esta aproximación, se evaluará $f(41, 20)$:

$$\begin{aligned} f(41,20) &= 50\,000(41) + 40\,000(20) - 10(41)^2 - 20(20)^2 - 10(41)(20) \\ &= 2\,050{,}000 + 800\,000 - 16\,810 - 8\,000 - 8\,200 = 2\,816\,990 \end{aligned}$$

El *aumento real* de las ventas se proyecta como

$$\begin{aligned} f(41,20) - f(40,20) &= 2\,816\,990 - 2\,768\,000 \\ &= 48\,990 \text{ unidades} \end{aligned}$$

La diferencia entre los incrementos real y estimado usando f_x es de $48\,990 - 49\,000 = -10$ unidades. El signo de menos indica que la derivada parcial *sobreestimó* el cambio verdadero.

Supóngase ahora que queremos determinar el efecto, si se destinan \$1000 más a la publicidad por radio y no a la publicidad por televisión. La derivada parcial tomada respecto a y aproximará este cambio:

$$f_y = 40\,000 - 40y - 10x$$

Al evaluar f_y cuando $x = 40$ y $y = 20$, se obtiene

$$\begin{aligned} f_y(40,20) &= 40\,000 - 40(20) - 10(40) \\ &= 40\,000 - 800 - 400 = 38\,800 \end{aligned}$$

Así pues, un aumento de \$1000 en los gastos de publicidad por radio originará un aumento aproximado de 38 800 unidades. Con un aumento de \$1000 en los gastos de este tipo de publicidad, las ventas reales se estiman en

$$\begin{aligned} f(40,21) &= 50\,000(40) + 40\,000(21) - 10(40)^2 - 20(21)^2 - 10(40)(21) \\ &= 2\,000\,000 + 840\,000 - 16\,000 - 8\,820 - 8\,400 = 2\,806\,780 \text{ unidades} \end{aligned}$$

El *incremento real* en las ventas es

$$\begin{aligned} f(40,21) - f(40,20) &= 2\,806\,780 - 2\,768\,000 \\ &= 38\,780 \text{ unidades} \end{aligned}$$

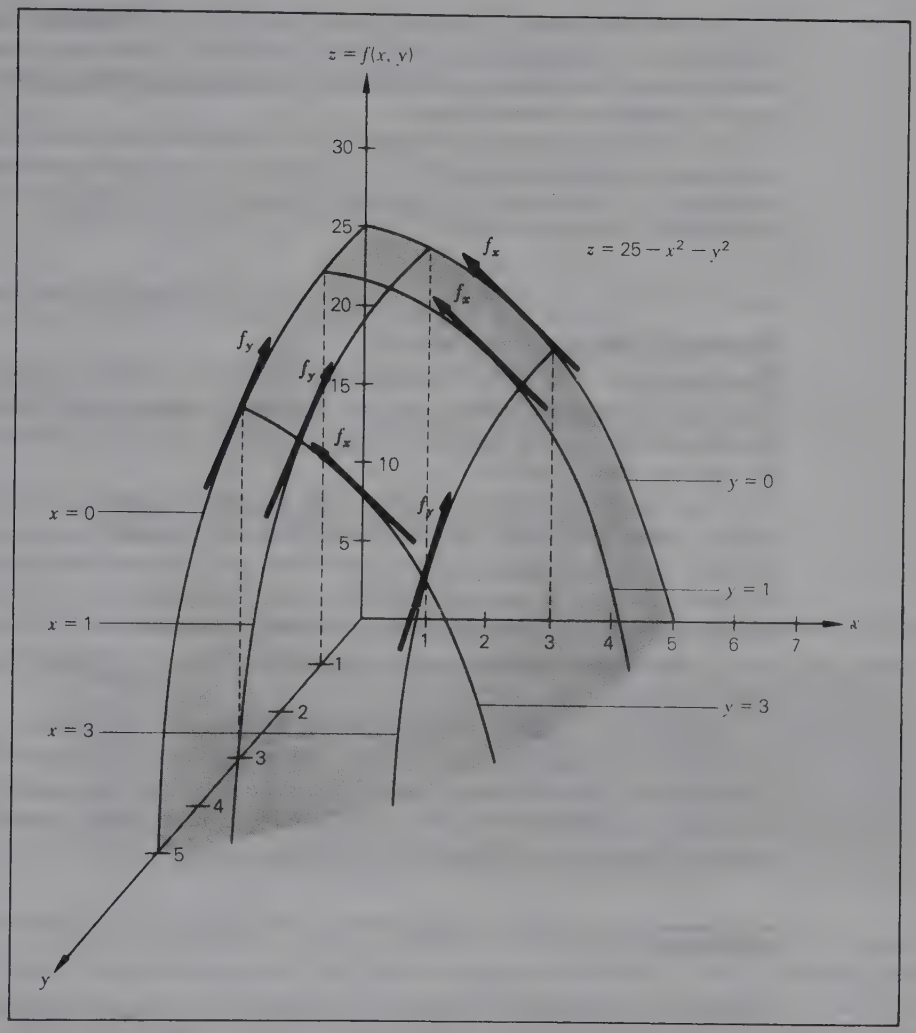


FIGURA 16.5 Representación de las derivadas parciales a partir de la pendiente de la tangente.

También en este caso el cambio aproximado estimado empleando f_y presenta un error de apenas 20 unidades.

Desde el punto de vista comparativo, si se asignan \$1000 a la publicidad por televisión o radio, es evidente que el rendimiento mayor provendrá de la televisión.

La otra interpretación de las derivadas parciales se refiere a la pendiente de la tangente. Como en el caso de las funciones de una sola variable, las derivadas parciales f_x y f_y tiene una interpretación de la pendiente de una tangente.

INTERPRETACIÓN DE LA PENDIENTE DE f_x Y f_y

I f_x es una expresión general para la pendiente de la tangente de la familia de trazos paralelos al plano *xz*.

II f_y es una expresión general para la pendiente de la tangente de la familia de trazos paralelos al plano *yz*.

La derivada parcial f_x estima el cambio en z cuando se da un cambio en x, suponiendo que y se mantenga constante. En la sección 16.1 vimos que, cuando y es mantenida constante, los trazos correspondientes se grafican paralelos al plano xz. f_x representa la pendiente de esos trazos.

De manera semejante, f_x supone que x se conserva constante. Cuando mantuvimos constante x en la sección 16.1, el resultado fue una familia de trazos paralelos al plano yz. Y f_y representa la pendiente de esos trazos. La figura 16.5 muestra la representación de la pendiente.

Derivadas de segundo orden

Igual que en el caso de las funciones de una sola variable, podemos determinar derivadas de segundo orden para las funciones bivariadas. Éstas serán de mucha importancia en la siguiente sección cuando tratemos de optimizar el valor de una función.

Para las funciones de la forma $f(x, y)$, existen *cuatro* derivadas de segundo orden. Estas se dividen en dos tipos: *derivadas parciales puras de segundo orden* y *derivadas parciales mixtas*. Las dos derivadas parciales se denotan con f_{xx} y f_{yy}. La derivada parcial pura de segundo orden respecto a x, f_{xx}, se calcula obteniendo primero f_x y luego diferenciando f_x respecto a x. De manera parecida, f_{yy} se obtiene determinando la expresión para f_y y luego diferenciando f_y respecto a y.

Las dos derivadas parciales mixtas se denotan mediante f_{xy} y f_{yx}. La derivada parcial mixta f_{xy} se obtiene determinando f_x y luego diferenciando f_x respecto a y. De modo análogo, f_{yx} se encuentra determinando f_y y luego diferenciando f_y respecto a x. La figura 16.6 sintetiza los procedimientos con que se obtienen las derivadas de segundo orden.

EJEMPLO 10

Determine las derivadas de primer y segundo órdenes para la función

$$f(x, y) = 8x^3 - 4x^2y + 10y^3$$

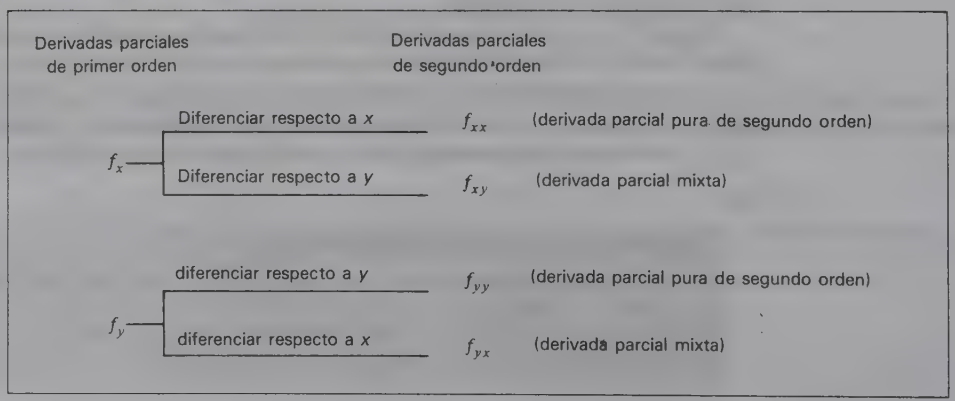


FIGURA 16.6 Determinación de las derivadas de segundo orden.

SOLUCIÓN

Empezamos con las primeras derivadas:

$$f_x = 24x^2 - 8xy$$
$$f_y = -4x^2 + 30y^2$$

La derivada parcial pura f_{xx} se calcula al diferenciar f_x respecto a x, o sea

$$f_{xx} = 48x - 8y$$

f_{yy} se obtiene al diferenciar f_y respecto a y, es decir,

$$f_{yy} = 60y$$

La derivada parcial mixta f_{xy} se calcula al diferenciar f_x respecto a y, o sea

$$f_{xy} = -8x$$

f_{yx} se obtiene diferenciando f_y respecto a x, esto es,

$$f_{yx} = -8x$$

NOTA
Una proposición conocida con el nombre de **teorema de Young** establece que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales entre sí a condición de que ambas sean continuas. Obsérvese que esta condición se cumple en el ejemplo 10. Esta propiedad ofrece una posible comprobación de los errores que pudieran haberse cometido al calcular f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx}.

No nos detendremos en la interpretación de estas derivadas de segundo orden. Sin embargo, conviene hacer algunas precisiones. Las derivadas parciales puras f_{xx} y f_{yy} transmiten información sobre la concavidad de una función (lo mismo que la segunda derivada en relación con las funciones de una sola variable). En concreto, ***f_{xx} suministra información sobre la concavidad de los trazos que son paralelos al plano xz. De manera semejante f_{yy} proporciona información acerca de la concavidad de los trazos paralelos al plano yz.***

La interpretación de las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} es menos intuitiva que en el caso de las derivadas parciales puras. No obstante, serán muy importantes en la siguiente sección.

Ejercicios de seguimiento de la sección 16.2

En los ejercicios 1-40 determine f_x y f_y.

1 $f(x,y) = 8x^2 - 16y^3$
2 $f(x,y) = -5x + 8y$
3 $f(x,y) = 18x^2 + 7xy + 6y^2$
4 $f(x,y) = x^4 - 4y^3$
5 $f(x,y) = x^5y^3$
6 $f(x,y) = 25xy^2$
7 $f(x,y) = 5x^2 + xy + 20y^3$
8 $f(x,y) = 30x^3 + 7x^3y^2 + 5y^4$
9 $f(x,y) = -1/xy$
10 $f(x,y) = 3x/5y^2$

11 $f(x,y) = (x^2 + 8y)(5x + 2y^5)$
12 $f(x,y) = (1/x)(y^3 + 3y^2)$
13 $f(x,y) = (x + y)^5$
14 $f(x,y) = (x^2 + 3y^3)^3$
15 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
16 $f(x,y) = 10/\sqrt[3]{x + 2y}$
17 $f(x,y) = \ln(x + 15)[\ln(y + 4)]$
18 $f(x,y) = e^{3x-2y}$
19 $f(x,y) = e^{5x^3-2y^2}$
20 $f(x,y) = e^x \ln y$
21 $f(x,y) = 2x^5 - 5x^3y^2$
22 $f(x,y) = 20x^2 - 15xy + 10y^3$
23 $f(x,y) = -4x^3 + 6xy^2 + y^3$
24 $f(x,y) = 12y^3 - 4yx^3 + 15$
25 $f(x,y) = 6x^2/5y^3$
26 $f(x,y) = -x/y^2$
27 $f(x,y) = (x + y)/x^3$
28 $f(x,y) = (2x - y^2)/x^2$
29 $f(x,y) = -3x^2/(x + y)$
30 $f(x,y) = 5y^2/(x^2 - 2y)$

31 $f(x,y) = (x + y)^4$
32 $f(x,y) = (3x - 2y)^3$
33 $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 - 2y^2}$
34 $f(x,y) = \sqrt[4]{4x^3 - 2y^2}$
35 $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$
36 $f(x,y) = \ln(x^2 - 2xy + y^2)$
37 $f(x,y) = e^{x^2y}$
38 $f(x,y) = e^{xy^3}$
39 $f(x,y) = e^x \ln y$
40 $f(x,y) = e^{y^2} \ln x$

En los ejercicios 41-60 encuentre las derivadas parciales de segundo orden.

41 $f(x,y) = 2x^2 + 3y^3 + 100$
42 $f(x,y) = x^2 + 7x + 4y^3 + 8y$
43 $f(x,y) = 2x^3 + 3xy + 9y^2$
44 $f(x,y) = -30x^5 + 18xy + 6y^3$
45 $f(x,y) = x^3y^3$
46 $f(x,y) = -20xy^4$
47 $f(x,y) = e^{x+y}$
48 $f(x,y) = \ln(x + y)$
49 $f(x,y) = e^{xy}$
50 $f(x,y) = e^y \ln x$
51 $f(x,y) = (x + y)^4$
52 $f(x,y) = (y - x)^3$
53 $f(x,y) = x^4y^6$
54 $f(x,y) = x^5y^3$
55 $f(x,y) = x/y$
56 $f(x,y) = y/x$
57 $f(x,y) = (5x - 10y)^{3/2}$
58 $f(x,y) = \sqrt{x + y}$
59 $f(x,y) = \ln x^2y^3$
60 $f(x,y) = \ln 5xy^3$

61 En $f(x, y) = 200x^2 + 300y^2 - 20xy$:
a) Determine $f(10, 20)$.
b) Usando las derivadas parciales estime el cambio esperado en $f(x, y)$, si x aumenta en 1 unidad.
c) Compare el cambio real con el cambio estimado.
d) Repita las partes *b* y *c*, suponiendo un posible incremento de 1 unidad en y.

62 En $f(x, y) = 30x^3 - 30y^3 + 20x^2y$:
a) Determine $f(20, 10)$.
b) Empleando las derivadas parciales, estime el cambio esperado en $f(x, y)$, si x aumenta en 1 unidad.
c) Compare el cambio real con el cambio estimado.
d) Repita las partes *b* y *c*, suponiendo un posible incremento de 1 unidad en y.

63 Una empresa estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos de publicidad por radio y televisión. La función que expresa esta relación es

$$z = 3\,000x + 6\,000y - 20x^2 - 10y^2 - 50xy$$

donde z es el número de unidades vendidas, x indica la cantidad destinada a la publicidad por televisión y y denota la cantidad que se gasta en publicidad por radio (las dos últimas variables se expresan en miles). Actualmente la firma está destinando \$60 000 a la publicidad por televisión y \$30 000 a la publicidad por radio.

a) ¿Cuáles se espera que sean las ventas anuales?
b) Usando derivadas parciales, estime el efecto en las ventas anuales, si se asignan \$1000 más a la publicidad por televisión.

c) Usando derivadas parciales, estime el efecto en las ventas anuales si se asignan $1000 más a la publicidad por radio

d) ¿En qué tipo de publicidad se obtienen mejores resultados con una inversión de $1000?

64 En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2) = 36\,000 - 0.1p_1^2 - 0.5p_2^2$$

a) Determine las derivadas parciales f_{p1} y f_{p2}.

b) Si $p_1 = 20$ y $p_2 = 10$, evalúe f_{p1} y f_{p2} e interprete su significado.

c) ¿Cómo se interrelacionan esos tres productos entre sí?

65 En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 200\,000 - 0.5p_1^2 + p_2^2 - 0.4p_3^2$$

a) Determine las derivadas parciales f_{p1}, f_{p2} y f_{p3}.

b) Si $p_1 = 30$, $p_2 = 10$ y $p_3 = 20$, evalúe las derivadas parciales e interprete su significado.

c) ¿Cómo se interrelacionan los dos productos entre sí?

16.3 OPTIMIZACIÓN DE LAS FUNCIONES BIVARIADAS

El proceso de encontrar los valores óptimos de las funciones bivariadas es muy parecido al que se aplicó en el caso de las funciones de una sola variable. En la presente sección se explicará ese proceso.

Puntos críticos

Igual que con las funciones de una sola variable, nos concentraremos en identificar los puntos máximo y mínimo relativos en la superficie que representa una función $f(x, y)$. Dichos puntos tienen en dos dimensiones el mismo significado que en tres.

DEFINICIÓN: MÁXIMO RELATIVO

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***máximo relativo*** cuando $x = a$ y $y = b$ si para todos los puntos (x, y) "suficientemente cercanos" a (a, b),

$$f(a, b) \geq f(x, y)$$

Un máximo relativo suele aparecer en la parte superior de un montículo de la superficie que representa a $f(x, y)$.

DEFINICIÓN: MÍNIMO RELATIVO

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***mínimo relativo*** cuando $x = a$ y $y = b$ si para todos los puntos (x, y) "suficientemente cercanos" a (a, b),

$$f(a, b) \leq f(x, y)$$

Un mínimo relativo suele aparecer en la parte inferior de un valle sobre la superficie que representa a $f(x, y)$.

La figura 16.7 muestra tanto un punto máximo relativo como un punto mínimo relativo. Si el lector examina las condiciones de pendiente de una superficie plana en un máximo o mínimo relativo, debería llegar a la conclusión de que una línea tangente trazada en el punto en cualquier dirección tiene una pendiente de 0. Si las derivadas parciales de primer orden f_x y f_y representan expresiones generales de la pendiente de la tangente de trazos paralelos, respectivamente, a los planos xz y yz, puede afirmarse lo siguiente.

CONDICIÓN NECESARIA DE EXTREMOS RELATIVOS

Una *condición necesaria* de la existencia de un máximo relativo o un mínimo relativo de una función f, cuyas derivadas parciales f_x y f_y existen ambas, establece que

$$f_x = 0 \quad \text{y} \quad f_y = 0 \tag{16.6}$$

Una parte importante de esta definición es que tanto f_x como f_y son 0. Como se vio en la figura 16.8, puede haber un número infinito de puntos en una superficie donde f_x sea 0. En la figura 16.8, una línea tangente trazada

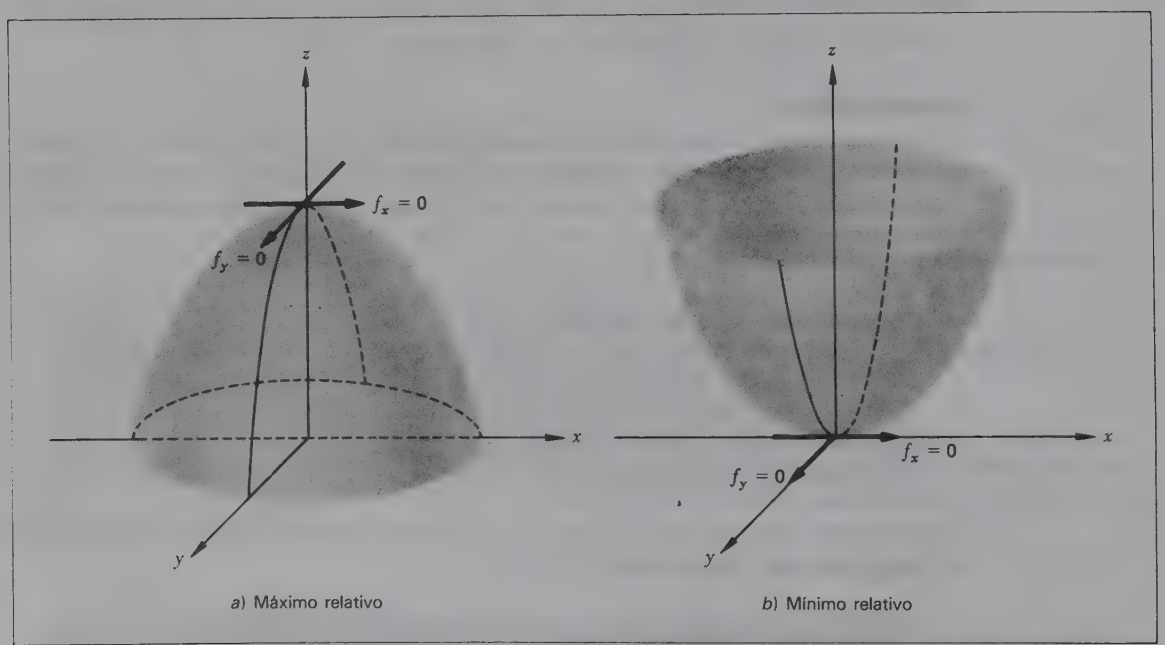


FIGURA 16.7 Extremos relativos en un espacio tridimensional.

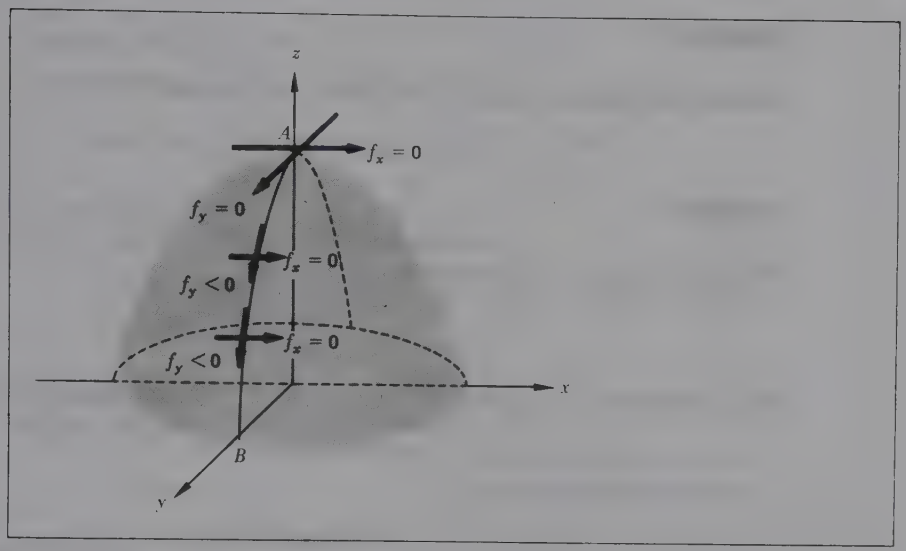


FIGURA 16.8
$f_x = 0$ a lo largo del trazo AB.

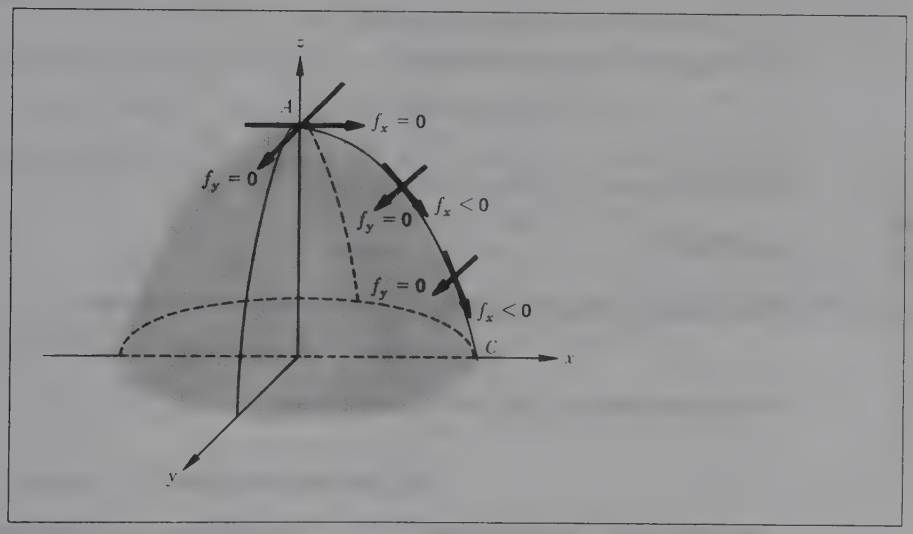


FIGURA 16.9
$f_y = 0$ a lo largo del trazo AC.

paralelamente al plano xz en cualquier parte del trazo AB mostrará una pendiente de 0 ($f_x = 0$). No obstante, el único punto donde tanto f_x como f_y son cero es en A. En los otros puntos a lo largo de AB una línea tangente trazada paralelamente al plano yz presenta una pendiente negativa ($f_y < 0$).

De manera similar, la figura 16.9 contiene un trazo AC a lo largo del cual $f_y = 0$, pero $f_x < 0$, salvo en el punto A.

Los valores de x^* y y^*, en que se satisface la ecuación (16.6), son los ***valores críticos***. El punto correspondiente $(x^*, y^*, f(x^*, y^*))$ es candidato a convertirse en un máximo o mínimo relativo en f y recibe el nombre de ***punto crítico***.

EJEMPLO 11

Localice los puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x,y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$$

SOLUCIÓN

Encuentre primero las expresiones de f_x y f_y

$$f_x = 8x - 12$$
$$f_y = 2y + 2$$

Para determinar los valores de x y y en que f_x y f_y son iguales a 0,

$$f_x = 0 \text{ cuando } 8x - 12 = 0$$

o un valor crítico de x es $x = \frac{3}{2}$

$$f_y = 0 \text{ cuando } 2y + 2 = 0$$

o el valor crítico correspondiente de y es $y = -1$

Sustituyendo estos valores en f,

$$f(\tfrac{3}{2}, -1) = 4(\tfrac{3}{2})^2 - 12(\tfrac{3}{2}) + (-1)^2 + 2(-1) - 10$$
$$= 9 - 18 + 1 - 2 - 10 = -20$$

El único punto crítico de x ocurre en $(^3/_2, -1, -20)$.

EJEMPLO 12

Para localizar los puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x,y) = -2x^2 - y^2 + 8x + 10y - 5xy$$

se calculan las primeras derivadas parciales,

$$f_x = -4x + 8 - 5y$$
$$f_y = -2y + 10 - 5x$$

Los valores de x y y que hacen f_x y $f_y = 0$ se calculan al resolver las siguientes ecuaciones:

$$-4x + 8 - 5y = 0 \qquad \textbf{(16.7)}$$
$$-2y + 10 - 5x = 0 \qquad \textbf{(16.8)}$$

Al reescribir las ecuaciones anteriores nos queda

$$4x + 5y = 8 \qquad \textbf{(16.9)}$$
$$5x + 2y = 10 \qquad \textbf{(16.10)}$$

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación (16.9) por -2 y los dos de la ecuación (16.10) por 5 y si se suman las ecuaciones resultantes, se obtendrá

$$\begin{array}{rcr} -8x - 10y & = & -16 \\ 25x + 10y & = & 50 \\ \hline 17x & = & 34 \end{array}$$

y un valor crítico de x es $x = 2$

Si se sustituye $x = 2$ en la ecuación (16.10), se encuentra

$$\begin{aligned} 5(2) + 2y &= 10 \\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

y el valor crítico correspondiente de y es $y = 0$.

Si se sustituyen los valores anteriores en f,

$$\begin{aligned} f(2,0) &= -2(2)^2 - (0)^2 + 8(2) + 10(0) - 5(2)(0) \\ &= -8 + 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Así pues, un punto crítico ocurre en (2, 0, 8).

EJEMPLO 13

Para determinar cualesquier puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$$

si las primeras derivadas parciales son idénticas y se hacen iguales a 0.

$$f_x = 4x + 4y - 2xy - 4 = 0 \qquad \textbf{(16.11)}$$

$$f_y = 4x - x^2 = 0 \qquad \textbf{(16.12)}$$

Estas dos ecuaciones deben resolverse simultáneamente. Sin embargo, las ecuaciones no son lineales. En la ecuación (16.12), f_y será 0 cuando

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= 0 \\ x(4 - x) &= 0 \end{aligned}$$

o cuando los valores críticos de x son

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 4$$

Para determinar los valores de y que corresponden a estos valores críticos de x y que hace f_x igual a 0, se sustituirán estos valores, uno a la vez, en la ecuación (16.11).

***Para* $x = 0$,**

$$\begin{aligned} 4(0) + 4y - 2(0)y - 4 &= 0 \\ 4y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, un punto crítico ocurre en la gráfica de f cuando $x = 0$ y $y = 1$. Si $x = 0$ y $y = 1$,

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 2(0)^2 + 4(0)(1) - (0)^2(1) - 4(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así pues, un punto crítico se presenta en (0, 1, 0).

Si $x = 4$,

$$\begin{aligned} 4(4) + 4y - 2(4)y - 4 &= 0 \\ 16 + 4y - 8y - 4 &= 0 \\ -4y &= -12 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} f(4, 3) &= 2(4)^2 + 4(4)(3) - (4)^2(3) - (4)(4) \\ &= 32 + 48 - 48 - 16 = 16 \end{aligned}$$

otro punto crítico ocurre en f en (4, 3, 16).

Cómo distinguir los puntos críticos

Una vez identificado un punto crítico, es necesario determinar su naturaleza. Aparte de los puntos máximos y mínimos relativos, hay otro caso en que tanto f_x como f_y son 0. La figura 16.10 muestra esa situación a la cual se le conoce con el nombre de ***punto en silla de montar***. Dicho punto es una parte de la superficie que tiene la forma de una silla de montar. En el punto A (''donde el jinete se sienta al montar un caballo''), los valores de f_x y f_y son 0. Sin embargo, la función no llega al máximo al mínimo relativo en A. Si se divide por la superficie en el punto A con un plano que tenga la ecuación $x = 0$, el borde o trazo resultante indica un máximo relativo en A. No obstante, dividiendo por la superficie con el plano que tenga la ecuación $y = 0$ el trazo resultante indica un mínimo relativo en A. La figura 16.11 contiene estas observaciones.

Las condiciones que permiten distinguir entre el máximo relativo, el mínimo relativo o los puntos en silla de montar se dan a continuación. La prueba de un punto crítico es una prueba de la segunda derivada (como se utilizó en los problemas de una sola variable) que, desde el punto de vista intuitivo, investiga las condiciones de concavidad en el punto crítico.

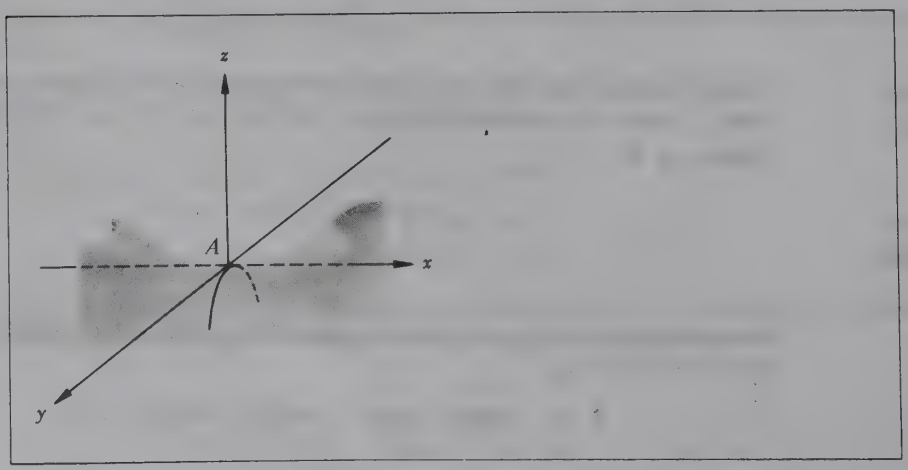


FIGURA 16.10
Punto en silla de montar.

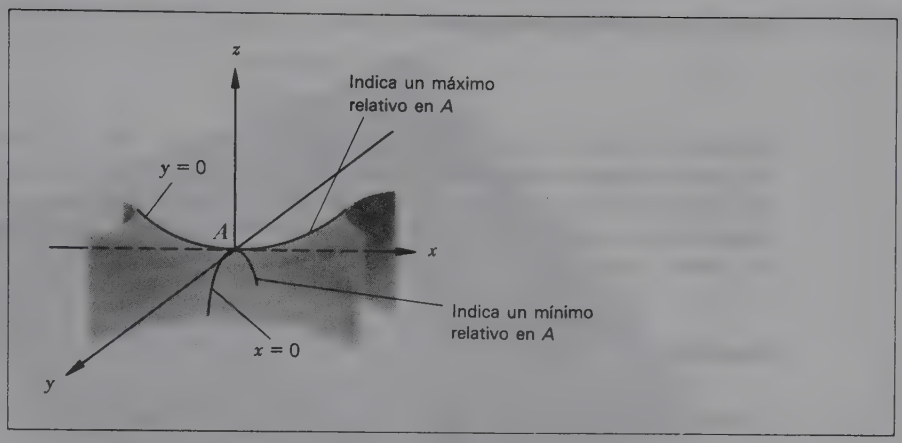


FIGURA 16.11 Signos contrarios de concavidad para el punto en silla de montar.

PRUEBA DEL PUNTO CRÍTICO

Si se tiene un punto crítico de f localizado en (x^*, y^*, z) en que todas las segundas derivadas parciales sean continuas, determine el valor de $D(x^*, y^*)$ donde

$$D(x^*, y^*) = f_{xx}(x^*, y^*) f_{yy}(x^*, y^*) - [f_{xy}(x^*, y^*)]^2 \qquad \textbf{(16.13)}$$

I Si $D(x^*, y^*) > 0$, el punto crítico es un ***máximo relativo*** si tanto $f_{xx}(x^*, y^*)$ como $f_{yy}(x^*, y^*)$ son negativas, y el punto crítico es un ***máximo relativo*** si tanto $f_{xx}(x^*, y^*)$ como $f_{yy}(x^*, y^*)$ son positivas.

II Si $D(x^*, y^*) < 0$, el punto crítico es un ***punto en silla de montar***.

III Si $D(x^*, y^*) = 0$, se necesitan otras técnicas (que rebasan el alcance de este libro) para determinar la naturaleza del punto crítico.

EJEMPLO 14

En el ejemplo 11 se determinó que un punto crítico ocurre en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$$

Determine la naturaleza del punto crítico en $(^3/_2, -1, -20)$.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 11 se descubrió que

$$f_x = 8x - 12$$
$$f_y = 2y + 2$$

Las cuatro derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = 8 \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_{yy} = 2 \qquad f_{yx} = 0$$

Al evaluar $D(x^*, y^*)$ tenemos

$$D(\tfrac{3}{2}, -1) = (8)(2) - 0^2$$
$$= 16 > 0$$

Puesto que $D(x^*, y^*) > 0$ y $f_{xx}(3/2, -1) = 8$ y $f_{yy}(3/2, -1) = 2$, ambas mayores que 0, podemos llegar a la conclusión de que un mínimo relativo ocurre en $(3/2, -1, -20)$. La figura 16.12 es una gráfica de la función. Esta gráfica, lo mismo que varias de las siguientes, se generan con computadora empleando el paquete de graficación SAS y se trazan en una graficadora Calcomp.*

EJEMPLO 15

Para determinar la localización y la naturaleza de cualquier punto crítico de la función

$$f(x, y) = -2x^2 + 24x - y^2 + 30y$$

se calculan las primeras derivadas y se hacen iguales a 0.

$$f_x = -4x + 24 = 0$$

Un valor crítico de x es

$$x = 6$$
$$f_y = -2y + 30 = 0$$

El valor crítico correspondiente de y es

$$y = 15$$

He aquí las derivadas de segundo orden:

$$f_{xx} = -4 \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_{yy} = -2 \qquad f_{yx} = 0$$

Al evaluar $D(x^*, y^*)$ obtenemos

$$D(6, 15) = (-4)(-2) - 0^2$$
$$= 8 > 0$$

Puesto que $D(6, 15)$ es positiva y tanto f_{xx} como f_{yy} son negativas, un máximo relativo ocurre cuando $x = 6$ y $y = 15$. El valor de $f(x, y)$ en el máximo relativo es

$$f(6, 15) = -2(6^2) + 24(6) - (15)^2 + 30(15)$$
$$= -72 + 144 - 225 + 450 = 297$$

Así pues, un máximo relativo ocurre en (6, 15, 297). La figura 16.13 es una gráfica de la función.

*Statistical Analysis System, subrutina G3.

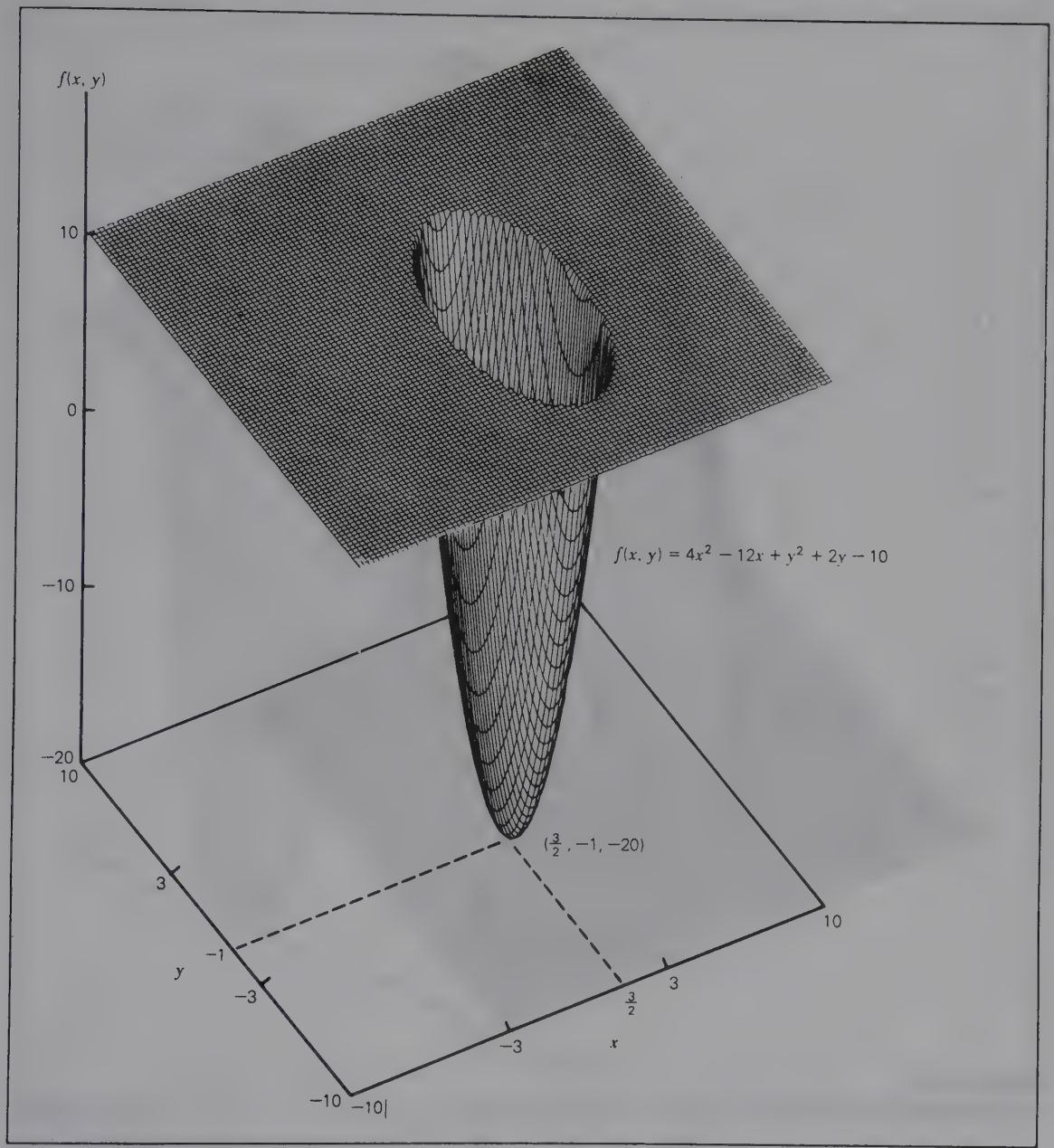


FIGURA 16.12
Mínimo relativo en $f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$.

EJEMPLO 16

En el ejemplo 13 se determinó que ocurren puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$$

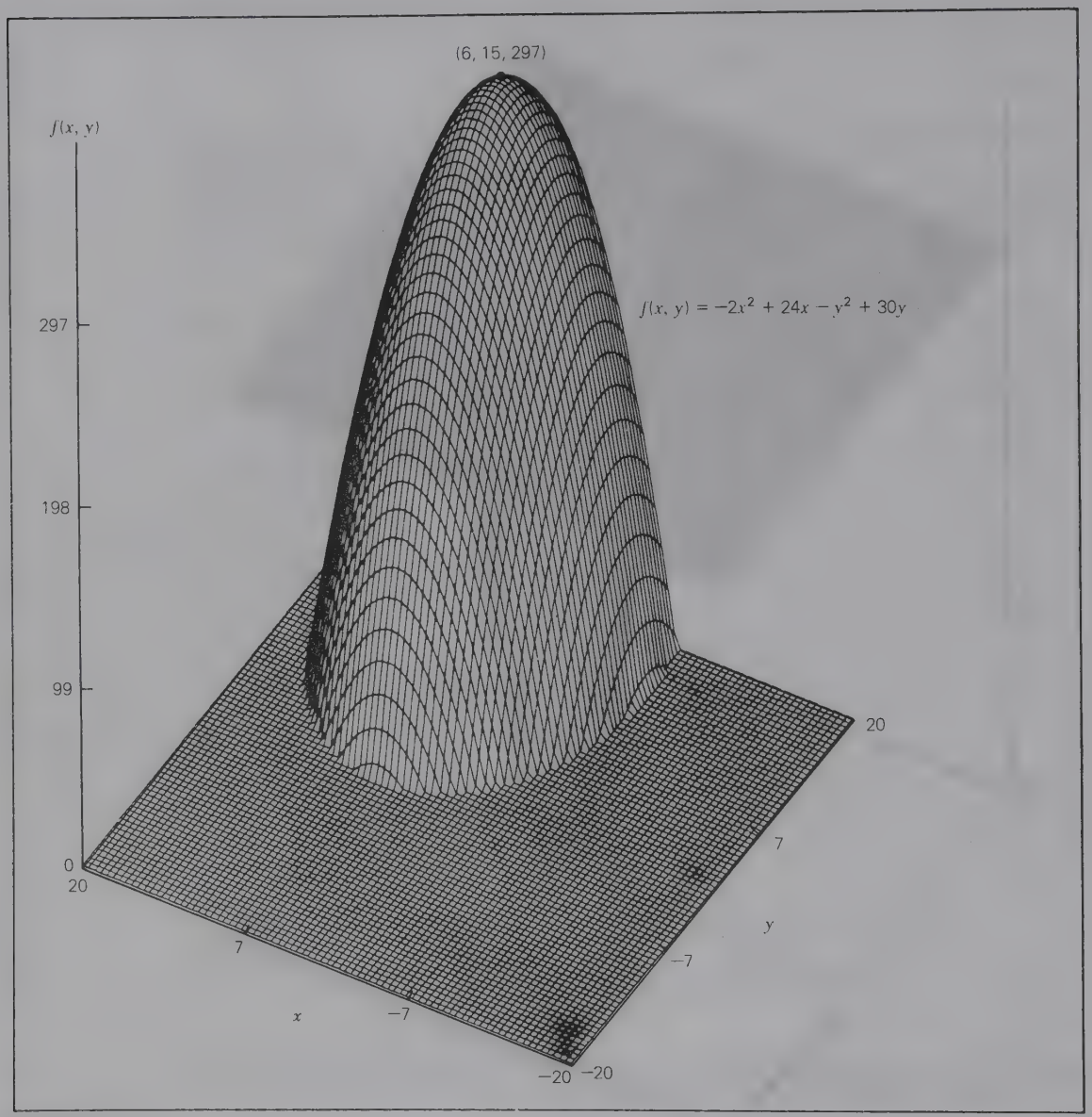


FIGURA 16.13
Máximo relativo en $f(x, y) = -2x^2 + 24x - y^2 + 30y$.

en (0, 1, 0) y (4, 3, 16). Para determinar la naturaleza de los dos puntos críticos, es preciso obtener todas las segundas derivadas. De acuerdo con el ejemplo 13,

$$f_x = 4x + 4y - 2xy - 4$$
$$f_y = 4x - x^2$$

Las derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = 4 - 2y \qquad f_{xy} = 4 - 2x$$
$$f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = 4 - 2x$$

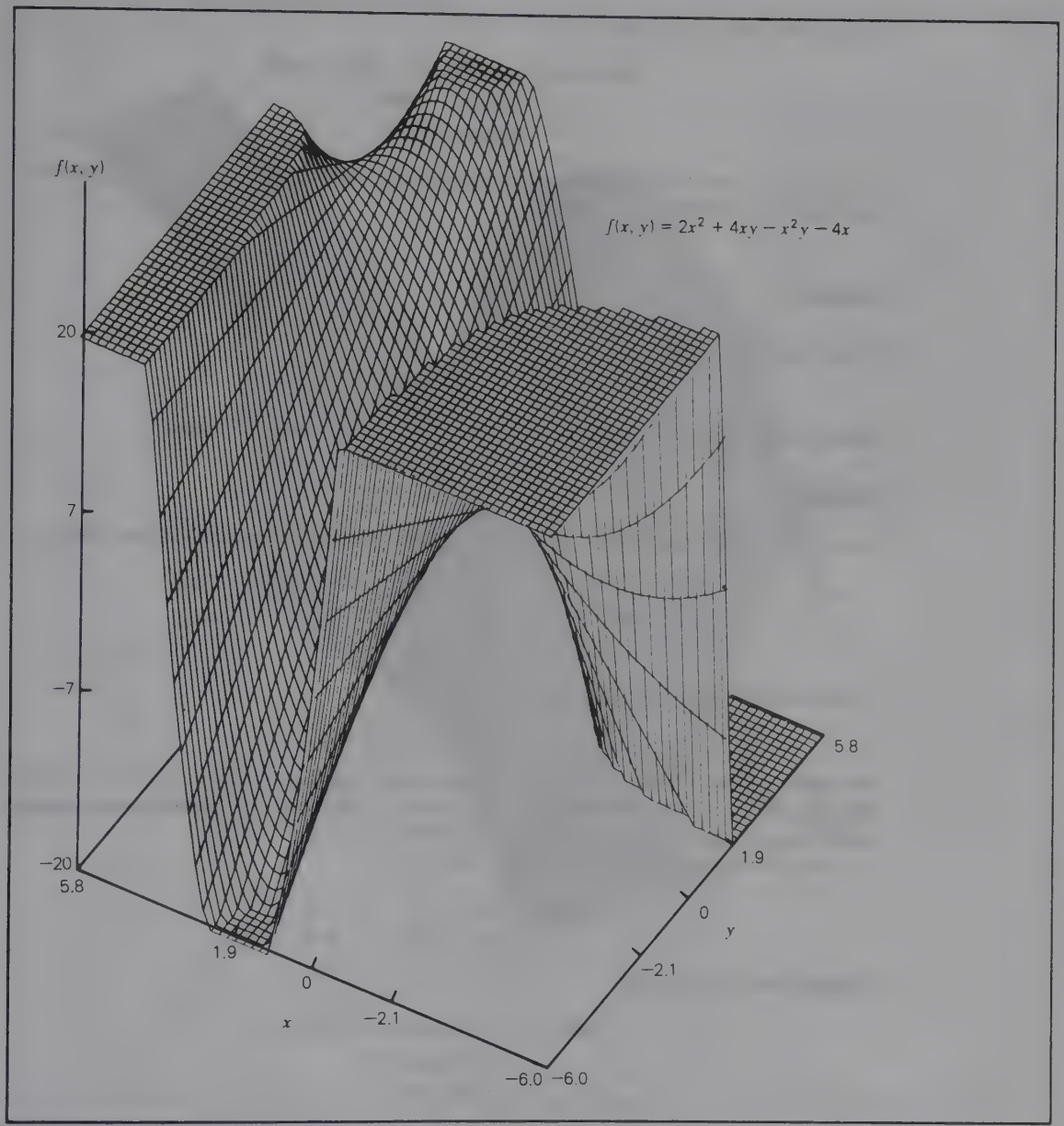


FIGURA 16.14
Dos puntos en silla de montar en $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$.

Evaluación de (0, 1, 0):

$$\begin{aligned} D(0, 1) &= [4 - 2(1)](0) - [4 - 2(0)]^2 \\ &= (2)(0) - 4^2 \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

Como $D(0, 1) < 0$, un punto en silla de montar se presenta en f en (0, 1, 0)

Evaluación de (4, 3, 16):

$$\begin{aligned} D(4,3) &= [4 - 2(3)](0) - [4 - 2(4)]^2 \\ &= (-2)(0) - (-4)^2 \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

Un segundo punto en silla de montar ocurre en f, éste en (4, 3, 16). La figura 16.14 presenta una gráfica de la función.

EJEMPLO 17

En la función

$$f(x,y) = -x^2 - y^3 + 12y^2$$

determine la localización y la naturaleza de todos los puntos críticos.

SOLUCIÓN

Si se calculan las primeras derivadas parciales y se hacen iguales a 0, se obtiene

$$\begin{aligned} f_x &= -2x = 0 \quad \text{o un valor crítico ocurre en } x = 0 \\ f_y &= -3y^2 + 24y = 0 \\ & 3y(-y + 8) = 0 \end{aligned}$$

O bien ocurren valores críticos en

$$y = 0 \quad \text{y} \quad y = 8$$

Hay dos puntos críticos en f: uno asociado a los valores críticos $x = 0$ y $y = 0$ y el otro asociado a los valores críticos $x = 0$ y $y = 8$. Verifique que los dos puntos estacionarios se presenten en (0, 0, 0) y (0, 8, 256)

Las derivadas de segundo orden son

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -2 & f_{xy} &= 0 \\ f_{yy} &= -6y + 24 & f_{yx} &= 0 \end{aligned}$$

Evaluación de (0, 0, 0):

$$\begin{aligned} D(0,0) &= (-2)[-6(0) + 24] - 0^2 \\ &= (-2)(24) - 0 \\ &= -48 < 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, ocurre un punto en silla de montar en (0, 0, 0).

Evaluación de (0, 8, 256):

$$\begin{aligned} D(0,8) &= (-2)[-6(8) + 24] - 0^2 \\ &= (-2)(-24) \\ &= 48 > 0 \end{aligned}$$

Los valores de las dos derivadas parciales puras en el punto crítico son $f_{xx}(0, 8) = -2$ y $f_{yy}(0, 8) = -6(8) + 24 = -24$. Puesto que ambas son negativas, se llega

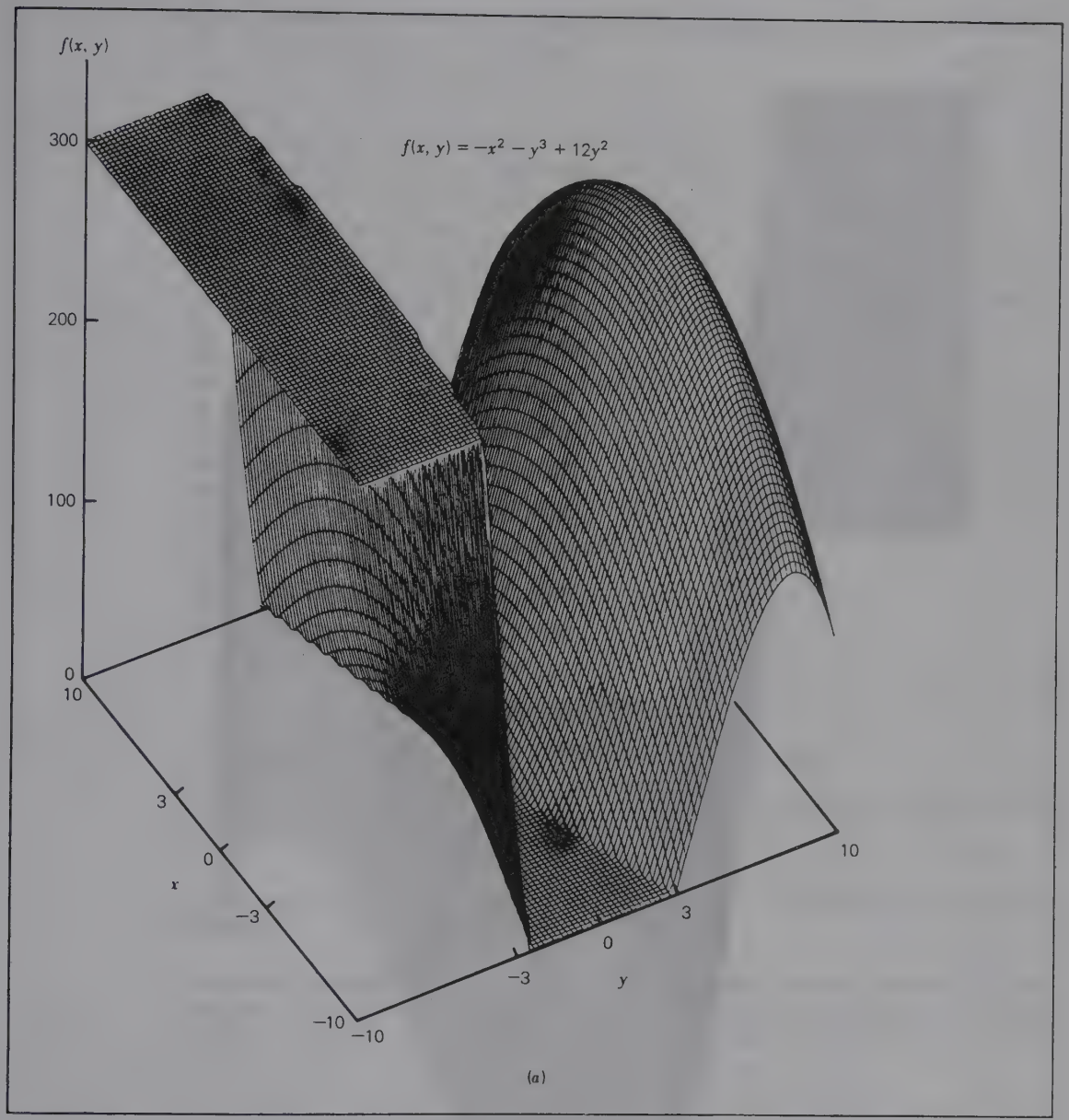


FIGURA 16.15
Máximo relativo y punto en silla de montar en $f(x, y) = -x^2 - y^3 + 12y^2$.

a la conclusión de que ocurre un máximo relativo en la gráfica de f en (0, 8, 256). La figura 16.15 es una gráfica de f que ofrece dos perspectivas de la superficie.

Ejercicios de seguimiento de la sección 16.3

En los siguientes ejercicios determine la localización y la naturaleza de todos los puntos críticos.

1 $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 80x + 40y + 10$

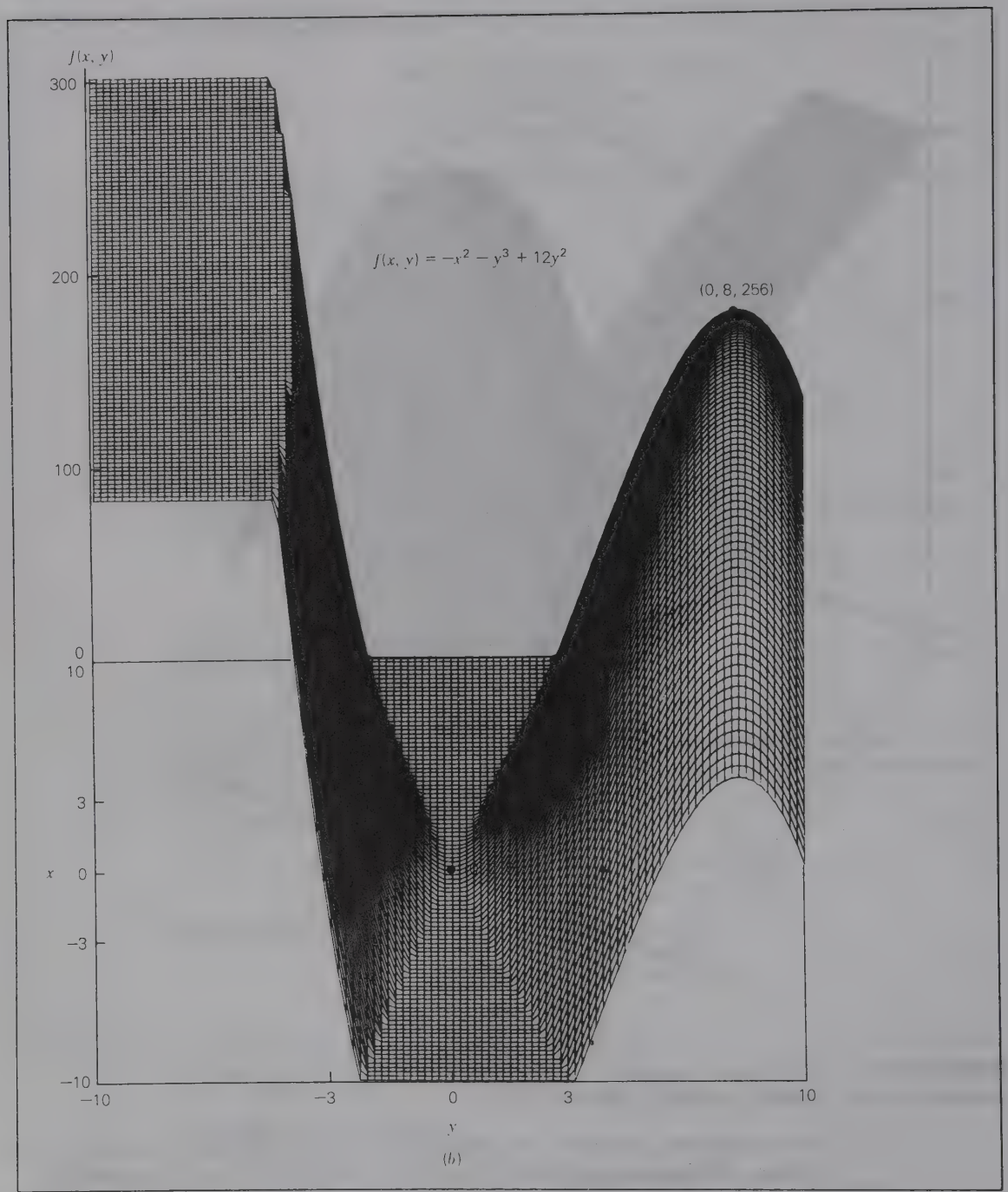


FIGURA 16.15
(continúa).

2 $f(x,y) = 2x^2 + xy - 9x - 2y^2 + 2y$
3 $f(x,y) = x^3/3 - 5x^2/2 + 6y^2 + 36y$
4 $f(x,y) = -4x^2 + 12xy + 44x - 12y^2 + 12y$
5 $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8x - 8y + 5$
6 $f(x,y) = -2x^2 + 16x - 75y + y^3 + 5$
7 $f(x,y) = x^3 + y^2 - 12x + 16y + 10$
8 $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 36y + 22$
9 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
10 $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$
11 $f(x,y) = xy + \ln x + y^2 - 10, \quad x > 0$
12 $f(x,y) = 25x - 25xe^{-y} - 50y - x^2$
13 $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 10$
14 $f(x,y) = -4x^2 + 12x - 3y^2 + 36y - 5$
15 $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 + 1.5y^2 - 12x - 90y$
16 $f(x,y) = xy - 1/x - 1/y$
17 $f(x,y) = 6x^2 + 30x + y^2 - 6y$
18 $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x + 6$
19 $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$
20 $f(x,y) = 4xy - x^3 - y^2$
21 $f(x,y) = xy + \ln x + 2y^2 - 10, \quad x > 0$
22 $f(x,y) = x^3/3 - 5x^2/2 + 3y^2 - 12y$
23 $f(x,y) = -x^2 + 6x - 12y + y^3 + 5$
24 $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x + 6y + 10$

16.4 APLICACIONES DE LA OPTIMIZACIÓN BIVARIADA

En esta sección se ofrecen algunas aplicaciones de la optimización de funciones bivariadas.

EJEMPLO 18

Gastos de publicidad El ejemplo 9 se refería a un fabricante que estimaba las ventas anuales (en unidades) en función de los gastos hechos en la publicidad por radio y televisión. La función que especifica esta relación se formuló así:

$$z = 50\,000x + 40\,000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$$

donde *z es el número de unidades vendidas cada año, x indica la cantidad destinada a la publicidad por televisión* y *y denota la cantidad dedicada a la publicidad por radio (x* y *y se dan en miles*). Determine cuánto dinero deberá invertirse en ambos tipos de publicidad a fin de maximizar el número de unidades vendidas.

SOLUCIÓN

Las primeras derivadas parciales son

$$f_x = 50\,000 - 20x - 10y$$
$$f_y = 40\,000 - 40y - 10x$$

Al rearreglar las derivadas y hacerlas iguales a 0, tenemos

$$\begin{aligned} 20x + 10y &= 50\,000 \\ 10x + 40y &= 40\,000 \end{aligned}$$

Si ambos lados de la segunda ecuación se multiplican por -2 y el resultado se agrega a la primera ecuación, entonces

$$\begin{aligned} 20x + 10y &= 50\,000 \\ -20x - 80y &= -80\,000 \\ \hline -70y &= -30\,000 \end{aligned}$$

y un valor crítico de y es

$$y = 428.57$$

Al sustituir y en una de las ecuaciones originales se obtiene

$$\begin{aligned} 20x + 10(428.57) &= 50\,000 \\ 20x &= 50\,000 - 4\,285.7 \\ 20x &= 45\,714.3 \end{aligned}$$

y el valor crítico correspondiente de x es

$$x = 2\,285.72$$

Las ventas totales asociadas con $x = 2285.72$ y $y = 428.57$ son

$$\begin{aligned} f(2\,285.72, 428.57) &= 50\,000(2\,285.72) + 40\,000(428.57) \\ &\quad - 10(2\,285.72)^2 - 20(428.57)^2 - 10(2\,285.72)(428.57) \\ &= 65\,714\,296.00 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Así pues, un punto crítico ocurre en la gráfica de f en (2285.74, 428.57, 65 714 296).

Para determinar la naturaleza del punto crítico, las segundas derivadas son

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -20 \qquad f_{xy} = -10 \\ f_{yy} &= -40 \qquad f_{yx} = -10 \end{aligned}$$

Al probar el punto crítico se obtiene

$$\begin{aligned} D(2\,285.72, 428.57) &= (-20)(-40) - (-10)^2 \\ &= 800 - 100 = 700 > 0 \end{aligned}$$

Dado que $D > 0$ y tanto f_{xx} como f_{yy} son negativas, podría llegarse a la conclusión de que las ventas anuales se maximizan en 65 714 296 unidades cuando 2285.72 (en miles) se destinan a la publicidad por televisión y se gastan 428.57 (en miles) en la publicidad por radio. La figura 16.16 es una gráfica de la superficie de ventas.

EJEMPLO 19

Modelo de fijación de precios Un fabricante vende dos productos afines, cuya demanda se caracteriza por las dos siguientes funciones de demanda:

$$q_1 = 150 - 2p_1 - p_2 \tag{16.14}$$

$$q_2 = 200 - p_1 - 3p_2 \tag{16.15}$$

donde p_j *es el precio (en dólares) del producto* j y q_j *denota la demanda (en miles de unidades) del producto* j. El examen de estas funciones de demanda revela que los dos productos

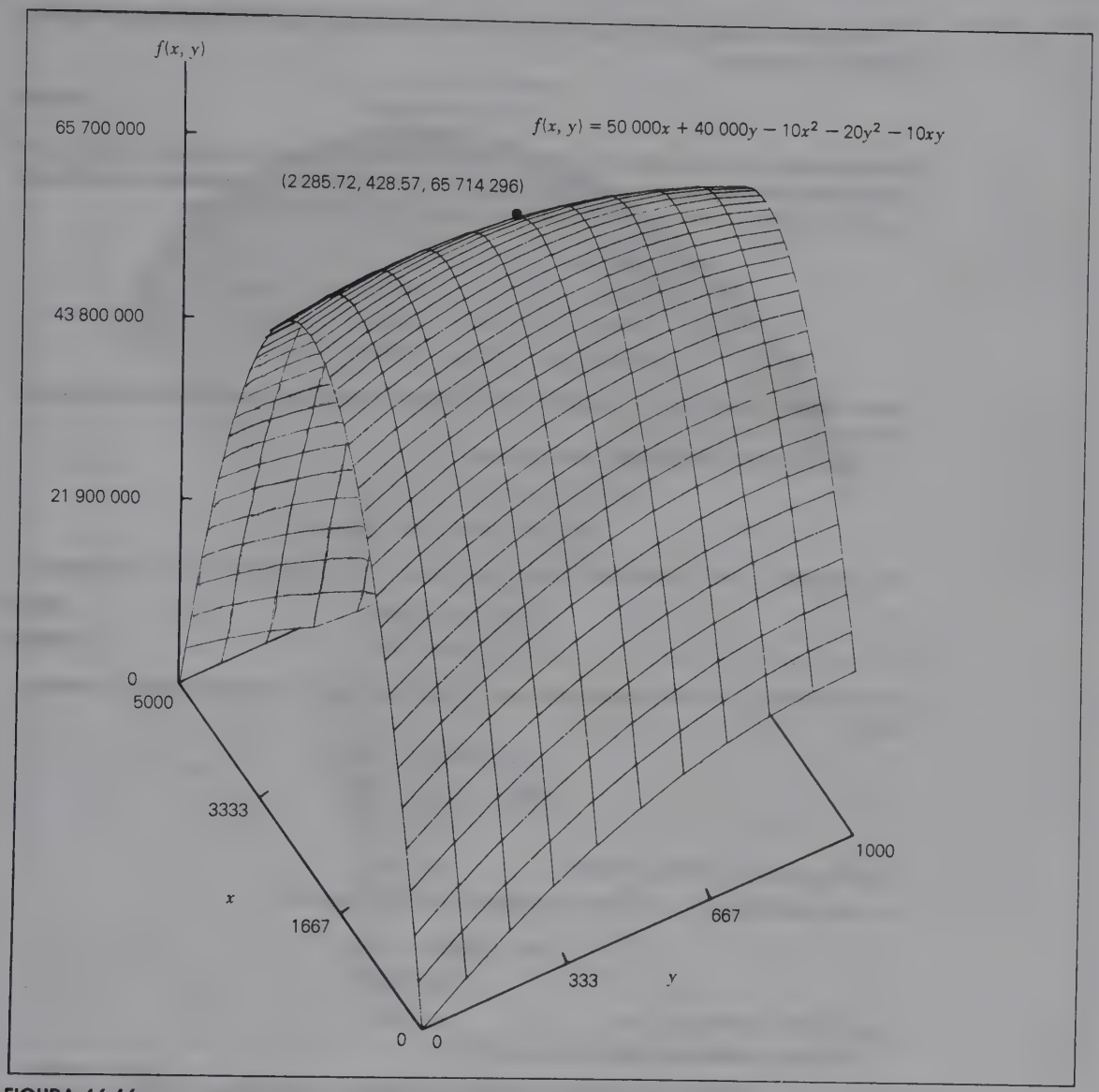


FIGURA 16.16
Máximo relativo en $f(x, y) = 50\,000x + 40\,000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$.

están relacionados entre sí. La demanda de uno depende no sólo del precio que se le fije a ese producto, sino además del precio que se establezca para el otro.

La compañía desea determinar el precio que deberá poner a cada producto, a fin de maximizar los ingresos totales de la venta de los dos.

SOLUCIÓN

Este problema es exactamente igual a los problemas de un solo producto expuestos en el capítulo 14. La única diferencia radica en que hay dos productos y dos decisiones de fijación de precios que deben tomarse.

El ingreso total que se logra con la venta de los dos productos se determina mediante la ecuación

$$\boxed{R = p_1q_1 + p_2q_2} \tag{16.16}$$

Sin embargo, esta ecuación se expresa en términos de cuatro variables. Como en el caso de los problemas de un solo producto, es posible sustituir el miembro derecho de las ecuaciones (16.14) y (16.15) en la ecuación (16.16) para obtener

$$\begin{aligned} R &= f(p_1, p_2) \\ &= p_1(150 - 2p_1 - p_2) + p_2(200 - p_1 - 3p_2) \\ &= 150p_1 - 2p_1^2 - p_1p_2 + 200p_2 - p_1p_2 - 3p_2^2 \\ &= 150p_1 - 2p_1^2 - 2p_1p_2 + 200p_2 - 3p_2^2 \end{aligned}$$

Ahora podemos empezar a examinar la superficie de ingreso para los puntos máximos relativos.

Las primeras derivadas parciales son

$$\begin{aligned} f_{p_1} &= 150 - 4p_1 - 2p_2 \\ f_{p_2} &= -2p_1 + 200 - 6p_2 \end{aligned}$$

Al rearreglar estas expresiones de las derivadas y hacerlas iguales a 0, nos queda

$$4p_1 + 2p_2 = 150 \tag{16.17}$$

$$2p_1 + 6p_2 = 200 \tag{16.18}$$

Si la ecuación (16.18) se multiplica por -2 y se agrega a la ecuación (16.17), obtenemos

$$\begin{aligned} 4p_1 + 2p_2 &= 150 \\ -4p_1 - 12p_2 &= -400 \\ \hline -10p_2 &= -250 \end{aligned}$$

O bien un valor crítico de p_2 es $p_2 = 25$

La sustitución de $p_2 = 25$ en la ecuación (16.17) nos da

$$\begin{aligned} 4p_1 + 2(25) &= 150 \\ 4p_1 &= 100 \end{aligned}$$

o un valor crítico de p_1 es $p_1 = 25$

Si estos valores se sustituyen en f,

$$\begin{aligned} f(25, 25) &= 150(25) - 2(25)^2 - 2(25)(25) + 200(25) - 3(25)^2 \\ &= 4\,375 \end{aligned}$$

Ocurre un punto crítico en f en (25, 25, 4375)

Las segundas derivadas son

$$f_{p_1p_1} = -4 \qquad f_{p_1p_2} = -2$$

$$f_{p_2p_2} = -6 \qquad f_{p_2p_1} = -2$$

y

$$\begin{aligned} D(25, 25) &= (-4)(-6) - (-2)^2 \\ &= 24 - 4 = 20 > 0 \end{aligned}$$

Dado que $D(x^*, y^*) > 0$ y $f_{p_1p_1}$ y $f_{p_2p_2}$ son negativas, existirá un máximo relativo en f cuando $p_1 = 25$ y $p_2 = 25$. Los ingresos se maximizarán en un valor de \$4375

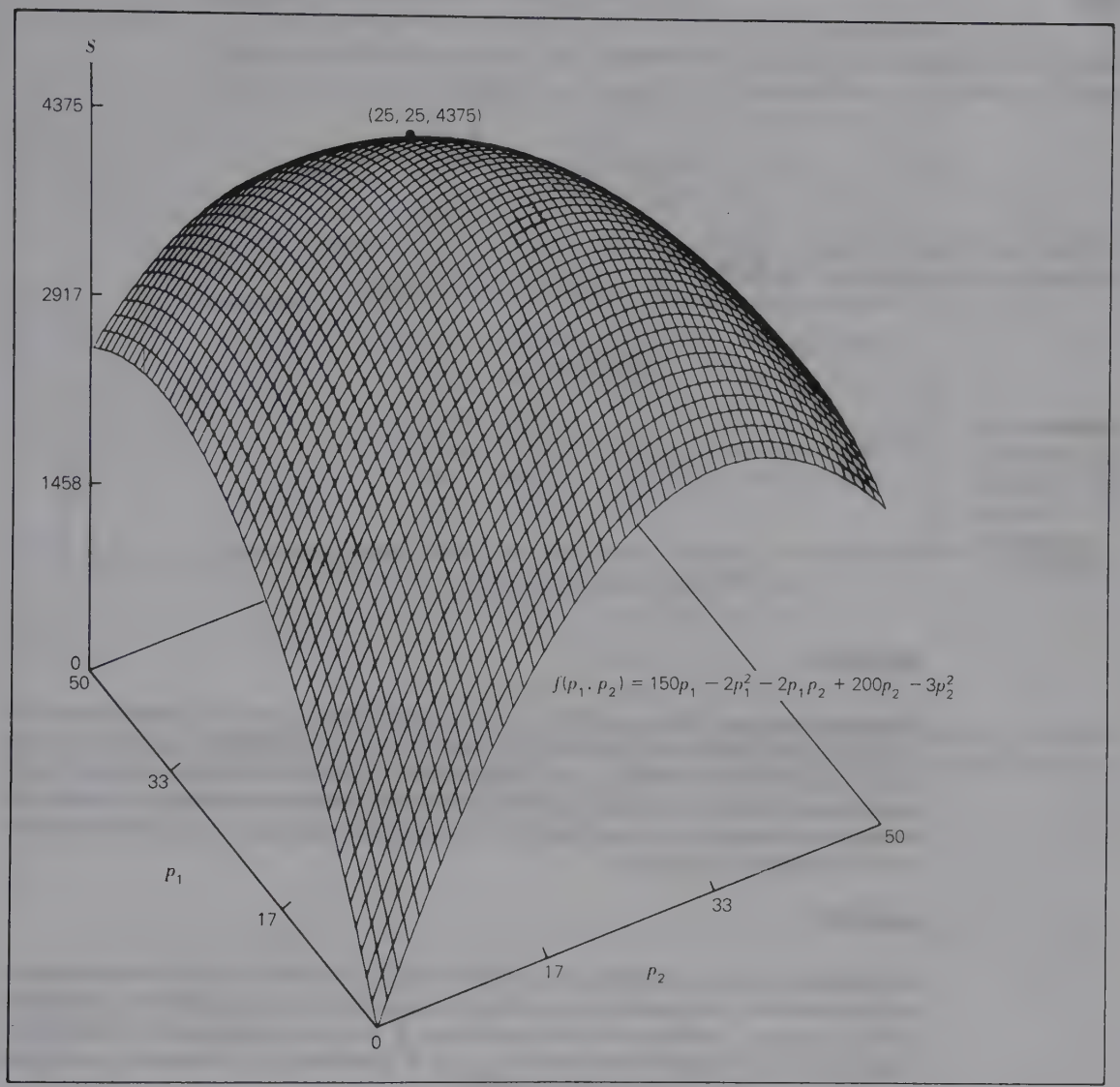


FIGURA 16.17
Máximo relativo en superficie de ingresos $f(p_1, p_2) = 150p_1 - 2p_1^2 - 2p_1p_2 + 200p_2 - 3p_2^2$.

(miles) cuando cada producto se venda en \$25. La demanda esperada con estos precios puede determinarse sustituyendo p_1 y p_2 en las ecuaciones de demanda, o sea

$$q_1 = 150 - 2(25) - (25) = 75 \text{ (mil unidades)}$$
$$q_2 = 200 - (25) - 3(25) = 100 \text{ (mil unidades)}$$

La figura 16.17 es una gráfica de la superficie de ingreso.

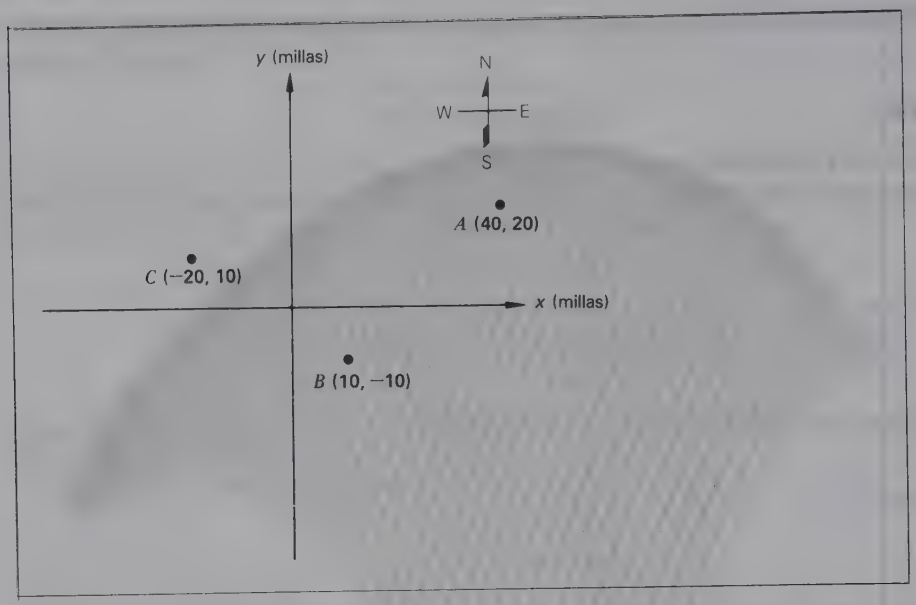


FIGURA 16.18 Localizaciones relativas de tres municipios suburbanos.

EJEMPLO 20

Ubicación de una clínica satélite Una gran organización para la conservación de la salud está planeando situar una clínica satélite en un lugar adecuado para dar servicio a tres municipios suburbanos, cuya localización relativa se ofrece en la figura 16.18. La organización quiere escoger un lugar preliminar aplicando el siguiente criterio: determinar la ubicación (x, y) que minimice la *suma de los cuadrados* de las distancias entre cada municipio y la clínica.

SOLUCIÓN

Las incógnitas de este problema son x y y, o sea las coordenadas de la localización de la clínica satélite. Se necesita determinar una expresión del cuadrado de la distancia entre la clínica y cada uno de los municipios. Y esto se consigue con el teorema de Pitágoras.* Si se conocen dos puntos (x_1, y_1), el cuadrado de la distancia d entre esos dos puntos se calcula mediante la ecuación

$$\boxed{d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \textbf{(16.19)}$$

He aquí un ejemplo: el cuadrado de la distancia entre la clínica con la localización (x, y) y el municipio A situado en (40, 20) es

$$d^2 = (x - 40)^2 + (y - 20)^2$$

*Véase el capítulo 14, página 678.

Al determinar las expresiones similares para el cuadrado de la distancia que separa los municipios B y C y la clínica y al sumar las correspondientes a los tres, se obtiene

$$\begin{aligned} s &= f(x,y) \\ &= [(x-40)^2 + (y-20)^2] + [(x-10)^2 + (y+10)^2] \\ &\quad + [(x+20)^2 + (y-10)^2] \end{aligned}$$

El miembro derecho de esta función puede ampliarse o dejarse en esta forma, con objeto de calcular las derivadas. Optaremos por no tocarlo. Las primeras derivadas parciales son

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x-40)(1) + 2(x-10)(1) + 2(x+20)(1) \\ &= 2x - 80 + 2x - 20 + 2x + 40 \\ &= 6x - 60 \\ f_y &= 2(y-20)(1) + 2(y+10)(1) + 2(y-10)(1) \\ &= 2y - 40 + 2y + 20 + 2y - 20 \\ &= 6y - 40 \end{aligned}$$

Si hacemos iguales a 0 las dos derivadas parciales, obtendremos valores críticos en $x = 10$ y $y = 6\frac{2}{3}$. Las segundas derivadas parciales son

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6 \qquad f_{xy} = 0 \\ f_{yy} &= 6 \qquad f_{yx} = 0 \\ D(10, 6\tfrac{2}{3}) &= (6)(6) - 0^2 = 36 > 0 \end{aligned}$$

Como $D > 0$ y f_{xx} y f_{yy} son mayores que 0, se llega a la conclusión de que ocurre un mínimo relativo en f cuando $x = 10$ y $y = 6$ o cuando la clínica satélite está situada como se advierte en la figura 16.19.

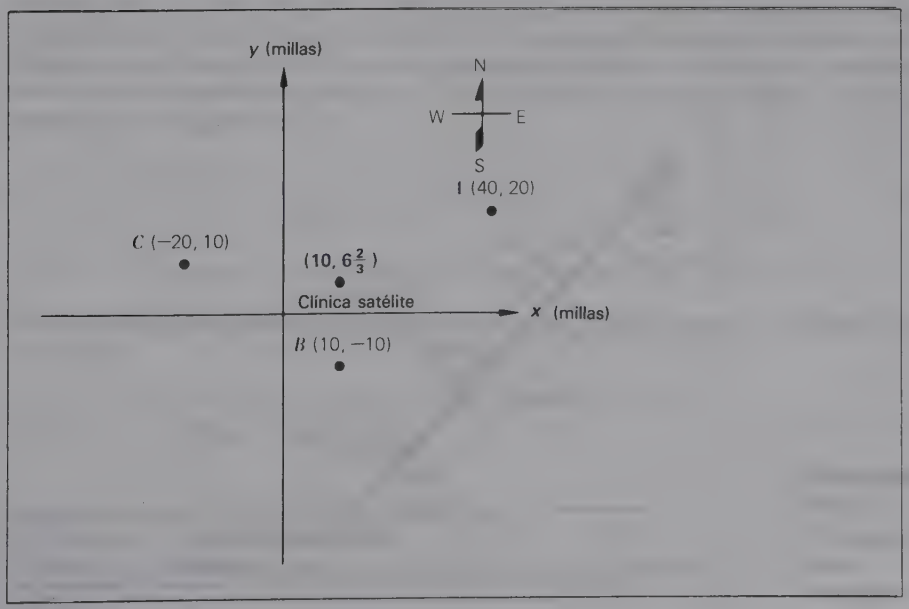


FIGURA 16.19 Localización propuesta de la clínica satélite.

EJEMPLO 21

Modelo de mínimos cuadrados Las organizaciones reúnen datos periódicos sobre multitud de variables relacionadas con sus operaciones. Un área central de análisis es averiguar si hay patrones en los datos: ¿se dan relaciones notorias entre las variables de interés? Por ejemplo, las funciones de demanda a las que nos hemos referido una y otra vez seguramente se determinaron recabando información sobre la demanda de un producto con distintos precios. Y el análisis de esa información se traduce en una expresión formal de la función de demanda.

Considere los cuatro puntos de datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4) en la figura 16.20, que se reunieron para las variables x y y. Supóngase que se cuenta con evidencia de que x y y están relacionadas y de que la naturaleza de la relación es lineal. Y supóngase además que nos gustaría ajustar una recta en esos puntos, cuya ecuación se empleará como aproximación de la relación actual que existe entre x y y. Se pregunta entonces: ¿qué línea se ajusta mejor a los puntos de datos? Hay un número infinito de rectas que pueden ajustarse a ellos, todas las cuales presentan la forma general

$$\boxed{y_p = ax + b} \qquad \textbf{(16.20)}$$

La diferencia entre cada línea será la que hay en la pendiente a y/o la coordenada y de la intercepción b con el eje y. Nótese que y tiene un subíndice de p en la ecuación (16.20). Ello es porque el ajuste de la línea con los puntos de datos puede servir para *predecir* valores de y, si se tiene un valor conocido de x.

En la figura 16.20, los valores pronosticados de y, conocidas las coordenadas x de los cuatro puntos de datos, están indicados en la línea. La distancia vertical que separa el punto real de datos y el punto correspondiente en la línea es una medida del error introducido al utilizar la línea para predecir la localización del punto de datos. El error, denotado por los valores d_j en la figura 16.20, recibe el nombre de ***desviación***

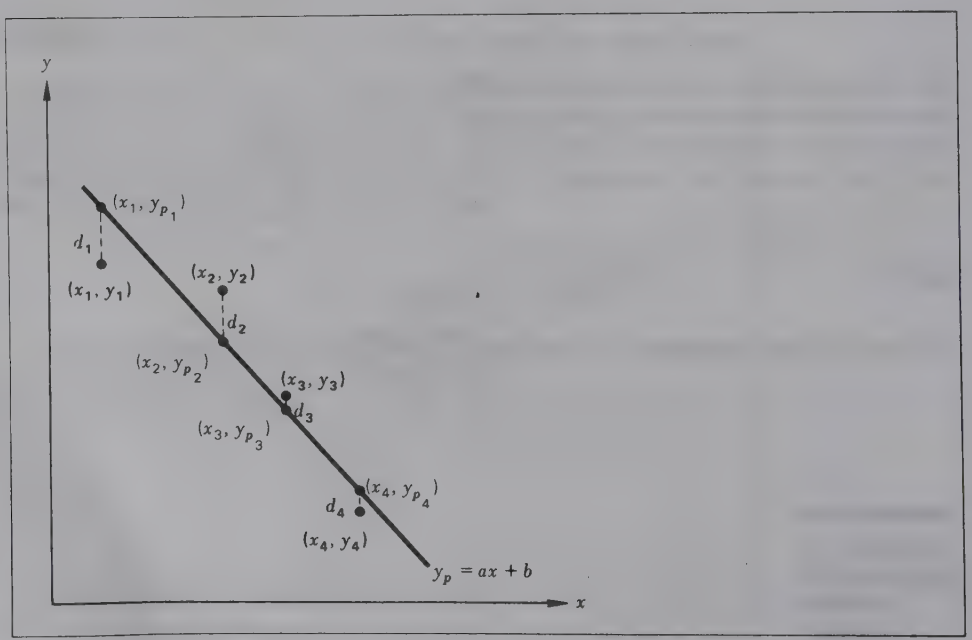


FIGURA 16.20 Cuatro puntos de datos muestra.

entre el valor real de y y el valor pronosticado de y para el j-ésimo punto de datos, es decir,

$$\boxed{d_j = y_j - y_{pj}} \tag{16.21}$$

Como se desea obtener la "mejor" línea para ajustarla a los puntos de datos, la siguiente pregunta será: ¿cómo se define el adjetivo *mejor*? Uno de los métodos más comunes para encontrar la línea del mejor ajuste es el ***modelo de mínimos cuadrados***. En este modelo *mejor* se define como la línea que minimiza la suma del cuadrado de las desviaciones en todos los puntos de datos. En la figura 16.20 se buscará la línea que minimice

$$\begin{aligned} S &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \\ &= \sum_{j=1}^{4} d_j^2 \end{aligned}$$

o bien

$$\boxed{S = \sum_{j=1}^{4} (y_j - y_{pj})^2} \tag{16.22}$$

Para cualquier línea $y_{pj} = ax_j + b$ escogida para ajustar los puntos de datos, la ecuación (16.22) puede reescribirse así:

$$S = f(a, b)$$

o

$$\boxed{S = \sum_{j=1}^{4} [y_j - (ax_j + b)]^2} \tag{16.23}$$

Para cualquier recta que tenga la pendiente a y la intersección b con el eje y, podrá determinarse la suma del cuadrado de las desviaciones S. *El modelo de los mínimos cuadrados busca los valores de a y b que produzcan un valor mínimo de S.*

Pongamos el simple caso de una compañía que ha reunido tres puntos de datos corcernientes a la relación entre precio y demanda. La tabla 16.3 contiene las combinaciones de precio-cantidad. La figura 16.21 es una gráfica de sus localizaciones. Supóngase que se desea determinar la línea del mejor ajuste con esos puntos, usando para ello el modelo de mínimos cuadrados. La función de mínimos cuadrados se genera por medio de la ecuación (16.23).

$$\begin{aligned} S &= f(a, b) \\ &= \sum_{j=1}^{3} [y_j - (ax_j + b)]^2 \\ &= [50 - (5a + b)]^2 + [30 - (10a + b)]^2 + [20 - (15a + b)]^2 \end{aligned}$$

Para determinar los valores de a y b que minimizan S, se calculan las derivadas respecto a a y b.

$$\begin{aligned} f_a = {} & 2[50 - (5a + b)](-5) + 2[30 - (10a + b)](-10) \\ & + 2[20 - (15a + b)](-15) \end{aligned}$$

TABLA 16.3

y (Demanda en miles de unidades)	50	30	20
x (Precio en dólares)	5	10	15

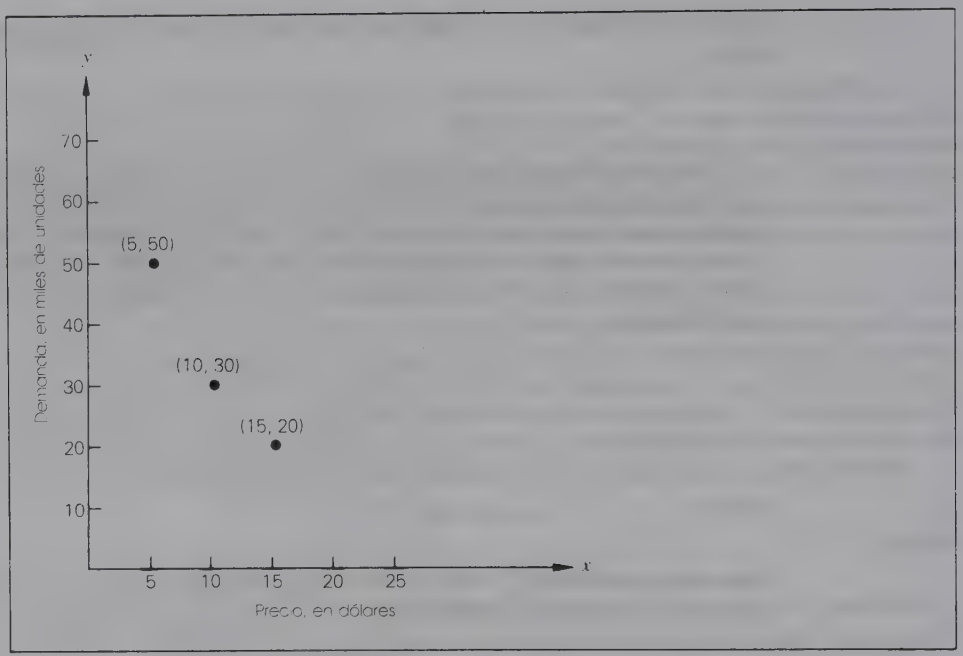


FIGURA 16.21 Tres puntos de datos muestra de precio/cantidad.

$$= -500 + 50a + 10b - 600 + 200a + 20b - 600 + 450a + 30b$$
$$= 700a + 60b - 1{,}700$$
$$f_b = 2[50 - (5a + b)](-1) + 2[30 - (10a + b)](-1) + 2[20 - (15a + b)](-1)$$
$$= -100 + 10a + 2b - 60 + 20a + 2b - 40 + 30a + 2b$$
$$= 60a + 6b - 200$$

Si hacemos iguales a 0 estas dos derivadas, resultarán las dos ecuaciones siguientes:

$$700a + 60b = 1\,700 \quad \textbf{(16.24)}$$
$$60a + 6b = 200 \quad \textbf{(16.25)}$$

La multiplicación de la ecuación (16.25) por -10 y la adición del producto a la ecuación (16.24) nos dan

$$\begin{array}{rr} 700a + 60b = & 1\,700 \\ -600a - 60b = & -2\,000 \\ \hline 100a = & -300 \\ a = & -3 \end{array}$$

Al sustituir $a = -3$ en la ecuación (16.25) se obtiene

$$60(-3) + 6b = 200$$
$$6b = 380$$
$$b = 63\tfrac{1}{3}$$

Para verificar que el punto crítico produce un valor mínimo de S,

$$\begin{aligned} f_{aa} &= 700 \qquad f_{ab} = 60 \\ f_{bb} &= 6 \qquad f_{ba} = 60 \\ D(-3, 63\tfrac{1}{3}) &= (700)(6) - (60)^2 \\ &= 4\,200 - 3\,600 \\ &= 600 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $D > 0$ y tanto f_{aa} como f_{bb} son positivas, puede llegarse a la conclusión de que la suma de los cuadrados de las desviaciones S se minimiza cuando $a = -3$ y $b = 63\frac{1}{3}$ o cuando los puntos de datos se ajustan con una línea recta teniendo una pendiente de -3 y una intersección de $63\frac{1}{3}$ con el eje y. La ecuación de esta línea es

$$y_p = 3x + 63\tfrac{1}{3}$$

La suma mínima de los cuadrados de las desviaciones puede determinarse sustituyendo $a = -3$ y $b = 63\frac{1}{3}$ en f si ese valor es de interés.

Ejercicios de seguimiento de la sección 16.4

1 Un fabricante estima que las ventas anuales (en unidades) son una función de los gastos hechos en la publicidad por radio y televisión. La función que especifica la relación es

$$z = 60\,000x + 80\,000y - 5x^2 - 10y^2 - 10xy$$

donde z es el número de unidades vendidas cada año, x denota la cantidad destinada a la publicidad por televisión y y la que se dedica a la publicidad por radio (tanto x como y se dan en miles de dólares).

a) determine cuánto debería gastarse en la publicidad por radio y televisión a fin de maximizar el número de unidades vendidas.

b) ¿Cuál se espera que sea el número máximo de unidades?

2 Una compañía vende dos productos. Se estima que el ingreso total conseguido con ellos es una función del número de unidades vendidas. En concreto, la función es

$$R = 30\,000x + 20\,000y - 10x^2 - 5y^2 - 10xy$$

donde R es el ingreso total y x y y indican los números de unidades vendidas de ambos productos.

a) ¿Cuántas unidades de cada producto deberían fabricarse con objeto de maximizar el ingreso total?

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

3 Una empresa vende dos productos. Sus funciones de demanda son

$$\begin{aligned} q_1 &= 175 - 4p_1 - p_2 \\ q_2 &= 90 - 2p_1 - 3p_2 \end{aligned}$$

donde p_j es el precio del producto j y q_j indican la demanda (en miles de unidades) del producto j.

a) Determine el precio que deberá fijarse a cada producto a fin de maximizar el ingreso total que se consigue con los dos.

b) ¿Cuántas unidades se demandarán de cada producto a esos precios?

c) ¿Cuáles se espera que sean los máximos ingresos totales?

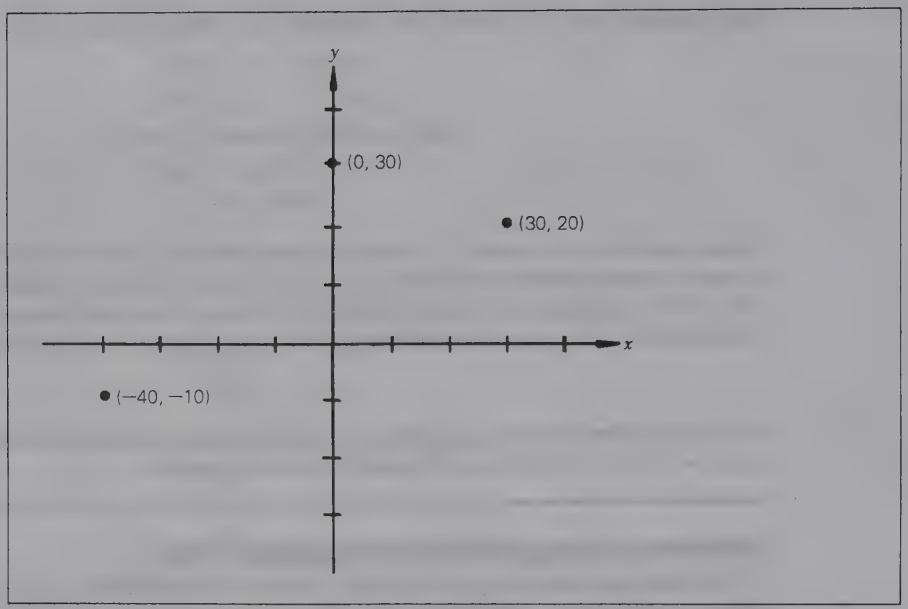


FIGURA 16.22 Localización de las tiendas de departamentos.

4 Una compañía está planeando construir una bodega que abastezca a tres grandes tiendas de departamentos. Las localizaciones relativas de las tiendas en un conjunto de ejes coordenados son (30, 20), (0, 30) y (−40, −10), donde las coordenadas se expresan en millas. La figura 16.22 indica las localizaciones relativas de las tiendas de departamentos. Determine la localización de la bodega (x, y) que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre cada ciudad y la bodega.

5 Localización de aeropuertos Se está planeando un nuevo aeropuerto que dará servicio a cuatro áreas metropolitanas. Las localizaciones relativas de éstas en un conjunto de ejes coordinados son (10, 5), (0, 40), (−40, 20) y (−5, −5), donde las coordenadas se expresan en millas. La figura 16.23 indica las localizaciones relativas de las cuatro ciudades. Determine la ubicación del aeropuerto (x, y) que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre el aeropuerto y cada área metropolitana.

6 En el ejemplo 20, suponga que el número de miembros de la organización para la conservación de la salud que viven en tres municipios es 40 000, 20 000 y 30 000, respectivamente, en los municipios A, B y C. Suponga además que la organización desea conocer la localización (x, y) que minimiza la suma de los productos del número de miembros de cada municipio y el cuadrado de la distancia que separa las ciudades y la clínica. Este objetivo puede formularse como

$$\text{Minimice} \qquad \sum_{j=1}^{3} n_j d_j^2$$

donde n_j es el número de miembros que viven en la ciudad j y d_j denota la distancia entre el municipio j y la clínica. Determine la localización de la clínica.

7 Con los puntos de datos (3, 2), (−1, 22) y (8, −23), determine la ecuación de la línea del mejor ajuste utilizando el modelo de mínimos cuadrados.

8 Con los puntos de datos relativos a la relación entre precio y demanda de la tabla 16.4, determine la ecuación de la línea del mejor ajuste a esos puntos de datos empleando el modelo de mínimos cuadrados.

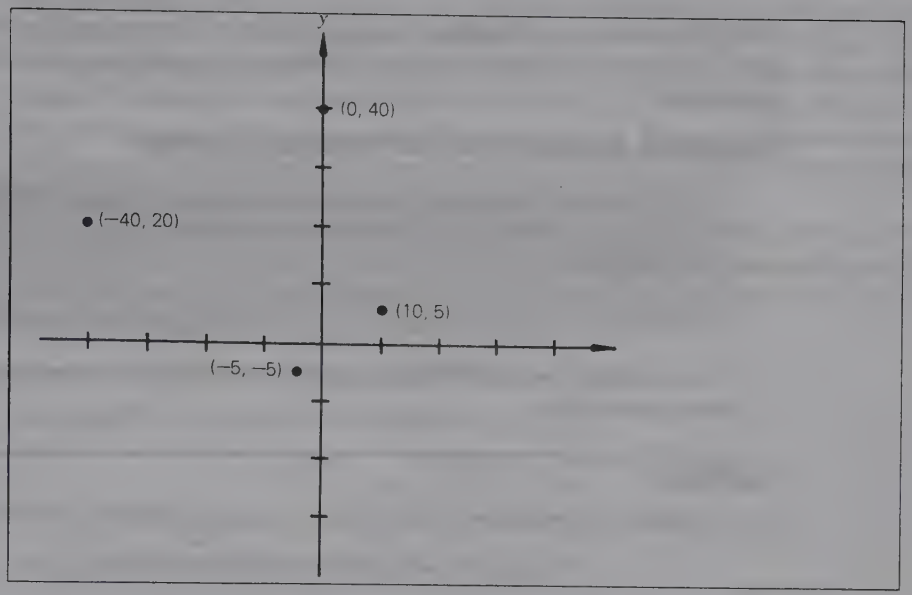


FIGURA 16.23 Localizaciones relativas de cuatro áreas metropolitanas.

TABLA 16.4

y (Demanda en miles de unidades)	400	340	280
x (Precio en dólares)	20	30	40

16.5 OPTIMIZACIÓN DE *n* VARIABLES (OPCIONAL)

Cuando una función contiene más de dos variables independientes, el proceso con que se identifican los máximos y mínimos relativos se parece mucho al que se aplica a funciones con dos variables independientes. Antes de explicar el proceso, definiremos esos extremos relativos.

DEFINICIÓN: MÁXIMO RELATIVO

Se dice que una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene un ***máximo relativo*** en $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, si para todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, suficientemente cercanos a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

DEFINICIÓN: MÍNIMO RELATIVO

Se dice que una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene un ***mínimo relativo*** en $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, si para todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ suficientemente cercanos a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Con más de dos variables independientes no es posible graficar una función. No obstante, puede afirmarse que la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está representada por una ***hipersuperficie*** en $(n + 1)$ dimensiones. Nuestro interés en

estas funciones es identificar los equivalentes dimensionales $(n + 1)$ con sus *picos* (máximos relativos) y *valles* (mínimos relativos) en una superficie tridimensional.

Condición necesaria de los extremos relativos

Una condición necesaria de un máximo relativo o de un mínimo relativo de una función cuyas derivadas parciales $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots f_{x_n}$, es que todas existan

$$f_{x_1} = 0, f_{x_2} = 0, \ldots, f_{x_n} = 0 \qquad \textbf{(16.26)}$$

La condición necesaria exige que todas las primeras derivadas parciales de f sean iguales a 0.

EJEMPLO 22

Para localizar los *candidatos* a convertirse en puntos extremos relativos en

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_3^2 - 2x_3$$

se calculan las primeras derivadas parciales

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ f_{x_2} &= -2x_1 + 4x_2 \\ f_{x_3} &= 2x_1 + 8x_3 - 2 \end{aligned}$$

Puesto que las tres derivadas deben ser 0, las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

se resolverán simultáneamente. Cuando el sistema se resuelve, se identifican los valores críticos

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{y} \qquad x_3 = \tfrac{1}{2}$$

Ya que $$f(-1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}$$

puede afirmarse que el punto crítico $(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ es un candidato a convertirse en un punto extremo.

Condiciones suficientes

Como en el caso de funciones que contienen una o más variables independientes, la prueba de los puntos críticos exige el empleo de segundas derivadas. Más exactamente, se sirve de una ***matriz hessiana***, la cual es una matriz de las segundas derivadas parciales con la forma

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

En la función $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, la matriz hessiana es cuadrada y con dimensión $(n \times n)$. La diagonal principal está constituida por las segundas derivadas parciales puras y los elementos no diagonales son derivadas parciales *mixtas*. La matriz es también simétrica alrededor de la diagonal principal cuando las segundas derivadas parciales son continuas. En tales circunstancias, las derivadas parciales mixtas que se toman respecto a las dos mismas variables son iguales. Es decir, $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$.

Para una matriz hessiana $(n \times n)$, un conjunto de n submatrices podrá ser identificado. La primera de ellas es la submatriz (1×1) formada por el elemento situado en el renglón 1 y en la columna 1, $f_{x_1 x_1}$. Denotemos esta matriz como $\mathbf{H}_1$, donde

$$\mathbf{H}_1 = (f_{x_1 x_1})$$

La segunda submatriz es la matriz (2×2)

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$$

La tercera submatriz es la matriz (3×3)

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} \end{pmatrix}$$

La n-ésima submatriz es la matriz hessiana propiamente dicha, o sea $\mathbf{H}_n = \mathbf{H}$.

Las determinantes de estas submatrices reciben el nombre de ***menores principales***, y pueden denotarse como $|\mathbf{H}_i|$, donde $\mathbf{H}_i$ representa la i-ésima submatriz.

CONDICIÓN SUFICIENTE DE LOS EXTREMOS RELATIVOS

Si se tienen los valores críticos $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, \ldots, x_n = a_n$ para los cuales

$$f_{x_1} = f_{x_2} = f_{x_3} = \ldots = f_{x_n} = 0$$

y todas las derivadas de segundo orden son continuas.

I Existe un *máximo relativo* si las menores principales *(evaluadas en los valores críticos)* se alternan en el signo con las menores principales negativas de número impar y con las positivas de número par. En otras palabras,

$$|\mathbf{H}_1| < 0, \qquad |\mathbf{H}_2| > 0, \qquad |\mathbf{H}_3| < 0, \ldots$$

II Existe un *mínimo relativo* si todas las menores principales *(evaluadas en los valores críticos)* son positivas. Es decir,

$$|\mathbf{H}_1| > 0, \qquad |\mathbf{H}_2| > 0, \qquad |\mathbf{H}_3| > 0, \ldots$$

III Si no cumple ninguna de las dos primeras condiciones, no podrá extraerse conclusión alguna respecto al punto crítico. Se requiere un análisis ulterior en la vecindad del punto crítico para determinar su naturaleza.

EJEMPLO 23

Continuando ahora con el ejemplo 22, la matriz hessiana será

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Las submatrices y los valores correspondientes de las menores principales son

$$\mathbf{H}_1 = (2) \qquad |\mathbf{H}_1| = 2$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{H}_2| = 4$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{H}_3| = 16$$

Dado que las menores principales $|\mathbf{H}_1|$, $|\mathbf{H}_2|$ y $|\mathbf{H}_3|$ son positivas, se extrae la conclusión de que ocurre un mínimo relativo en el punto crítico $(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

EJEMPLO 24

En la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^3 + 6x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 6x_3^2 + 5$$

las primeras derivadas parciales se calculan y se hacen iguales a 0, como sigue

$$f_{x_1} = -6x_1^2 + 6x_3 = 0$$

$$f_{x_2} = 2 - 2x_2 = 0$$

$$f_{x_3} = 6x_1 - 12x_3 = 0$$

Si estas ecuaciones se resuelven simultáneamente, ocurren valores críticos cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$, y también cuando $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ y $x_3 = \frac{1}{4}$. Si se calculan los valores correspondientes de $f(x_1, x_2, x_3)$, podremos afirmar que ocurren puntos críticos en $(0, 1, 0, 6)$ y en $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 6\frac{1}{4})$.

Para probar la naturaleza de estos puntos críticos, se identifican las derivadas parciales y se combinan en la matriz hessiana

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -12x_1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

En $(0, 1, 0, 6)$

$$\mathbf{H}_1 = (0) \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{H}_1| = 0$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{H}_2| = 0$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{H}_3| = 72$$

Estas menores principales no cumplen con las condiciones de un máximo o mínimo relativo; por ello no puede sacarse conclusión alguna sobre el punto crítico (0, 1, 0, 6).

En (½, 1, ¼, 6¼)

$$\mathbf{H}_1 = (-6) \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{H}_1| = -6$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{H}_2| = 12$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |\mathbf{H}_3| = -72$$

Puesto que $|\mathbf{H}_1| < 0$, $|\mathbf{H}_2| > 0$ y $|\mathbf{H}_3| < 0$, puede llegarse a la conclusión de que se presenta un máximo relativo en (½, 1, ¼, 6¼).

Ejercicios de seguimiento de la sección 16.5.

En las siguientes funciones localice los puntos críticos y determine su naturaleza.

1 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 4x_1x_2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3$

2 $f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 15x_2^2 + 5x_3^2 - 60x_1 + 90x_2 - 40x_3 + 15\,000$

3 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$

4 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$

5 $f(x_1, x_2, x_3) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

6 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_2^3 + 4x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 3.5x_4^2 - 24x_1 + 20x_3 - 75$

7 Modelo de fijación de precios Una compañía fabrica tres microcomputadoras rivales. Las funciones de demanda de las tres computadoras son

$$q_1 = 4\,000 - 2p_1 + p_2 + p_3$$
$$q_2 = 6\,000 + p_1 - 3p_2 + p_3$$
$$q_3 = 5\,000 + p_1 + p_2 - 2p_3$$

donde q_i es la demanda estimada (en unidades por año) de la computadora i y p_i es el precio de la i-ésima computadora (en dólares por unidad).

a) Determine los precios que producirán el ingreso total máximo con la venta de las tres computadoras. Verifique que realmente haya identificado un máximo relativo.

b) ¿Qué cantidades deberían producirse si se fijan esos precios?

c) ¿Cuál es el máximo ingreso total?

8 Modelo del costo conjunto Una compañía elabora tres productos. La función del costo conjunto es

$$C = f(q_1, q_2, q_3)$$
$$= 10q_1^2 + 30q_2^2 + 20q_3^2 - 400q_1 - 900q_2 - 1\,000q_3 + 750\,000$$

donde C es el costo total (en dólares) de producir q_1, q_2 y q_3 unidades de los productos 1, 2 y 3, respectivamente.

a) Determine las cantidades que producirán un mínimo costo total. Confirme que el punto crítico sea un mínimo relativo.

b) ¿Cuál es el mínimo costo total esperado?

16.6 OPTIMIZACIÓN SUJETA A RESTRICCIONES (OPCIONAL)

La explicación de los métodos de optimización basados en el cálculo se centró en la ***optimización no restringida***. En muchas aplicaciones del modelado matemático interviene la optimización de una ***función objetivo*** sujeta a ciertas condiciones restrictivas o, simplemente, ***restricciones***. Estas últimas representan limitaciones capaces de influir en el grado que se optimizan las funciones. Y pueden reflejar restricciones como escasez de recursos (por ejemplo, mano de obra, materiales o capital), poca demanda de productos, metas de ventas, etc. Los problemas que ofrecen esta estructura se consideran ***problemas de optimización restringida***. Se estudió un subconjunto de ellos al examinar la programación lineal (capítulos 6-8). En esta sección nos ocuparemos de un método con que se resuelven ciertos problemas de optimización lineal no restringida.

El método de multiplicador de Lagrange (restricción de igualdad)

Considérese el problema de optimización restringida

$$\begin{array}{|ll|} \hline \text{Maximice (o minimice)} & y = f(x_1, x_2) \\ \text{sujeta a} & g(x_1, x_2) = k \\ \hline \end{array} \qquad \textbf{(16.27)}$$

En la ecuación (16.27), f es la función objetivo y $g(x_1, x_2) = k$ es una restricción de *igualdad*.

Una manera de resolver este tipo de problema consiste en combinar la información de la ecuación (16.27) en la función compuesta

$$\boxed{L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda[g(x_1, x_2) - k]} \qquad \textbf{(16.28)}$$

Esta función compuesta recibe el nombre de ***función lagrangiana***, y la variable λ (lambda) se llama ***multiplicador de Lagrange***. La función lagrangiana se compone de la función objetivo y de un múltiplo lineal de la ecuación de restricción. En ella conviene observar que λ puede ser cualquier valor y que el término $\lambda\,[g(x_1, x_2) - k]$ será 0, a condición de que (x_1, x_2) sean valores que satisfagan la restricción. Así pues, el valor de la recién formada función lagrangiana L tendrá el valor de la función objetiva original f.

Con la creación de la función lagrangiana se transforma ingeniosamente el problema original de restricción en un problema no restringido que puede resolverse por procedimientos muy similares a los expuestos en la última sección. Es decir, para resolver el problema original, ecuación (16.27), se calculan las derivadas parciales de $L(x_1, x_2, \lambda)$ respecto a x_1, x_2 y λ y luego se hacen iguales a 0.

CONDICIONES NECESARIAS DE LOS EXTREMOS RELATIVOS

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= 0 \\ L_{x_2} &= 0 \\ L_\lambda &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(16.29)}$$

EJEMPLO 25

Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{Maximice } & f(x_1, x_2) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \\ \text{sujeta a } & 2x_1 + x_2 = 4 \end{aligned}$$

Con el método del multiplicador de Lagrange se transforma este problema en la forma no restringida

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 4)$$

Las primeras derivadas parciales se identifican como

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= -2x_1 - 2\lambda \\ L_{x_2} &= -2x_2 - \lambda \\ L_\lambda &= -2x_1 - x_2 + 4 \end{aligned}$$

Los valores críticos se obtienen haciendo las tres derivadas parciales iguales a cero y resolviendo simultáneamente.

$$-2x_1 - 2\lambda = 0 \quad \textbf{(16.30)}$$

$$-2x_2 - \lambda = 0 \quad \textbf{(16.31)}$$

$$-2x_1 - x_2 + 4 = 0 \quad \textbf{(16.32)}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (16.31) por -2 se obtiene

$$4x_2 + 2\lambda = 0$$

Y sumando esto a la ecuación (16.30),

$$\begin{array}{rl} 4x_2 + 2\lambda = 0 & \\ \underline{-2x_1 - 2\lambda = 0} & \textbf{(16.30)} \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 & \textbf{(16.33)} \end{array}$$

Despejando x en la ecuación (16.33) se obtiene

$$\begin{aligned} 4x_2 &= 2x_1 \\ 2x_2 &= x_1 \end{aligned} \quad \textbf{(16.34)}$$

Y si este valor de x_1 se sustituye en la ecuación (16.32)

$$\begin{aligned} -2(2x_2) - x_2 + 4 &= 0 \\ -5x_2 &= -4 \\ x_2 &= \tfrac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

Si este valor se sustituye en la ecuación (16.34), $x_1 = 1.6$. Por otra parte, la sustitución de $x_2 = 0.8$ en la ecuación (16.31) nos da $\lambda = -1.6$. Por tanto, $x_1 = 1.6$, $x_2 = 0.8$ y $\lambda = -1.6$ son valores críticos en la función lagrangiana. Estos valores de x_1 y x_2 también representan los únicos puntos idóneos para un máximo (o mínimo) relativo.

Condición suficiente

Para estimar el comportamiento de $L(x_1, x_2, \lambda)$ en cualesquier valores críticos, deberá determinarse la ***matriz hessiana acotada*** $\mathbf{H}_B$, donde

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

y g_{x_i} representa la derivada parcial del lado izquierdo de la restricción tomada respecto a x_i.

CONDICIONES SUFICIENTES DE LOS EXTREMOS RELATIVOS
En determinados valores críticos $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ y $\lambda = \lambda^*$ para los cuales $L_{x_1} = L_{x_2} = L_\lambda = 0$, $|\mathbf{H}_B|$ se evalúa en los valores críticos.
I Existe un *máximo relativo* si $|\mathbf{H}_B| > 0$.
II Existe un *mínimo relativo* si $|\mathbf{H}_B| < 0$.

EJEMPLO 26

Para determinar el comportamiento de

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 4)$$

cuando $x_1 = 1.6$, $x_2 = 0.8$ y $\lambda = -1.6$, formamos la matriz hessiana acotada,

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si se aplican los métodos explicados en el capítulo 5 con que se obtiene la determinante, se encontrará que

$$|\mathbf{H}_B| = 10 > 0$$

lo cual implica que $L(x_1, x_2, \lambda)$ alcanza un máximo relativo cuando $x_1 = 1.6$, $x_2 = 0.8$ y $\lambda = -1.6$. Si estos valores se sustituyen en la función lagrangiana,

$$\begin{aligned} L(1.6, 0.8, -1.6) &= 25 - (1.6)^2 - (0.8)^2 - (-1.6)[2(1.6) + 0.8 - 4] \\ &= 25 - 2.56 - 0.64 + 1.6(0) = 21.8 \end{aligned}$$

Por tanto, $L(x_1, x_2, \lambda)$ alcanza un valor máximo de 21.8. Éste es también el valor máximo de $f(x_1, x_2)$ en el problema original de optimización restringida del ejemplo 25.

La figura 16.24 es una representación gráfica de este problema. El lector seguramente recuerda que la superficie que representa a $f(x_1, x_2) = 25 - x_1^2 - x_2^2$ es la misma que la que se mostró antes en la figura 16.4. Si no hubiera la restricción, ocurriría el máximo relativo en (0, 0, 25). La restricción $2x_1 + x_2 = 4$ exige que los únicos valores susceptibles de ser considerados se hallen en la intersección del plano *ABCD* y la superficie que representa a f. Dados los puntos de intersección (*MN*) entre la superficie $f(x_1, x_2)$ y el plano *ABCD*, el valor máximo de f se presenta en (1.6, 0.8, 21.8).

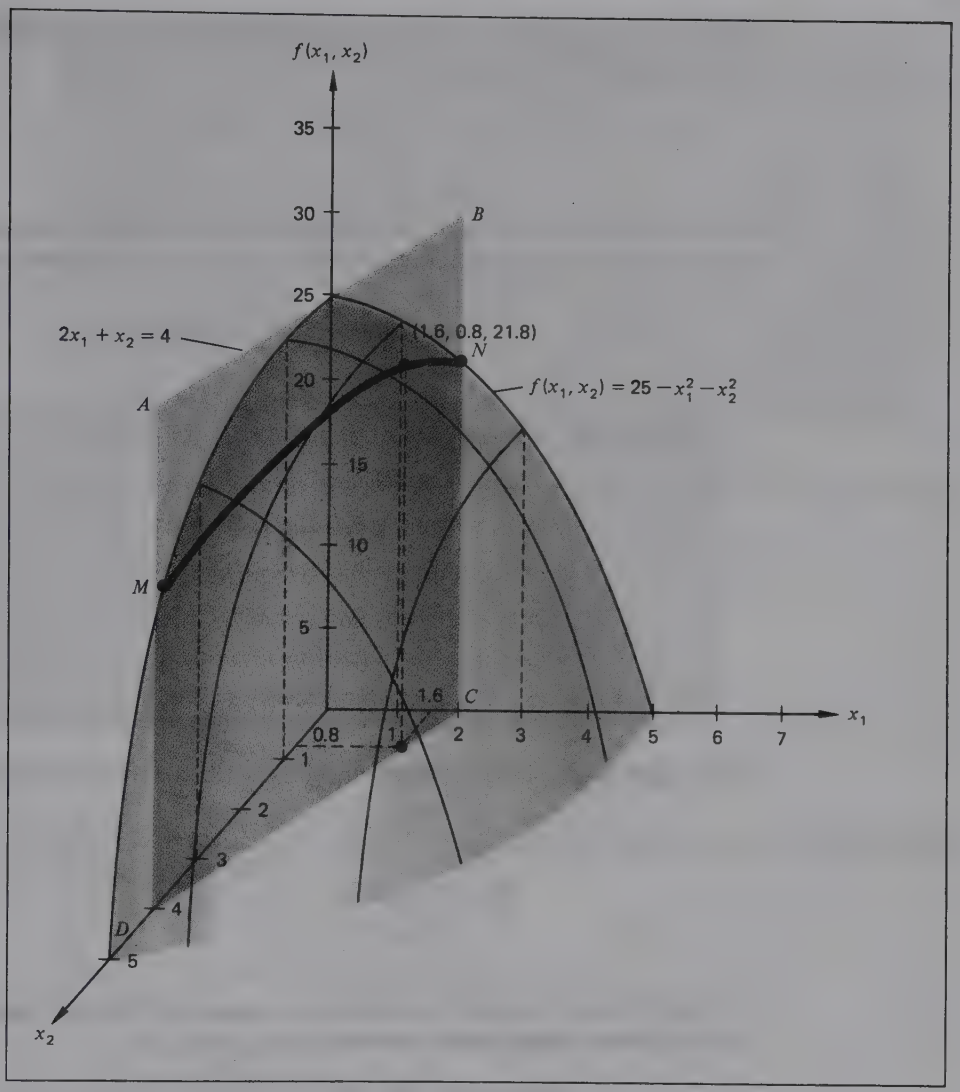


FIGURA 16.24
Problema de optimización restringida.

NOTA
La estructura de este problema se parece mucho a la del ejemplo 27 en la página 671, en el capítulo 14. La ecuación (14.12) es la función objetivo; la ecuación (14.13) es una restricción. Ese problema fue resuelto al despejar una variable en términos de la otra en la ecuación (14.13) y al sustituirla en la función objetivo. Este procedimiento también puede aplicarse al ejemplo 25. ¿Por qué, entonces, se recurre al método del multiplicador de Lagrange? El ejemplo 25 es un problema relativamente simple. La estructura de la restricción o restricciones de un problema a menudo no permiten las sustituciones; y es allí donde entra el multiplicador de Lagrange.

Caso de restricción de una sola igualdad con *n* variables

En un problema de la forma

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{Maximice (o minimice)} & y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{Sujeta a} & g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\end{array}} \qquad \textbf{(16.35)}$$

el método del multiplicador de Lagrange es ligeramente distinto del caso de dos variables independientes. He aquí la función lagrangiana correspondiente

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda[g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - k]} \qquad \textbf{(16.36)}$$

CONDICIÓN NECESARIA DE LOS EXTREMOS RELATIVOS

$$\begin{array}{l} L_{x_1} = 0 \\ L_{x_2} = 0 \\ \vdots \\ L_{x_n} = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{array} \qquad \textbf{(16.37)}$$

donde $L_{x_1}, L_{x_2}, \ldots, L_{x_n}, L_\lambda$ existen todas.

La matriz hessiana acotada en el caso de n variables presenta la forma

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(16.38)}$$

En la matriz hessiana acotada de la ecuación (16.38), varias submatrices y sus **menores principales acotadas** se definen así:

$$|\mathbf{H}_{B_2}| = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{H}_{B_3}| = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & L_{x_1x_3} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & L_{x_2x_3} \\ g_{x_3} & L_{x_3x_1} & L_{x_3x_2} & L_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{H}_B| = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

CONDICIONES SUFICIENTES DE LOS EXTREMOS RELATIVOS
En los valores críticos $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ y $\lambda = \lambda^*$, para los cuales

$$L_{x_1} = L_{x_2} = \cdots = L_{x_n} = L_\lambda = 0$$

$|\mathbf{H}_B|$ se evalúa en los valores críticos.

I Existe un *máximo relativo* si

$$|\mathbf{H}_{B_2}| > 0, |\mathbf{H}_{B_3}| < 0, |\mathbf{H}_{B_4}| > 0, \ldots$$

II Existe un *mínimo relativo* si

$$|\mathbf{H}_{B_2}| < 0, |\mathbf{H}_{B_3}| < 0, |\mathbf{H}_{B_4}| < 0, \ldots$$

EJEMPLO 27

En el problema

$$\begin{aligned} &\text{Maximice } f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1x_2x_3 \\ &\text{sujeta a } \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \end{aligned}$$

la función lagrangiana correspondiente es

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 5x_1x_2x_3 - \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 24)$$

Para localizar cualesquier valores críticos, se calculan las primeras derivadas parciales y se hacen iguales a 0.

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= 5x_2x_3 - \lambda &&= 0 \\ L_{x_2} &= 5x_1x_3 - 2\lambda &&= 0 \\ L_{x_3} &= 5x_1x_2 - 3\lambda &&= 0 \\ L_\lambda &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 24 &&= 0 \end{aligned}$$

Estas cuatro ecuaciones pueden reescribirse como

$$5x_2x_3 = \lambda \tag{16.39}$$
$$5x_1x_3 = 2\lambda \tag{16.40}$$
$$5x_1x_2 = 3\lambda \tag{16.41}$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \tag{16.42}$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación (16.39) entre el miembro correspondiente de la ecuación (16.40),

$$\frac{5x_2x_3}{5x_1x_3} = \frac{\lambda}{2\lambda} \quad \text{or} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente,

$$x_2 = \frac{x_1}{2} \tag{16.43}$$

De manera semejante, ambos miembros de la ecuación (16.39) pueden dividirse entre los dos miembros de la ecuación (16.41):

$$\frac{5x_2x_3}{5x_1x_2} = \frac{\lambda}{3\lambda} \quad \text{o} \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{1}{3}$$

y

$$x_3 = \frac{x_1}{3} \tag{16.44}$$

Al sustituir las ecuaciones (16.43) y (16.44) en la ecuación (16.42),

$$x_1 + 2\frac{x_1}{2} + 3\frac{x_1}{3} = 24$$
$$3x_1 = 24$$
$$x_1 = 8$$

Si este valor se sustituye en las ecuaciones (16.43), (16.44) y (16.39), se identificarán los valores críticos de $L(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ como $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{8}{3}$, y $\lambda = \frac{160}{3}$, $53\frac{1}{3}$.

Para probar la naturaleza de este punto crítico, la matriz hessiana acotada se identifica como

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5x_3 & 5x_2 \\ 2 & 5x_3 & 0 & 5x_1 \\ 3 & 5x_2 & 5x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluada en los valores críticos,

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{40}{3} & 20 \\ 2 & \frac{40}{3} & 0 & 40 \\ 3 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}$$

Los menores principales acotados son

$$|\mathbf{H}_{B2}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{40}{3} \\ 2 & \frac{40}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{160}{3}$$

$$|\mathbf{H}_{B3}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{40}{3} & 20 \\ 2 & \frac{40}{3} & 0 & 40 \\ 3 & 20 & 40 & 0 \end{vmatrix} = -4{,}800$$

Puesto que $|\mathbf{H}_{B2}| > 0$ y $|\mathbf{H}_{B3}| < 0$, puede llegarse a la conclusión de que ocurre un máximo relativo para $L(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ [y también para $f(x_1, x_2, x_3)$] cuando $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{8}{3}$ y $\lambda = \frac{160}{3}$. El valor máximo restringido es

$$5x_1x_2x_3 = 5(8)(4)\left(\tfrac{8}{3}\right)$$
$$= \frac{1\,280}{3} = 426\tfrac{2}{3}$$

Interpretación de λ

Lambda es algo más que un simple artificio que permite resolver los problemas de optimización restringida. Tiene una interpretación que puede resultar de gran utilidad. En la función lagrangiana generalizada de la ecuación (16.36),

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial k} = L_k = \lambda} \tag{16.45}$$

En consecuencia, λ puede interpretarse como la tasa instantánea de cambio en el valor de la función lagrangiana respecto al que se opera en la constante k del miembro derecho de la ecuación de restricción. El valor de $\lambda = \frac{160}{3}$ en la solución óptima del ejemplo precedente indica que si la constante del miembro derecho, 24, *aumenta* (disminuye) en 1 unidad, el valor óptimo de $f(x_1, x_2, x_3)$ *crecerá* (decrecerá) aproximadamente $\frac{160}{3}$ unidades respecto al máximo actual de $426\frac{2}{3}$.

La interpretación de λ en la economía puede ser de mucha utilidad en problemas donde la restricción o restricciones representan cosas como escasez de recursos. Si existe la capacidad de proporcionar recursos adicionales, los valores de λ ofrecerán una pauta o lineamiento para su asignación.*

Extensiones

El método de Lagrange puede ampliarse al caso de restricciones múltiples y al de conjuntos de restricciones que comprenden tipos de restricción de desigualdad e igualdad. Pero esas situaciones rebasan el ámbito de este libro.

Ejercicios de seguimiento de la sección 16.6

En los ejercicios 1-8, analice la función de los extremos relativos y pruebe la naturaleza de los extremos que haya.

1 $f(x_1,x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 20x_1x_2$ sujeta a $x_1 + x_2 = 100$
2 $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ sujeta a $x_1 + x_2 = 6$
3 $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 - 6x_2$ sujeta a $x_1 + x_2 = 42$
4 $f(x_1,x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2$ sujeta a $x_1 + 2x_2 = 24$
5 $f(x_1,x_2) = 12x_1x_2 - 3x_2^2 - x_1^2$ sujeta a $x_1 + x_2 = 16$
6 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sujeta a $x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$
7 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$ sujeta a $x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 16$
8 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$ sujeta a $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18$

9 Una compañía ha recibido una orden de 200 unidades para uno de sus productos. El pedido será surtido con la producción combinada de sus dos plantas. La función conjunta de costo de la fabricación de este producto es

$$C = f(q_1,q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500$$

donde q_1 y q_2 son las cantidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. Si el objetivo es minimizar los costos totales, sujeto a la condición de suministrar 200 unidades procedentes de ambas plantas, ¿qué cantidades deberá proporcionar cada una?

10 Una fábrica elabora dos clases de productos. La función conjunta del costo es

$$C = f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$$

*Para los que estudiaron la programación lineal en los capítulos 6-8, λ equivale a un *precio sombra*.

donde C es el costo de la producción semanal en miles de dólares y x_1 y x_2 indican las cantidades fabricadas de los dos productos cada semana. Si la producción semanal combinada es de 16 unidades, ¿qué cantidades de cada producto darán por resultado los costos totales mínimos?

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

derivada parcial 749
derivada parcial mixta 758
función bivariada 744
función lagrangiana 792
funciones de varias variables 744
hipersuperficie 787
matriz hessiana 788
matriz hessiana acotada 794
máximo relativo (función bivariada) 761
máximo relativo (función de n variables) 787
menores principales 789
menores principales acotados 796
mínimo relativo (función bivariada) 761
mínimo relativo (función de n variables) 787
modelo de mínimos cuadrados 783
multiplicador de Lagrange 792
optimización restringida 792
punto en silla de montar 766
segunda derivada parcial pura 758

FÓRMULAS IMPORTANTES

$$D(x^*,y^*) = f_{xx}(x^*,y^*)f_{yy}(x^*,y^*) - [f_{xy}(x^*,y^*)]^2 \quad \textbf{(16.13)}$$

$$L(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) - \lambda[g(x_1,x_2) - k] \quad \textbf{(16.28)}$$

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) - \lambda[g(x_1,x_2,\ldots,x_n) - k] \quad \textbf{(16.36)}$$

EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-30 se relacionan con la sección 16.2. Determine f_x y f_y en las siguientes funciones.

1 $f(x,y) = 6x^2 + 8x^2y + y^3$
2 $f(x,y) = 6x^2y^4 - 8x^3y^2$
3 $f(x,y) = (5x^3 + 7y^3)^4$
4 $f(x,y) = \sqrt[3]{4xy^3 + 10x}$
5 $f(x,y) = (x^2 + y)/8xy^2$
6 $f(x,y) = 3x^2(x + y^2)^3$
7 $f(x,y) = e^{4xy}$
8 $f(x,y) = e^{x/y^2}$
9 $f(x,y) = 10x^4y^5$
10 $f(x,y) = 5x^2y^5$
11 $f(x,y) = x^3/4y^2$
12 $f(x,y) = -4y^3/x^4$
13 $f(x,y) = e^{x^2y}$
14 $f(x,y) = 10e^{4x^2y^3}$
15 $f(x,y) = \ln(x/y)$
16 $f(x,y) = \ln(x^3y^4)$
17 $f(x,y) = 20x^3/\ln y$
18 $f(x,y) = 40xy^3/\ln x$

Encuentre las derivadas parciales de segundo orden en las siguientes funciones.

19 $f(x,y) = 10x^2y^3$
20 $f(x,y) = 5x^3 + 2xy^2 + 5y^2$
21 $f(x,y) = \ln xy$
22 $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
23 $f(x,y) = (3x - 2y)^4$
24 $f(x,y) = (5x - 3y)^4$
25 $f(x,y) = \sqrt{x - y}$
26 $f(x,y) = \sqrt{10x - 5y}$
27 $f(x,y) = 25x^4y$
28 $f(x,y) = x^5y^3/2$

***29 Elasticidad cruzada de la demanda** En el ejemplo 30 del capítulo 15 (página 732) se explicó la elasticidad de la demanda. En una función de la demanda de la forma $q = f(p)$, la elasticidad de la demanda η se definió como

$$\eta = \frac{dq/q}{dp/p} = -\frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$$

La elasticidad de la demanda es la razón del cambio porcentual en la cantidad demandada con el cambio porcentual del precio.

Cuando la demanda de un producto depende de su precio y de los precios de otros productos, la ***elasticidad cruzada de la demanda*** del producto i respecto al cambio del precio

$$\eta_{ij} = \frac{\Delta q_i/q_i}{\Delta p_j/p_j} = \frac{\partial q_i/q_i}{\partial p_j/p_j} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{q_i}$$

Esta medida es la razón del cambio porcentual en la demanda del producto i con el cambio porcentual de precio del producto j, si el resto de los precios se mantiene constante.

En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2) = 60\,000 - 0.1p_1^2 - p_1 + 0.5p_2^2 - 2p_2$$

suponga que los precios actuales son $p_1 = 50$ y $p_2 = 80$.

a) Determine la elasticidad cruzada de la demanda η_{12}.

b) Determine la elasticidad de la demanda η_{11}.

c) Interprete la diferencia de significado entre η_{12} y η_{11}.

***30** En la explicación dada en el ejercicio 29, suponga que la función de demanda de un producto sea

$$q_2 = f(p_1, p_2, p_3) = 100\,000 - p_1^2 - 1.5p_2^2 - 2p_3^2$$

Si los precios actuales son $p_1 = 40$, $p_2 = 20$ y $p_3 = 50$,

a) Determine η_{21}, η_{22} y η_{23}.

b) Interprete el significado de las respuestas de la parte *a*).

Los ejercicios 31-40 se relacionan con la sección 16.3. En las siguientes funciones determine la localización y naturaleza de todos los puntos críticos.

31 $f(x,y) = x^2/2 + 2y^2 - 20x - 40y + 100$

32 $f(x,y) = -3x^2 - 2y^2 + 45x - 30y - 50$

33 $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 3xy - 60x - 32y + 200$

34 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$

35 $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$

36 $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$

37 $f(x,y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 10$

38 $f(x,y) = x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x + 10y - 20$

39 $f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x + 4y + 25$

40 $f(x,y) = 2x^2 + y^3 - x - 12y + 15$

Los ejercicios 41-45 se relacionan con la sección 16.4.

41 Una empresa vende dos productos. El ingreso total anual R se comporta como una función del número de unidades vendidas. En concreto,

$$R = 400x - 4x^2 + 1\,960y - 8y^2$$

donde x y y son, respectivamente, el número de unidades vendidas de cada producto. El costo de fabricar los dos productos es

$$C = 100 + 2x^2 + 4y^2 + 2xy$$

a) Determine el número de unidades que deberán producirse y venderse a fin de maximizar la utilidad anual.
b) ¿Cuál es el ingreso total?
c) ¿Cuáles son los costos totales?
d) ¿Cuál es la utilidad máxima?

42 Una compañía vende dos productos. Las funciones de demanda de ambos son

$$q_1 = 110 - 4p_1 - p_2$$
$$q_2 = 90 - 2p_1 - 3p_2$$

donde p_j es el precio del producto j en dólares y q_1 indica la demanda (en miles de unidades) del producto j.

a) Determine los precios que deberían fijarse a cada producto con el fin de maximizar el ingreso total que se consigue de ellos.
b) ¿Cuántas unidades se demandarán de cada producto con estos precios?
c) ¿Cuál se espera que sea el máximo ingreso total?

43 Con los cuatro puntos de datos $(-1, 12.5)$, $(3, 7.5)$, $(-4, 25)$ y $(10, -10)$, determine la ecuación de la línea del mejor ajuste sirviéndose del modelo de los mínimos cuadrados.

44 Con los puntos de datos $(10, 10)$, $(-8, 1)$ y $(2, 6)$, obtenga la ecuación de la línea del mejor ajuste empleando el modelo de los mínimos cuadrados.

***45** Se va a diseñar un recipiente rectangular que tendrá un volumen de 64 000 pulgadas cúbicas. Se pretende minimizar la cantidad de material empleado en su construcción. Así pues, hay que minimizar la superficie. Si x, y y z representan las dimensiones del recipiente (en pulgadas), determine las dimensiones que minimicen la superficie. (*Sugerencia*: $V = xyz$.)

Los ejercicios 46-49 se relacionan con la sección 16.5. En las siguientes funciones localice los puntos críticos y determine su naturaleza.

46 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 56$
47 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3$
48 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_1 - 4x_2 + 8x_3$
49 $f(x_1, x_2, x_3) = 200 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 20x_1 + 10x_2 + 20x_3$

Los ejercicios 50-56 se relacionan con la sección 16.6. Examine las siguientes funciones en busca de extremos relativos y pruebe la naturaleza de los extremos. ¿Cuál es el valor óptimo de λ?

50 $f(x_1, x_2) = 20x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$ sujeta a $x_1 + 2x_2 - 10 = 0$
51 $f(x_1, x_2) = -x_2^2 - 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 16x_1 + 10x_2$ sujeta a $2x_1 + x_2 - 60 = 0$
52 $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 60x_1 - 32x_2 + 400$ sujeta a $x_1 + x_2 - 10 = 0$
53 $f(x_1, x_2) = 2x_2^2 - 6x_1^2$ sujeta a $2x_1 + x_2 - 4 = 0$

54 Va a diseñarse un recipiente cilíndrico que contendrá 12 onzas (o sea 26 pulgadas cúbicas) de líquido. Determine las dimensiones (altura y radio) que darán por resultado la superficie mínima del recipiente. ¿Cuál es la superficie mínima? (Suponga que el recipiente tiene una parte superior y otra inferior.)

55 Una empresa estima que su utilidad mensual es una función de la cantidad de dinero que destine a la publicidad por radio y televisión cada mes. La función de utilidad es

$$P = \frac{80x}{5 + x} + \frac{40y}{10 + y} - 2x - 2y$$

donde P es la utilidad mensual (en miles de dólares) y x y y indican el gasto mensual en publicidad por radio y televisión, respectivamente (ambos en miles de dólares). Si el presupuesto mensual de publicidad es de \$25 000, calcule la cantidad que debería asignarse a ambos medios con objeto de maximizar la utilidad mensual. ¿Cuál es el valor óptimo de λ? Interprete el significado de ese valor.

***56** Va a construirse un almacén que tendrá un volumen de 850 000 pies cúbicos. Debe tener cimientos rectangulares de dimensiones x pies por y pies y una altura de z pies. Los costos de construcción se estiman a partir del área del piso y el techo, así como a partir del área de la pared. Los costos estimados son \$6 por pie cuadrado del área de la pared, \$8 por pie cuadrado del área del piso y \$6 por pie cuadrado del área del techo.

a) Formule la función de costo de la construcción de la bodega.
b) Determine las dimensiones del edificio que darán por resultado los costos mínimos de construcción.
c) ¿Cuál es el costo mínimo?

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 Dé dos interpretaciones de f_x.

2 ¿Qué es un *trazo*?

3 Determine f_x y f_y, si

$$f(x,y) = 15x^3 - 4y^2 + 5x^2y^3$$

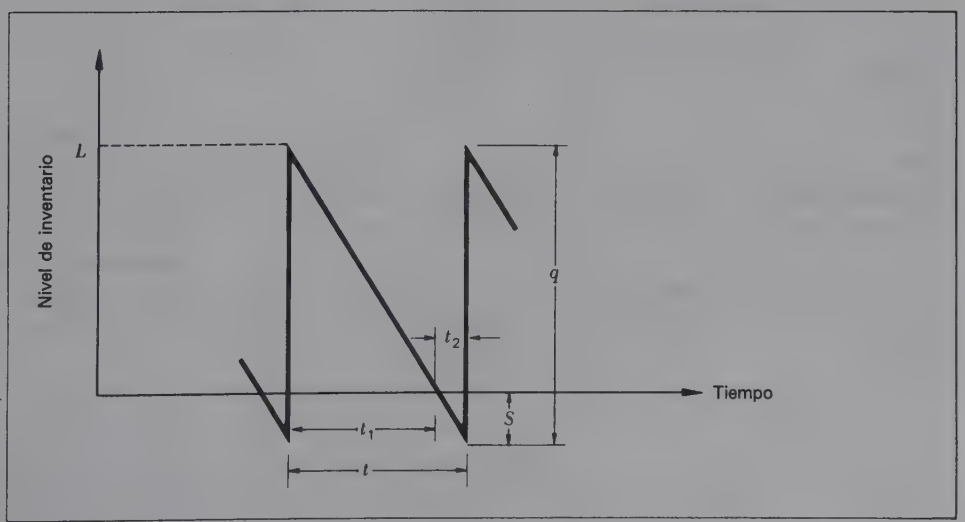


FIGURA 16.25 Modelo clásico de la cantidad económica de pedido: ciclo de inventario con pedidos retrasados.

4 Determine todas las derivadas parciales de segundo orden para la función

$$f(x,y) = 8x^5 + 6x^2 + 8x^2y^3$$

5 En la función

$$f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$$

a) Localice los puntos críticos y determine su naturaleza.
b) ¿Qué es $f(x^*, y^*)$?

6 Un investigador de una universidad de agricultura estimó que las utilidades anuales de una granja de la localidad pueden describirse mediante la función

$$P = 1\,600x + 2\,400y - 2x^2 - 4y^2 - 4xy$$

donde P es la utilidad anual en dólares, x es el número de acres plantados con soya y y indica la cantidad de acres en que se plantó maíz. Determine el número de acres que de cada cultivo deberían sembrarse si el objetivo es maximizar las utilidades anuales. ¿Cuál se espera que sea la utilidad máxima?

7 En la función

$$f(x_1,x_2) = -4x_1^3 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$$
$$\text{sujeta a} \qquad x_1 - 2x_2 - 20 = 0$$

formule la función lagrangiana.

MINICASO

MODELO DE INVENTARIO DE PEDIDOS RETRASADOS

Una variante del modelo clásico de la cantidad económica de pedido CEP (minicaso del capítulo 14 en la página 692) admite la posibilidad de escasez de los elementos de un inventario. En este modelo un inventario puede agotarse y seguir habiendo demanda del producto. Ello provoca su escasez, y el modelo supone que esos productos pueden surtirse al reponerse las existencias. Cuando se reponen las existencias, la demanda de esos pedidos se surte primero y el resto de los productos se ponen en inventario. Este tipo de administración de inventario es muy común entre los proveedores; por ejemplo, entre los que laboran en la industria de muebles para el hogar. Aunque los proveedores incurren en costos adicionales al permitir la escasez, esperan reducir los costos de inventario (al mantener menos inventario) y los de pedido (al ordenar con menos frecuencia y en mayores cantidades).

En la figura 16.25 se da un ciclo normal de inventario aplicable a este modelo. La demanda constante origina un agotamiento lineal de las existencias a partir de un nivel máximo de L. Después de t_1 unidades de tiempo, el inventario se agota. La demanda dura un tiempo t_2 antes que se repongan las existencias de q unidades. Durante t_2 la demanda continuada del producto ocasiona una escasez de S unidades. Por tanto, tras la llegada de las existencias de reposición, S unidades deberán ser asignadas para cubrir la escasez.

Si

- D = *demanda anual en unidades*
- C_o = *costo de pedido por orden*
- C_h = *costo de inventario por elemento al año*
- C_s = *costo de escasez por elemento al año*
- S = *escasez máxima (en unidades)*
- q = *cantidad de pedido*

la función relevante del costo es

$$\begin{matrix} \text{costo anual} \\ TC = \text{por pedido} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{costo anual} \\ \text{de inventario} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{costo anual} \\ \text{de escasez} \end{matrix}$$

o

$$TC = f(q, S) = \frac{D}{q}C_o + \frac{(q - S)^2}{2q}C_h + \frac{S^2C_s}{2q} \qquad \textbf{(16.46)}$$

Condiciones:

a) Si $D = 600\,000$, $C_o = \$100$, $C_h = \$0.25$ y $C_s = \sqrt{\$2}$, determine los valores de q y S que minimizan los costos totales anuales de pedidos, mantenimiento de inventario y escasez. ¿Cuál es el costo mínimo? ¿Y cuál es el nivel máximo de inventario?

b) Con la ecuación (16.46) demuestre que las expresiones generales de q y S que producen el mínimo costo de inventario anual son

$$q^* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}\left(\frac{C_h + C_s}{C_s}\right)}$$

y

$$S^* = \sqrt{\frac{2C_oDC_h}{C_hC_s + C_s^2}}$$

CAPÍTULO

17 CÁLCULO INTEGRAL: UNA INTRODUCCIÓN

17.1 ANTIDERIVADAS
17.2 REGLAS DE INTEGRACIÓN
17.3 REGLAS ADICIONALES DE INTEGRACIÓN
17.4 ECUACIONES DIFERENCIALES
17.5 OTRAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Dar una introducción a la naturaleza y métodos del cálculo integral
- Ofrecer algunas reglas de integración y ejemplos de su uso
- Dar ejemplos de otros métodos de integración que pueden ser apropiados cuando no lo son las reglas básicas

En el presente capítulo se abordará una segunda e importantísima área de estudio del cálculo: el *cálculo integral*. Según se mencionó al inicio del capítulo 13, el cálculo diferencial es útil para estudiar las tasas de cambio y las pendientes de tangentes. Un aspecto fundamental del cálculo integral es determinar las áreas que se encuentran entre curvas y otras fronteras definidas. Asimismo, si se conoce la derivada de una función, con el cálculo integral podrá obtenerse la función original.

Al iniciar esta nueva área de estudio, conviene saber hacia dónde nos dirigimos. En primer lugar, el cálculo integral abarca un campo fundamental de estudio dentro del cálculo. A este material dedicaremos dos capítulos. Con ello

se pretende ofrecer al lector un panorama general de una disciplina para que conozca los aspectos y los métodos del cálculo integral, cómo se relaciona éste con el cálculo diferencial y en qué casos se aplica.

En este capítulo se tratará primero de la naturaleza del cálculo integral al relacionarlo con las derivadas. Del mismo modo que se cuenta con reglas para calcular las derivadas en el cálculo diferencial, también las hay para obtener las *integrales* en el cálculo integral. Las reglas de mayor uso se describirán en las secciones 17.2 y 17.3. En la sección 17.4 se explican las *ecuaciones diferenciales*. Por último, en la 17.5 se exponen los procedimientos con que se calculan las integrales cuando no son aplicables las reglas mencionadas en las secciones 17.2 y 17.3. El capítulo 18 se centrará en las aplicaciones del cálculo integral.

17.1 ANTIDERIVADAS

El concepto de antiderivada

En una función f, ya sabemos calcular la derivada f'. Puede haber ocasiones en que conozcamos la derivada f' y queramos encontrar la función original f. Puesto que el proceso de determinar la función original es el opuesto al de la diferenciación, se dice que f es una ***antiderivada*** de f'.

Considérese la derivada

$$f'(x) = 4 \tag{17.1}$$

Al utilizar el método de tanteo, no resulta muy difícil concluir que la función

$$f(x) = 4x \tag{17.2}$$

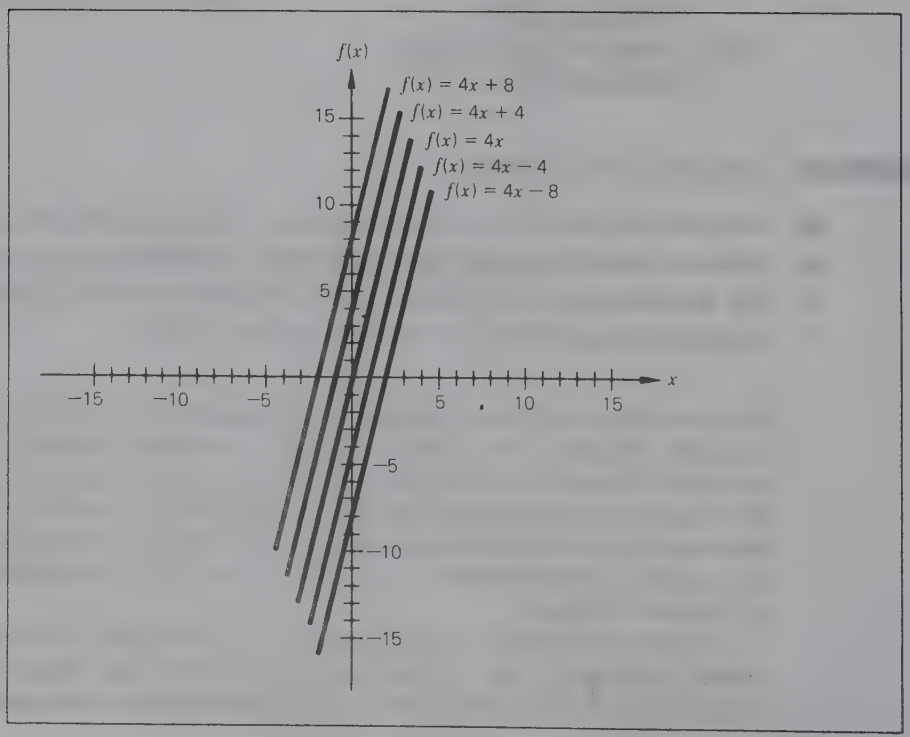


FIGURA 17.1

tiene una derivada de la forma de la ecuación (17.1). He aquí otra función que incluye la misma derivada:

$$f(x) = 4x + 1$$

De hecho, cualquier función que tenga la forma

$$f(x) = 4x + C \tag{17.3}$$

donde C es cualquier constante, tendrá también la misma derivada. Así pues, con la derivada de la ecuación (17.1), nuestra conclusión será que la función original pertenecía a la *familia* de funciones caracterizadas por la ecuación (17.3). Esa familia es un conjunto de funciones lineales cuyos miembros tienen una pendiente de $+4$, pero diferentes intersecciones C con el eje y. La figura 17.1 contiene algunos miembros de esa familia de funciones.

Puede afirmarse asimismo que la función.

$$f(x) = 4x + C$$

es la *antiderivada* de

$$f'(x) = 4$$

EJEMPLO 1

Calcule la antiderivada de $f'(x) = 0$.

SOLUCIÓN

Sabemos que la derivada de cualquier función constante es 0. Por consiguiente, la antiderivada es $f(x) = C$.

EJEMPLO 2

Calcule la antiderivada de $f'(x) = 2x - 5$.

SOLUCIÓN

Al aplicar el método de tanteo y al trabajar con cada término por separado, debería llegarse a la conclusión de que la antiderivada es

$$f(x) = x^2 - 5x + C$$

NOTA
Una comprobación fácil de la antiderivada f consiste en diferenciarla y determinar f'.

Con información complementaria quizá sea posible determinar la función precisa de donde se dedujo f'. Supóngase en el ejemplo original que se nos

dice que $f'(x) = 4$ y un punto en la función original es (2, 6). Las coordenadas en este punto deben satisfacer la ecuación de la función original, por lo cual se despejará la coordenada y de la intersección C con el eje y, al sustituir $x = 2$ y $f(x) = 6$ en la ecuación (17.3), o bien

$$6 = 4(2) + C$$
$$-2 = C$$

Por tanto, el miembro específico de la familia de funciones caracterizadas por la ecuación (17.3) es

$$f(x) = 4x - 2$$

EJEMPLO 3

En el ejemplo 1 suponga que un punto en la función f sea $(-2, 5)$. Determine la función específica de la que se obtuvo f'.

SOLUCIÓN

La antiderivada que describe la familia de posibles funciones era

$$f(x) = C$$

La sustitución de $x = -2$ y $f(x) = 5$ en esta ecuación nos da

$$5 = C$$

Por tanto, la función específica es $f(x) = 5$.

EJEMPLO 4

En el ejemplo 2 suponga que un punto en la función f sea (2, 20). Determine la función específica de donde se derivó f'.

SOLUCIÓN

La antiderivada que describe la familia de posibles funciones era

$$f(x) = x^2 - 5x + C$$

Si se sustituye $x = 2$ y $f(x) = 20$ en esta ecuación, se obtiene

$$20 = 2^2 - 5(2) + C$$
$$20 = -6 + C$$
$$26 = C$$

Así pues, la función original será

$$f(x) = x^2 - 5x + 26$$

Funciones de ingreso y costo

En el capítulo 14 se explicó el *enfoque marginal* con el cual se obtiene el nivel de producción que maximiza las utilidades. Se señaló que una expresión del ingreso marginal (MR) es la derivada de la función de ingreso total, donde la variable independiente es el nivel de producción. De manera semejante, se afirmó que una expresión del costo marginal (MC) es la derivada de la función del costo total. Si se tiene una expresión del ingreso o del costo marginal, las antiderivadas respectivas serán las funciones del ingreso y costo totales.

EJEMPLO 5

Ingreso marginal La función de ingreso marginal (MR) del producto de una compañía es

$$\text{MR} = 50\,000 - x$$

donde x es el número de unidades producidas y vendidas. Si el ingreso total es 0 cuando no se vende ninguna unidad, determine la función de ingreso total del producto.

SOLUCIÓN

Dado que la función del ingreso marginal es la derivada de la función del ingreso total, esta última será la derivada del ingreso marginal. Al aplicar el método de tanteo se obtiene

$$R(x) = 50\,000x - \frac{x^2}{2} + C \qquad \textbf{(17.4)}$$

Puesto que sabemos que $R(0)$, la sustitución de $x = 0$ y $R = 0$ en la ecuación (17.4) nos da

$$0 = 50\,000(0) - \frac{0^2}{2} + C$$

o bien

$$0 = C$$

Por lo tanto, la función de ingreso total del producto de la compañía es

$$R(x) = 50\,000x - \frac{x^2}{2}$$

EJEMPLO 6

Costo marginal La función que describe el costo marginal de fabricar un producto es

$$\text{MC} = x + 100$$

donde x es el número de unidades producidas. Se sabe también que el costo total es \$40 000, cuando $x = 100$. Determine la función de costo total.

SOLUCIÓN

Para determinar la función de costo total, primero se encuentra la antiderivada de la función de costo marginal, es decir,

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + C \qquad \textbf{(17.5)}$$

Dado que $C(100) = 40\,000$, podemos despejar el valor de C, que resulta representar el costo fijo.

$$40\,000 = \frac{(100)^2}{2} + 100(100) + C$$

$$40\,000 = 5\,000 + 10\,000 + C$$

o $$25\,000 = C$$

La función específica que representa el costo total de fabricar el producto es

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + 25\,000$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 17.1

En los ejercicios 1-30 calcule la antiderivada de la función dada.

1 $f'(x) = 30$
2 $f'(x) = -20$
3 $f'(x) = \frac{1}{4}$
4 $f'(x) = \sqrt{20}$
5 $f'(x) = 6x$
6 $f'(x) = -8x$
7 $f'(x) = x^2$
8 $f'(x) = x^2/2$
9 $f'(x) = x^3/3$
10 $f'(x) = x^4$
11 $f'(x) = x^2 - 3x$
12 $f'(x) = x^3 - x^2 + 2x$
13 $f'(x) = x^2 + 3x + 1$
14 $f'(x) = x^5$
15 $f'(x) = 3x^2 + 10$
16 $f'(x) = 6x^2 - 5x + 2$
17 $f'(x) = x^2 - 6x + 1$
18 $f'(x) = 15x^2 - 18x - 10$
19 $f'(x) = 8x^3 - 3x^2$
20 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$
21 $f'(x) = 16x^3 - 6x^2 + 12$
22 $f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
23 $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 - 5$
24 $f'(x) = 10x^4 + 4x^3 - x$
25 $f'(x) = 10x^4 - 8x^3 + 3x$
26 $f'(x) = 25x^4 - 2x^3 + x$
27 $f'(x) = x^4/2$
28 $f'(x) = \sqrt{2}x^2$
29 $f'(x) = 12x^5 - 6x^2$
30 $f'(x) = 30x^5 - 5x^4 + 3x^2$

En los ejercicios 31-50, determine f si se conoce f' y un punto que especifica f.

31 $f'(x) = 25, (1, 20)$
32 $f'(x) = -3x + 2, (3, 20)$
33 $f'(x) = 20x, (-2, 30)$
34 $f'(x) = x^2, (-4, 36)$
35 $f'(x) = 2x^3, (2, 25)$
36 $f'(x) = 2x^3, (0, 10)$
37 $f'(x) = x^2 + 6x, (3, 25)$
38 $f'(x) = x^2 + 8x + 2, (-1, 28)$
39 $f'(x) = 6x^2 + 6x, (2, -25)$
40 $f'(x) = 5x^4, (-5, 40)$
41 $f'(x) = 12x^2 + 2x, (-2, 20)$
42 $f'(x) = 9x^2 - 6x + 4, (-3, -10)$
43 $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x, (3, 60)$
44 $f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1, (-1, -5)$
45 $f'(x) = 8x^3 - 3x^2, (2, 48)$
46 $f'(x) = 5x^4 - 12x^2, (5, 240)$
47 $f'(x) = -4x^3 - 10x, (-2, 40)$
48 $f'(x) = -8x^3 - 6x^2, (-3, 28)$
49 $f'(x) = 6x^5 - 6x^2, (1, 15)$
50 $f'(x) = 10 - x + x^3, (2, -1)$

51 La función de ingreso marginal del producto de una compañía es

$$\text{MR} = 40\,000 - 2x$$

donde x es el número de unidades vendidas. Si el ingreso total es 0 cuando no se venden unidades, determine la función de ingreso total del producto.

52 La función que describe el costo marginal (en dólares) de la producción de un producto es

$$\text{MC} = 6x + 2\,800$$

donde x indica el número de unidades producidas. Se sabe que el costo total es de \$60 000 cuando se fabrican 20 unidades. Calcule la función de costo total.

53 La función que describe la *utilidad marginal* lograda al producir y vender un producto es

$$MP = -4x + 850$$

donde x es el número de unidades y MP es la utilidad marginal, medida en dólares. Cuando se producen y venden 300 unidades, la *utilidad total* es \$25 000. Encuentre la función de utilidad total.

54 La función que describe la utilidad marginal lograda con la fabricación y venta de un producto es

$$MP = -3x + 600$$

donde x es el número de unidades y MP es la utilidad marginal medida en dólares. Cuando se producen y venden 50 unidades, la utilidad total (que es negativa) es de −\$13 500. Determine la función de utilidad total.

17.2 REGLAS DE INTEGRACIÓN

Por fortuna no es preciso recurrir a un método de tanteo cuando se quiere encontrar una antiderivada. Como en el caso de la diferenciación, se ha ideado un conjunto de reglas que permite calcular las antiderivadas. Si una función presenta una forma determinada, tal vez se disponga de una regla para calcular fácilmente su antiderivada.

Integración

El proceso de encontrar las antiderivadas suele recibir el nombre de ***integración***. Y la familia de funciones obtenidas mediante ese proceso se llama ***integral indefinida***. La notación

$$\int f(x)\,dx \tag{17.6}$$

se emplea con frecuencia para indicar la integral indefinida de la función f. El símbolo $\int$ es el ***signo de la integral***; f es el ***integrando***, o sea la función cuya integral indefinida deseamos obtener; y dx, tal como la consideramos aquí, denota la variable respecto a la cual se realiza el proceso de integración. Dos descripciones verbales del proceso indicadas por la ecuación (17.6) son "integrar la función f respecto a la variable x" y "encontrar la integral indefinida de f respecto a x".

NOTA
No olvide que calcular una integral indefinida es lo mismo que obtener una antiderivada.

En el ejemplo 23 se observó que la antiderivada de $2x - 5$ es $x^2 - 5x + C$. Podemos denotar esto, usando la notación integral, así:

$$\int (2x - 5)\,dx = x^2 - 5x + C$$

Una definición más formal de la integral indefinida se da a continuación.

DEFINICIÓN: INTEGRAL INDEFINIDA
Dado que f es una función continua:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{17.7}$$

si $F'(x) = f(x)$.

En la definición anterior C se denomina ***constante de integración***. Una vez más, C refleja la naturaleza indefinida de la obtención de la antiderivada o integral indefinida.

Reglas de integración

A continuación se da un conjunto de reglas que permiten calcular la integral indefinida de algunas funciones comunes en las aplicaciones a la administración y la economía.

REGLA 1: FUNCIONES CONSTANTES

$$\int k\,dx = kx + C$$

donde k es una constante de valor real.

El ejemplo 7 es una explicación de esta regla.

EJEMPLO 7

(*a*) $\int (-2)\,dx = -2x + C$

(*b*) $\int \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}x + C$

(*c*) $\int \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}x + C$

(*d*) $\int 0\,dx = (0)x + C = C$

REGLA 2: REGLA DE LA POTENCIA

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

La regla anterior es análoga a la regla de la diferenciación basada en la potencia. *Nótese que esta regla no es válida cuando* $x = -1$. Más adelante nos ocuparemos de esta excepción. En su forma verbal, la regla establece que, si el integrando es x elevada a una potencia de valor real, el exponente de x se aumenta en 1, se divide entre el nuevo exponente y se suma la constante de integración. El ejemplo 8 ofrece explicaciones de esta regla.

EJEMPLO 8

$$(a)\quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$(b)\quad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$(c)\quad \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$(d)\quad \int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$= \frac{-1}{2x^2} + C$$

NOTA
No olvide el mecanismo intrínseco de verificación. Su aplicación requiere unos cuantos segundos y con él pueden evitarse los errores atribuibles al descuido. Calcule la derivada de las integrales indefinidas anteriores y compruebe si son iguales a los integrandos respectivos. Acaso se necesita alguna manipulación algebraica para verificar esos resultados.

REGLA 3

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

donde k es una constante de valor real.

En su forma verbal, esta regla establece que la integral indefinida de una constante k por una función f se determina multiplicando la constante por la integral indefinida de f. Otra manera de concebir la regla es afirmar que, siempre que una *constante* pueda factorizarse a partir del integrando, también puede factorizarse fuera de la integral. En el ejemplo 8 se dan algunos casos de esta regla.

EJEMPLO 9

$$(a)\quad \int 5x\,dx = 5\int x\,dx$$

$$= 5\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

$$= \frac{5x^2}{2} + 5C_1$$

$$= \frac{5x^2}{2} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \frac{5x^2}{2} + C$, $\quad f'(x) = \frac{5}{2}(2x) = 5x$ ✓

NOTA
Con integrales indefinidas se incluye siempre la constante de integración. En la aplicación de la regla 3, el álgebra sugiere que cualquier constante k factorizada fuera de la integral deberá multiplicarse por la constante de integración (el término $5C_1$ en este ejemplo). Esta multiplicación es innecesaria. Simplemente se requiere una constante de integración para indicar la "naturaleza indefinida" de la integral. Así, la convención es sumar C y no un múltiplo de C. En el último paso el término $5C_1$ se reescribe simplemente como C, puesto que C representa cualquier constante y también $5C_1$.

$$(b)\quad \int \frac{x^2}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + C$$
$$= \frac{x^3}{6} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + C$, $\quad f'(x) = \dfrac{3x^2}{6} = \dfrac{x^2}{2}$ ✔

$$(c)\quad \int \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = \int 3x^{-1/2}\,dx$$
$$= 3\int x^{-1/2}\,dx$$
$$= 3\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 6x^{1/2} + C$$

Comprobación Si $f(x) = 6x^{1/2} + C$, $\quad f'(x) = 6(\frac{1}{2})x^{-1/2}$
$$= \frac{3}{x^{1/2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{x}}$$ ✔

REGLA 4
Si existen $\int f(x)\,dx$ y $\int g(x)dx$, entonces

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

La integral indefinida de la suma (diferencia) de dos funciones es la suma (diferencia) de sus integrales indefinidas respectivas.

EJEMPLO 10

$$(a)\quad \int (3x - 6)\,dx = \int 3x\,dx - \int 6\,dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} + C_1 - (6x + C_2)$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 6x + C_1 - C_2$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 6x + C$$

Nótese también aquí que, aun cuando las dos integrales producen desde el punto de vista técnico constantes separadas de integración, éstas pueden considerarse como una sola.

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 6x + C$, $f'(x) = 3x - 6$ ✔

$$(b)\quad \int (4x^2 - 7x + 6)\,dx = \int 4x^2\,dx - \int 7x\,dx + \int 6\,dx$$

$$= \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{7x^2}{2} + 6x + C$, $f'(x) = \dfrac{12x^2}{3} - \dfrac{14x}{2} + 6$

$$= 4x^2 - 7x + 6$$ ✔

Ejercicios de seguimiento de la sección 17.2

En los ejercicios 1-50, encuentre la integral indefinida (si es posible).

1 $\int 80\,dx$

2 $\int -75\,dx$

3 $\int dx/4$

4 $\int dx$

5 $\int 6x\,dx$

6 $\int (x/4)\,dx$

7 $\int -5x\,dx$

8 $\int (-2x/3)\,dx$

9 $\int (4x - 6)\,dx$

10 $\int (12 - 6x)\,dx$

11 $\int (x/2 - 3/4)\,dx$

12 $\int (x/3 + 1/2)\,dx$

13 $\int (6x^2 - 4x + 5)\,dx$

14 $\int (-9x^2 + 15)\,dx$

15 $\int (-3x^2 + x - 3)\,dx$

16 $\int (10 - 3x + 5x^2)\,dx$

17 $\int (4x^3 - 6x^2 - 5)\,dx$

18 $\int (5x^3 + 2x^2 - 3x + 1)\,dx$

19 $\int (x^5 - 3x^3 + 5)\,dx$

20 $\int (8x^6 + x^3/2 + 3)\,dx$

21 $\int \sqrt[4]{x}\,dx$

22 $\int (4/\sqrt[3]{x})\,dx$

23 $\int dx/x^4$

24 $\int (25/\sqrt[3]{x^2})\,dx$

25 $\int (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx$

26 $\int (mx + b)\,dx$

27 $\int (a/bx^n)\,dx$

28 $\int \sqrt[b]{x}\,dx$

29 $\int dx/x^n$

30 $\int (a/\sqrt[b]{x})\,dx$

31 $\int 4\sqrt[3]{x}\,dx$

32 $\int 5\sqrt{x}\,dx$

33 $\int \sqrt[5]{x^4}\,dx$

34 $\int 4\sqrt[4]{x}\,dx$

35 $\int (4\sqrt[3]{x}/3)\,dx$

36 $\int (3\sqrt{x}/2)\,dx$

37 $\int (dx/x^5)$

38 $\int (-4dx/x^3)$

39 $\int (10\,dx/x^2)$

40 $\int (8\,dx/x^3)$

41 $\int (dx/\sqrt{x})$

42 $\int (dx/\sqrt[3]{x})$

43 $\int (-5\,dx/\sqrt[5]{x})$

44 $\int (-3\,dx/\sqrt{x})$

45 $\int (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)\,dx$

46 $\int (5\,dx/x^5)$

47 $\int (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)\,dx$

48 $\int (dx/ax^2)$

49 $\int (dx/ax^n)$

50 $\int ([1/x] - [1/x^2] + [2/x^3])\,dx$

17.3 REGLAS ADICIONALES DE INTEGRACIÓN

En esta sección se ofrecen más reglas de integración y se dan ejemplos de su aplicación.

REGLA 5: EXCEPCIÓN DE LA REGLA DE LA POTENCIA

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + C$$

Está es la excepción relacionada con la regla 2 (la regla de la potencia), donde $n = -1$ para x^n. ¿Recuerda el lector las reglas de diferenciación? Si $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x = x^{-1}$.

REGLA 6

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

REGLA 7

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

donde $n \neq -1$

Esta regla se parece a la de la potencia (regla 2). En efecto, la regla de la potencia es el caso especial de esta regla, donde $f(x) = x$. Si el integrando está formado por el producto de la función f elevada a una potencia n y la derivada de f, la integral indefinida se calculará aumentando en 1 el exponente de f y dividiendo el resultado entre el nuevo exponente.

EJEMPLO 11

Evalúe $\int (5x - 3)^3(5)\,dx$.

SOLUCIÓN

Cuando se identifica un integrando que contiene una función elevada a una potencia, el lector deberá de pensar inmediatamente en la regla 7. El primer paso es determinar la función f. En este caso, la función que se eleva a la tercera potencia es

$$f(x) = 5x - 3$$

Una vez obtenida f, deberá determinarse f'. En este caso,

$$f'(x) = 5$$

Si el integrando presenta la forma $[f(x)]^n f'(x)$, entonces se aplicará la regla 7. El integrando en este ejemplo *sí* tiene la forma requerida, y

$$\int \overbrace{(5x - 3)}^{f(x)}{}^3 \overbrace{(5)}^{f'(x)}\,dx = \frac{(5x - 3)^4}{4} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{(5x - 3)^4}{4} + C$, $\quad f'(x) = \dfrac{4}{4}(5x - 3)^3(5)$

$$= (5x - 3)^3(5) \checkmark$$

EJEMPLO 12

Evalúe $\int \sqrt{2x^2 - 6}\,(4)\,dx$.

SOLUCIÓN

El integrando pueden reescribirse como

$$\int (2x^2 - 6)^{1/2}(4)\,dx$$

En relación con la regla 7, tenemos

$$f(x) = 2x^2 - 6 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 4x$$

Para que se aplique la regla 7, $(2x^2 - 6)^{1/2}$ deberá multiplicarse por f', o sea $4x$, en el integrando. Puesto que el otro factor del integrando es 4 y no $4x$, no será posible evaluar la integral por medio de la regla 7.

EJEMPLO 13

Evalúe $\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\,dx$.

SOLUCIÓN

En esta integral

$$f(x) = x^2 - 2x \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 2x - 2$$

También en este caso parece que el integrando no es de la forma apropiada. Para poder aplicar la regla 7, el segundo factor del integrando debería ser $2x - 2$ y no $x - 1$. Sin embargo, al recordar la regla 3 y utilizar algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\,dx &= \frac{2}{2}\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int (x^2 - 2x)^5(2)(x - 1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int (x^2 - 2x)^5(2x - 2)\,dx \qquad \textbf{(17.8)}\end{aligned}$$

Lo que hemos hecho es manipular el integrando para convertirlo en la forma adecuada. La regla 3 establece que las *constantes* pueden factorizarse de adentro hacia afuera del signo de la integral. De manera análoga, una constante que sea un factor puede desplazarse de afuera del signo de la integral hacia adentro. Se multiplicó el integrando por 2 y esta operación se compensó al multiplicar la integral por $\frac{1}{2}$. En efecto, simplemente multiplicamos la integral original por $^2/_2$, o sea 1. Así pues, hemos cambiado el aspecto de la integral original pero no su valor.

Al evaluar la integral en la ecuación (17.8) se obtiene

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \overbrace{(x^2 - 2x)}^{f(x)}{}^5\overbrace{(2x - 2)}^{f'(x)}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\frac{(x^2 - 2x)^6}{6} + C \\ &= \frac{(x^2 - 2x)^6}{12} + C\end{aligned}$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)^6}{12} + C$, $f'(x) = \dfrac{6}{12}(x^2 - 2x)^5(2x - 2)$

$$= \frac{6(x^2 - 2x)^5(2)(x - 1)}{12}$$

$$= (x^2 - 2x)^5(x - 1)$$ ✓

EJEMPLO 14

Evalúe $\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)dx$.

SOLUCIÓN

En esta integral

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 4x^3 - 4x$$

El integrando no es exactamente de la forma de la regla 7. Y existe una fuerte tentación a efectuar las siguientes operaciones.

$$\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)\,dx = \frac{x}{x}\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)\,dx$$

$$= \frac{1}{x}\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^3 - 4x)\,dx$$

Sin embargo, no hemos explicado ninguna propiedad que nos permita factorizar las *variables* dentro de un signo de la integral. Las constantes sí, no así las variables. Por consiguiente, con las reglas de que se dispone actualmente no es posible evaluar la integral.

REGLA 8

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$$

Esta regla, lo mismo que la precedente, requiere que el integrando presente una forma muy específica. La regla 6 es en realidad el caso especial de ésta cuando $f(x) = x$.

EJEMPLO 15

Evalúe $\int 2xe^{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN

Cuando se identifica un integrando que contiene e elevada a una potencia que es una función de x, de inmediato el lector debería recordar la regla 8. Igual que en el caso de la regla 7, el siguiente paso consiste en verificar si el integrando tiene la forma requerida para aplicar la regla 8. En este integrando,

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 2x$$

Según la regla 8, el integrando presenta la forma adecuada, y

$$\int \overbrace{2x}^{f'(x)}\ \overbrace{e^{x^2}}^{f(x)}\,dx = e^{x^2} + C$$

Comprobación Si $f(x) = e^{x^2} + C$, $f'(x) = e^{x^2}(2x)$ ✓

EJEMPLO 16

Evalúe $\int x^2 e^{3x^3}\,dx$.

SOLUCIÓN

En relación con la regla 8, en este integrando se tiene

$$f(x) = 3x^3 \quad \text{y} \quad f'(x) = 9x^2$$

El integrando no se encuentra actualmente en un forma idónea para servirse de la regla 8. No obstante,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x^3}\,dx &= \frac{9}{9}\int x^2 e^{3x^3}\,dx \\ &= \frac{1}{9}\int 9x^2 e^{3x^3}\,dx \\ &= \frac{1}{9}e^{3x^3} + C\end{aligned}$$

Si $f(x) = \frac{1}{9}e^{3x^3} + C$, $f'(x) = \frac{1}{9}e^{3x^3}(9x^2) = x^2 e^{3x^3}$ ✓

REGLA 9

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$$

EJEMPLO 17

Evalúe $\int \dfrac{6x}{3x^2 - 10}\,dx$.

SOLUCIÓN

Al aplicar la regla 9 se obtiene

$$f(x) = 3x^2 - 10 \quad \text{y} \quad f'(x) = 6x$$

Puesto que el integrando presenta la forma requerida por la regla 9,

$$\int \frac{6x\,dx}{3x^2 - 10} = \ln(3x^2 - 10) + C$$

Comprobación Si $f(x) = \ln(3x^2 - 10) + C$, $f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2 - 10}$ ✓

EJEMPLO 18

Evalúe $\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10} dx$.

SOLUCIÓN

En relación con la regla 9, se tiene

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 10 \quad \text{y} \quad f'(x) = 8x - 8$$

A primera vista, la forma del integrando no parece ajustarse a la que exige la regla 9. Pero una manipulación algebraica nos permite reescribirlo en la forma requerida, o sea

$$\begin{aligned}\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10} dx &= \frac{8}{8} \int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10} dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{8(x - 1)}{4x^2 - 8x + 10} dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{8x - 8}{4x^2 - 8x + 10} dx \\ &= \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 8x + 10) + C\end{aligned}$$

Comprobación Si $f(x) = \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 8x + 10) + C$,

$$f'(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{8x - 8}{4x^2 - 8x + 10}\right] = \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10} \checkmark$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 17.3

En los siguientes ejercicios calcule la integral indefinida (si es posible).

1 $\int (x + 25)^3 dx$

2 $\int \sqrt{x + 15} dx$

3 $\int 5(5x - 10)^4 dx$

4 $\int \frac{1}{2}[12 - (x/2)]^3 dx$

5 $\int [(x/3) - 5]^3(\frac{1}{3}) dx$

6 $\int \sqrt{12 - 4x}\,(8) dx$

7 $\int (x - 10)^4(x) dx$

8 $\int x\sqrt{x + 5} dx$

9 $\int (x^2 + 8)^3(2x) dx$

10 $\int (x^3 + 18)^5(3x^2) dx$

11 $\int (4x^3 + 15)^3(x^2) dx$

12 $\int (x^2 + 5)^{5/2}(x) dx$

13 $\int (2x^2 + 4x)^4(x + 1) dx$

14 $\int (x^2/4 + x/2)^5(x + 1) dx$

15 $\int (4x/\sqrt{x^2 + 3}) dx$

16 $\int 6x^2/(x^3 + 18)^3 dx$

17 $\int (4x^3 + 8x^2)^5(x) dx$

18 $\int 4x^3\sqrt{x^2 + 1} dx$

19 $\int (4x^3 - 10)^3(12x) dx$

20 $\int (3x^4 + 15)^4(12x^2) dx$

21 $\int \sqrt{2x^3 - 5}\,(x^2)\,dx$

22 $\int \sqrt[3]{25 - 3x^3}\,(x^2)\,dx$

23 $\int (2x^2 - 8x)^6(x - 2)\,dx$

24 $\int (3x - 3x^3)^4(1 - 3x^2)\,dx$

25 $\int (x^3 + 3x^4)^3(3x + 12x^2)\,dx$

26 $\int \sqrt{9x - 3x^2}\,(3 - 2x)\,dx$

27 $\int e^{x^3}\,dx$

28 $\int e^{x-10}\,dx$

29 $\int e^{2x}\,dx$

30 $\int 2xe^{x^2}\,dx$

31 $\int e^{ax}\,dx$

32 $\int (x - 2)e^{x^2-4x}\,dx$

33 $\int \frac{x}{x^2 + 5}\,dx$

34 $\int \frac{-2x}{100 + x^2}\,dx$

35 $\int \frac{12}{6x + 5}\,dx$

36 $\int \frac{x^3 + 1}{x^4 + 4x}\,dx$

37 $\int \frac{dx}{ax + b}$

38 $\int \frac{ax - 1}{ax^2 - 2x}\,dx$

39 $\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx}\,dx$

40 $\int \frac{a - bx}{2ax - bx^2}\,dx$

17.4 ECUACIONES DIFERENCIALES

La ***ecuación diferencial*** es una ecuación que contiene derivadas, diferenciales o ambas.* En la sección 17.1 se estudiaron las ecuaciones diferenciales, aunque no con ese nombre, cuando se pasó de una derivada f' a su correspondiente antiderivada f. Se *resolvió* la ecuación diferencial al encontrar la antiderivada. En la presente sección se ampliará el tema utilizando las reglas de integración para facilitar el proceso de solución.

Clasificaciones de las ecuaciones diferenciales

Una vez más señalamos que la ecuación diferencial es aquella que incluye derivadas de una o más funciones. Si una ecuación diferencial contiene derivadas de una función de una variable independiente, recibe el nombre de ***ecuación diferencial ordinaria***. La siguiente ecuación es un ejemplo donde la variable independiente es x.

$$\frac{dy}{dx} = 5x - 2 \tag{17.9}$$

Si una ecuación diferencial incluye derivadas parciales de funciones con dos o más variables independientes, se denomina ***ecuación diferencial parcial***. La siguiente ecuación es un ejemplo de este tipo de ecuación.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + 2x - y = 0 \tag{17.10}$$

*Hemos empleado regularmente la notación dy/dx. Tomadas por separado dy y dx reciben el nombre de *diferenciales*, lo cual refleja los cambios instántaneos de y y x, respectivamente.

Esta ecuación podría escribirse también recurriendo a la notación del capítulo 16, o sea

$$f_{xx} + f_x + 2x - y = 0 \tag{17.11}$$

Las ecuaciones diferenciales se clasifican además por su ***orden***, que es el orden de la derivada de más alto orden que aparece en ellas. La ecuación (17.9) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. La ecuación (17.10) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Otro sistema de clasificación es el que se basa en el ***grado*** de las ecuaciones diferenciales. El grado es la *potencia* de la derivada de más alto orden en ellas. Cada una de las ecuaciones diferenciales anteriores es de *primer grado*. La ecuación (17.12) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de segundo grado.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 10 = y \tag{17.12}$$

EJEMPLO 19

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales por tipo, orden y grado.

(*a*) $dy/dx = x^2 - 2x + 1$
(*b*) $d^2y/dx^2 - (dy/dx) = x$
(*c*) $d^2y/dx^2 - (dy/dx)^3 + 2x = 0$
(*d*) $\partial z/\partial x - \partial z/\partial y = 0$
(*e*) $\partial^2 z/\partial x^2 + (\partial z/\partial x)^2 - \partial^2 z/\partial y^2 = 0$

SOLUCIÓN

a) Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado.
b) Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y de primer grado.
c) Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y de primer grado (dy/dx no es la derivada de más alto orden).
d) Ésta es una ecuación diferencial parcial de primer orden y de primer grado.
e) Ésta es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y de primer grado.

Soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

En la presente sección nos centraremos en las soluciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Este tipo de solución es una función que no contiene derivadas ni diferenciales que satisfagan la ecuación diferencial original.

Las soluciones a las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse en ***soluciones generales*** y en ***soluciones particulares***. Una solución general es aquella que incluye constantes arbitrarias de integración. Una solución particular es la que se obtiene de la solución general. En el caso de soluciones particulares se

asignan valores específicos a las constantes de integración, basados en las ***condiciones iniciales*** o ***de límite***.

Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$$

La *solución general* de esta ecuación diferencial se obtiene al integrar la ecuación, es decir,

$$y = f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + C$$
$$= x^3 - x^2 + 5x + C$$

Con la *condición inicial* de que $f(0) = 15$, la *solución particular* se deriva al sustituir estos valores en la solución general y al despejar C.

$$15 = 0^3 - 0^2 + 5(0) + C$$

o bien $$15 = C$$

La solución particular de la ecuación diferencial es

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 15$$

EJEMPLO 20

En la ecuación diferencial

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = x - 5 \qquad \textbf{(17.13)}$$

y con las *condiciones de límite* $f'(2) = 4$ y $f(0) = 10$, obtenga la solución general y la solución particular.

SOLUCIÓN

La ecuación dada es una ecuación diferencial ordinaria de *segundo* orden y de *primer* grado. Si se integra la ecuación, el resultado será

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - 5x + C_1 \qquad \textbf{(17.14)}$$

que también es una ecuación diferencial porque contiene la derivada dy/dx. Así pues, para liberar la ecuación de cualquier derivada es preciso integrar la ecuación (17.14).

$$f(x) = y = \frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{2} + C_1x + C_2 \qquad \textbf{(17.15)}$$

La ecuación (17.15) es la solución *general* de la ecuación diferencial original. Nótese el empleo de subíndices en las constantes de integración para distinguirlas entre sí.

NOTA
La solución general de una ecuación diferencial de n-ésimo orden contendrá n constantes de integración.

Para obtener la solución particular, hay que sustituir las condiciones de límite en las ecuaciones (17.14) y (17.15). Comenzando con la ecuación (17.14) y la condición de que $f'(2) = 4$,

$$4 = \frac{(2)^2}{2} - 5(2) + C_1$$

$$4 = -8 + C_1$$

y

$$12 = C_1$$

Si este valor se sustituye en la ecuación (17.15), junto con la otra información referente a la condición de límite $f(0) = 0$,

$$10 = \frac{0^3}{6} - \frac{5(0)^2}{2} + 12(0) + C_2$$

o

$$10 = C_2$$

En consecuencia, la solución particular es

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{2} + 12x + 10$$

En el capítulo 15 se explicaron el crecimiento exponencial y el decaimiento exponencial. Las funciones exponenciales de crecimiento presentan la forma general

$$\boxed{V = V_0 e^{kt}} \qquad \textbf{(17.16)}$$

donde V_0 es el valor de la función cuando $t = 0$ y k es una constante positiva. Se demostró en el ejemplo 14 del capítulo (página 715) que estas funciones se caracterizan por una tasa porcentual constante de crecimiento k, y

$$\frac{dV}{dt} = kV_0 e^{kt}$$

o bien

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = kV} \qquad \textbf{(17.17)}$$

La ecuación (17.17) es una ecuación diferencial; su solución general se expresa en la ecuación (17.16), donde V_0 y k son constantes.

La investigación empírica frecuentemente implica observaciones de un proceso (por ejemplo, el crecimiento bacteriano, el crecimiento o disminución de la población, la desintegración radiactiva) a lo largo del tiempo. Con frecuencia los datos reunidos reflejan valores de la funciones en diferentes momentos y medidas de *tasas de cambio* en el valor de la función. Es de estos tipos de datos de donde se deduce la relación funcional verdadera. Expresado esto con palabras más sencillas, a menudo la investigación produce ecuaciones diferenciales que describen de modo parcial la relación existente entre variables. La solución de estas ecuaciones diferenciales da origen a una descripción completa de las relaciones funcionales.

EJEMPLO 21

Crecimiento de las especies La población de un especie rara de peces está creciendo, según estimaciones, con una tasa exponencial. Cuando se identificó y se clasificó inicialmente, la población se calculó en 50 000. Cinco años después era de 75 000, según las estimaciones hechas. *Si P es la población de la especie en el momento t, donde t se mide en años*, el crecimiento de la población ocurre a una tasa descrita por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP = kP_0e^{kt}$$

Al integrar esta ecuación,

$$\int \frac{dP}{dt} = \int kP_0e^{kt}$$
$$= P_0 \int ke^{kt}$$

O la solución general es

$$P = P_0e^{kt}$$

donde P_0 y k son constantes. Para determinar el valor específico de P_0 se aplica la condición inicial según la cual $P = 50\ 000$ cuando $t = 0$.

$$50\ 000 = P_0e^{k(0)}$$

o bien

$$50\ 000 = P_0$$

El valor de k puede calcularse sustituyendo la condición de límite ($P = 75\ 000$ cuando $t = 5$), junto con $P_0 = 50\ 000$ en la solución general

$$75\ 000 = 50\ 000\ e^{k(5)}$$
$$1.5 = e^{5k}$$

Si se calcula el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación,

$$\ln 1.5 = 5k$$

Según la tabla 2 (de la solapa)

$$\ln 1.5 = 0.4055$$
$$0.4055 = 5k$$

y

$$0.0811 = k$$

Por tanto, la función particular que describe el crecimiento de la población es

$$P = 50\ 000\ e^{0.0811t}$$

Un proceso de decaimiento exponencial se caracteriza por una disminución porcentual constante de valor en el tiempo. La función general que describe esta clase de procesos es

$$\boxed{V = V_0 e^{-kt}} \tag{17.18}$$

donde V es el valor de la función en el tiempo t, V_0 es el valor de la función cuando $t = 0$ y k es la tasa porcentual del decaimiento. La tasa de cambio del valor de la función respecto al cambio en el tiempo es

$$\frac{dV}{dt} = -kV_0 e^{-kt}$$

o

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -kV} \tag{17.19}$$

La ecuación (17.19) es una ecuación cuya solución general es la ecuación (17.18).

EJEMPLO 22

Absorción de medicamentos Se administró a una persona un fármaco a una dosis de 100 miligramos. La cantidad del medicamento contenida en la corriente sanguínea disminuye con el tiempo, según lo describe una función de decaimiento exponencial. Al cabo de 6 horas, una muestra de sangre revela que la concentración en el organismo es de 40 miligramos. Si V denota la concentración del fármaco en la corriente sanguínea después de t horas y si V_0 es la cantidad en la corriente sanguínea cuando $t = 0$, el decaimiento se presenta a una tasa descrita por la función

$$\frac{dV}{dt} = -kV = -kV_0 e^{-kt}$$

He aquí la solución general de esta ecuación diferencial

$$V = V_0 e^{-kt}$$

Si la condición inicial ($V = 100$ con $t = 0$) se sustituye en esta ecuación, V_0 se identifica como 100 y

$$V = 100e^{-kt}$$

Sustituyendo la condición de límite ($V = 40$ cuando $t = 6$)

$$40 = 100e^{-k(6)}$$

o bien

$$0.4 = e^{-6k}$$

Tomando el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación,

$$\ln (0.4) = -6k$$

Según la tabla 2,

$$\ln (0.4) = -0.9163$$

y

$$-0.9163 = -6k$$

$$0.1527 = k$$

Así pues, la función particular que describe la disminución de la concentración del medicamento es

$$V = 100e^{-0.1527t}$$

Extensión de las ecuaciones diferenciales

En nuestra exposición se ha descubierto la "punta del iceberg" en lo tocante al tema de las ecuaciones diferenciales. Hemos examinado exlusivamente el caso más simple. Este tema a menudo es el centro de un curso semestral. Nuestro objetivo ha sido ofrecer una introducción al mismo y relacionarlo con el cálculo integral.

Ejercicios de seguimiento de la sección 17.4

En los ejercicios 1-12, clasifique las ecuaciones diferenciales por tipo, orden y grado.

1 $dy/dx = 2x^3 + 3x^2 + 6x$
2 $dy/dx - d^2y/dx^2 = 5x + 60$
3 $(d^2y/dx^2)^3 = 2x^3 + dy/dx$
4 $d^2y/dx^2 = (dy/dx)^4 + x^3 - 2x^2$
5 $15(\partial z/\partial x) + 6(\partial z/\partial y) = 100$
6 $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial z/\partial x = \partial^2 z/\partial y^2$
7 $\partial^2 z/\partial x^2 + 8(\partial z/\partial x)^3 = 7x^2 + 3x$
8 $5(\partial^2 z/\partial x^2)^2 + 6(\partial z/\partial x)^3 = 7x^3 + 40$
9 $(dy/dx)^2 = dy/dx - x + 1$
10 $d^2y/dx^2 - 5\,dy/dx = x^2 - 5$
11 $dy/dx = 10 - x - (d^2y/dx^2)^3$
12 $x^2 - x = dy/dx - (d^2y/dx^2)^2$

En los ejercicios 13-30, encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

13 $dy/dx = x^4 + 2x + 6$
14 $dy/dx = 6x^2 + 6x + 18$
15 $dy/dx = 1/x$
16 $dy/dx = (2x)(x^2 + 5)^4$
17 $dy/dx = 5x/(5x^2 + 10)$
18 $dy/dx = 6xe^{3x^2}$
19 $d^2y/dx^2 = x + 5$
20 $6x = 24x^2 + d^2y/dx^2$
21 $2(d^2y/dx^2) + x^3 = d^2y/dx^2 + 2x - 16$
22 $d^2y/dx^2 = 3x - 5$
23 $d^2y/dx^2 = e^x$
24 $d^2y/dx^2 = x^2 - x + 4$
25 $d^2y/dx^2 = e^x + 5$
26 $d^2y/dx^2 = 12x^2 - 6x + 40$
27 $3(d^2y/dx^2) - 5 = 2(d^2y/dx^2) - x$
28 $dy/dx = 2x/(x^2 - 5)$
29 $4(dy/dx) - 2x(x^2 + 15)^3 = 3\,dy/dx$
30 $3(d^2y/dx^2) + 12x^2 - 5 = 2(d^2y/dx^2) + x$

En los ejercicios 31-40, obtenga las soluciones general y particular de la ecuación diferencial.

31 $dy/dx = 2x, f(0) = -50$
32 $dy/dx = 6x^2 + 2x + 6, f(0) = 18$
33 $dy/dx = x^2 + 3x + 8, f(1) = 7.5$
34 $dy/dx = (6x)(3x^2 + 7), f(2) = 20$
35 $d^2y/dx^2 = 6x + 18, f'(5) = -10, f(2) = 30$
36 $d^2y/dx^2 = 15; f'(2) = 20, f(3) = -10$
37 $d^2y/dx^2 = 25e^{5x}; f'(8) = 4, f(0) = -2$
38 $3 - d^2y/dx^2 = 20x; f'(0) = -12, f(-1) = 18$
39 $d^2y/dx^2 = 6x - 9; f'(2) = 10, f(-2) = -10$
40 $dy/dx = 4x(2x^2 - 8)^3; f(2) = 20$

41 La población de una especie de conejos recién descubierta parece estar creciendo exponencialmente. Cuando por primera vez se descubrió en un país sudamericano, la población se estimó en 600. Dos años más tarde se calculó en 1500. Determine la función de crecimiento exponencial que describa la población P en términos del tiempo t, medido en años transcurridos desde el descubrimiento de la especie.

42 La población de una especie de alce en peligro de extinción parece estar decreciendo a una tasa exponencial. Cuando la disminución se sospechó por primera vez, la población de alces se estimó en 3000. Al cabo de 10 años se calculó en 1800. Determine la función de decaimiento exponencial que describa la población de alces en términos

del tiempo t, medido en años transcurridos desde que se empezó a sospechar el decaimiento.

43 La población de una especie de lobos en peligro de extinción parece estar disminuyendo a una tasa exponencial. Cuando por primera vez se sospechó la disminución, la población de lobos se estimó en 50 000. Cinco años más tarde se calculó en 40 000. Determine la función de decaimiento exponencial que describa esta población de lobos en términos del tiempo t, medido en años transcurridos desde que por primera vez se sospechó la disminución.

44 La población de un especie particular de animales salvajes parece estar creciendo exponencialmente. Cuando se descubrió la población, se estimó que era de 400 000. Cuatro años después, se calculó en 650 000. Determine la función de crecimiento exponencial que describa la población P en términos del tiempo t, medido en años transcurridos desde el descubrimiento de la especie.

17.5 OTRAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN (OPCIONAL)

Las nueve reglas de integración expuestas en las secciones 17.2 y 17.3 se aplican únicamente a un subconjunto de funciones susceptibles de ser integradas. Este subconjunto comprende algunas de las funciones más comunes empleadas en las aplicaciones a la administración y la economía. Una pregunta espontánea es la siguiente: ¿Qué sucede cuando las reglas no son aplicables? En la presente sección se estudian dos técnicas que pueden utilizarse cuando no pueden usarse otras reglas y cuando la estructura del integrando tiene la forma apropiada. También se explica la utilización de tablas especiales con fórmulas de integración.

Integración por partes

Recuerde el lector la regla del producto de diferenciación explicada en el capítulo 13. Esta regla establece que, si

$$f(x) = u(x)v(x)$$

entonces

$$f'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

Esta regla podemos escribirla de un modo ligeramente diferente así:

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

Si se integran ambos miembros de la ecuación, el resultado será

$$u(x)v(x) = \int v(x)u'(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

Y, al reescribir la ecuación, se obtiene la *fórmula de integración por partes*.

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \qquad (17.20)$$

La ecuación anterior expresa una relación que puede servir para determinar las integrales cuando el integrando tenga la forma $v(x)v'(x)$.

El procedimiento de integración por partes es un método de tanteo que puede o no dar buenos resultados con un integrando determinado. Si el integrando ocurre en la forma de un producto y no son aplicables las otras reglas de la integración, conviene recurrir al siguiente procedimiento.

PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACIÓN POR PARTES MEDIANTE TANTEO

I Defina dos funciones u y v y determine si el integrando tiene la forma $u(x)v'(x)$.
II Si se encuentran dos funciones tales que $u(x)v'(x)$ sea el integrando, trate de calcular la integral y para hacerlo evalúe el miembro derecho de la ecuación (17.20). La clave es si puede evaluarse $\int v(x)u'(x)dx$.

En los siguientes ejemplos se explica esta técnica.

EJEMPLO 23

Determine $\int xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN

La primera observación debería ser que el integrando viene en una forma de producto. Se siente la tentación de aplicar la regla 8, la cual se usa con integrales de la forma $\int f'(x)e^{f(x)}dx$. Con el exponente $f(x)$ definido como x, $f'(x) = 1$ y el integrando no se presenta en la forma apropiada para aplicar la regla 8.

A continuación se tratará de definir dos funciones u y v tales que el integrando tenga la forma $u(x)v'(x)$.

NOTA
Una sugerencia es examinar los factores del integrando para determinar si uno de ellos presenta la forma de la derivada de otra función.

A continuación se definirá v' como igual a x y u como igual a e^x, de modo que el integrando adopte la forma

$$\int \overbrace{x}^{v'(x)}\ \overbrace{e^x}^{u(x)}\,dx$$

Con las definiciones anteriores es posible determinar v al integrar v' y u' y al diferenciar u, o sea

$$v'(x) = x \text{ indica que } v(x) = \frac{x^2}{2}$$

y

$$u(x) = e^x \text{ indica que } u'(x) = e^x$$

Una vez definidas u, v y sus derivadas, se sustituyen en la sección (17.20):

$$\int \overbrace{xe^x}^{u(x)v'(x)}\,dx = \overbrace{e^x}^{u(x)}\overbrace{\frac{x^2}{2}}^{v(x)} - \int \overbrace{\frac{x^2}{2}e^x}^{v(x)u'(x)}\,dx$$

Un examen de $\int (x^2/2)e^x\,dx$ indica que esta integral puede ser difícil de evaluar como la integral original.

Por ello retrocederemos y principiaremos de nuevo. Redefiniremos v' y u tales que $v'(x) = e^2$ y $u(x) = x$:

$$\int \overbrace{x}^{u(x)}\ \overbrace{e^x}^{v'(x)}\,dx$$

Con estas definiciones,

$$u(x) = x \text{ indica que } u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^x \text{ suggests that } v(x) = e^x$$

Sustituimos en la ecuación (17.2) y obtenemos

$$\int \overbrace{xe^x}^{u(x)v'(x)}\,dx = \overbrace{x}^{u(x)}\overbrace{e^x}^{v(x)} - \int \overbrace{e^x(1)}^{v(x)u'(x)}\,dx$$
$$= xe^x - \int e^x\,dx$$

Puesto que $\int e^x\,dx = e^x$,

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Comprobación Al diferenciar esta respuesta como una comprobación se encuentra

$$\frac{d}{dx}[xe^x - e^x + C] = (1)e^x + e^x x - e^x$$
$$= xe^x \quad \checkmark$$

EJEMPLO 24

Determine $\int x^2 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN

Si se hace $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = x^2$, entonces

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad v(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

Al sustituir en la ecuación (17.20) se obtiene

$$\int \overbrace{x^2 \ln x}^{v'(x)u(x)}\,dx = \overbrace{(\ln x)}^{u(x)}\overbrace{\left(\frac{x^3}{3}\right)}^{v(x)} - \int \overbrace{\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}}^{v(x)u'(x)}\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Comprobación La verificación de esta respuesta por diferenciación nos da

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C\right] = \frac{3x^2}{3}\ln x + \frac{1}{x}\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{9}$$
$$= x^2 \ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3}$$
$$= x^2 \ln x \quad \checkmark$$

EJEMPLO 25

Determine $\int \ln x \, dx$.

SOLUCIÓN

Aunque el integrando no se encuentra en la forma de un producto, podemos imaginar que presenta la forma

$$\int \ln x(1)\, dx$$

Haciendo $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = 1$, se obtiene

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

y

$$v(x) = \int 1 \, dx$$
$$= x$$

La sustitución en la ecuación (17.20) nos da

$$\int \overbrace{\ln x}^{u(x)v'(x)}\, dx = \overbrace{(\ln x)}^{u(x)}\overbrace{(x)}^{v(x)} - \int \overbrace{x\frac{1}{x}}^{v(x)u'(x)}\, dx$$
$$= x \ln x - \int dx$$
$$= x \ln x - x + C$$

Comprobación Esta respuesta se verifica por diferenciación, o sea

$$\frac{d}{dx}[x \ln x - x + C] = (1)\ln x + \frac{1}{x}x - 1$$
$$= \ln x + 1 - 1$$
$$= \ln x \quad \checkmark$$

La integración por partes a menudo es lenta, debido al método de tanteo que se requiere. Le recordamos nuevamente al lector la necesidad de examinar primero el integrando con mucho cuidado, con el fin de determinar si se aplican otras reglas antes que se sirva de este procedimiento.

Integración por fracciones parciales

Las funciones racionales tienen la forma de un cociente de dos polinomios. Existen muchas funciones racionales que no pueden integrarse por medio de las reglas (en especial, la regla 9) descrita en páginas anteriores. Cuando es así, una posibilidad consiste en que la función racional sea expresada otra vez en una forma equivalente constituida por más funciones elementales. En el siguiente ejemplo se explica la descomposición de una función racional en las fracciones ***parciales equivalentes***.

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}$$

Verifíquese que la función racional

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

no puede integrarse mediante la regla 9. Sin embargo, sí es posible integrar las fracciones parciales equivalentes. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2}\,dx &= \int \frac{2}{x + 1}\,dx - \int \frac{dx}{x + 2} \\ &= 2\ln(x + 1) - \ln(x + 2) + C \\ &= \ln\left[\frac{(x + 1)^2}{(x + 2)}\right] + C\end{aligned}$$

Esta técnica de integración de las funciones racionales recibe el nombre de ***método de fracciones parciales***.

A continuación se explica el proceso de descomponer una función racional en sus fracciones parciales. Para aplicar este método, es preciso que la función racional tenga la forma de un *función propia*. La función racional es una fracción propia, si el grado del polinomio del numerador es menor que el del polinomio del denominador.

RECORDATORIO DE ÁLGEBRA
El grado de un término es la suma de los exponentes de las variables contenida en él. Así, el grado de $5x^2yz^3$ es 6. El grado de un polinomio es el grado del término de mayor grado en él. Por ejemplo, el grado del polinomio

$$2x^3 - 4x^2 + x - 10$$

es 3.

La función racional $f(x) = x^2/(5x^3 - 2x + 1)$ está en la forma de un fracción propia. En una *fracción impropia*, el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el del polinomio del denominador. La función racional $f(x) = x^3/(3x^2 - 10)$ muestra la forma de una fracción impropia. Las fracciones impropias pueden reducirse a la suma algebraica de un polinomio y una fracción

propia, al hacer una división larga de las funciones del numerador y denominador. Así, la fracción impropia

$$\frac{x^3 - 2x}{x - 1}$$

puede dividirse como sigue:

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \\ x - 1 \overline{)\, x^3 - 2x} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x^2 - 2x \\ \underline{x^2 - x} \\ -x \\ \underline{-x + 1} \\ -1 \end{array}$$

Por tanto, una división larga da por resultado

$$\frac{x^3 - 2x}{x - 1} = x^2 + x - 1 + \frac{-1}{x - 1}$$

Si el objetivo es integrar

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x - 1}$$

podríamos hacer esto así:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x}{x - 1}\, dx &= \int \left(x^2 + x - 1 + \frac{-1}{x - 1} \right) dx \\ &= \int (x^2 + x - 1)\, dx - \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - \ln(x - 1) + C \end{aligned}$$

Si se tiene una fracción propia, hay que factorizar el denominador para efectuar la descomposición en fracciones parciales equivalentes. En general, por cada factor del denominador hay una fracción parcial correspondiente. La forma de cada factor rige la forma de la fracción parcial equivalente. En la tabla 17.1 se ofrecen algunas de las posibilidades.

TABLA 17.1

Forma de factor	Forma de la fracción parcial correspondiente
1 Factor lineal simple $ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$, constante A
2 Factor lineal repetido $(ax + b)^n$	$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$
3 Factor cuadrático simple $ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$, constantes A y B

EJEMPLO 26

Antes se dijo que

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}$$

A continuación se derivarán estas fracciones parciales. El primer paso es probar y factorizar el denominador de f. Puesto que

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

el denominador es factorizable en dos factores *lineales*. De acuerdo con la tabla 17.1, la descomposición de f debería producir *dos* fracciones parciales (una por cada factor), o sea

$$\frac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x + 2} \tag{17.21}$$

Para despejar las constantes A_1 y A_2, las dos fracciones del miembro derecho de la ecuación (17.21) se combinan en el denominador común $(x + 1)(x + 2)$ y nos dan

$$\frac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A_1(x + 2) + A_2(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)}$$

o bien

$$\frac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{(A_1 + A_2)x + 2A_1 + A_2}{(x + 1)(x + 2)}$$

Para que los dos miembros de esta ecuación sean iguales, A_1 y A_2 deben ser tales que

$$A_1 + A_2 = 1$$

y

$$2A_1 + A_2 = 3$$

Al resolver las ecuaciones anteriores, $A_1 = 2$ y $A_2 = 1$. Si esos valores se sustituyen en la ecuación (17.21), el resultado será

$$\frac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}$$

que es el resultado mostrado antes.

EJEMPLO 27

Mediante el método de las fracciones parciales obtenga la integral indefinida

$$\int \frac{5x + 8}{x^2 + 4x + 4}\, dx$$

SOLUCIÓN

El primer paso consiste en verificar que las reglas 7 y 9 no sean aplicables al caso. Una vez convencidos de ello, tratamos de factorizar el denominador. Dado que

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

La tabla 17.1 indica que el integrando puede descomponerse en las fracciones parciales generales

$$\frac{5x + 8}{(x + 2)^2} = \frac{A_1}{x + 2} + \frac{A_2}{(x + 2)^2} \tag{17.22}$$

Para despejar A_1 y A_2, las dos fracciones parciales del miembro derecho de la ecuación (17.22) se combinan en el denominador común $(x + 2)^2$ y nos dan

$$\frac{5x + 8}{(x + 2)^2} = \frac{A_1(x + 2) + A_2}{(x + 2)^2}$$

o bien

$$\frac{5x + 8}{(x + 2)^2} = \frac{A_1x + 2A_1 + A_2}{(x + 2)^2}$$

Para que ambos miembros de la ecuación anterior sean iguales, habrá que elegir A_1 y A_2 tales que

$$A_1 = 5$$

y

$$2A_1 + A_2 = 8$$

Como $A_1 = 5$,

$$2(5) + A_2 = 8$$

$$A_2 = -2$$

Al sustituir los valores anteriores en la ecuación (17.22),

$$\frac{5x + 8}{(x + 2)^2} = \frac{5}{x + 2} - \frac{2}{(x + 2)^2}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x + 8}{(x + 2)^2}\,dx &= \int \frac{5}{x + 2}\,dx - \int \frac{2}{(x + 2)^2}\,dx \\ &= 5\int \frac{dx}{x + 2} - 2\int (x + 2)^{-2}\,dx \\ &= 5\ln(x + 2) - 2\frac{(x + 2)^{-1}}{-1} + C \\ &= 5\ln(x + 2) + \frac{2}{(x + 2)} + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 28

Por el método de las fracciones parciales encuentre la integral indefinida

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2}\,dx$$

SOLUCIÓN

El primer paso consiste en verificar que la regla 9 no sea aplicable a este integrando. Una vez convencidos de ello, tratamos de factorizar el denominador. Puesto que

$$x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$$

llegamos a la conclución de que tiene dos factores: el factor cuadrático x^2 y el factor lineal $(x + 1)$. De acuerdo con la tabla 17.1, el integrando puede descomponerse en las fracciones parciales generales

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2} + \frac{A_2}{x + 1} \tag{17.23}$$

Para despejar las constantes A_1, B_1 y A_2, las dos fracciones parciales del miembro derecho de la ecuación (17.23) se combinan en el denominador $x^2(x + 1)$ y nos dan

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2(x + 1)} = \frac{(A_1x + B_1)(x + 1) + A_2x^2}{x^2(x + 1)}$$

$$= \frac{A_1x^2 + A_1x + B_1x + B_1 + A_2x^2}{x^2(x + 1)}$$

o bien

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2(x + 1)} = \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (A_1 + B_1)x + B_1}{x^2(x + 1)}$$

Para que los dos miembros de la ecuación anterior sean iguales, A_1, A_2 y B_1 han de ser tales que

$$A_1 + A_2 = 2$$

$$A_1 + B_1 = 0$$

y

$$B_1 = -1$$

La sustitución del valor $B_1 = -1$ en la segunda ecuación produce $A_1 = 1$. Y, al sustituir este valor en el primera ecuación, se obtiene $A_2 = 1$.

Por tanto,

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2(x + 1)} = \frac{x - 1}{x^2} + \frac{1}{x + 1}$$

y

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2}\,dx = \int \frac{x - 1}{x^2}\,dx + \int \frac{dx}{x + 1}$$

Aunque el integrando de la primera fracción parcial no tiene la forma apropiada para que se aplique la regla 9,

$$\frac{x - 1}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(2x^2 - 1)}{x^3 + x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x + 1}$$

$$= \ln x + \frac{1}{x} + \ln(x + 1) + C$$

Tablas de integrales

En los casos en que las reglas aquí expuestas y otros procedimientos no sean adecuados para calcular las integrales indefinidas, se cuenta con tablas espe-

ciales de integrales, las cuales pueden contener literalmente cientos de fórmulas de integración. Cada fórmula se aplica a un integrando que muestra una forma funcional particular. Para utilizar las tablas hay que igualar la forma del integrando con la forma gereral correspondiente de la tabla. Una vez indentificada la fórmula apropiada, de ella se obtiene la integral indefinida.

La tabla 17.2 muestra algunas fórmulas de integración para los logaritmos naturales y las formas exponenciales de un integrando.

TABLA 17.2

1 $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C$

2 $\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

3 $\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

4 $\int x^n \ln ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \qquad n \neq -1$

5 $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

6 $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx + C \qquad n \neq -1$

7 $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C \qquad n \neq -1$

8 $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C \qquad n \neq -1$

9 $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

10 $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

11 $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

12 $\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C$

13 $\int \frac{dx}{a + be^{px}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap} \ln(a + be^{px}) + C$

EJEMPLO 29

De acuerdo con la fórmula (4) en la tabla 17.2

$$\int x^3 \ln 5x\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} \ln 5x - \frac{x^{3+1}}{(3+1)^2} + C$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln 5x - \frac{x^4}{16} + C$$

Este resultado puede verificarse, como antes, por medio de la diferenciación.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\ln 5x - \frac{x^4}{16} + C\right) = \left(\frac{4x^3}{4}\ln 5x + \frac{1}{x}\frac{x^4}{4}\right) - \frac{4x^3}{16}$$
$$= x^3 \ln 5x + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4}$$
$$= x^3 \ln 5x$$

que era el integrando original.

EJEMPLO 30

Según la fórmula (7),

$$\int \frac{(\ln x)^5}{x}\,dx = \frac{1}{5+1}(\ln x)^{5+1} + C$$
$$= \frac{(\ln x)^6}{6} + C$$

Para comprobar este resultado,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(\ln x)^6}{6} + C\right] = \frac{1}{6}[6(\ln x)^5]\frac{1}{x}$$
$$= \frac{(\ln x)^5}{x}$$

que era el integrando original.

EJEMPLO 31

Según la fórmula (10)

$$\int e^{-5x}\,dx = \frac{e^{-5x}}{-5} + C$$

Para verificar este resultado,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-5x}}{-5} + C\right) = -\frac{1}{5}(-5)e^{-5x}$$
$$= e^{-5x}$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 17.5

En los ejercicios 1-14 determine la integral indefinida (si es posible) usando la integración por partes.

1 $\int xe^{-x}\,dx$

2 $\int 5xe^{x}\,dx$

3 $\int x\sqrt[3]{x+1}\,dx$

4 $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

5 $\int xe^{2x}\,dx$

6 $\int xe^{-2x}\,dx$

7 $\int (x + 4)\ln x\,dx$

8 $\int x^2 \ln 5x\,dx$

9 $\int x(x + 2)^4\,dx$

10 $\int x(x - 4)^5\,dx$

11 $\int (x/\sqrt{x - 3})\,dx$

12 $\int (x/[x - 3]^2)\,dx$

13 $\int (\ln x/x^2)\,dx$

14 $\int (2x + 5)(x + 1)^{1/2}\,dx$

En los ejercicios 15-22, aplique el método de las fracciones parciales para encontrar la integral indefinida

15 $\int \frac{5 - x}{x^2 + 5x + 6}\,dx$

16 $\int \frac{5x - 7}{x^2 - 2x - 15}\,dx$

17 $\int \frac{7 - 2x}{x^2 - 2x + 1}\,dx$

18 $\int \frac{10x + 25}{x^2 + 6x + 9}\,dx$

19 $\int \frac{5x^2 - 2x + 64}{x^3 - 16x}\,dx$

20 $\int \frac{x - 3}{x^3 + 2x^2}\,dx$

21 $\int \frac{4x^2 - 2x - 6}{x^3 - x}\,dx$

22 $\int \frac{36 - 9x - 5x^2}{x^3 - 9x}\,dx$

En los ejercicios 23-36, calcule la integral indefinida (de ser posible) por medio de la tabla 17.2

23 $\int x^4 \ln 10x\,dx$

24 $\int (\ln 4x/x^2)\,dx$

25 $\int (\ln x/x^3)\,dx$

26 $\int (\ln x)^4\,dx$

27 $\int (\ln x)^2\,dx$

28 $\int ([\ln x]^3/x)\,dx$

29 $\int x^4 \ln x\,dx$

30 $\int (\ln x/x^5)\,dx$

31 $\int e^{2.5x}\,dx$

32 $\int e^{-2x}\,dx$

33 $\int xe^{5x}\,dx$

34 $\int (x/e^{3x})\,dx$

35 $\int \frac{dx}{5 + 3e^{2x}}$

36 $\int \frac{dx}{10 - 2e^x}$

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

antiderivada 808
constante de integración 814
ecuación diferencial 824
ecuaciones diferenciales ordinarias 824
ecuaciones diferenciales parciales 824
integración 813
integración por partes 831
integral indefinida 813
integrando 813
método de fracciones parciales 835
signo de la integral 813
soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias 825

FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\int k\,dx = kx + c \qquad k \text{ real} \qquad \textbf{(Regla 1)}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1 \qquad \textbf{(Regla 2)}$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad k \text{ real} \qquad \textbf{(Regla 3)}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \qquad \textbf{(Regla 4)}$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + C \qquad \textbf{(Regla 5)}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \textbf{(Regla 6)}$$

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1 \qquad \textbf{(Regla 7)}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C \qquad \textbf{(Regla 8)}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C \qquad \textbf{(Regla 9)}$$

EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-16 se relacionan con la sección 17.1. Calcule la antiderivada de las siguientes funciones.

1 $f'(x) = -60$
2 $f'(x) = \sqrt{e}$
3 $f'(x) = x/8$
4 $f'(x) = x/2 + 8$
5 $f'(x) = 3x^2 + 5x + 80$
6 $f'(x) = 4x^3 + x^2 + 3x + 40$
7 $f'(x) = 8x^3 - 6x^2 - 15$
8 $f'(x) = 12x^3 + 4x^2 - 5x + 3$
9 $f'(x) = 4x(2x^2 - 10)^5$
10 $f'(x) = 6x^2(2x^3 - 24)^3$

En los siguientes ejercicios, determine f dados f' y un punto que satisfaga f.

11 $f'(x) = 8, (2, 20)$
12 $f'(x) = x^2 + 3x - 6, (1, 0)$
13 $f'(x) = -4x^3/3 + x^2 + 2x + 1, (-1, \frac{1}{3})$
14 $f'(x) = -2x^3/3 + 6x^2 - 2x, (2, 20)$
15 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2, (2, -10)$
16 $f'(x) = 2x(x^2 - 5)^3, (3, 40)$

Los ejercicios 17-52 se relacionan con las secciones 17.2 y 17.3. En los siguientes ejercicios, calcule la integral indefinida (si es posible).

17 $\int 45\,dx$
18 $\int -15\,dx$
19 $\int 18x\,dx$
20 $\int (-7x + 4)\,dx$
21 $\int (-15x + 8)\,dx$
22 $\int (x/4 + 8)\,dx$
23 $\int (2x^4 + 3x^2)\,dx$
24 $\int (x^4/5 + 8x^2 + 5)\,dx$
25 $\int (x^2 + 1/x^3)\,dx$
26 $\int (x + 8)^4\,dx$

27 $\int (2x^5 + 5x^4 + x^3 + 3x^2 + 7x)\,dx$

28 $\int (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)\,dx$

29 $\int ([1/x] - [3/x^2] + [4/x^3])\,dx$

30 $\int (1 + [1/x] - [1/x^2])\,dx$

31 $\int (5/\sqrt{x})\,dx$

32 $\int (-10/\sqrt[3]{x})\,dx$

33 $\int (dx/x^5)$

34 $\int (6/x^5)\,dx$

35 $\int (-4/x^3)\,dx$

36 $\int (-8/x^7)\,dx$

37 $\int \sqrt[3]{x^5}\,dx$

38 $\int \sqrt[4]{1/x}\,dx$

39 $\int (4x^2 + 5)^{1/2}(4x)\,dx$

40 $\int (x^2 + 7e^x + 3)\,dx$

41 $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x})\,dx$

42 $\int (x^2 + 4)(2x)\,dx$

43 $\int (3x^2 + 12)^3(x)\,dx$

44 $\int (2x^3 + x^2)^2(3x^2 + x)\,dx$

45 $\int (4x^2 - 4x)^5(x - 1)\,dx$

46 $\int (4x^3 - 6x^2)^3(12x - 12)\,dx$

47 $\int \dfrac{x}{8 + x^2/2}\,dx$

48 $\int \dfrac{2 + x}{x^3}\,dx$

49 $\int \dfrac{4}{x + 3}\,dx$

50 $\int (e^{8x} + 4)\,dx$

51 $\int (2x/\sqrt{x^2 + 3})\,dx$

52 $\int (x/[x^2 + 4]^3)\,dx$

Los ejercicios 53-66 se relacionan con la sección 17.4. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales por tipo, orden y grado.

53 $dy/dx = 8x^4 + 6x^2 - 10x + 5$

54 $(d^2y/dx^2)^3 - (d^2y/dx^2)^2 = 5x^2 - (dy/dx)$

55 $(\partial z/\partial x)^2 = 3x + 7y$

56 $\partial^2 z/\partial x^2 = \partial z/\partial x + 2x - 10$

57 $(d^2y/dx^2)^3 = (dy/dx)^4 + x + 3$

58 $\partial z/\partial y = (\partial^2 z/\partial y^2)^3 + y + 5x$

Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

59 $dy/dx = x^4 + 5x$

60 $dy/dx = x/(x^2 - 3) + 6x^2e^{2x^3-4}$

61 $d^2y/dx^2 = x^2/6 + 20x$

62 $x^2 + 3x = d^2y/dx^2 + 30$

En las siguientes ecuaciones diferenciales, encuentre las soluciones particular y general.

63 $dy/dx = -4x + 4, f(2) = 18$

64 $dy/dx = 4x^3 + 9x^2, f(-1) = 50$

65 $d^2y/dx^2 = x^2/12 + 12x$
$f'(2) = 20$
$f(2) = 40$

66 $20x = 5 + (d^2y/dx^2)$
$f'(1) = 25$
$f(2) = 81$

Los ejercicios 67-83 se relacionan con la sección 17.5. Encuentre la integral indefinida (de ser posible) sirviéndose de la integración por partes.

67 $\int x \ln x\,dx$

68 $\int xe^{ax}\,dx$

69 $\int e^x(x + 1)^2\,dx$

70 $\int xe^{-3x}\,dx$

71 $\int x^2e^x\,dx$

Calcule la integral indefinida (de ser posible) mediante el método de las fracciones parciales.

72 $\int \frac{10 - 2x}{x^2 - 5x - 4}\,dx$

73 $\int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 15}\,dx$

74 $\int \frac{3x^2 - x + 5}{x^3 - 4x}\,dx$

75 $\int \frac{x - 5}{x^3 - 9x}\,dx$

Calcule la integral indefinida (de ser posible) mediante la tabla 17.2

76 $\int 3e^{-5x}\,dx$

77 $\int (xe^{-3x}/2)\,dx$

78 $\int (dx/5 + 2e^{3x})$

79 $\int x^5 \ln x\,dx$

80 $\int ([\ln x]^4/x)\,dx$

81 $\int x^5 \ln 3x\,dx$

82 $\int ([\ln x]^2/2)\,dx$

83 $\int -2(\ln x)^3\,dx$

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 En la ecuación $f'(x) = 4x^3 + 2x - 20$ y el punto (5 200) que satisface f, determine f.

2 Calcule las siguientes integrales indefinidas

(*a*) $\int dx/\sqrt[3]{x^5}$

(*b*) $\int (x^4 + 10)^5 x^3\,dx$

(*c*) $\int e^{-10x}\,dx$

3 Encuentre las soluciones general y particular de la ecuación diferencial $6 + x = d^2y/dx^2$, donde $f(2) = 24$ y $f'(3) = 5$.

4 La función de ingreso marginal del producto de una compañía es

$$MR = 220\,000 - 18x$$

donde x es el número de unidades vendidas. Si el ingreso total es 0 donde no se vende ninguna unidad, determine la función del ingreso total.

5 Aplicando la integración por partes, calcule la integral indefinida $\int xe^{10x}\,dx$.

6 Con el método de fracciones parciales calcule la integral indefinida.

$$\int \frac{20x - 10}{x^2 - x - 6}\,dx$$

CAPÍTULO

18 CÁLCULO INTEGRAL: APLICACIONES

18.1 INTEGRALES DEFINIDAS
18.2 INTEGRALES Y ÁREAS DEFINIDAS
18.3 MÉTODOS DE APROXIMACIÓN
18.4 APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL
18.5 CÁLCULO INTEGRAL Y PROBABILIDAD (OPCIONAL)
TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: EL DILEMA DEL SEGURO SOCIAL: UN PROBLEMA DE SOLVENCIA

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ofrecer una introducción a la integral definida
- Dar ejemplos de las relaciones existentes entre la integral y las áreas definidas
- Presentar una gran variedad de aplicaciones del cálculo integral
- Dar ejemplos de la relación que hay entre el cálculo integral y la teoría de la probabilidad.

Este capítulo se centra en la aplicación del cálculo integral. En particular, se explicará la *integral definida*, el uso de las integrales definidas en el cálculo de áreas debajo y entre las curvas, diversas aplicaciones que se valen del cálculc integral y su aplicación a la teoría de probabilidad.

18.1 INTEGRALES DEFINIDAS

En la presente sección se explicará la integral definida, que constituye el fundamento de muchas aplicaciones del cálculo integral.

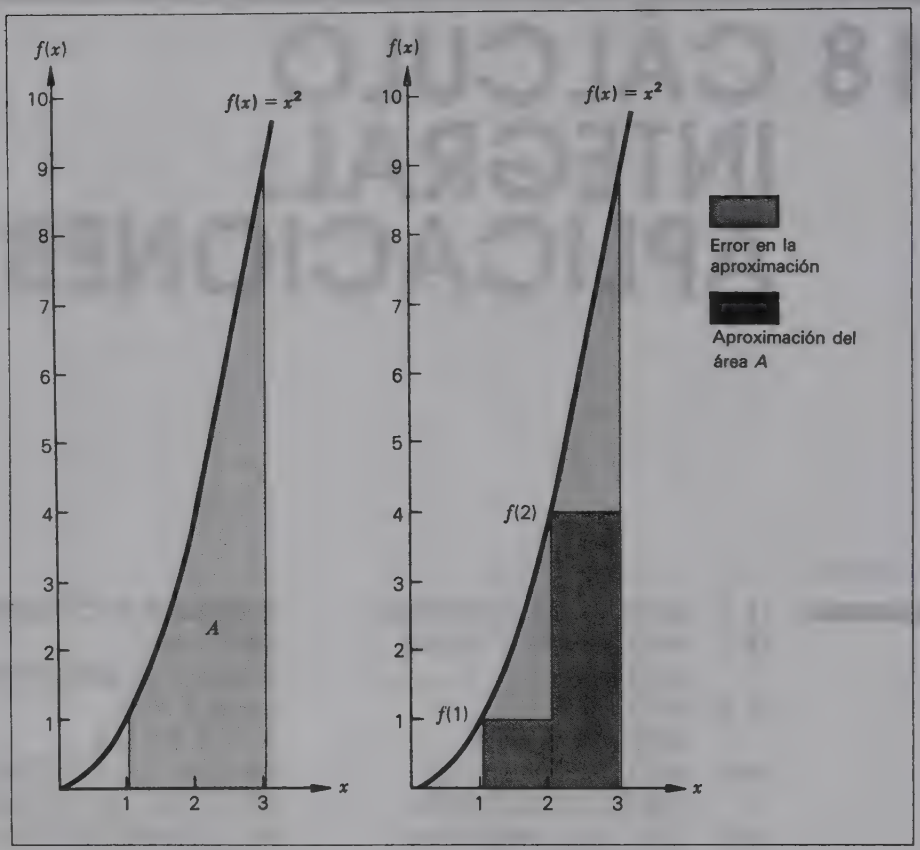


FIGURA 18.1

FIGURA 18.2 Aproximación por medio de dos rectángulos.

Integral definida

La ***integral definida*** puede interpretarse como un área y como un límite. Examínese atentamente la gráfica de la función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, que aparece en la figura 18.1. Supóngase que deseamos determinar el área sombreada A debajo de la curva comprendida entre $x = 1$ y $x = 3$. Un procedimiento consiste en *aproximar* el área calculando las superficies de un conjunto de rectángulos que están contenidos en la región sombreada. En la figura 18.2, se han trazado dos rectángulos dentro del área de interés. El ancho de cada uno es 1, y sus alturas respectivas son $f(1)$ y $f(2)$. Si se usa la suma de las áreas de los dos rectángulos para aproximar la que deseamos conocer, tendremos

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (1) + f(2) \cdot (1) \\ &= (1)^2 \cdot (1) + (2)^2 \cdot (1) \\ &= (1)(1) + (4)(1) = 5 \end{aligned}$$

donde A^* es el área aproximada. Nótese que en esta aproximación se *subestima* el área real. El error introducido se representa con las zonas sombreadas más ligeramente.

En la figura 18.3 los cuatro rectángulos se han trazado dentro del área de interés. Su ancho es de $\frac{1}{2}$, y la superficie total de los cuatro se calcula por medio de la ecuación

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (0.5) + f(1.5) \cdot (0.5) + f(2) \cdot (0.5) + f(2.5) \cdot (0.5) \\ &= (1)^3 \cdot (0.5) + (1.5)^2 \cdot (0.5) + (2)^2 \cdot (0.5) + (2.5)^2 \cdot (0.5) \\ &= (1)(0.5) + (2.25)(0.5) + (4)(0.5) + (6.25)(0.5) \\ &= 0.5 + 1.125 + 2.0 + 3.125 = 6.75 \end{aligned}$$

En comparación con la figura 18.2, el empleo de cuatro rectángulos en vez de dos nos da una mejor aproximación del área real. El área sombreada más ligeramente es menor en la figura 18.3.

En la figura 18.4 se trazaron ocho rectángulos, cada uno con un ancho igual a 0.25. La superficie de ellos se calcula mediante la ecuación

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (0.25) + f(1.25) \cdot (0.25) + \cdots + f(2.75) \cdot (0.25) \\ &= (1)^2 \cdot (0.25) + (1.25)^2 \cdot (0.25) + \cdots + (2.75)^2 \cdot (0.25) \\ &= (1)(0.25) + (1.5625)(0.25) + \cdots + (7.5625)(0.25) = 7.6781 \end{aligned}$$

Obsérvese que esta aproximación es mejor que las otras. De hecho, si seguimos subdividiendo el intervalo entre $x = 1$ y $x = 3$, haciendo cada vez más peque-

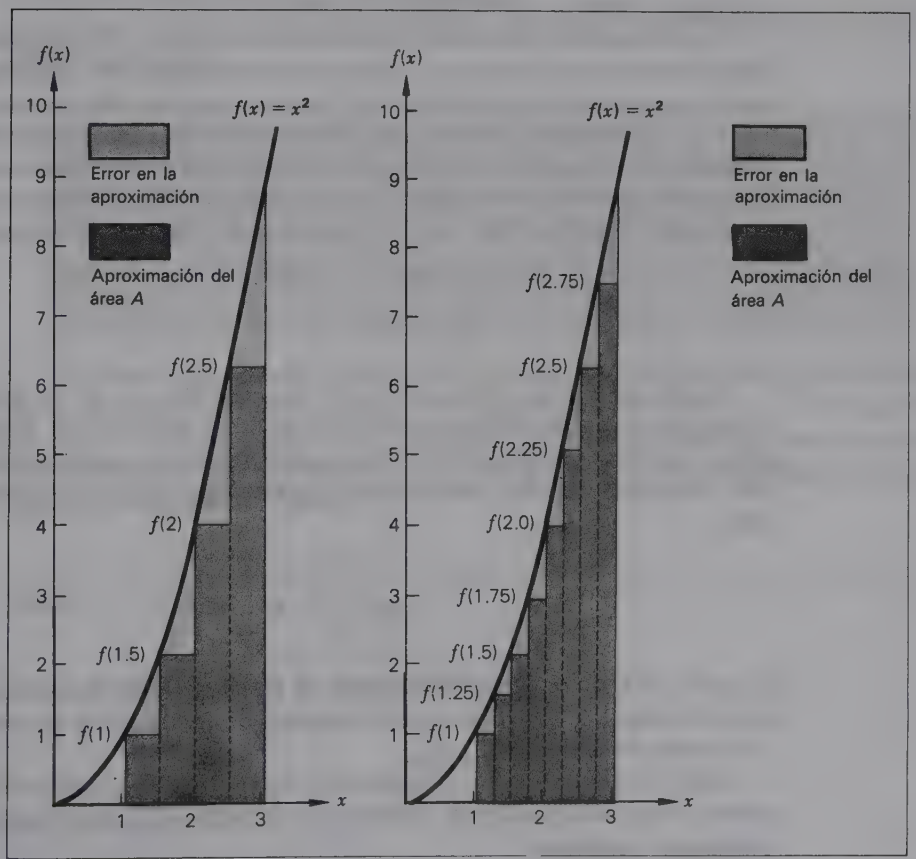


FIGURA 18.3 Aproximación mediante cuatro rectángulos.

FIGURA 18.4 Aproximación con ocho rectángulos.

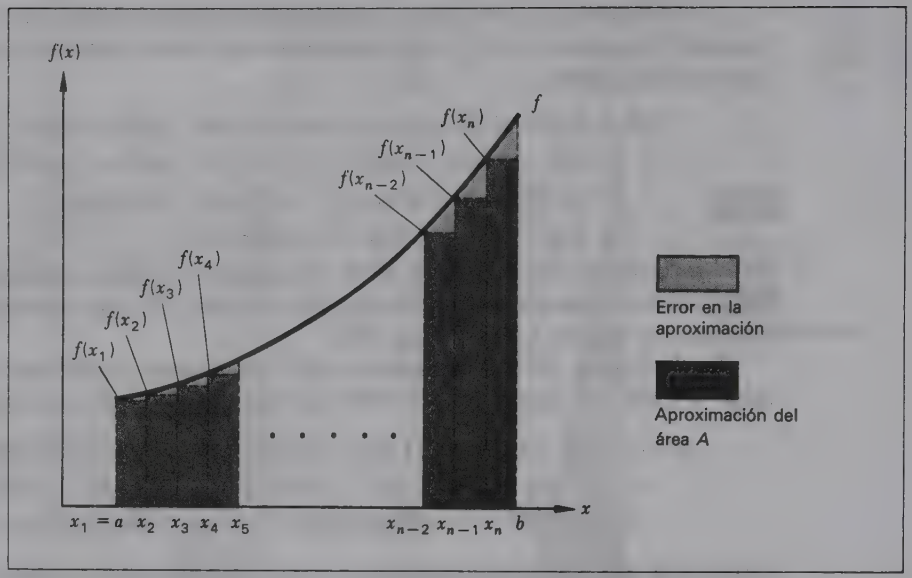


FIGURA 18.5 Aproximación del área por medio de n rectángulos.

ña la base de cada rectángulo, la aproximación se acercará más y más al área real (que, según se determinará, es de $8\frac{2}{3}$).

A continuación estudiaremos este proceso desde una perspectiva más amplia. Tomemos, por ejemplo, la función de la figura 18.5. Supóngase que queremos determinar el área debajo de la curva pero arriba del eje x entre $x = a$ y $x = b$. Supóngase, además, que el intervalo haya sido subdividido en n rectángulos. Supóngase que el ancho del rectángulo i es Δx_i y que su altura es $f(x_i)$. No es necesario dar por sentado que el ancho de cada rectángulo sea igual. Podemos aproximar el área de interés sumando las de n rectángulos, es decir,

$$\begin{aligned} A^* &= f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

Como se dijo en lo tocante a la función $f(x) = x^2$, la aproximación se vuelve siempre más exacta al irse reduciendo el ancho de los rectángulos y, por tanto, conforme el número de rectángulos se torna simultáneamente más amplio. Esta observación puede formalizarse afirmando que, cuando existe el límite,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = A} \qquad \textbf{(18.1)}$$

Es decir, el área real bajo la curva A es el valor límite de la suma de las áreas de n rectángulos a medida que el número de rectángulos se acerca al infinito y el ancho se aproxima a 0.

Del mismo modo que el signo de la sumatoria Σ se aplica cuando se desea sumar elementos discretos, también la integral definida implica la suma de funciones continuas.

DEFINICIÓN: INTEGRAL DEFINIDA
Si f es una función acotada en el intervalo $[a, b]$, definiremos la ***integral definida*** de f en los siguientes términos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = A \qquad (18.2)$$

a condición de que exista este límite, a medida que el tamaño de todos los intervalos de la subdivisión se acerque a cero y, por tanto, el número de intervalos n se aproxime al infinito.

El lado izquierdo de la ecuación (18.2) muestra la notación de la *integral definida*. Los valores a y b que aparecen, respectivamente, debajo y arriba del signo de la integral se llaman ***límites de integración.*** El ***límite inferior de integración*** es a, y el ***límite superior de integración*** es b. La notación $\int_a^b f(x)\,dx$ puede describirse como "*la integral definida de f entre un límite inferior* $x = a$ *y un límite superior* $x = b$", o más simplemente "*la integral de f entre a y b*".

Evaluación de las integrales definidas

La evaluación de las integrales definidas se facilita con el siguiente teorema de gran importancia.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL
Si una función f es continua sobre un intervalo y F es cualquier antiderivada de f, entonces para cualesquier puntos $x = a$ y $x = b$ en el intervalo, donde $a \le b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (18.3)$$

Conforme al teorema fundamental del cálculo integral, la integral definida puede evaluarse 1) determinando la integral indefinida $F(x) + C$ y 2) calculando $F(b) - F(a)$, algunas veces denotada con $F(x)\Big|_a^b$. Como se verá en el siguiente ejemplo, no hay necesidad de incluir la constante de integración al evaluar las integrales definidas.

EJEMPLO 1

Para evaluar $\int_0^3 x^2\,dx$, la integral indefinida es

$$F(x) = \int x^2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + C$$

Ahora bien,
$$\int_0^3 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Big]_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + C\right) - \left(\frac{0^3}{3} + C\right)$$
$$= 9 + C - C$$
$$= 9$$

Cuando se evalúan integrales definidas, siempre se resta el valor de la integral indefinida en el límite inferior de la integración al valor del límite superior de la integración. La constante de integración invariablemente desaparece en este cálculo, como sucedió en el ejemplo. Por tanto, no se necesita incluir la constante al evaluar las integrales definidas.

EJEMPLO 2

Para evaluar $\int_1^4 (2x^2 - 4x +)\,dx$

$$F(x) = \int (2x^2 - 4x + 5)\,dx$$
$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x$$
$$= \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x$$

Por tanto

$$\int_1^4 (2x^2 - 4x + 5)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x\Big]_1^4$$
$$= \left[\frac{2(4)^3}{3} - 2(4)^2 + 5(4)\right] - \left[\frac{2(1)^3}{3} - 2(1)^2 + 5(1)\right]$$
$$= (\tfrac{128}{3} - 32 + 20) - (\tfrac{2}{3} - 2 + 5) = 30\tfrac{2}{3} - 3\tfrac{2}{3} = 27$$

EJEMPLO 3

Para evaluar $\int_{-2}^1 e^x\,dx$

$$F(x) = \int e^x\,dx$$
$$= e^x$$

Por consiguiente

$$\int_{-2}^1 e^x\,dx = e^x\Big]_{-2}^1$$
$$= e^1 - e^{-2}$$

o, según la tabla 1,

$$= 2.7183 - 0.1353$$
$$= 2.5830$$

EJEMPLO 4

Para evaluar $\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1}$

$$F(x) = \int \frac{x\,dx}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x\,dx}{x^2 - 1}$$

Y, de acuerdo con la regla 9,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)$$

En consecuencia

$$\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)\Big]_2^4$$

$$= \frac{1}{2} \ln(16 - 1) - \frac{1}{2} \ln(4 - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 15 - \frac{1}{2} \ln 3$$

Según la tabla 2,

$$\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}(2.7081) - \frac{1}{2}(1.0986)$$

$$= 1.35405 - 0.5493 = 0.80475$$

Propiedades de las integrales definidas

Existen diversas propiedades que pueden ser de ayuda al evaluar las integrales definidas. Se incluyen a continuación, junto con ejemplos que las explican.

PROPIEDAD 1

Si f es definida y continua en el intervalo (a, b),

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \textbf{(18.4)}$$

EJEMPLO 5

Considere la función $f(x) = 4x^3$.

$$\int_{-2}^{1} 4x^3\,dx = \frac{4x^4}{4}\Big]_{-2}^{1} = x^4\Big]_{-2}^{1}$$

$$= (1)^4 - (-2)^4 = 1 - 16 = -15$$

$$\int_{1}^{-2} 4x^3\,dx = \frac{4x^4}{4}\Big]_{1}^{-2} = x^4\Big]_{1}^{-2}$$

$$= (-2)^4 - (1)^4 = 16 - 1 = 15$$

Por consiguiente,

$$\int_{-2}^{1} 4x^3\,dx = -\int_{1}^{-2} 4x^3\,dx$$

PROPIEDAD 2

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{18.5}$$

EJEMPLO 6

$$\begin{aligned}\int_{10}^{10} e^x\,dx &= e^x\Big]_{10}^{10} \\ &= e^{10} - e^{10} \\ &= 0\end{aligned}$$

PROPIEDAD 3

Si f es continua en el intervalo (a, c) y $a < b < c$.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{18.6}$$

EJEMPLO 7

Demuestre que

$$\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int_0^4 3x^2\,dx &= \frac{3x^3}{3}\Big]_0^4 = x^3\Big]_0^4 \\ &= (4)^3 - (0)^3 = 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx &= x^3\Big]_0^2 + x^3\Big]_2^4 \\ &= [(2)^3 - (0)^3] + [(4)^3 - (2)^3] = (8 - 0) + (64 - 8) = 64.\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx$

o bien $64 = 64$

EJERCICIO

Demuestre que

$$\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^1 3x^2\,dx + \int_1^4 3x^2\,dx$$

PROPIEDAD 4

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \tag{18.7}$$

donde c es constante.

EJEMPLO 8

Demuestre que para la función del ejemplo 7,

$$\int_0^4 3x^2\,dx = 3\int_0^4 x^2\,dx$$

SOLUCIÓN

En el ejemplo 7, se probó que $\int_0^4 3x^2\,dx$ es igual a 64. Hay que evaluar $3\int_0^4 x^2\,dx$.

$$3\int_0^4 x^2\,dx = 3\frac{x^3}{3}\Big]_0^4$$
$$= 3\left[\frac{(4)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right] = 3\left(\frac{64}{3}\right) = 64$$

PROPIEDAD 5

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ existen,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \qquad (18.8)$$

EJEMPLO 9

Supóngase que se desea evaluar

$$\int_2^4 (4x - 5)\,dx + \int_2^4 (5 - 6x)\,dx$$

Los límites de la integración son los mismos, por lo cual la ecuación (18.8) indica que los integrandos pueden combinarse algebraicamente por medio de una integral definida, es decir,

$$\int_2^4 (4x - 5)\,dx + \int_2^4 (5 - 6x)\,dx = \int_2^4 [(4x - 5) + (5 - 6x)]\,dx$$
$$= \int_2^4 (-2x)\,dx$$
$$= -x^2\Big]_2^4$$
$$= [-(4)^2] - [-(2)^2]$$
$$= -16 + 4 = -12$$

EJERCICIO
Evalúe

$$\int_2^4 (4x - 5)\,dx + \int_2^4 (5 - 6x)\,dx$$

utilizando las dos integrales definidas y verifique que su suma sea −12.

Ejercicios de seguimiento de la sección 18.1.

1 $\int_0^4 x\,dx$

2 $\int_2^3 (x + 1)\,dx$

3 $\int_2^5 dx$

4 $\int_{-2}^4 6\,dx$

5 $\int_{-1}^2 4x\,dx$

6 $\int_{-2}^3 -3x\,dx$

7 $\int_0^3 (x^2 + 3x)\,dx$

8 $\int_0^3 (4x^3 + 8x^2)\,dx$

9 $\int_0^{64} \sqrt{x}\,dx$

10 $\int_{-3}^0 2e^x\,dx$

11 $\int_3^8 (dx/x)$

12 $\int_2^4 (4\,dx/x)$

13 $\int_{-3}^2 (2x)e^{x^2}\,dx$

14 $\int_{-1}^2 (3x^2)e^{x^3}\,dx$

15 $\int_{-2}^2 5x\,dx$

16 $\int_{-3}^{-1} 4x\,dx$

17 $\int_b^b 6x^2\,dx$

18 $\int_c^c 4x^3\,dx$

19 $\int_0^2 (2x + 5)\,dx$

20 $\int_1^2 3x^2\,dx$

21 $\int_5^{10} 10\,dx$

22 $\int_0^2 4x^3\,dx$

23 $\int_0^1 (x - 5)^2\,dx$

24 $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$

25 $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 5)\,dx$

26 $\int_2^5 3x^5\,dx$

27 $\int_2^3 -6x^2\,dx$

28 $\int_2^4 2e^x\,dx$

29 $\int_0^3 e^x\,dx$

30 $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$

31 $\int_1^2 (dx/x)$

32 $\int_3^4 \frac{2x}{x^2 - 4}\,dx$

33 $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 10)\,dx$

34 $\int_{-2}^1 (4x^3 + 6x^2)\,dx$

35 $\int_0^3 5e^{5x}\,dx$

36 $\int_{-1}^3 12e^{6x}\,dx$

37 $\int_1^3 2x(x^2 - 4)^3\,dx$

38 $\int_0^2 6x(3x^2 + 4)^4\,dx$

39 $\int_1^4 (5\,dx/x)$

40 $\int_2^{10} (-10\,dx/x)$

41 $\int_5^{10} \frac{6x}{3x^2 - 5}\,dx$

42 $\int_{10}^{20} \frac{5x\,dx}{5x^2 - 4}$

43 $\int_1^4 \frac{x^2}{x^3 + 6}\,dx$

44 $\int_2^6 \frac{12x^2}{2x^3 - 3}\,dx$

45 $\int_9^4 \frac{x^2 - x}{4x^3 - 6x^2}\,dx$

46 $\int_2^5 \frac{3x^2 - x}{8x^3 - 4x^2}\,dx$

47 $\int_0^2 (mx + b)\,dx$

48 $\int_0^4 (ax^2 + bx + c)\,dx$

49 $\int_9^{16} \sqrt{x}\,dx$

50 $\int_3^5 \frac{2x}{x^2 - 4}\,dx$

51 $\int_2^4 (x^2 - 2x + 1)\,dx - \int_2^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

52 $\int_0^3 (6x^2 + 2x + 2)\,dx + \int_0^3 (3x^2 - 2x - 3)\,dx$

53 $\int_2^3 (5x^3 + 5x^2)\,dx - \int_2^3 (3x^3 + 5x^2 + 10)\,dx$

54 $\int_{-2}^2 (5x^2 + 2x + 3)\,dx - \int_{-2}^2 (7x^2 + 2x - 4)\,dx$

55 $\int_2^4 (x + 8)\,dx - \int_4^2 (3x + 6)\,dx$

56 $\int_1^3 (x^2 + 6)\,dx + \int_3^1 (-3x^2 + 10)\,dx$

57 $\int_0^3 (3x^2 - 2x + 4)\,dx - \int_3^0 (x^2 - 5x)\,dx$

58 $\int_1^4 (10x^2 - 6x + 5)\,dx + \int_4^1 (8x^2 + 4x - 6)\,dx$

59 $\int_0^3 5e^x\,dx + \int_3^0 4e^x\,dx$

60 $\int_1^2 (4\,dx/x) + \int_2^1 (3\,dx/x)$

18.2 INTEGRALES Y ÁREAS DEFINIDAS

Una de las aplicaciones prácticas del cálculo integral es el hecho de que las integrales definidas pueden emplearse para determinar áreas. Puede tratarse de superficies que están delimitadas por curvas las cuales representan funciones y/o los ejes de coordenadas. En la sección 18.4 se estudiarán situaciones donde esas áreas tienen un significado especial en el problema en que se usan. que se usan.

Áreas entre una función y el eje *x*

Las integrales definidas pueden servir para obtener el área situada entre la curva que representa una función y el eje *x*. Se presentan diversos casos. Su tratamiento es variable y lo explicaremos en seguida.

CASO 1: ($f(x) > 0$)
Cuando el valor de una función continua *f* es positivo en el intervalo $a \le x \le b$ (o sea que la gráfica de *f* se encuentra arriba del eje *x*), el área que está acotada por *f*, el eje *x*, $x = a$ y $x = b$ se determina mediante

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

En la figura 18.6 se describe esta situación

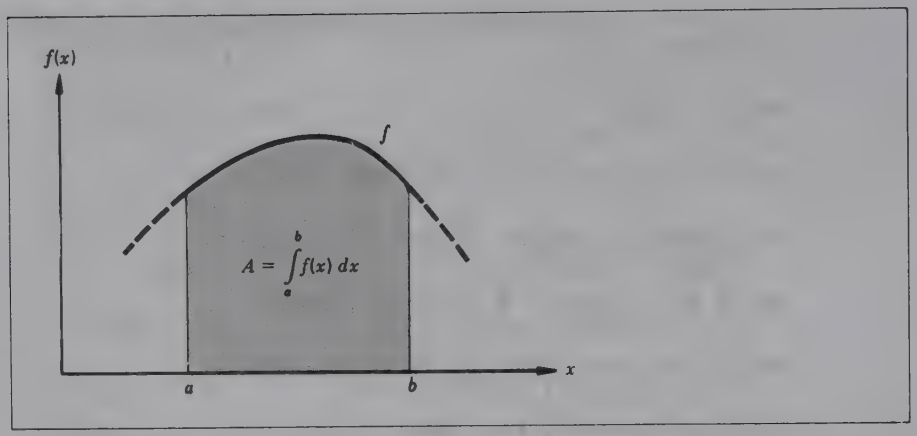


FIGURA 18.6 Determinación de las áreas situadas arriba del eje x.

EJEMPLO 10

Encuentre el área debajo de $f(x) = x^2$ y arriba del eje x, entre $x = 1$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN

Esta área se indicó antes en la figura 18.1. Se la calcula así:

$$A = \int_1^3 x^2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\Big]_1^3$$
$$= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \tfrac{1}{3} = 8\tfrac{2}{3}$$

El área (exacta es $8\frac{2}{3}$ unidades *cuadradas*.

EJEMPLO 11

Determine el área indicada en la figura 18.7.

SOLUCIÓN

Vamos a dar por anticipado la respuesta usando fórmulas muy conocidas con las cuales se obtienen las áreas de un rectángulo y de un triángulo. Como se advierte en la figura 18.8, el área de interés puede considerarse compuesta por un rectángulo de superficie A_2 y un triángulo de superficie A_1. En consecuencia.

$$A = A_1 + A_2$$
$$= \tfrac{1}{2}bh + lw$$
$$= \tfrac{1}{2}(5)(5) + (5)(3) = 12.5 + 15 = 27.5 \text{ unidades cuadradas}$$

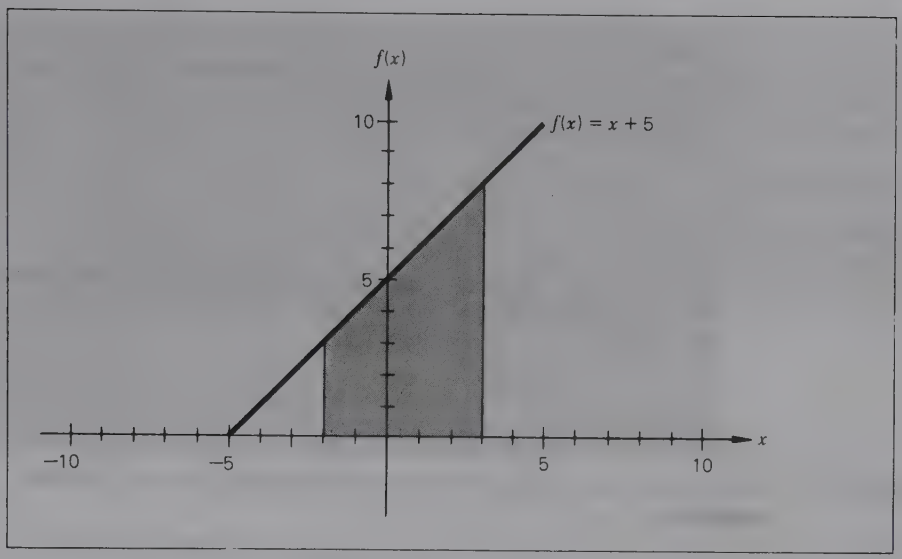


FIGURA 18.7

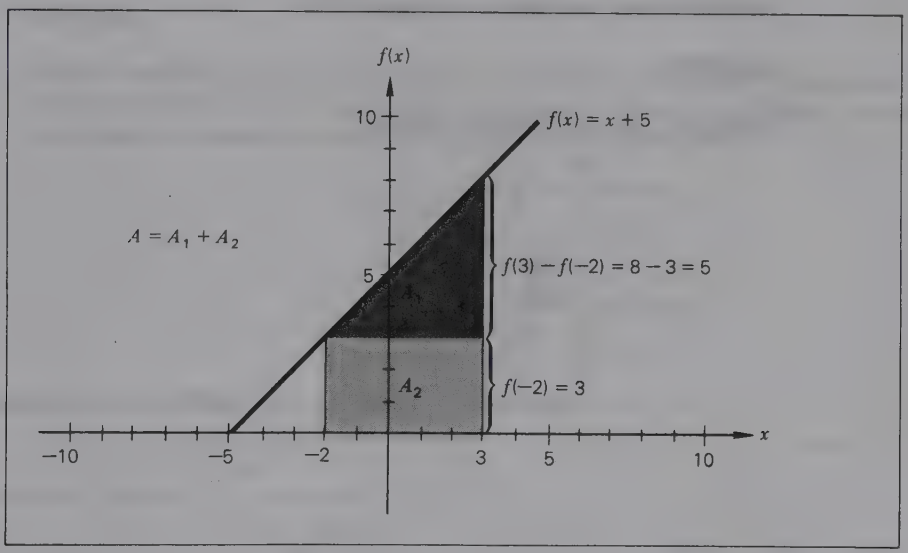


FIGURA 18.8

Al emplear la integral definida,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{3} (x + 5)\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} + 5x \Big]_{-2}^{3} \\
&= \left[\frac{(3)^2}{2} + 5(3)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 5(-2)\right] \\
&= \left(\tfrac{9}{2} + 15\right) - (2 - 10) = 19.5 - (-8) = 27.5 \text{ unidades cuadradas}
\end{aligned}
$$

CASO 2: ($f(x) < 0$)
Cuando el valor de una función continua f es negativo en el intervalo $a \le x \le b$ (es decir, la gráfica de f se halla debajo del eje x), el área que está acotada por f, el eje x, $x = a$ y $x = b$ se determina por medio de

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Sin embargo, la integral definida evalúa el área como *negativa* si se encuentra debajo del eje x. Puesto que el área es *positiva*, se calculará como

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 12

Calcule el área indicada en la figura 18.9.

SOLUCIÓN

Dado que f es una función negativa,

$$A = -\int_{2.5}^{3.5} -\frac{x^3}{2}\,dx$$

$$= -\left[-\frac{x^4}{8}\right]_{2.5}^{3.5}$$

$$= -\left\{\left[-\frac{(3.5)^4}{8}\right] - \left[\frac{-(2.5)^4}{8}\right]\right\}$$

$$= -[-18.7578 - (-4.8828)] = -[-13.875] = 13.875 \text{ unidades cuadradas}$$

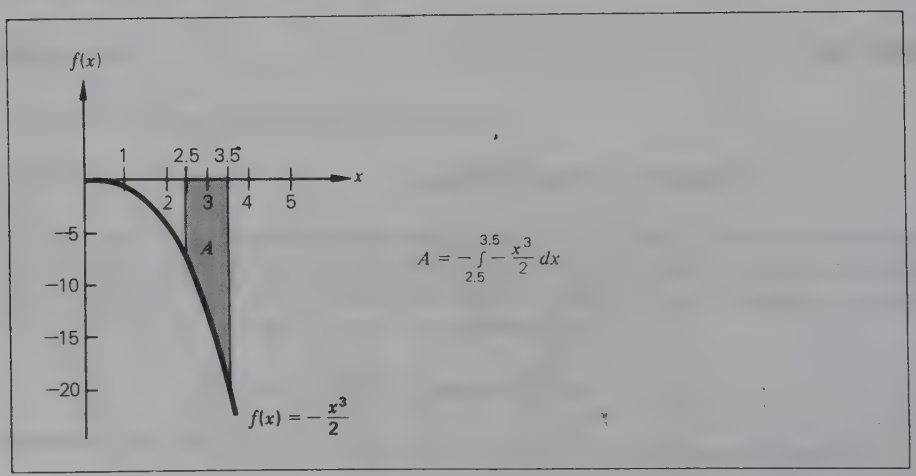


FIGURA 18.9

CASO 3: ($f(x) < 0$ y $f(x) > 0$)
Cuando el valor de una función continua f es positivo en la parte del intervalo $a \leq x \leq b$ y negativo en el resto de él (parte del área comprendida entre f y el eje x se halla arriba del eje x y parte debajo de él), entonces $\int_a^b f(x)dx$ calcula el *área neta*. En otras palabras, las áreas situadas arriba del eje x se evalúan como positivas y las que están debajo como negativas. Se las combina algebraicamente para obtener el valor neto.

EJEMPLO 13

Evalúe $\int_0^{15} (x - 5)\, dx$ para calcular el área *neta*, la cual se muestra en la figura 18.10.

SOLUCIÓN

Una vez más la respuesta se consigue por anticipado aplicando la fórmula con que se mide la superficie de un triángulo. Recuérdese que el área debajo del eje x se evaluará como negativa cuando se haga la integración; tendremos entonces

$$\begin{aligned} A &= -A_1 + A_2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(5)(5) + \tfrac{1}{2}(10)(10) \\ &= -12.5 + 50 \\ &= 37.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

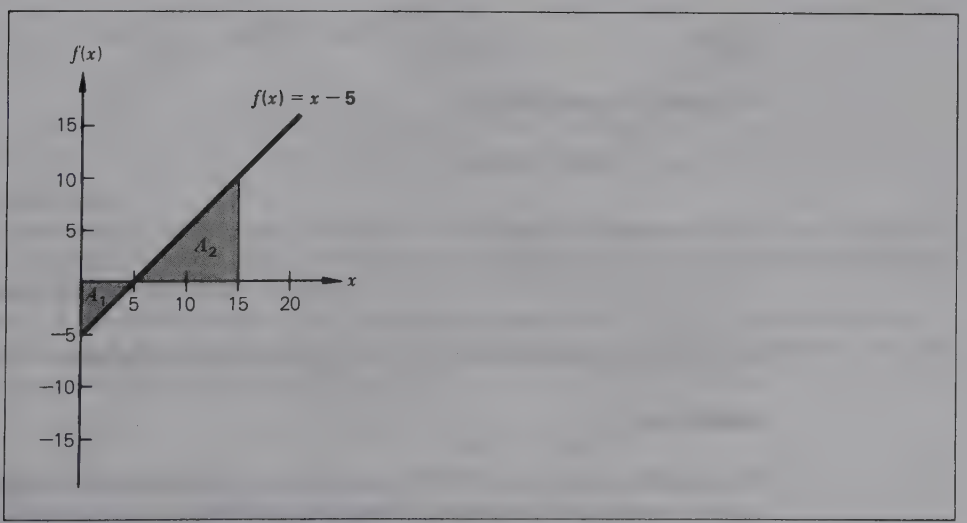


FIGURA 18.10

Al evaluar la integral definida,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{15} (x - 5)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 5x\Big]_0^{15} \\ &= \left[\frac{(15)^2}{2} - 5(15)\right] - \left[\frac{0^2}{2} - 5(0)\right] \\ &= (112.5 - 75) - 0 \\ &= 37.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Obtención del área entre curvas

En los siguientes ejemplos se describen los procedimientos con que se calculan las áreas comprendidas entre curvas.

EJEMPLO 14

Determine el área sombreada entre f y g indicada en la figura 18.11.

SOLUCIÓN

A fin de determinar el área A, es preciso examinar su composición. No es posible calcularla integrando sólo una de las funciones. Una manera de calcularla se advierte en la figura 18.12. Si g se integra entre $x = 0$ y $x = 3$, el área resultante incluye A pero también una superficie adicional que no forma parte de A. Por haber subestimado a A, habrá que restar el *excedente*. Esta área resulta ser la que se encuentra debajo de f, entre $x = 0$ y $x = 3$. En consecuencia, A puede determinarse como

$$A = \int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx$$

o bien

$$A = \int_0^3 (-2x^2 + 27)\,dx - \int_0^3 x^2\,dx$$

Si se aplica la propiedad 5,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (-3x^2 + 27)\,dx \\ &= -x^3 + 27x\Big]_0^3 \\ &= [-(3)^3 + 27(3)] - [-(0)^3 + 27(0)] = -27 + 81 - 0 = 54 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

EJEMPLO 15

De acuerdo con la figura 18.13, determine la combinación de integrales que calcularían el tamaño de *a*) área A_1, *b*) área A_2, *c*) área A_3.

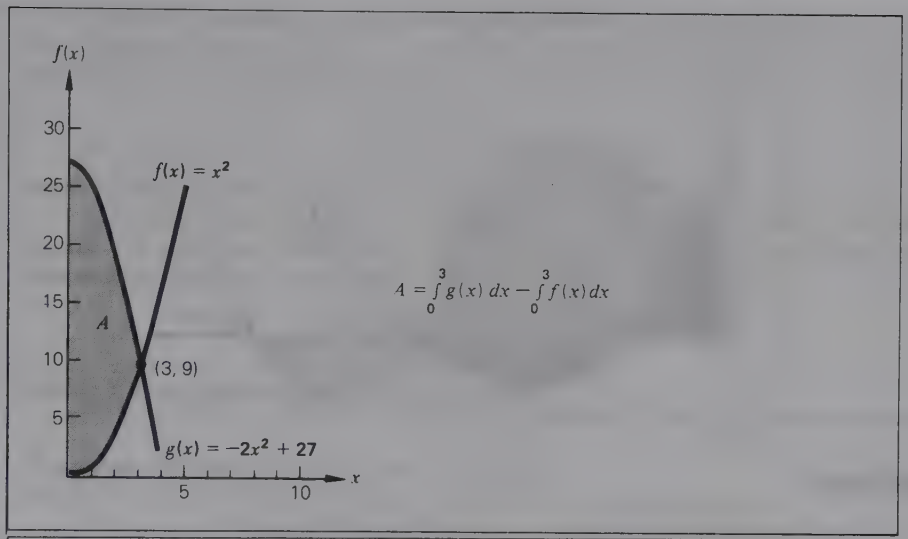


FIGURA 18.11

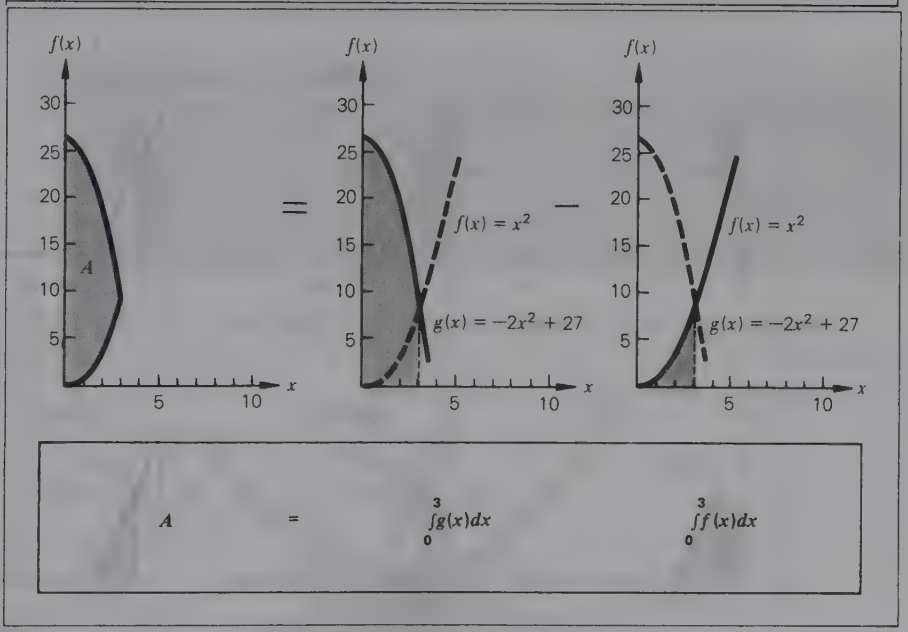


FIGURA 18.12

SOLUCIÓN

Este ejemplo no contiene números verdaderos. Se trata más bien de un ejercicio de la lógica en que se funda la formulación de combinaciones de integrales definidas para determinar las áreas.

a) El límite superior de A_1 se determina por medio de f. Si f se integra entre $x = 0$ y $x = a$, el resultado será un área que contenga A_1 y un área excedente. Esta última puede obtenerse integrando g entre $x = 0$ y $x = a$. Por tanto,

$$A_1 = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a g(x)\,dx$$

Esto se muestra gráficamente en la figura 18.14*a*.

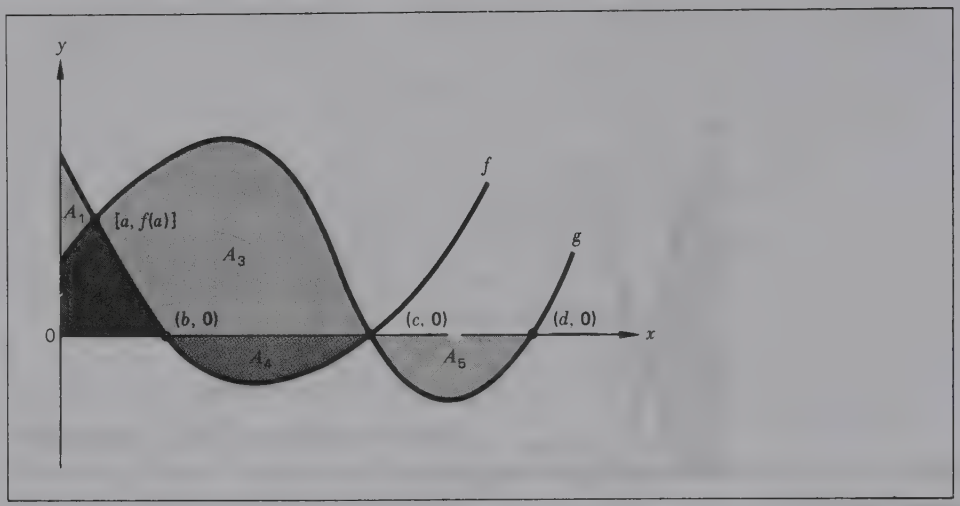


FIGURA 18.13

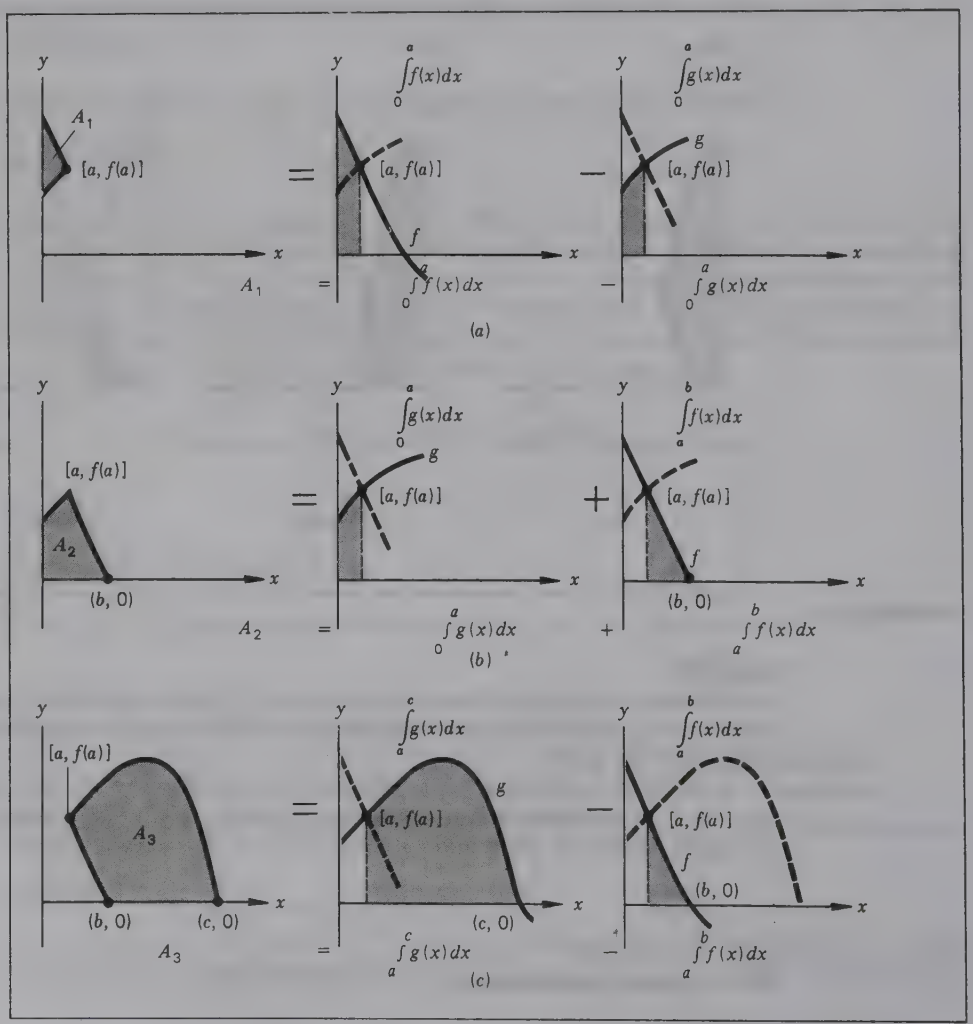


FIGURA 18.14

b) El límite superior de A_2 se define por g hasta $x = a$ y por f cuando $a \leq x \leq b$. Si se integra g entre $x = 0$ y $x = a$, el área resultante será una parte de A_2. La parte restante de A_2 puede determinarse integrando f entre $x = a$ y $x = b$. Así pues,

$$A_2 = \int_0^a g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

Esto se muestra gráficamente en la figura 18.14*b*.

c) El límite superior de A_3 se calcula enteramente por medio de g. Si se integra g entre $x = a$ y $x = c$, el área resultante comprende A_2 y un área excedente. Esta última puede calcularse integrando f entre $x = a$ y $x = b$. Por tanto,

$$A_3 = \int_a^c g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

Esto se indica gráficamente en la figura 18.14*c*.

Verifique el lector, en la figura 18.13, que

$$A_4 = -\int_b^c f(x)\,dx \quad \text{y} \quad A_5 = -\int_c^d g(x)\,dx$$

ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Si la función $y = f(x)$ se encuentra arriba de la función $y = g(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, el área entre las dos funciones situadas en el intervalo será

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

La figura 18.15 es una representación gráfica de esta propiedad.

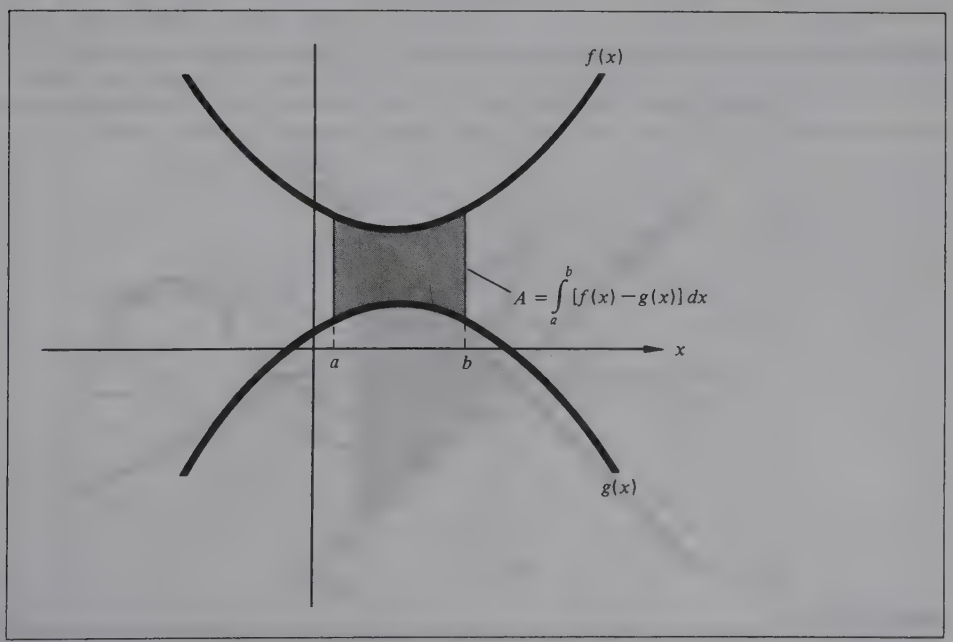


FIGURA 18.15 Área entre dos curvas.

Dicha propiedad es en realidad una formalización del fundamento lógico de que nos hemos valido antes. Así, la utilizamos al definir el área A en el ejemplo 14; de manera análoga, la usó el cálculo de A_1 en el ejemplo 15. Conviene señalar que la propiedad es válida para las funciones que se hallan debajo del eje x. Para dar una aplicación examinemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 16

Pongamos, por ejemplo, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que aparecen en la figura 18.16. Supóngase que queremos calcular el área situada entre ambas funciones en el intervalo $0 \leq x \leq 4$. Al aplicar la fórmula de la superficie de un triángulo, se obtiene el área total como la suma de las áreas del triángulo situado sobre el eje x y el que se encuentra debajo del eje x.

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}(4)(4) + \tfrac{1}{2}(4)(4) \\ &= 8 + 8 = 16 \end{aligned}$$

Otra opción consiste en aplicar la propiedad formulada en páginas anteriores tal que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 [x - (-x)]\,dx \\ &= \int_0^4 2x\,dx \\ &= x^2\Big]_0^4 \\ &= (4)^2 - (0)^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

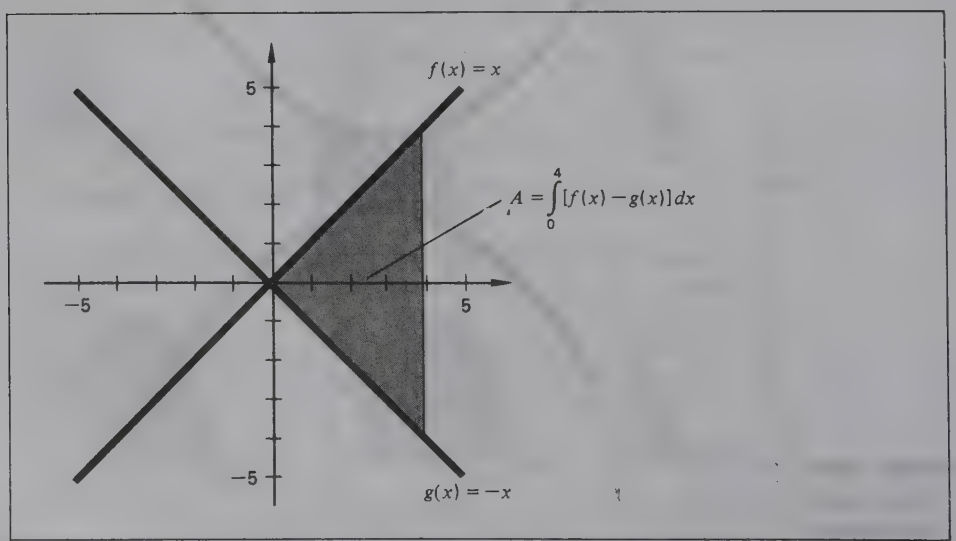


FIGURA 18.16

NOTA
Una recomendación que se da en el uso de las integrales para calcular áreas es trazar siempre una gráfica de las funciones en cuestión. Con un conocimiento de las áreas de interés se facilita la identificación de los límites pertinentes y se comprende la base lógica que se requiere para definir las áreas.

Ejercicios de seguimiento de la sección 18.2

En los ejercicios 1-20, *a*) grafique f y *b*) determine el tamaño del área comprendida entre f y el eje x en el intervalo señalado.

1 $f(x) = -2x + 8$, entre $x = 1$ y $x = 4$
2 $f(x) = 10 - 2x$, entre $x = 0$ y $x = 4$
3 $f(x) = x^2$, entre $x = 2$ y $x = 8$
4 $f(x) = 20 - x^2$, entre $x = -4$ y $x = 4$
5 $f(x) = 3x^3$, entre $x = 2$ y $x = 4$
6 $f(x) = -4x^3$, entre $x = 1$ y $x = 3$
7 $f(x) = 8x^2$, entre $x = -2$ y $x = 3$
8 $f(x) = x^2 - 16$, entre $x = -4$ y $x = 4$
9 $f(x) = 10 - x^2$, entre $x = -2$ y $x = 3$
10 $f(x) = 25 - x^2$, entre $x = -5$ y $x = 0$
11 $f(x) = e^x$, entre $x = 1$ y $x = 3$
12 $f(x) = -e^x$, entre $x = 0$ y $x = 2$
13 $f(x) = -x^2$, entre $x = -2$ y $x = 5$
14 $f(x) = 5x^4$, entre $x = -1$ y $x = 3$
15 $f(x) = 40x - x^2$, entre $x = 10$ y $x = 20$
16 $f(x) = 20x - x^2$, entre $x = 0$ y $x = 4$
17 $f(x) = xe^{x^2}$, entre $x = 2$ y $x = 4$
18 $f(x) = 2xe^{x^2}$, entre $x = 2$ y $x = 4$
19 $f(x) = (1/x)$, entre $x = 5$ y $x = 10$
20 $f(x) = (2/x)$, entre $x = 1$ y $x = 3$
21 En relación con la figura 18.17, determine las combinaciones de las integrales definidas que calculen el área de *a*) A_1, *b*) A_2, *c*) A_3 y *d*) A_4.

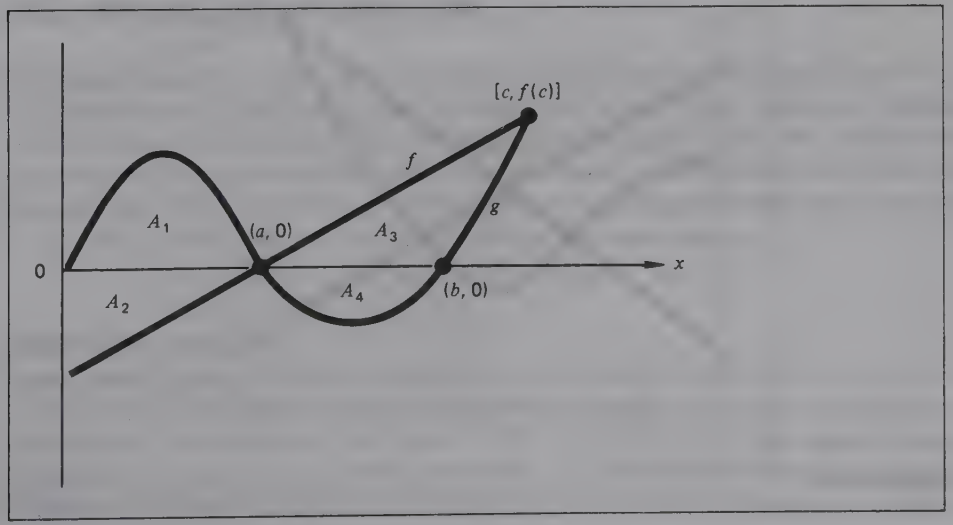


FIGURA 18.17

22 De acuerdo con la figura 18.18, determine las combinaciones de las integrales definidas que calculen el área de *a*) A_1, *b*) A_2, *c*) A_3 y *d*) A_4.
23 A partir de la figura 18.19, determine las combinaciones de las integrales definidas que calculen el área de *a*) A_1, *b*) A_2, *c*) A_3, *d*) A_4, *e*) A_5 y *f*) A_6.
24 Según la figura 18.20, determine las combinaciones de las integrales definidas que calculen el área de *a*) A_1, *b*) A_2, *c*) A_3, *d*) A_4, *e*) A_5, *f*) A_6, *g*) A_7 y *h*) A_8.
25 En $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 27 - x^2$, *a*) grafique las dos funciones. *b*) Cuando $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje y.
26 Si se tiene $f(x) = x^2$ y $g(x) = 64 - x^2$, *a*) grafique las dos funciones. *b*) Para $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje y.
27 En $f(x) = 2x$ y $g(x) = 12 - x$, *a*) grafique las dos funciones. *b*) Si $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje y.
28 Si se tiene $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 20 - 6x$, *a*) grafique las dos funciones. *b*) Con $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje y.

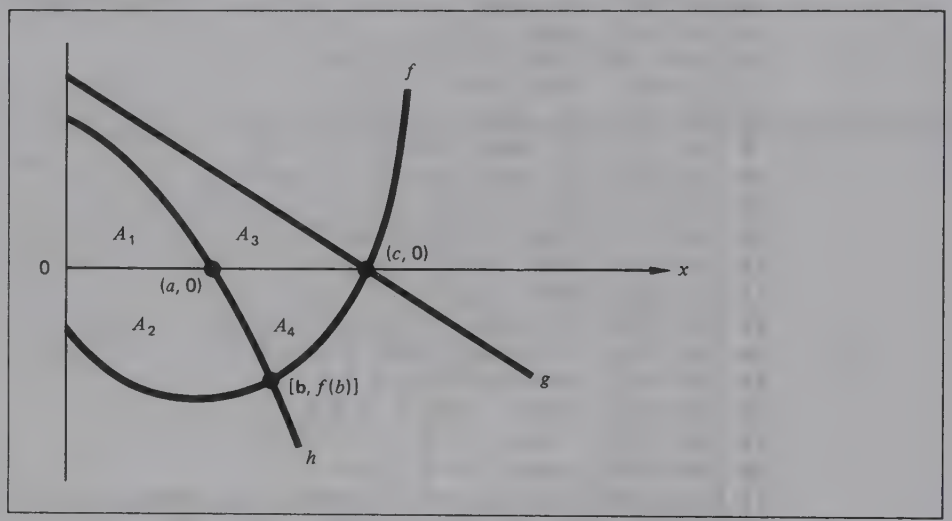


FIGURA 18.18

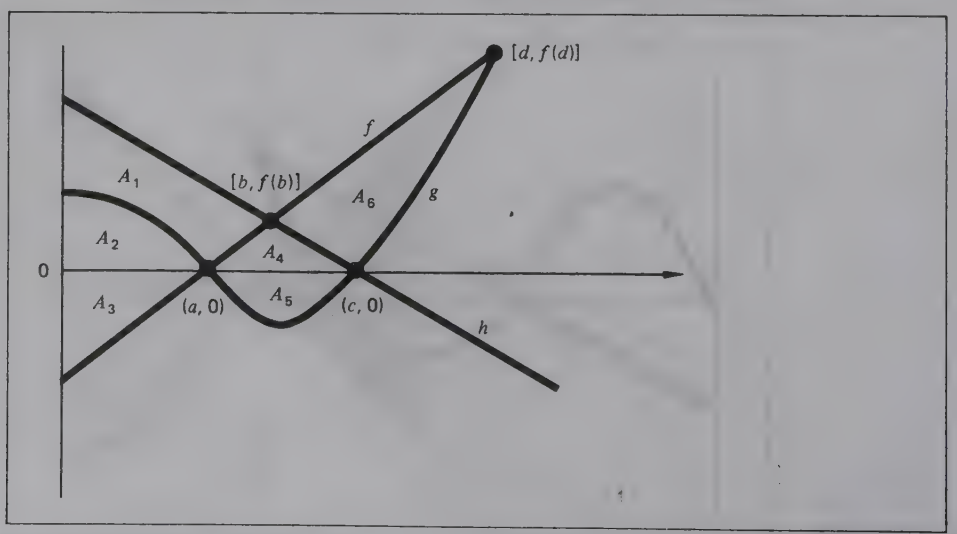


FIGURA 18.19

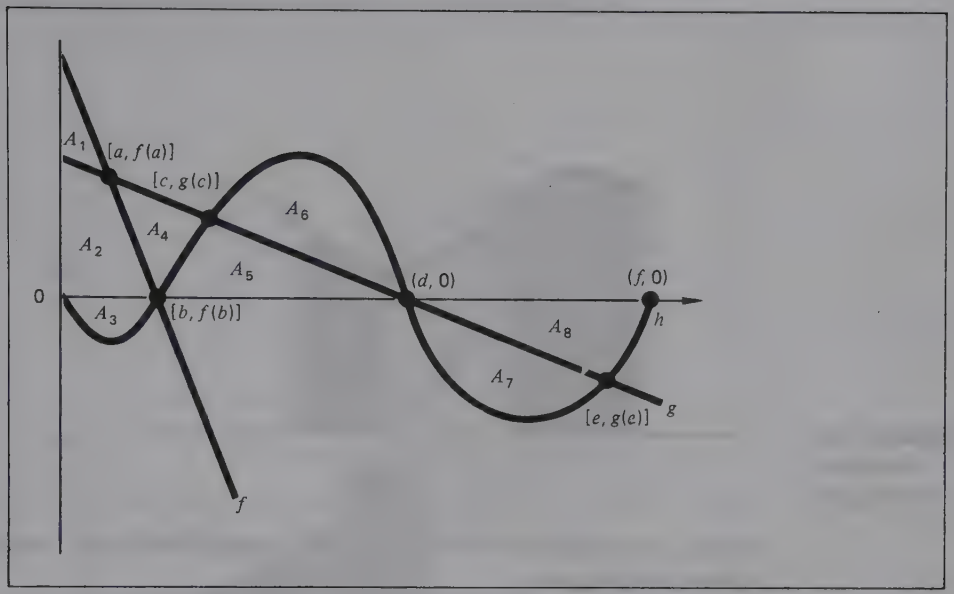


FIGURA 18.20

29 Dadas $f(x) = x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 10x$, *a*) grafique las dos funciones. *b*) Determine el área acotada por las dos funciones entre $x = 0$ y $x = 10$.
30 Si se conocen $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 8$, cuando $x \geq 0$ determine el área acotada en tres lados por las dos funciones y el eje y.
31 Obtenga el área entre $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -x^2 + 2x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.
32 Calcule el área entre $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 1 - 2x$ en el intervalo $0 \leq x < 5$.
33 Encuentre el área entre $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x - 4$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 3$.
34 Determine el área entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 - 2$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.
35 Calcule el área entre $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -e^2$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 4$.
36 Encuentre el área entre $f(x) = 2x^2 - 2x + 10$ y $g(x) = -x^2 + 4$ en el intervalo $1 \leq x \leq 5$.

18.3 MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Hay situaciones donde tal vez no se cuente con una regla de integración para evaluar determinado integrando, aun utilizando las tablas de las reglas de integración. Si se necesita evaluar una integral definida para la función, se dispone de métodos para aproximar su valor. En la presente sección nos ocuparemos de tres métodos numéricos de aproximación que pueden utilizarse para evaluar

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Regla del rectángulo

Si se quiere evaluar la integral definida en términos del cálculo del área debajo de una curva, un método consiste en dividir el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos iguales, cada uno con un ancho de $(b - a)/n$. Si x_i se define como el punto medio del intervalo i, puede construirse un conjunto de n rectángulos que tengan un ancho $(b - a)/n$ y altura iguales a $f(x_i)$, según se observa en la figu-

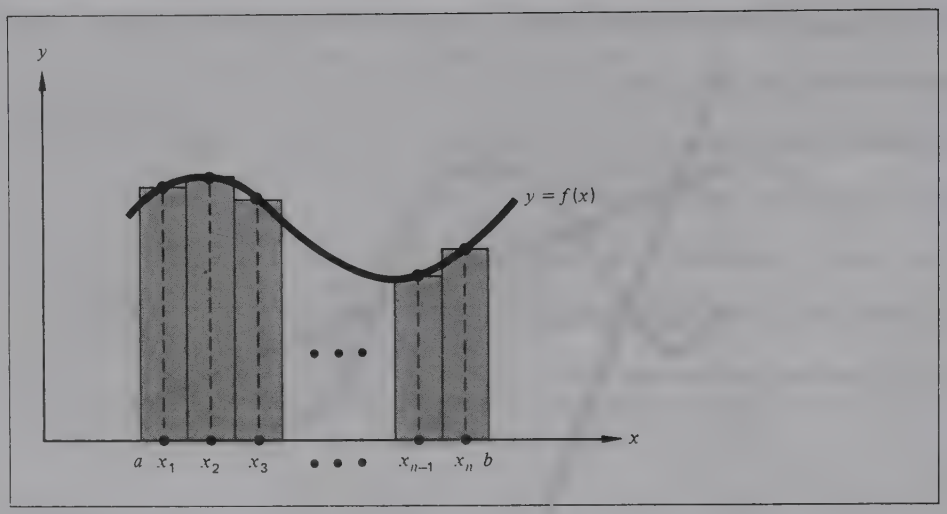


FIGURA 18.21 Regla del rectángulo.

ra 18.21. Para aproximar el valor de la integral definida, se suman las áreas de los n rectángulos.

Si se denota como Δx el ancho de cada intervalo... $(b - a)/n$..., podemos expresar la regla del rectángulo así:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$
$$\approx \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$

para n escogida con un tamaño suficientemente grande. **(18.9)**

EJEMPLO 17

A continuación se da un ejemplo del uso de esta regla en una función relativamente simple $f(x) = x^3$. Supóngase que se desea evaluar $\int_0^4 x^3\,dx$. Se aplicará la regla del rectángulo, dividiendo el intevalo en cuatro subintervalos iguales que tienen un ancho de 1. Como se ve en la figura 18.22, los valores del punto medio en los cuatro subintervalos son 0.5, 1.5, 2.5 y 3.5. Al aplicar la regla del rectángulo, la aproximación numérica de la integral definida es

$$\int_0^4 x^3\,dx \approx f(0.5)(1) + f(1.5)(1) + f(2.5)(1) + f(3.5)(1)$$
$$= (0.5)^3 + (1.5)^3 + (2.5)^3 + (3.5)^3$$
$$= 0.125 + 3.375 + 15.625 + 42.875$$
$$= 62.0$$

Confirme por su cuenta que el valor verdadero de la integral definida sea 64. La aproximación numérica lograda mediante la regla del rectángulo *subestimó* en 2 el valor real de la integral definida.

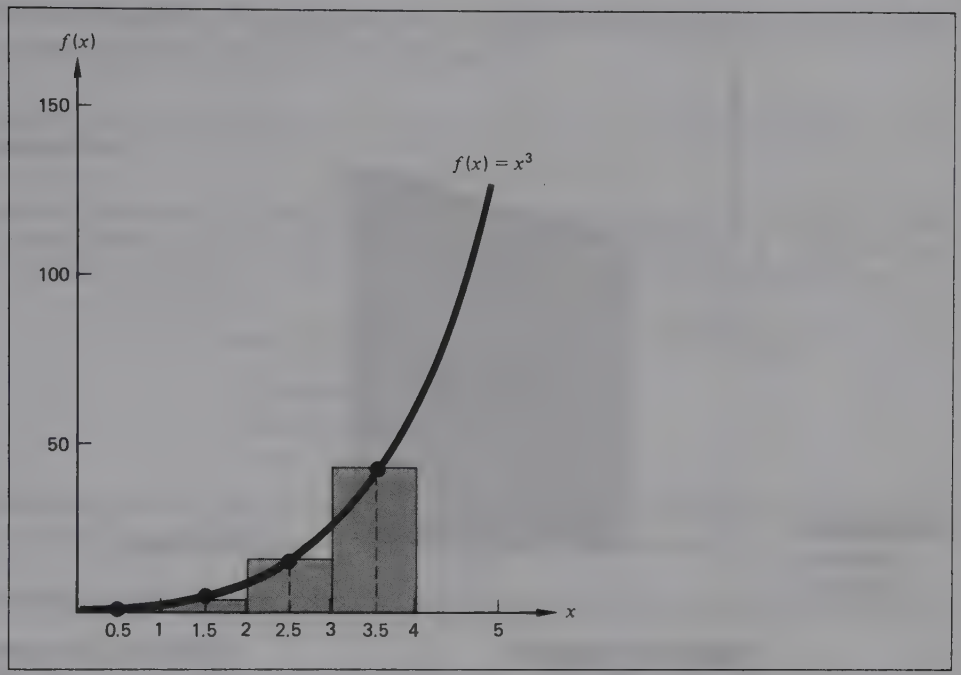


FIGURA 18.22 Aproximación numérica por medio de la regla del rectángulo.

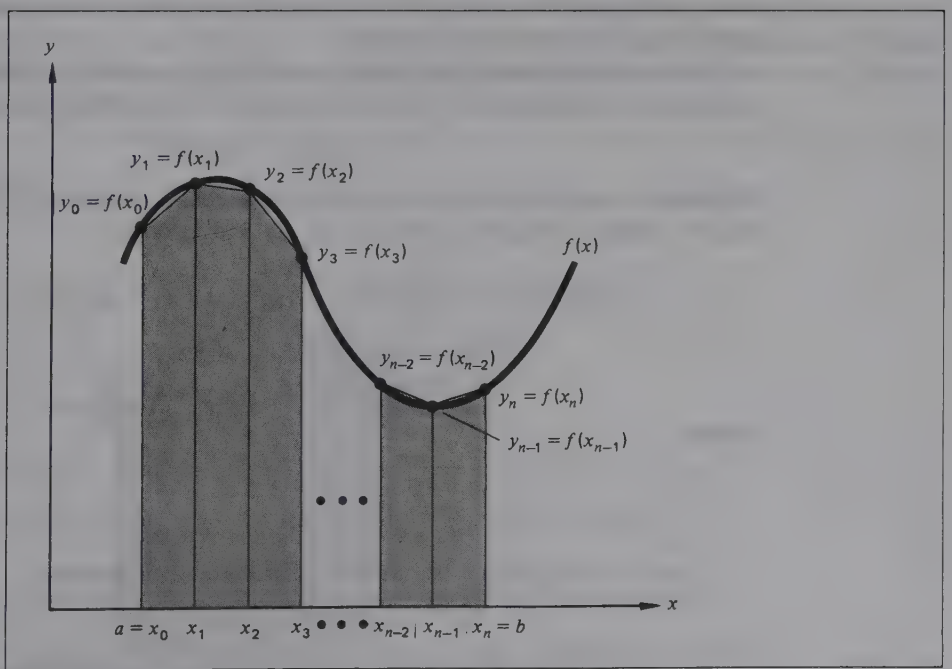


FIGURA 18.23 Regla del trapecio.

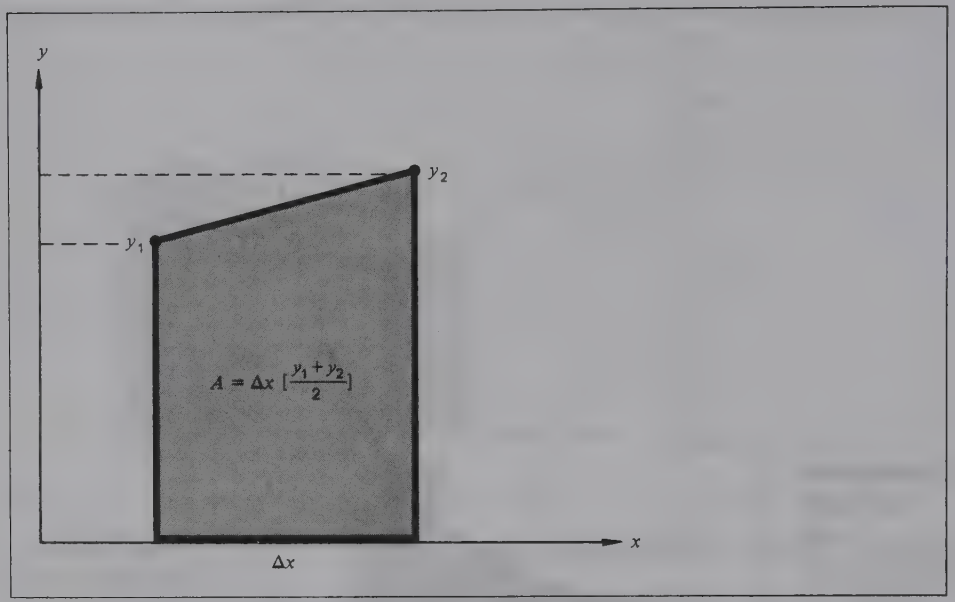


FIGURA 18.24
Área del trapecio.

Regla del trapecio

Otro método de aproximación numérica para calcular las integrales definidas es la ***regla del trapecio***. Como en el caso de la regla del rectángulo, el intervalo $a \leq x \leq b$ se divide en n subintervalos del mismo ancho. Como se advierte en la figura 18.23, la aproximación consiste en sumar las áreas de n trapecios definidas por los subintervalos. Las alturas de n trapecios están definidas por los *puntos finales* de los subintervalos.

En un trapecio como el que se ve en la figura 18.24, el área del mismo se define como el producto de la base del trapecio y su altura promedio, es decir,

$$A = \Delta x[(y_1 + y_2)/2]^*$$

Por tanto, si se emplean las áreas de n trapecios en la figura 18.23 para aproximar la integral definida, esta última se evalúa como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx [(b-a)/n][(y_0 + y_1)/2] + [(b-a)/n][(y_1 + y_2)/2] + [(b-a)/n][(y_2 + y_3)/2] + \cdots + [(b-a)/n][(y_{n-1} + y_n)/2]$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx [(b-a)/2n][y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n] \qquad \textbf{(18.10)}$$

para n escogida con un tamaño suficientemente grande.

*Una definición más general establece que el área del trapecio con lados paralelos a y b y una altura h es $1/2(a + b)h$.

A continuación se explicará el uso de la regla del trapecio en la evaluación de la misma integral definida del ejemplo 17.

EJEMPLO 18

Cuando se utilizan las mismas definiciones de subintervalo como en el ejemplo 17, los puntos finales son 0, 1, 2, 3 y 4. Por consiguiente, $y_0 = f(0) = 0$, $y_1 = f(1) = 1$, $y_2 = f(2) = 8$, $y_3 = f(3) = 27$ y $y_4 = f(4) = 64$. Al aplicar la ecuación (18.10),

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\,dx &\approx [(4-0)/2(4)][0 + 2(1) + 2(8) + 2(27) + 64] \\ &= (1/2)(0 + 2 + 16 + 54 + 64) \\ &= (1/2)(136) \\ &= 68\end{aligned}$$

Verifique que la aproximación lograda con la regla del trapecio *sobrestime* en 4 el valor real de la integral definida.

Regla de Simpson

El tercer método de aproximación numérica se denomina ***regla de Simpson.*** A diferencia del empleo de rectángulos o trapecios para aproximar el valor de una integral definida, la regla de Simpson se basa en la estimación parabólica. En una gráfica, el intervalo $a \leq x \leq b$ se divide en un *número par* de n subintervalos que tienen el mismo ancho. Y así una serie de parábolas son idóneas para graficarse, una para cada *par* de subintervalos. Esto se aprecia en la figura 18.25. ¿Recuerda el lector que tres puntos de datos definen una función

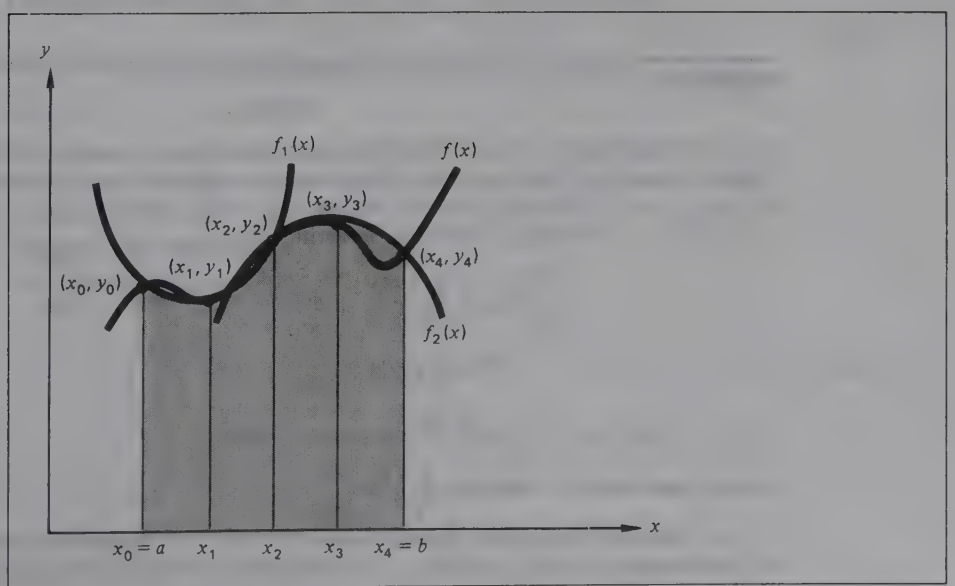


FIGURA 18.25 Aproximación parabólica de $f(x)$ mediante f_1 y f_2.

cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$? Con la regla de Simpson, una parábola encaja en los puntos de datos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en los dos primeros subintervalos y otra encaja en los tres puntos de datos (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4) en los dos segundos subintervalos de la figura 18.25. Estas parábolas sirven para aproximar la función $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$. El área bajo $f(x)$ en este intervalo se aproxima después determinando las áreas bajo las dos parábolas.

En el caso en que $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$, existe una fórmula con la cual determinar el área bajo una parábola que pasa por (x_0, y_0) y (x_2, y_2). La fórmula no requiere la obtención de la función cuadrática que pase por dichos puntos. Si $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = w$, entonces

$$(ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{w}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Con el fin de aproximar la integral definida, $w = (b - a)/n$. Por tanto, si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y el número de subintervalos n es par,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b-a}{3n}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{b-a}{3n}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{18.11}$$

para n escogida con un tamaño suficientemente grande.

EJEMPLO 19

Nos serviremos de la regla de Simpson para aproximar la integral definida en los dos últimos ejemplos. Dado que los subintervalos se definen como iguales, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 8)$, $(x_3, y_3) = (3, 27)$ y $(x_4, y_4) = (4, 64)$. Con $a = 0$ y $b = 4$, la integral definida se estima así:

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\,dx &\approx \frac{4-0}{3(4)}[0 + 4(1) + 2(8) + 4(27) + 64] \\ &= \frac{1}{3}(192) \\ &= 64\end{aligned}$$

que es *precisamente* el valor de $\int_0^4 x^3\,dx$.

En términos generales, se espera que la regla de Simpson sea más exacta que la del rectángulo o la del trapecio en la obtención de determinado valor de n.

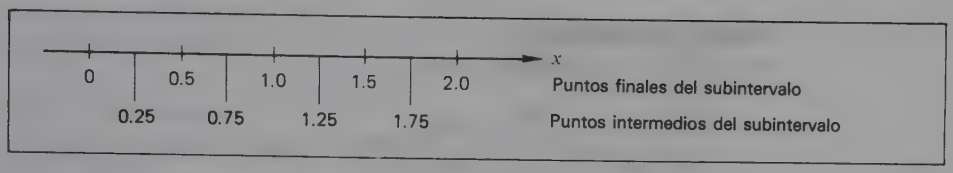


FIGURA 18.26 Puntos finales e intermedios de un subintervalo.

EJEMPLO 20

A continuación se explicará el empleo de estas aproximaciones en un caso en que no se cuente con un método para calcular la integral indefinida. Supóngase que se desea evaluar

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1}\, dx$$

Esta integral definida la aproximaremos recurriendo a tres métodos y subdividiendo en cuatro subintervalos que tengan un ancho de 0.5. La figura 18.26 contiene la definición de los puntos finales de los intervalos, lo mismo que los puntos intermedios.

Regla del rectángulo

Al aplicar la ecuación (18.9),

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1}\, dx &\approx (0.5)[f(0.5) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)] \\ &= (0.5)\left[\frac{1}{(0.25)^2 + 1} + \frac{1}{(0.75)^2 + 1} + \frac{1}{(1.25)^2 + 1} + \frac{1}{(1.75)^2 + 1}\right] \\ &= 0.5(0.94118 + 0.64000 + 0.39024 + 0.24615) \\ &= 1.10879\end{aligned}$$

Regla del trapecio

Al aplicar la ecuación (18.10)

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1}\, dx &\approx \left[\frac{2 - 0}{(2)(4)}\right][f(0) + 2f(0.5) + 2f(1.0) + 2f(1.5) + f(2.0)] \\ &= \frac{1}{4}[1 + 2(0.8) + 2(0.5) + 2(0.308) + 0.2] \\ &= \frac{1}{4}(4.416) \\ &= 1.104\end{aligned}$$

Regla de Simpson

Al aplicar la ecuación (18.11),

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx \approx \left[\frac{2 - 0}{(3)(4)}\right][f(0) + 4f(0.5) + 2f(1.0) + 4f(1.5) + f(2.0)]$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)[1 + 4(0.8) + 2(0.5) + 4(0.308) + 0.2]$$
$$= \frac{1}{6}(6.632)$$
$$= 1.105$$

Como no podemos evaluar explícitamente esta integral definida, tampoco es posible estimar la exactitud de tales aproximaciones. La experiencia indicará que el valor conseguido con la regla de Simpson tiende a ser el más exacto.

Ejercicios de seguimiento de la sección 18.3

En los siguientes ejercicios, *a*) evalúe la integral definida usando la regla del rectángulo (se subdivide en cuatro intervalos), *b*) evalúe el valor exacto por medio de las reglas explícitas de integración y *c*) calcule el error de la aproximación.

1 $\int_0^4 x^2\,dx$ **2** $\int_0^4 4x^2\,dx$

3 $\int_0^2 4x^3\,dx$ **4** $\int_0^2 8x^3\,dx$

5 $\int_0^4 e^x\,dx$ **6** $\int_1^3 3e^x\,dx$

7 $\int_2^4 (x^3 - 2x^2)\,dx$ **8** $\int_2^4 (2x^3 + 3x^2)\,dx$

9 $\int_4^8 (2x)(x^2 - 5)^3\,dx$ **10** $\int_4^8 (4x)(2x^2 + 10)^4\,dx$

En los siguientes ejercicios, *a*) evalúe la integral definida aplicando la regla del trapecio (se subdivide en cuatro intervalos), *b*) evalúe el valor exacto por medio de las reglas explícitas de integración y *c*) calcule el error de la aproximación.

11 $\int_1^5 (5x - 2)\,dx$ **12** $\int_2^6 (20 - 4x)\,dx$

13 $\int_1^3 (4x^2 - x)\,dx$ **14** $\int_3^5 (2x - 3x^2)\,dx$

15 $\int_0^4 2e^x\,dx$ **16** $\int_1^5 e^{-x}\,dx$

17 $\int_0^4 (8x)(4x^2 - 5)^3\,dx$ **18** $\int_0^4 (3x^2)(x^3 + 5)^3\,dx$

19 $\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx$ **20** $\int_0^2 xe^{2x^2}\,dx$

En los siguientes ejercicios, *a*) evalúe la integral definida mediante la regla de Simpson (se subdivide en cuatro intervalos, *b*) evalúe el valor exacto con las reglas explícitas de integración y *c*) calcule el error de la aproximación.

21 $\int_0^2 (5x + 8)\,dx$ **22** $\int_0^4 (4 - 2x)\,dx$

23 $\int_1^5 (4x^2 - 5x)\,dx$

24 $\int_2^6 (x^3 - 10)\,dx$

25 $\int_0^2 (5x^4 - x)\,dx$

26 $\int_2^4 (2x - x^3)\,dx$

27 $\int_0^4 5e^x\,dx$

28 $\int_4^8 -4e^{-x}\,dx$

29 $\int_4^6 6x^2(x^3 - 1)^3\,dx$

30 $\int_2^4 4x(x^2 + 3)^3\,dx$

En los siguientes ejercicios, *a*) evalúe la integral definida por medio de las reglas explícitas de integración; *b*) aproxime la integral definida aplicando las reglas del rectángulo de Simpson (se subdivide en cuatro intervalos) y *c*) escoja el método de aproximación más exacto.

31 $\int_0^2 10\,dx$

32 $\int_0^4 -5\,dx$

33 $\int_2^6 (x^2 - 5)\,dx$

34 $\int_4^8 (10 - x + x^2)\,dx$

35 $\int_0^2 4x^3\,dx$

36 $\int_2^4 8x^3\,dx$

37 $\int_4^6 10e^x\,dx$

38 $\int_2^4 5e^{-x}\,dx$

39 $\int_0^4 4x^3(x^4 - 1)^3\,dx$

40 $\int_0^2 6x^2(x^3 + 6)^4\,dx$

En los siguientes ejercicios, la integral definida no puede evaluarse con las reglas de integración expuestas en este capítulo. Aproxímela sirviéndose de los tres métodos de aproximación (en que se usan cuatro subintervalos).

41 $\int_0^2 \frac{4}{2x^2 + 1}\,dx$

42 $\int_0^4 \frac{10}{x^2 + 4}\,dx$

43 $\int_0^4 \frac{2}{x^3 + 1}\,dx$

44 $\int_0^2 \frac{x}{x^3 + 2}\,dx$

45 $\int_2^6 \frac{1}{1 + e^x}\,dx$

46 $\int_0^4 \frac{5}{2 + e^x}\,dx$

47 $\int_0^2 \sqrt{2 + x^3}\,dx$

48 $\int_0^4 \sqrt{10 + x^3}\,dx$

18.4 APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

Los siguientes ejemplos son aplicaciones del cálculo integral.

EJEMPLO 21

Ingresos En el capítulo 17 se señaló cómo obtener la función de ingreso total integrando la función de ingreso marginal. A manera de simple ampliación de ese concepto, supóngase que el precio de un producto es constante a un valor de $10 por unidad, esto es, la función de ingreso marginal es

$$\begin{aligned} MR &= f(x) \\ &= 10 \end{aligned}$$

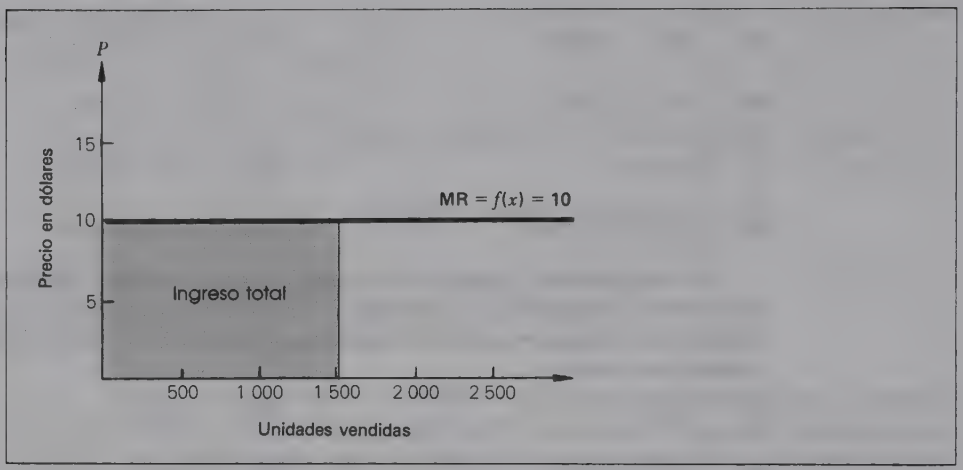


FIGURA 18.27

donde x es el número de unidades vendidas. El ingreso total conseguido con la venta de x unidades se determina al integrar la función de ingreso marginal entre 0 y x. Así, el ingreso total logrado con la venta de 1500 unidades se calcularía como

$$\begin{aligned}\int_0^{1\,500} 10\,dx &= 10x\Big]_0^{1\,500} \\ &= 10(1\,500) \\ &= \$15\,000\end{aligned}$$

Se trata de un procedimiento bastante complejo para el cálculo del ingreso total, puesto que bastaría haber multiplicado el precio por la cantidad vendida; se habría conseguido así el mismo resultado. No obstante, el procedimiento ejemplifica la manera de interpretar como ingreso total o incremental el área debajo de la función del ingreso marginal (Fig. 18.27). El ingreso adicional relacionado con un incremento de 1500 a 1800 unidades en las ventas se calculará así:

$$\begin{aligned}\int_{1\,500}^{1\,800} 10\,dx &= 10x\Big]_{1\,500}^{1\,800} \\ &= \$18\,000 - \$15\,000 \\ &= \$3\,000\end{aligned}$$

EJEMPLO 22

Gastos de mantenimiento Un fabricante de automóviles estima que la tasa anual de gastos $r(t)$ para dar mantenimiento a uno de sus modelos está representada por la función

$$r(t) = 100 + 10t^2$$

donde t es la edad del automóvil expresada en años y r(t) se mide en dólares por año. Esta función indica que cuando el automóvil tenga 1 año de uso, los gastos de mantenimiento se harán a una tasa de

$$\begin{aligned}r(1) &= 100 + 10(1)^2 \\ &= \$110 \text{ por año}\end{aligned}$$

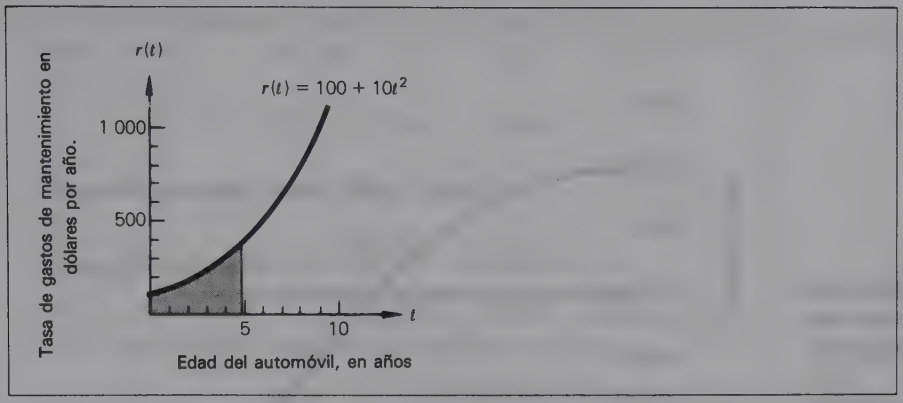


FIGURA 18.28 Tasa de la función de gastos.

Cuando tenga 3 años de uso, estarán realizándose a una tasa de

$$r(3) = 100 + 10(3)^2$$
$$= \$190 \text{ por año}$$

Como cabe suponer, cuanto más viejo sea el automóvil, más mantenimiento requerirá. La figura 18.28 contiene la gráfica de la tasa de la función de costos.

El área bajo esta curva entre dos valores cualesquiera de t es una medida del costo esperado de mantenimiento durante ese intervalo. Los gastos esperados de mantenimiento durante los primeros 5 años de vida del automóvil se calculan como sigue

$$\int_0^5 (100 + 10t^2)\,dt = 100t + \frac{10t^3}{3}\Big]_0^5$$
$$= 100(5) + \frac{10(5)^3}{3} = 500 + 416.67 = \$916.67$$

De estos gastos, los que se esperan hacer *durante el quinto año* se estiman como

$$\int_4^5 (100 + 10t^2)\,dt = 100t + \frac{10t^3}{3}\Big]_4^5$$
$$= 916.67 - \left[100(4) + \frac{10(4)^3}{3}\right]$$
$$= 916.67 - (400 + 213.33) = \$303.34$$

EJEMPLO 23

Recaudación de fondos Una organización cívica está efectuando su campaña anual de fondos, que se destinan a un programa de campamento de verano para minusválidos. Los gastos de la campaña se realizarán a una tasa de \$10 000 diarios. Por experiencia se sabe que las aportaciones serán altas en las primeras fases de la campaña y tenderán a disminuir con el paso del tiempo. La función que describe la tasa a que se reciben los donativos es

$$c(t) = -100t^2 + 20\,000$$

donde t representa el día de la campaña y c(t) se mide en dólares por día.

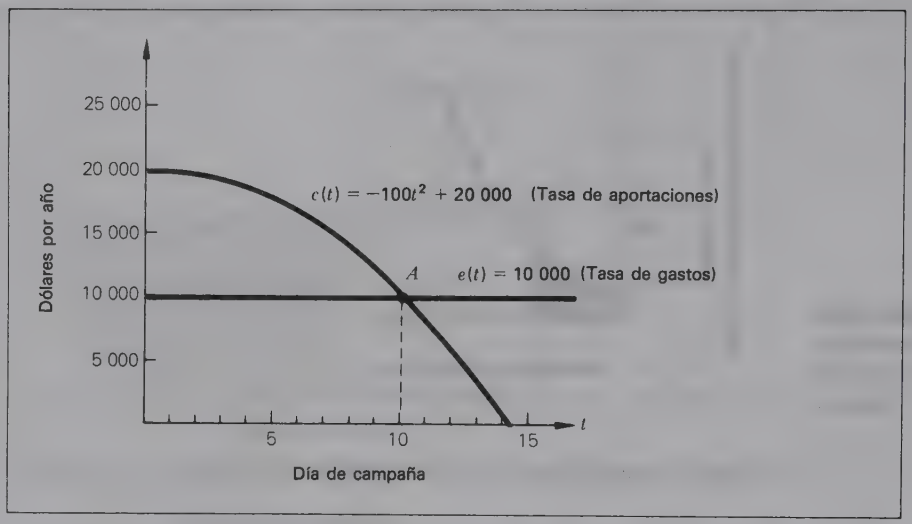


FIGURA 18.29 Aportaciones conseguidas en la recaudación de fondos y funciones de gastos.

La organización desea maximizar las utilidades netas de la campaña.

a) Determine cuánto debería durar la campaña a fin de maximizar las utilidades netas.

b) ¿Cuáles se espera que sean los gastos totales de la campaña?

c) ¿Cuáles se espera que sean las aportaciones totales?

d) ¿Cuáles se espera que sean las utilidades netas (aportaciones totales menos los gastos totales)?

SOLUCIÓN

a) La función que describe la tasa a que se realizan los gastos $e(t)$ es

$$e(t) = 10\,000$$

La figura 18.29 muestra las dos funciones. Mientras la tasa a que se hacen los donativos sea mayor que la de los gastos de la campaña, las utilidades netas serán positivas. Consulte la figura 18.29. Las utilidades netas serán positivas hasta que las gráficas de las dos funciones se intersequen. Más allá de este punto, la tasa de gastos excede la tasa de las aportaciones. Es decir, los donativos se recibirán a una tasa de menos de \$10 000 por día.

Las dos funciones se intersecan cuando

$$c(t) = e(t)$$

o cuando

$$\begin{aligned} -100t^2 + 20\,000 &= 10\,000 \\ -100t^2 &= -10\,000 \\ t^2 &= 100 \\ t &= 10 \text{ días} \end{aligned}$$

b) Los gastos totales de la campaña están representados por el área bajo e entre $t = 0$ y $t = 10$. Esto podría obtenerse al integrar e entre estos límites o, más simplemente, multiplicando:

$$\begin{aligned} E &= (\$10\,000 \text{ por día})\,(10 \text{ días}) \\ &= \$100\,000 \end{aligned}$$

c) Las aportaciones totales durante 10 días están representadas por el área bajo c entre $t = 0$ y $t = 10$, o sea

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{10} (-100t^2 + 20\,000)\,dt \\ &= -100\frac{t^3}{3} + 20\,000t\Big]_0^{10} \\ &= \frac{-100(10)^3}{3} + 20\,000(10) \\ &= -33\,333.33 + 200\,000 = \$166\,666.67 \end{aligned}$$

d) Las utilidades netas serán, según las previsiones,

$$\begin{aligned} C - E &= \$166\,666.67 - \$100\,000 \\ &= \$66\,666.67 \end{aligned}$$

EJEMPLO 24

Administración de bancos de sangre El banco de sangre de un hospital realiza una campaña anual de donación de sangre para reponer su inventario. El hospital estima que se donará sangre a una tasa de $d(t)$ pintas por día donde

$$d(t) = 500e^{-0.4t}$$

y *t indica la duración de la campaña en días*. Si la meta de la campaña es recoger 1000 pintas, ¿cuánto habrá alcanzado esa meta el hospital?

SOLUCIÓN

En este problema el área entre la gráfica de d y el eje t representa los donativos totales de sangre en pintas. A diferencia de las aplicaciones anteriores, el área deseada se co-

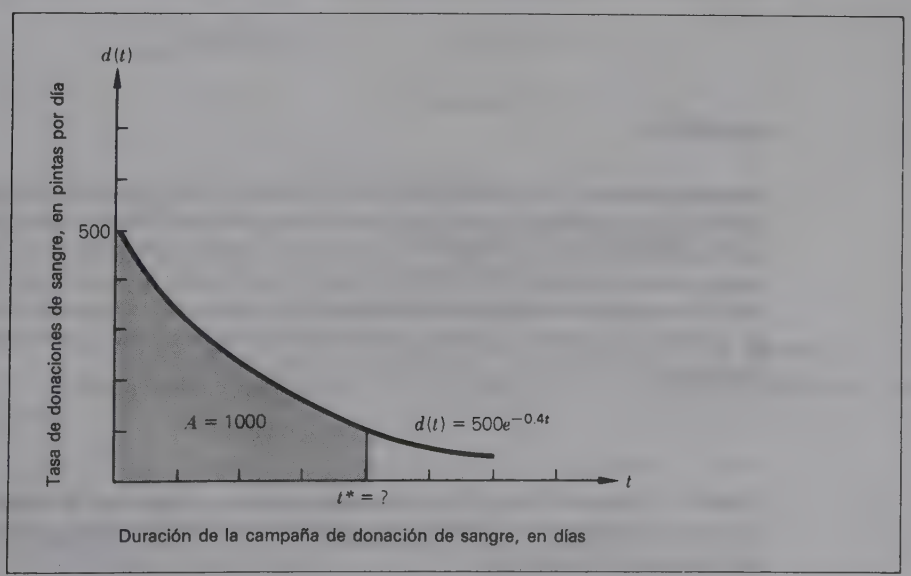


FIGURA 18.30 Determinación del límite superior de integración.

noce ya; la incógnita es el límite superior de integración, como se observa en la figura 18.30. El hospital alcanzará su meta cuando

$$\int_0^{t^*} 500e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

Al reescribir el integrando,

$$\int_0^{t^*} -1\,250(-0.4)e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

o bien

$$-1\,250\int_0^{t^*} -0.4e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

Al evaluar la integral definida y resolviendo para t^*,

$$\begin{aligned}
-1\,250[e^{-0.4t}]_0^{t^*} &= 1\,000\\
-1\,250[e^{-0.4t^*} - e^{-0.4(0)}] &= 1\,000\\
-1\,250[e^{-0.4t^*} - 1] &= 1\,000\\
-1\,250^{-0.4t^*} + 1\,250 &= 1\,000\\
-1\,250e^{-0.4t^*} &= -250\\
e^{-0.4t^*} &= \frac{-250}{-1\,250}\\
e^{-0.4t^*} &= 0.2
\end{aligned}$$

Si se toma el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación (usando la tabla 2),

$$\begin{aligned}
-0.4t^* &= -1.6094\\
t^* &= \frac{-1.6094}{-0.4}
\end{aligned}$$

o

$$t^* = 4.0235$$

Así pues, el hospital alcanzará su meta en 4 días aproximadamente.

EJEMPLO 25

Energía nuclear Una compañía eléctrica ha propuesto construir una planta de energía nuclear en las afueras de una gran área metropolitana. Como cabe suponer, la opinión pública está dividida al respecto y se han suscitado acaloradas discusiones. Un grupo que se opone a la construcción de la planta ha ofrecido algunos datos discutibles sobre las consecuencias de un accidente catastrófico que pudiera ocurrir en la planta. El grupo estima que la tasa a que se producirían las muertes en la zona metropolitana por precipitación radiactiva se describe con la función

$$r(t) = 200\,000e^{-0.1t}$$

donde *r(t) representa la tasa de fallecimientos por hora y t representa el tiempo transcurrido desde el accidente, medido en horas. Nota:* aunque la controversia en este ejemplo es muy real, los datos son ficticios.

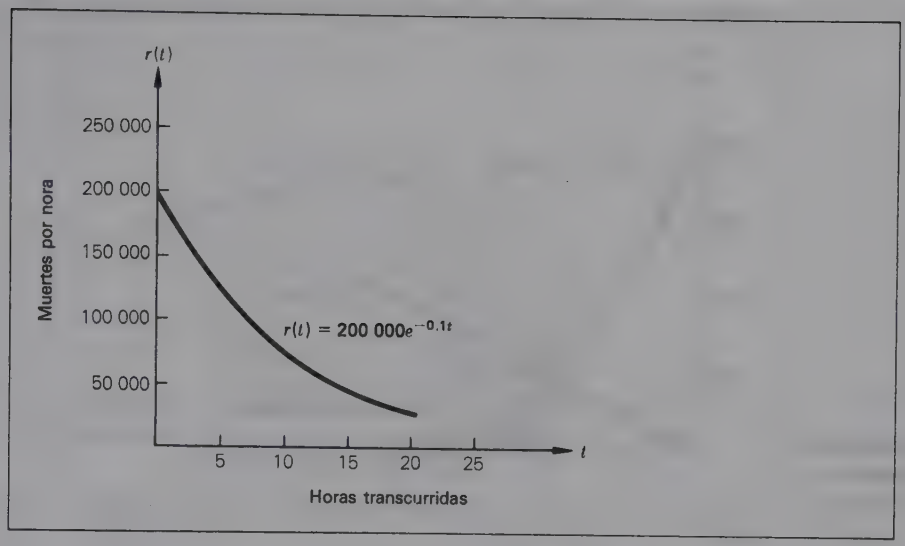


FIGURA 18.31
Mortalidad.

La población del área metropolitana es de 1.5 millones de personas.

a) Determine el número esperado de muertes 1 hora después de un gran accidente.

b) ¿Cuánto tardarán todos los habitantes de esa zona en sucumbir ante los efectos de la radiactividad?

SOLUCIÓN

a) La figura 18.31 ofrece una gráfica de r. El área debajo de esta función entre dos puntos cualesquiera t_1 y t_2 es una medida del número esperado de fallecimientos durante ese intervalo de tiempo. Así pues, el número de muertes esperadas en la primera hora se calcularía como

$$\begin{aligned}\int_0^1 200\,000e^{-0.1t}\,dt &= \int_0^1 -2\,000{,}000(-0.1)e^{-0.1t}\,dt \\ &= -2\,000\,000\int_0^1 (-0.1)e^{-0.1t}\,dt \\ &= -2\,000\,000e^{-0.1t}\Big]_0^1 \\ &= -2\,000\,000e^{-0.1} + 2\,000\,000e^{0} \\ &= -2\,000\,000(e^{-0.1} - e^{0}) \\ &= -2\,000\,000(0.9048 - 1) \\ &= -2\,000\,000(-0.0952) = 190\,400 \text{ personas}\end{aligned}$$

b) Por terrible que parezca, la población entera sucumbiría al cabo de t^* horas, donde

$$\int_0^{t^*} 200\,000e^{-0.1t}\,dt = 1\,500\,000$$

o cuando

$$-2\,000\,000e^{-0.1t}\Big]_0^{t^*} = 1\,500\,000$$

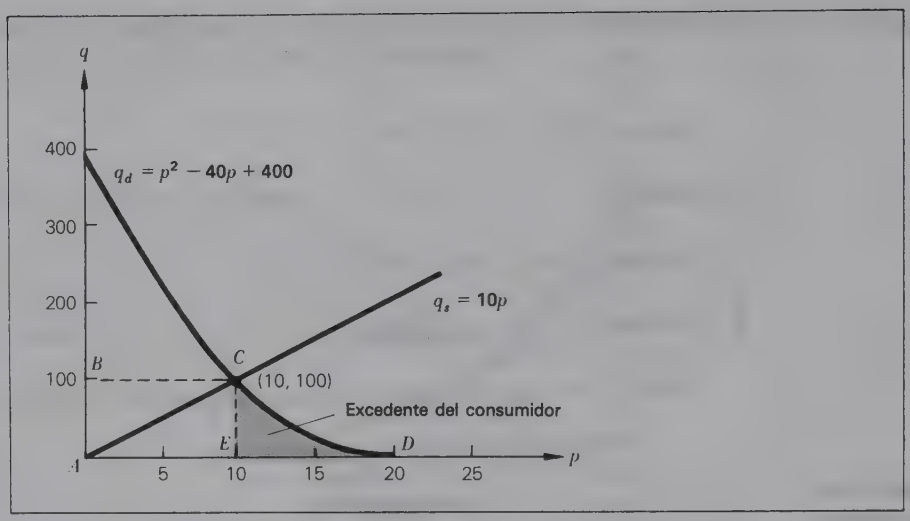


FIGURA 18.32
Excedente del consumidor.

Despejando t^* se obtiene

$$-2\,000\,000e^{-0.1t^*} + 2\,000\,000 = 1.500\,000$$
$$-2\,000\,000e^{-0.1t^*} = -500\,000$$
$$e^{-0.1t^*} = 0.25$$

Si se calcula el logaritmo natural (tabla 2) en ambos lados de la ecuación,

$$-0.1t = -1.3863$$

o bien

$$t = 13.863 \text{ horas}$$

EJEMPLO 26

Excedente del consumidor Una manera de medir el valor o utilidad que un producto tiene para el consumidor es el precio que está dispuesto a pagar por él. Los economistas sostienen que los consumidores en realidad reciben un valor de excedente en los productos que adquieren, atendiendo al modo de funcionar el mercado.

La figura 18.32 describe las funciones de oferta y demanda para un producto. El equilibrio se da cuando se cobra un precio de \$10 y la demanda es de 100 unidades. Si se emplean dólares para representar el valor que este producto tiene para los consumidores, según las prácticas contables modernas el ingreso total (\$10 · 100 unidades = \$1000) es una medida del *valor económico* del producto. Esta medida de valor está representada por el área del rectángulo *ABCE*.

Pero si se tiene presente la naturaleza de la función de demanda, habría habido una demanda del producto a precios mayores que \$10. En otras palabras, habría habido consumidores dispuestos a pagar casi \$20 por él. Y otros habrían sido atraídos al mercado con precios que oscilen entre \$10 y \$20. Si se supone que el precio que estarían dispuestos a pagar es una medida de la utilidad que el producto tiene para ellos, en realidad recibirán un bono cuando el precio de mercado sea \$10. Consulte de nuevo la figura 18.32. Los economistas afirmarían que una medida de la utilidad real del producto es el área *ABCDE*. Y cuando el mercado está en equilibrio, la utilidad adicio-

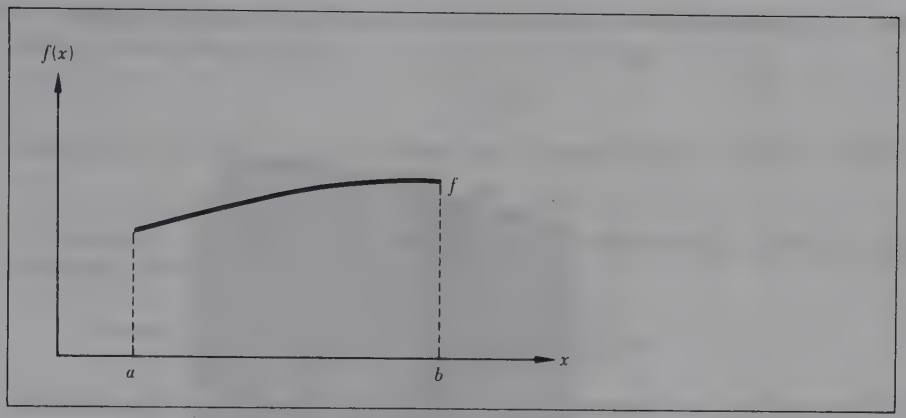


FIGURA 18.33

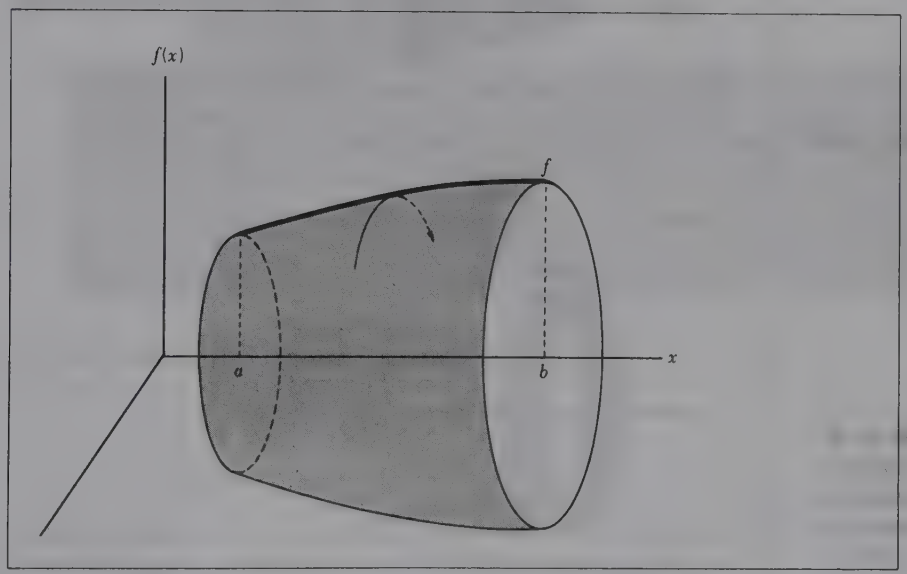


FIGURA 18.34
Superficie de revolución.

nal recibida por los consumidores, denominado ***excedentes del consumidor***, se representa con el área sombreada *CDE*. Esta última se calcula como

$$\int_{10}^{20} (p^2 - 40p + 400)\,dp = \frac{p^3}{3} - 20p^2 + 400p \Big]_{10}^{20}$$

$$= \left[\frac{(20)^3}{3} - 20(20)^2 + 400(20)\right] - \left[\frac{(10)^3}{3} - 20(10)^2 + 400(10)\right]$$

$$= 2\,666.67 - 2\,333.33 = \$333.34$$

Los métodos contables modernos valuarían la utilidad del producto en $1000. Los economistas afirmarían que la utilidad real es de $1333.34, o sea que el excedente del consumidor es de $333.34. Esta medida de utilidad adicional, o bono, se aplica en particular a los consumidores que estarían dispuestos a pagar más de $10.

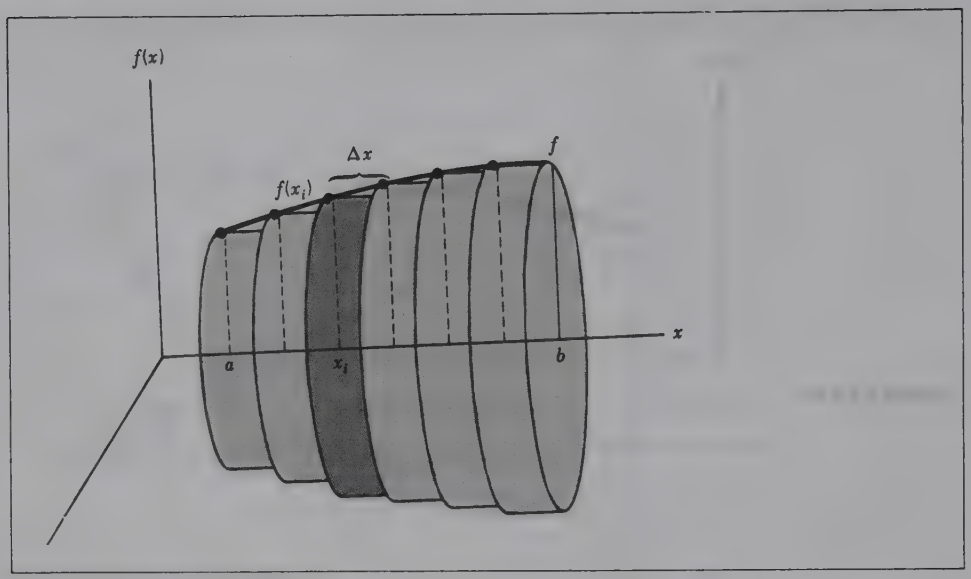


FIGURA 18.35

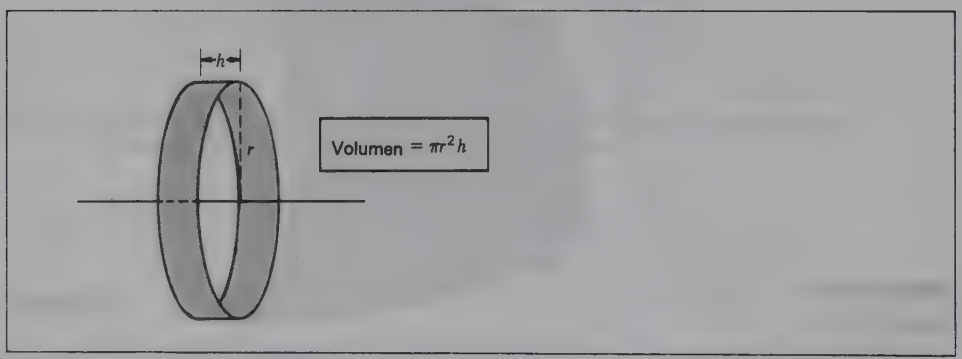


FIGURA 18.36 Cilindro circular de altura h y radio r.

EJEMPLO 27

Volumen de un sólido de revolución Considere la función f en la figura 18.33. Si el medio plano acotado por f, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$ se gira en torno al eje x una revolución completa, se formará una ***superficie de revolución***. Cada punto de f describe una trayectoria circular. La trayectoria compuesta de todos los puntos f en el intervalo $a \leq x \leq b$ es la superficie de revolución que se advierte en la figura 18.34.

A la superficie de revolución corresponde un ***sólido de revolución***. Éste es el volumen que describe el plano a medida que la gráfica de f es girada alrededor del eje x. Supóngase que se desea obtener el volumen del sólido de revolución. Podría estimarse el volumen formando un sólido aproximado de revolución integrado por cilindros circulares rectos como los que se observan en la figura 18.35. En esta figura el intervalo $a \leq x \leq b$ ha sido subdividido en subintervalos iguales de ancho Δx. La altura de cada cilindro es Δx. Y su radio es $f(x_i)$, donde x_i es el valor izquierdo de x para el subintervalo i.

Como se aprecia en la figura 18.36, el volumen del cilindro derecho que tiene un radio r y una altura h es

$$V = \pi r^2 h$$

donde π (pi) = 3.14.... Para cada cilindro recto de la figura 18.35, el volumen será

$$V_i = \pi[f(x_i)]^2 \Delta x$$

Si el intervalo $a \leq x \leq b$ ha sido subdividido en n subintervalos iguales, el volumen estimado del sólido de revolución es

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x$$

La estimación será más exacta a medida que el intervalo $a \leq x \leq b$ se subdivide en un número mayor de subintervalos, aproximándose Δx a 0.

DEFINICIÓN: VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN
En una función f que es continua en un intervalo $a \leq x \leq b$, el volumen del sólido de revolución, generado a medida que la función se gira una revolución alrededor del eje x, se define con

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x$$

Cuando existe el límite, puede probarse que

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \, dx \tag{18.12}$$

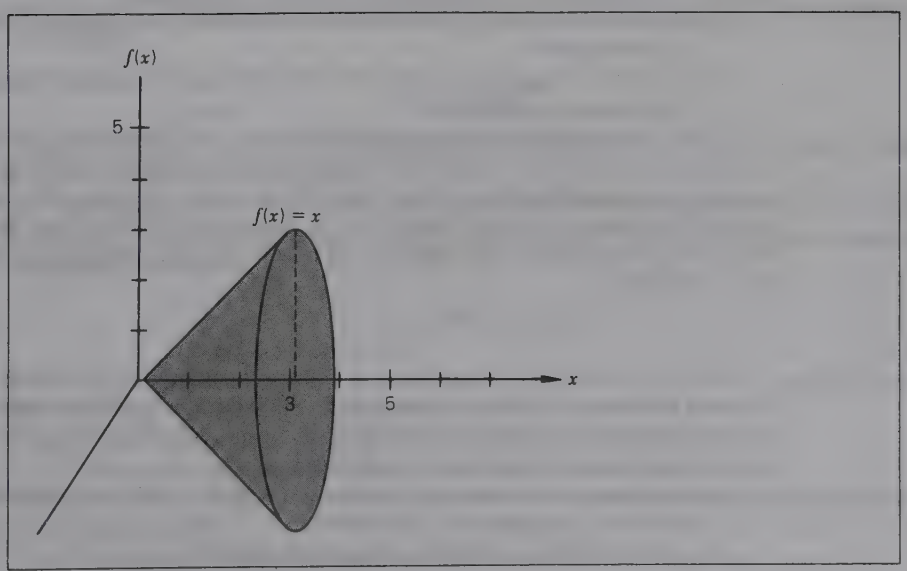


FIGURA 18.37

En la función $f(x) = x$, suponga que se desea calcular el volumen del sólido de revolución generado a medida que la gráfica de f, entre $x = 0$ y $x = 3$, se gira alrededor del eje x. Este sólido se incluye en la figura 18.37. El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \pi(x)^2\,dx \\ &= \pi\frac{(x)^3}{3}\Big]_0^3 \\ &= \pi\left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right] \\ &= 9\pi \\ &\doteq 28.26 \text{ unidades cúbicas} \end{aligned}$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 18.4

1 En función de ingreso marginal del producto de una firma es

$$MR = -0.02x + 10$$

donde x es el número de unidades vendidas.

a) Determine el ingreso total conseguido con la venta de 300 unidades del producto.

b) ¿Cuál es el ingreso agregado que se logra con un incremento de 200 a 300 unidades en la venta?

2 Un fabricante de motores de aviones de propulsión estima que la tasa a que se hacen los costos de mantenimiento de los motores es una función de las horas de operación. En el caso de un motor empleado en un avión comercial, la función es

$$r(x) = 40 + 0.030x^2$$

donde x es el número de horas de operación y $r(x)$ indica la tasa a que se efectúan los costos de reparación (en dólares) por hora de operación.

a) Determine la tasa a que estarán efectuándose los costos al cabo de 100 horas de operación.

b) ¿Cuáles se espera que sean los costos de mantenimiento durante las primeras 100 horas de operación?

3 Una compañía que está especializándose en las ventas por correo emprende una campaña promocional. Los gastos de publicidad le costarán \$5440 por día. Los especialistas en mercadotecnia estiman que la tasa a que se generarán las utilidades (sin contar los costos de publicidad) con la campaña promocional disminuye con la duración de esta última. En concreto, la tasa $r(t)$ de esta campaña se estima por medio de la función

$$r(t) = -40t^2 + 8\,000$$

donde t representa el día de la campaña y $r(t)$ se mide en dólares por día. Con objeto de maximizar la utilidad *neta*, la empresa debería realizar la campaña mientras $r(t)$ sea mayor que el costo diario de la publicidad.

a) Grafique la función $r(t)$ y la función $c(t) = 5440$, que describe la tasa a que se hacen los gastos de publicidad.

b) ¿Cuánto tiempo debería durar la campaña?

c) ¿Cuáles se espera que sean los costos totales de la campaña?
d) ¿Cuál se espera que sea la utilidad *neta*?

4 Vuelva a resolver el ejemplo 23, suponiendo que los gastos de la campaña se hayan realizado a una tasa de \$5000 diarios y que

$$c(t) = -10t^2 + 9\,000$$

5 Resuelva otra vez el ejemplo 25, suponiendo que $r(t) = 200{,}000e^{-0.05t}$.

6 Resuelva nuevamente el ejemplo 25, suponiendo que la población sea 800 000 y $r(t) = 100{,}000e^{-0.1t}$.

7 Al lector se le da la función de demanda

$$q_d = p^2 - 30p + 200$$

y la de oferta

$$q_s = 15p$$

donde p se expresa en dólares, q_d y q_s se dan en unidades y $0 \leq p \leq 9$.

a) Grafique las dos funciones.
b) Determine el precio y la cantidad de equilibrio.
c) Calcule el valor del excedente del consumidor si el mercado está en equilibrio.

8 Conservación de la energía Una pequeña empresa está estudiando la compra de un instrumento de ahorro de energía que reducirá el consumo de combustible. El aparato costará \$75 000. El departamento de ingeniería estima que los ahorros logrados con él se realizarán a la tasa de $s(t)$ dólares por año, donde

$$s(t) = 40\,000e^{-0.5t}$$

y t denota el tiempo medido en años. Determine cuánto tardará la empresa en recuperar el costo del aparato (es decir, cuándo los ahorros acumulados de combustible equivaldrán al costo de compra).

9 Administración de un banco de sangre El banco de sangre de un hospital lleva a cabo una campaña anual de donación de sangre con el propósito de reponer su inventario. El hospital estima que la sangre será donada a una tasa de $d(t)$ pintas por día, donde

$$d(t) = 500e^{-0.4t}$$

y t es la duración (en días) de la campaña. Si la meta es reunir 1000 pintas, ¿cuándo la habrá alcanzado el hospital?

10 Administración forestal En las últimas tres o cuatro décadas ha ido creciendo la demanda de madera forestal comercial. He aquí la función que describe la tasa de la demanda de madera:

$$d(t) = 30 + 0.004t^2$$

donde $d(t)$ se expresa en miles de millones de pies cúbicos por año y t es el tiempo en años ($t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1980).

a) Determine la tasa de demanda al inicio de 1985.
b) Determine la tasa de demanda al inicio del año 2000.
c) Determine la demanda *total* de la madera durante el periodo comprendido entre 1980 y 1999.
(*Sugerencia:* integre $d(t)$ entre $t = 0$ y $t = 20$.)

11 Administración de desperdicios sólidos La tasa $w(t)$ a que están generándose desperdicios sólidos en una de las grandes ciudades de Estados Unidos se describe mediante la función

$$w(t) = 0.6e^{0.03t}$$

donde $w(t)$ se expresa en miles de millones de toneladas por año y t denota el tiempo medido en años ($t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1985).

a) Determine la tasa a que se espera que se produzcan los desechos sólidos a principios de 1985.

b) ¿Cuál es el tonelaje que, según las previsiones, se generará en el periodo comprendido entre 1985 y 2004?

12 Control de epidemias Un centro de investigación se especializa en el estudio de epidemias. Según sus estimaciones, para determinado tipo de epidemia que azotó a una región del país la tasa a que afectó a otras personas se describe mediante la función

$$r(t) = 100e^{0.4t} - 100$$

donde $r(t)$ es la tasa de los nuevos pacientes, medida en personas por día y t indica el tiempo transcurrido desde que se desencadenó la epidemia, medido en días. *a*) ¿Cuántas personas contrajeron la enfermedad durante los primeros 10 días? *b*) ¿Y durante los primeros 25 días?

13 Curvas de aprendizaje Los que laboran en las industrias manufactureras han observado en muchas ocasiones que los empleados asignados a un nuevo trabajo o tarea adquieren mayor eficiencia con la experiencia. En otras palabras, conforme repiten una misma tarea, se van familiarizando más con las operaciones, movimientos y equipo requeridos para efectuarla. Algunas compañías tienen suficiente experiencia en la capacitación laboral y, por lo tanto, pueden prever la rapidez con que un empleado aprenderá el trabajo. Con mucha frecuencia es posible construir una *curva de aprendizaje* que estime la rapidez con que se realiza una tarea en función de las veces que la ha ejecutado un empleado.

La *curva de aprendizaje* de un trabajo en particular ha sido definido en los siguientes términos:

$$h(x) = \frac{10}{x} + 5 \qquad x > 0$$

donde $h(x)$ denota la tasa de producción medida en horas por unidad y x la unidad producida.

a) Determine la tasa de producción $h(x)$ en el tiempo de la quinta unidad ($x = 5$).

b) La integración de la curva de aprendizaje en un intervalo especificado ofrece una estimación del número total de horas de producción requeridas en el nivel correspondiente de producción. Determine el número total de horas que, según se espera, se tardará en producir las primeras 10 unidades al integrar $h(x)$ entre $x = 1$ y $x = 10$.

c) Grafique h.

d) ¿Hay un límite que indique la eficiencia que alcanzará un empleado en este trabajo?

14 Excedente del productor El ejemplo 26 explica el concepto de excedente (superávit) del consumidor, el cual representa lo que en opinión de los economistas constituye una medida de la utilidad adicional que reciben los consumidores cuando el mercado está en equilibrio. Los economistas señalan asimismo que los productores obtienen un

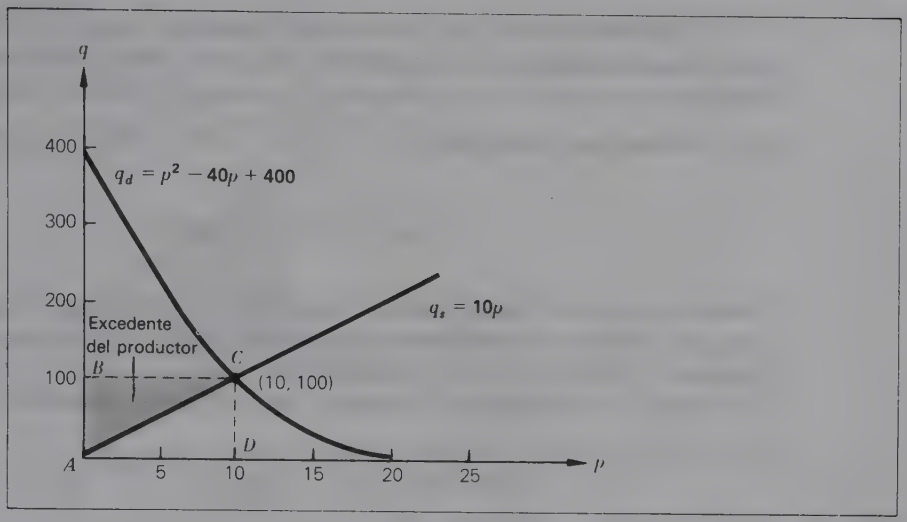


FIGURA 18.38

bono o utilidad agregada cuando se da ese fenómeno. La figura 18.38 repite las funciones de oferta y demanda incluidas en el ejemplo 26.

Si el lector se centra en la función de oferta q_s, ésta le indicará que algunos proveedores estarían dispuestos a ofrecer unidades a precios menores que el de equilibrio: \$10. Cuando el precio del mercado es \$10, ganarían más de lo que habrían ganado en caso contrario. Si cada uno vende al precio al que está dispuesto a hacerlo, el ingreso total lo representaría el área ACD. Dado que el ingreso total en estado de equilibrio está representado por $ABCD$, el área sombreada denota una medida del valor agregado de los proveedores. A ese valor se le da el nombre de *excedente del productor*.

a) Determine el excedente del productor en el ejemplo 26.

b) Calcule el excedente del productor para las funciones descritas en el ejercicio 7.

15 En la función $f(x) = -x^2 + 16$, encuentre el volumen del sólido de revolución entre $x = 0$ y $x = 4$ si f se gira alrededor del eje x.

16 En la función $f(x) = -x - 3$, calcule el volumen del sólido de revolución entre $x = -3$ y $x = 4$ si f se gira alrededor del eje x.

18.5 CÁLCULO INTEGRAL Y PROBABILIDAD (OPCIONAL)

Una función matemática que determina la probabilidad de cada posible resultado de un experimento recibe el nombre de ***función de densidad de probabilidad*** (fdp). En comparación con las distribuciones de probabilidad que muestran cada resultado y su probabilidad, estas funciones pueden ser concebidas como las funciones matemáticas con las que se calcula la probabilidad. Si x es una variable aleatoria continua, su función de densidad f habrá de satisfacer dos condiciones:

1 $f(x) \geq 0$ para todas las x.

2 El área bajo la gráfica de f es 1.

La primera condición prohíbe las probabilidades negativas de cualquier evento y la segunda garantiza que los eventos sean mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

La probabilidad de que una variable aleatoria x adopte un valor en el intervalo comprendido entre a y b, donde $a < b$, es el área bajo la función de densidad entre $x = a$ y $x = b$. Al aplicar la integral definida, la probabilidad de que x asuma un valor entre $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)\ dx$, esto es,

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Desde el punto de vista técnico, si quisiéramos determinar la probabilidad de que una variable x normalmente distribuida, con una media μ y una desviación estándar σ, adopte un valor comprendido entre $x = a$ y $x = b$, $a < b$, podría obtenerse la probabilidad integrando la función de densidad, o sea

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2[(x-\mu)/\sigma]^2}\,dx$$

Por fortuna, la conversión equivalente a la distribución normal estándar y la existencia de tablas como la tabla 10.21 hacen innecesario efectuar lo que parece ser una integración compleja.

EJEMPLO 28

Considere la función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria x

$$f(x) = \frac{2 + x}{30} \qquad 0 \leq x \leq 6$$

Determine la probabilidad de que x adopte un valor entre 2 y 5.

SOLUCIÓN

La función de densidad y el área de interés se dan en la figura 18.39. La probabilidad se calcula así:

$$\begin{aligned} P(2 \leq x \leq 5) &= \int_2^5 \frac{2 + x}{30}\,dx \\ &= \frac{x}{15} + \frac{x^2}{60}\Bigg]_2^5 \\ &= \left(\frac{5}{15} + \frac{5^2}{60}\right) - \left(\frac{2}{15} + \frac{2^2}{60}\right) \\ &= \frac{5}{15} + \frac{25}{60} - \frac{2}{15} - \frac{4}{60} \\ &= \frac{20 + 25 - 8 - 4}{60} = \frac{33}{60} = .55 \end{aligned}$$

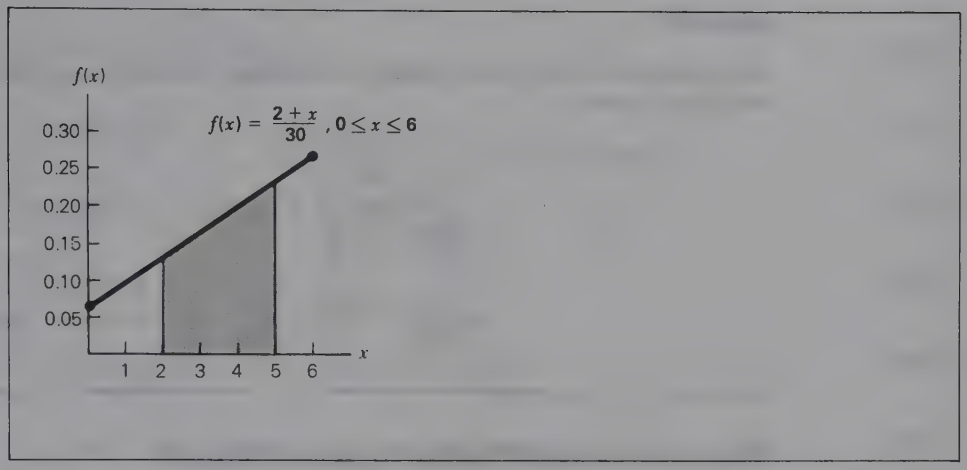


FIGURA 18.39
Función de densidad de probabilidad.

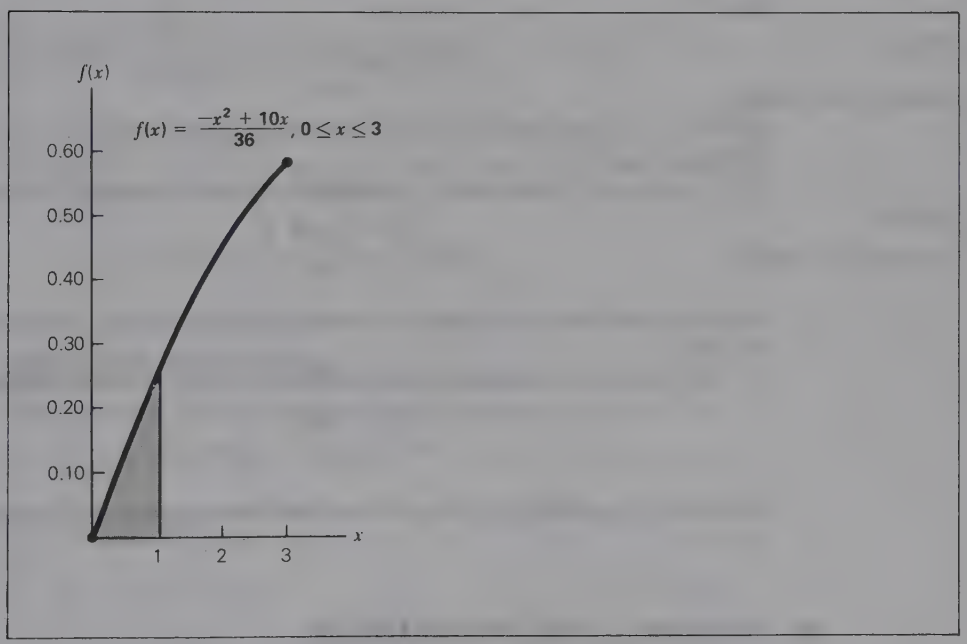


FIGURA 18.40
Función de densidad de probabilidad.

EJEMPLO 29

Se aplica un examen de 3 horas de duración a todos los candidatos a vendedores en una cadena minorista. Se ha descubierto que el tiempo x en horas necesario para efectuar el examen es aleatorio y tiene una función de densidad

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x}{36} \qquad 0 \le x \le 3$$

Determine la probabilidad de que alguien termine la prueba en 1 hora o en menos tiempo.

SOLUCIÓN

En la figura 18.40 se dan la función de densidad y el área de interés. La probabilidad se calcula como

$$P(0 \le x \le 1) = \int_0^1 \frac{-x^2 + 10x}{36}\,dx$$

$$= \frac{-x^3}{108} + \frac{10x^2}{72}\Big]_0^1$$

$$= \frac{-(1)^3}{108} + \frac{10(1)^2}{72} = \frac{-1}{108} + \frac{10}{72} = -.009 + .139 = .13$$

Ejercicios de seguimiento de la sección 18.5

1 He aquí la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua x:

$$f(x) = \frac{5 - x}{4.5} \qquad 2 \le x \le 5$$

¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor mayor que 3? ¿Y menor que 2?

2 La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua x es

$$f(x) = \frac{x^2 - 10x + 25}{39} \qquad 0 \le x \le 3$$

Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor mayor que 2. Menor que 1.

3 La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua x es

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{36} \qquad 2 \le x \le 6$$

Determine la probabilidad de que la variable aleatoria continua adopte un valor entre 2 y 4.

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

función de densidad de probabilidad 891
integral definida 848
límites (superior e inferior) de integración 851
'regla del rectángulo 869
regla de Simpson 873
regla del trapecio 872
teorema fundamental del cálculo integral 851

■ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \textbf{(18.3)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{18.4}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{18.5}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{18.6}$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \tag{18.7}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \tag{18.8}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \tag{18.9}$$

(Regla del rectángulo)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left[\frac{b-a}{2n}\right](y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{18.10}$$

(Regla del trapecio)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{18.11}$$

(Regla de Simpson)

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-30 se relacionan con la sección 18.1.

1 $\int_0^2 (x^2 - 8e^x - 12)\,dx$

2 $\int_2^4 (4x^2 + 15)\,dx =$

3 $\int_{-2}^4 (8x + 9)\,dx =$

4 $\int_{-1}^5 8x^2\,dx =$

5 $\int_0^4 (-2x^3 + 8x^2)\,dx =$

6 $\int_{-2}^2 (x + 8)/x^3\,dx =$

7 $\int_0^3 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 5)\,dx$

8 $\int_2^5 (20x^3 - 15x^2 + 10x)\,dx$

9 $\int_0^5 (2x)(x^2 + 3)^3\,dx$

10 $\int_0^2 (2x)(x^2 - 5)^3\,dx$

11 $\int_1^3 (x^2/2 + 2x)\,dx =$

12 $\int_{-1}^2 9x^2e^{x^3}\,dx =$

13 $\int_{-2}^2 (-6xe^{x^2+2}\,dx =$

14 $\int_1^4 \frac{6x}{3x^2 + 8}\,dx =$

15 $\int_0^2 x^{1/2}(1 + x^2)\,dx =$

16 $\int_{-2}^0 e^{-1-6x}\,dx =$

17 $\int_1^2 3x^2(x^3 + 5)^4\,dx$

18 $\int_2^4 12x^2(x^3 - 10)^3\,dx$

19 $\int_0^3 6x(3x^2 - 6)^3\,dx$

20 $\int_0^4 (12x)(2x^2 - 5)^4\,dx$

21 $\int_1^3 \frac{6x}{x^2 + 3}\,dx$

22 $\int_0^2 \frac{-8x}{10 - 2x^2}\,dx$

23 $\int_0^4 \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1}\,dx$

24 $\int_3^5 \frac{4x - 4}{2x^2 - 4x - 5}\,dx$

25 $\int_4^5 \frac{6x^2 - 12x}{x^3 - 3x^2}\,dx$

26 $\int_1^4 \frac{12x^2 + 24x}{2x^3 + 6x^2}\,dx$

27 $\int_0^3 (x^2 + 7x + 4)\,dx - \int_0^3 (x^2 + 7x + 3)\,dx =$

28 $\int_1^4 (x^2 + 6)\,dx + \int_1^4 (x^2 + x + 6)\,dx =$

29 $\int_{-4}^3 (8x^2 + 2x)\,dx - \int_{-4}^3 (x^2 + 3x + 5)\,dx =$

30 $\int_0^5 (x^4 - 3x^2 + 10)\,dx - \int_0^5 (4x^3 + 3x^2 - 6)\,dx + \int_0^5 (4x^4 + 6x^2 - 4)\,dx$

Los ejercicios 31-42 se relacionan con la sección 18.2. En los ejercicios 31.36, *a*) grafique f y *b*) determine el tamaño del área entre f y el eje x en el intervalo señalado.

31 $f(x) = 15 + 2x$, entre $x = 2$ y $x = 6$

32 $f(x) = e^{2x}$, entre $x = 0$ y $x = 4.5$

33 $f(x) = 3x^2$, entre $x = 3$ y $x = 8$

34 $f(x) = \ln(x)$, entre $x = 10$ y $x = 20$

35 $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 2$ y $x = 6$

36 $f(x) = 2x^3$, entre $x = 1$ y $x = 5$

37 En $f(x) = 2x^2 + 2$ y $g(x) = 4x + 8$, cuando $x \geq 0$, calcule el tamaño del área acotada en ambos lados por las dos funciones y por el eje y.

38 En $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 18$, determine el tamaño del área finita que está acotada por dos funciones (le ayudará mucho hacer una gráfica).

39 En $f(x) = 10 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 22$, si $x \geq 0$, determine el tamaño del área acotada en los tres lados por las dos funciones y por el eje y.

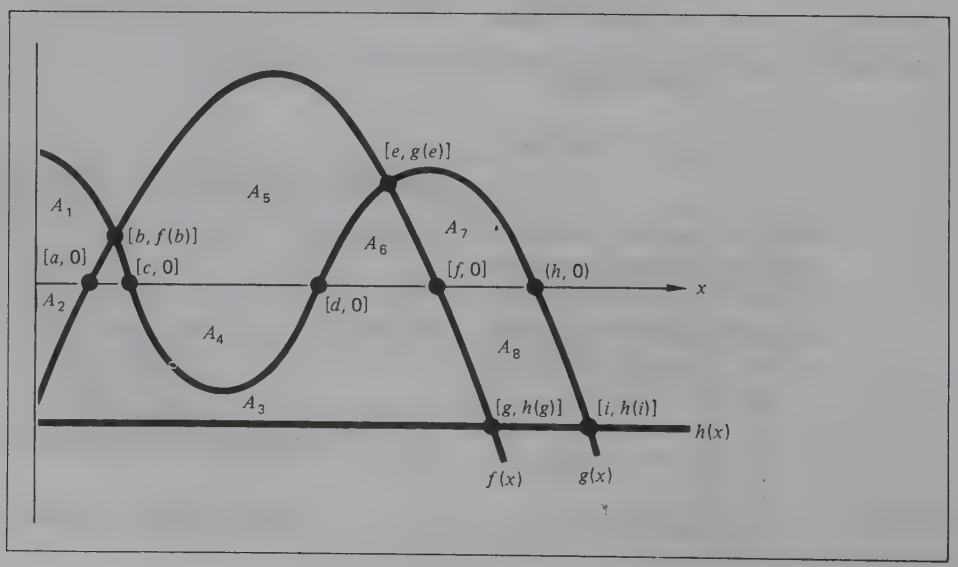


FIGURA 18.41

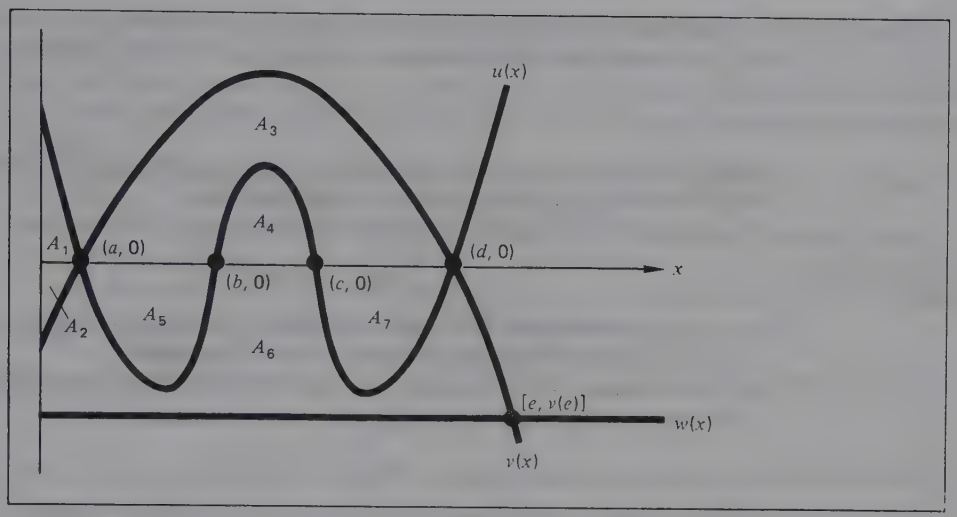


FIGURA 18.42

40 En $f(x) = 20 - x$ y $g(x) = 4x - 5$, determine el tamaño del área acotada en los tres lados por las dos funciones y por el eje y.

41 En las funciones de la figura 18.41, obtenga las combinaciones de las integrales definidas que se necesitan para determinar el tamaño de *a)* A_1, *b)* A_2, *c)* A_3, *d)* A_4, *e)* A_5, *f)* A_6, *g)* A_7 y *h)* A_8.

42 En las funciones de la figura 18.42, obtenga las combinaciones de las integrales definidas que se requieren para calcular el tamaño de *a)* A_1, *b)* A_2, *c)* A_3, *d)* A_4, *e)* A_5, *f)* A_6 y *g)* A_7.

Los ejercicios 43-58 se relacionan con la sección 18.3. En los siguientes ejercicios, *a)* evalúe la integral definida por medio de las reglas explícitas de integración; *b)* aproxime la integral definida con las reglas del rectángulo, del trapecio y de Simpson (subdividiendo en cuatro intervalos) y *c)* escoja el método de aproximación más exacto.

43 $\int_2^6 (x^3 - 6x^2 + 4x)\,dx$

44 $\int_0^8 (8x^3 + 6x^2)\,dx$

45 $\int_0^2 (10 - 3x^2)\,dx$

46 $\int_0^4 (5 + 2x - 3x^2)\,dx$

47 $\int_2^4 6xe^{x^2-1}\,dx$

48 $\int_0^4 4xe^{2x^2}\,dx$

49 $\int_2^6 (4x - 12x^2)(x^2 - 2x^3)^4\,dx$

50 $\int_2^{10} 3x^2(x^3 - 1)^3\,dx$

51 $\int_1^3 (8x^3 - 6x^2)\,dx$

52 $\int_1^5 (2x - 6x^2 + 4x^3)\,dx$

En las siguientes integrales definidas, analice el efecto que se tiene en el error de aproximación, conforme el número de los intervalos aumenta de $n = 2$ a $n = 4$ a $n = 8$. Aplique las reglas estándar de integración para calcular el valor real de la integral definida y luego haga la aproximación sirviéndose del método citado.

53 $\int_0^8 x^2\,dx$, regla del rectángulo

54 $\int_0^4 x^3\,dx$, regla del rectángulo

55 $\int_0^4 (3x^2 + 4x^3)\,dx$, regla del trapecio

56 $\int_2^6 (10x - 4x^3)\,dx$, regla del trapecio

57 $\int_0^8 (8x^3 - 4x)\,dx$, regla de Simpson

58 $\int_0^4 (-8x^3 + 6x^2)\,dx$, regla de Simpson

Los ejercicios 59-67 se relacionan con la sección 18.4.

59 La función de ingreso marginal del producto de una firma es

$$MR = f(x) = 24$$

donde x es el número de unidades vendidas. Con una integral definida obtenga el ingreso total conseguido con la venta de 600 unidades.

60 La función de ingreso marginal del producto de la firma es

$$MR = -0.08x + 12$$

donde x indica el número de unidades vendidas. ¿Cuál será el ingreso adicional en caso de que las ventas se incrementen de 100 a 200 unidades?

61 El fabricante de un equipo industrial especial estima que la tasa anual de gastos $r(t)$ de mantenimiento está representada por la función

$$r(t) = 2\,000 + 28t^2$$

donde t es la edad de la máquina en años y $r(t)$ está medida en dólares por año. *a*) Determine la tasa a que se están realizando los costos de mantenimiento cuando la máquiquina tenga 2 años de uso. *b*) ¿Cuáles son los costos de mantenimiento en los tres primeros años, según las estimaciones hechas?

62 Consumo de gasolina En 1986 el consumo de gasolina en una región de Estados Unidos fue de 8000 millones de barriles. La demanda estaba creciendo a una tasa exponencial de 8% al año. La función que describe ese índice de consumo $c(t)$ en el tiempo t es

$$c(t) = 8e^{0.08t}$$

donde t se mide en años; $t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1986 y $c(t)$ se mide en miles de millones de barriles por año. Si la demanda de petróleo sigue incrementándose a esa tasa, ¿qué cantidad se espera que se consuma en el periodo de 20 años comprendido entre el 1 de enero de 1986 y el 1 de enero del año 2006?

***63 Velocidad y aceleración** Dada la función $s(t)$ que describe la posición de un objeto en movimiento en términos del tiempo t, la función de velocidad es $v(t) = s'(t)$ y la función de aceleración es $a(t) = v'(t) = s''(s)$.

Un objeto en caída libre presenta una aceleración constante hacia abajo de 32 pies por segundo cuadrado. La función de aceleración de un objeto determinado es $a(t) = -32$. La velocidad inicial del objeto arrojado desde el nivel del suelo es de 80 pies por segundo.

a) Determine la función $v(t)$ que describe la velocidad del objeto en el tiempo t.
b) Determine la velocidad cuando $t = 3$.
c) Determine la función $s(t)$ que describe la altura del objeto en el tiempo t.
d) ¿Cuál es la altura con $t = 2$?

64 La demanda de un producto ha ido decreciendo a una tasa exponencial. La tasa anual de la demanda $d(t)$ es

$$d(t) = 400\,000e^{-0.2t}$$

donde $t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1986. La demanda sigue disminuyendo a la misma tasa.

a) Determine la tasa anual de demanda cuando $t = 5$.
b) ¿Cuántas unidades totales se espera que se demanden en el intervalo de tiempo comprendido entre 1986 y 1995 ($t = 0$ a $t = 10$)?

65 Un estado ha proyectado que el costo de la compensación por desempleo tendrá una tasa de $10e^{0.05t}$ millones de dólares por año en t años a contar del momento actual. *a*) Calcule la compensación por desempleo que se pagará en los próximos 5 años. *b*) ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes que los beneficios totales pagados sean de $300 millones?

66 Dada la función $f(t) = 2e^{0.5t}$, encuentre el volumen del sólido de revolución entre $t = 0$ y $t = 4$. Grafique el sólido de revolución.

67 Un fabricante de computadoras estima que las ventas de sus sistemas de microcomputación tendrán una tasa de $\sqrt{1.2t + 10}$ mil unidades por año en t años a partir de hoy. *a*) ¿A qué tasa se espera que estén las ventas al cabo de 3 años? *b*) ¿Cuáles se espera que sean las ventas en los 3 próximos años?

Los ejercicios 68-70 se relacionan con la sección 18.5.

68 La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua es

$$f(x) = \tfrac{3}{4}(4x - x^2 - 3) \qquad 1 \le x \le 3$$

Determine la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor menor que 2.5. Mayor que 2.0.

69 La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua x es

$$f(x) = \frac{-x^3 + 80}{256} \qquad 0 \le x \le 4$$

¿Qué probabilidad hay de que la variable aleatoria asuma un valor entre 1 y 4?

70 He aquí la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua:

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{36} \qquad 2 \le x \le 6$$

Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria continua adopte un valor entre 2 y 5.

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 Evalúe *a*) $\int_0^4 (x^2 - 3x + 1)\,dx$ y *b*) $\int_2^4 e^{x/2}\,dx$.

2 En las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 8 + 2x$, *a*) grafique las dos funciones. *b*) Cuando $x \ge 0$, obtenga el área acotada por las dos funciones y el eje y.

3 Un fabricante de automóviles estima que la tasa anual de gastos de mantenimiento $r(t)$ de uno de sus modelos está representada por la función

$$r(t) = 120 + 8t^2$$

donde t es la edad del automóvil expresada en años y $r(t)$ se mide en dólares por año.

a) ¿A que tasa anual se hacen los gastos de mantenimiento cuando el automóvil tiene 4 años de uso?

b) ¿Cuáles se espera que sean los gastos totales de mantenimiento durante los 3 primeros años?

4 La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua es

$$f(x) = \frac{2 + x}{30} \qquad 0 \leq x \leq 6$$

Calcule la probabilidad de que x asuma un valor mayor que 2.

5 Dada la integral definida

$$\int_0^8 3x^2\,dx$$

a) Evalúela por medio de las reglas explícitas de integración.
b) Aproxime el valor mediante las reglas del rectángulo, del trapecio y de Simpson (subdividiendo entre cuatro intervalos).
c) Determine el método de aproximación más exacto.

MINICASO

EL DILEMA DEL SEGURO SOCIAL: UN PROBLEMA DE SOLVENCIA

A fines del decenio de 1970, el gobierno estadounidense y los ciudadanos de ese país (sobre todo los de mayor edad) empezaron a externar una honda preocupación por el programa del Seguro Social y su supervivencia. El problema más grave era el crecimiento de la población elegible para recibir los beneficios. Los gastos hechos por el fondo fiduciario del Seguro Social llegaron a un nivel que crecía a un ritmo mayor que el de los ingresos. El fondo guardaba un equilibrio aproximadamente de $24 000 millones a principios de 1980.

Los economistas confirmaron que la tasa de gastos realizados en los beneficios estaba creciendo de una manera *lineal*. Un grupo de genios de las finanzas predijo que los gastos alcanzarían una tasa anual de $122.5 mil millones al empezar 1980. A comienzos de 1985 ese grupo estimó que los gastos mostrarían una tasa anual de $230 000 millones. Confirmó asimismo que la tasa de generación de ingresos estaba aumentando en forma lineal. Según sus proyecciones, se generarían ingresos a una tasa anual de $177.5 mil millones a principios de 1980 y de $222.5 mil millones a comienzos de 1985.

Se pide:

1 Formular la función lineal que estime la tasa de gastos en términos del tiempo. Expresar la función lineal que calcule la tasa de la generación de ingresos en términos del tiempo. Grafique ambas funciones.

2 Suponiendo que sean válidos los pronósticos de los economistas, determine cuándo se agotará el fondo fiduciario (esto es, cuándo se terminará el saldo de $24 000 millones). Suponga que la cifra anterior haya sido normalizada para incluir el ingreso obtenido por concepto de intereses en el saldo del fondo

fiduciario, lo mismo que los ingresos provenientes de las cuotas del Seguro Social.

3 Si son válidas las suposiciones hechas por los economistas, ¿cuál fue el déficit proyectado que se espera tener a principios de 1985?

4 Se han propuesto varias medidas correctivas. Un senador recomendó transferir anualmente \$5000 millones de dólares por año del fondo fiduciario del programa Medicare, con el fin de posponer la quiebra. ¿Cuánto tardará el fondo en agotarse en caso de que se logre la transferencia?

5 Otra propuesta establece una reducción drástica en los beneficios de quienes se jubilen a los 62 años de edad. Si este plan se pone en práctica, según las proyecciones de los economistas los gastos a principios de 1985 disminuirán a una tasa anual de \$217.5 mil millones (todavía se supone que haya una tendencia lineal). Suponiendo que la tasa de generación de ingresos permanezca inalterada, ¿cuándo será igual a esta tasa la de generación de ingresos? ¿Se agotará el fondo si se implanta esta propuesta?

6 Una tercera propuesta aconseja incrementar la tasa tributaria del Seguro Social, lo cual vendría a mejorar los ingresos del fondo fiduciario. En caso de que se apruebe el monto propuesto, los economistas estimaron que la tasa de generación de ingresos sería una tasa anual de \$230 000 millones a comienzos de 1985 (se supone todavía la existencia de una tendencia lineal). Suponiendo que la tasa de gastos permanezca inalterada como se estimó inicialmente, ¿cuándo será igual a la de generación de ingresos? ¿Se agotará el fondo fiduciario al aplicar esta propuesta?

CAPÍTULO

19 MATEMÁTICAS FINANCIERAS

19.1 EL INTERÉS Y SU CÁLCULO
19.2 CÁLCULOS DE UN SOLO PAGO
19.3 LAS ANUALIDADES Y SU VALOR FUTURO
19.4 LAS ANUALIDADES Y SU VALOR PRESENTE
19.5 ANÁLISIS DE COSTO-BENEFICIO

TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS
FÓRMULAS IMPORTANTES
EJERCICIOS ADICIONALES
PRUEBA DEL CAPÍTULO
MINICASO: LA CORPORACIÓN XYZ

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ofrecer un conocimiento del valor del dinero en el tiempo
- Ofrecer un conocimiento de las matemáticas de los cálculos del interés para un solo pago y las estructuras del flujo de efectivo en las anualidades
- Dar a conocer la naturaleza y los cálculos relacionados con los préstamos hipotecarios
- Explicar el análisis de costo-beneficio y consideraciones relacionadas con él

El presente capítulo versa sobre las tasas de interés y sus efectos en el valor del dinero. Las tasas ejercen una influencia general en las decisiones tomadas por las empresas y por nosotros en nuestra vida personal. Las compañías pagan cada año millones de dólares por concepto de intereses por el uso del dinero que obtienen mediante préstamos. El público gana dinero con sus inversiones en cuentas de ahorros, certificados de depósito y los fondos colocados en el mercado del dinero. Pero también pagan por utilizar el dinero que han pedido prestado para los gastos de colegiatura, el pago de hipotecas y las compras efectuadas con tarjeta de crédito.

El concepto de interés también tiene aplicaciones que son ajenas al dinero. Así, el crecimiento de la población puede caracterizarse por una "tasa de interés" o de crecimiento.

Se estudiarán primero la naturaleza del interés y su cálculo. Luego se explicarán varias situaciones de inversión y los cálculos concernientes a cada una de ellas. A continuación en una sección especial se describirán los cálculos referentes a las hipotecas. Por último, en la última sección se expondrá el análisis de costo-beneficio.

19.1 EL INTERÉS Y SUS CÁLCULOS

Interés simple

El ***interés*** es una cantidad que se paga por emplear el dinero ajeno. Se pagan intereses sobre hipotecas por usar el dinero de un banco. Y ese dinero se utiliza para pagar a un contratista o a una persona a quien se compra una casa. De manera análoga, el banco paga interés por el dinero invertido en cuentas de ahorro o en certificados de depósito, pues tiene acceso temporal a él. Se da el nombre de ***capital*** al dinero que se presta o invierte. Los intereses suelen pagarse en proporción al capital y al periodo durante el cual se usa el dinero. La ***tasa de interés*** especifica a qué porcentaje se acumula el interés. Y suele expresarse como un *porcentaje del capital* por periodo.

El interés que se paga exclusivamente sobre la cantidad del capital se llama ***interés simple***. Casi siempre se asocia a préstamos o inversiones de corta duración. Su cálculo se funda en la siguiente fórmula:

Interés simple = capital × tasa de interés por periodo × número de periodos

o bien

$$\boxed{I = Pin} \qquad \textbf{(19.1)}$$

donde

I = *interés simple (en dólares)*
P = *capital (en dólares)*
i = *tasa de interés por periodo*
n = *número de periodos del préstamo*

Es indispensable que los periodos de i y n sean compatibles entre sí. En otras palabras, si i se expresa como porcentaje anual, n habrá de expresarse en número de años. De manera semejante, si i se expresa como porcentaje mensual, n deberá formularse en número de meses.

EJEMPLO 1

Una organización crediticia ha concedido un préstamo de 3 años por $5000. Se cobra un interés simple a una tasa de 10% por año. El capital y el interés habrán de liquidarse al final del tercer año. Calcule el interés durante el periodo de 3 años. ¿Qué cantidad se pagará al final del tercer año?

SOLUCIÓN

Al aplicar las definiciones de las variables dadas en la ecuación (19.1), se obtiene P = \$5000, i = 0.10 por año y n = 3 años. Por tanto,

$$I = (\$5\,000)(0.10)(3)$$
$$= \$1\,500$$

La cantidad que deberá liquidarse es el capital *más* los intereses acumulados, esto es,

$$A = P + I$$
$$= \$5\,000 + \$1\,500 = \$6\,500$$

EJEMPLO 2

Un individuo "presta" \$10 000 a una corporación al comprar un bono emitido por ella. El interés simple se calcula trimestralmente a una tasa de 3% por trimestre, enviándose por correo un cheque trimestral por concepto de intereses a todos los tenedores de bonos. Estos últimos vencen al cabo de 5 años, y el último cheque incluye el capital inicial junto con los intereses acumulados en el último trimestre. Calcule el interés ganado cada trimestre y el interés total que se ganará durante la vida de 5 años de los bonos.

SOLUCIÓN

En este problema, P = \$10 000, i = 0.03 por trimestre y el periodo del préstamo es 5 años. Puesto que el periodo correspondiente a i es un trimestre, hay que considerar 5 años como 20 trimestres. Y como queremos determinar la magnitud del interés ganado en un trimestre, haremos n = 1. Por tanto, el interés semestral será

$$I = (\$10\,000)(0.03)(1)$$
$$= \$300$$

Para calcular el interés total en un periodo de 5 años, se multiplica el interés trimestral de \$300 por un número de trimestres, 20 y se obtiene

$$\text{Total interés} = \$300 \times 20 = \$6\,000$$

Interés compuesto

Un procedimiento común con el cual se calcula el interés es la *capitalización de los intereses*. En este procedimiento, se reinvierte el interés. El que se genera en cada periodo se suma al capital con el propósito de calcular el del siguiente periodo. La cantidad de los intereses obtenida con este procedimiento recibe el nombre de ***interés compuesto***.

Con un ejemplo muy sencillo se explicará este procedimiento. Supóngase que hemos depositado \$8000 en un bono cooperativo que paga un interés de 8% anual, *capitalizable* trimestralmente. Supóngase que queremos calcular

TABLA 19.1

Trimestre	(*P*) Capital	(*I*) Interés	(*S* = *P* + *I*) Monto compuesto
1	$8 000.00	$160.00	$8 000.00 + $160.00 = $8 160.00
2	8 160.00	163.20	8 160.00 + 163.20 = 8 323.20
3	8 323.20	166.46	8 323.20 + 166.46 = 8 489.66
4	8 489.66	169.79	8 489.66 + 169.79 = 8 659.46

cuánto dinero tendremos que depositar al final del año 1, si en la cuenta de ahorros se dejan todos los intereses. Al final del primer trimestre, el interés se calcula así:

$$I_1 = (\$8\,000)(0.08)(0.25)$$
$$= \$160$$

Nótese que n se definió como 0.25 de *año*. Con el interés dejado en la cuenta, el capital con que se ganan intereses en el segundo trimestre es el capital inicial más $160 de intereses obtenidos durante el primer trimestre, o sea

$$P_2 = P_1 + I_1 = \$8\,160$$

El interés ganado en el segundo trimestre es

$$I_2 = (\$8\,160)(0.08)(0.25)$$
$$= \$163.20$$

La tabla 19.1 resume los cálculos de los cuatro trimestres. Nótese que, por cada trimestre, el capital acumulado más los intereses reciben el nombre de ***monto compuesto***. Obsérvese asimismo que el interés generado en los cuatro trimestres es $659.46.

Dos conclusiones deberían ser evidentes. Con una tasa de interés i:

1 ***El interés compuesto es mayor que el interés simple.*** Ello se debe a que el interés ganado produce también interés después.

2 ***A una mayor frecuencia de capitalización del interés corresponderá un interés más alto***. Es decir, un depósito bancario que reciba intereses capitalizables mensualmente generará más intereses que si los intereses se capitalizan cada trimestre.

En el último ejemplo, el interés simple logrado en el año habría sido igual a

$$I = (\$8\,000)(0.08)(1)$$
$$= \$640$$

La diferencia entre el interés simple y el compuesto es $659.46 − $640.00 = $19.46. En este ejemplo, el interés compuesto rebasa al simple en casi $20 durante el periodo de 1 año.

Ejercicios de seguimiento de la sección 19.1

1 Una compañía concedió un préstamo de 5 años por $80 000 al nuevo vicepresidente para financiar un proyecto de mejoras de las viviendas. Las condiciones del contrato son que el préstamo debe pagarse íntegramente al cabo de 5 años, con un interés simple calculado a la tasa de 9% anual. Determine el interés que se pagará por el préstamo en el periodo de 5 años.

2 Un estudiante ha recibido un préstamo de $20 000 de una tía rica, con el fin de financiar su programa universitario de cuatro años. Según se estipula en el préstamo, deberá liquidar el préstamo al cabo de 8 años, con un interés simple calculado a una tasa de 5% anual. Obtenga el interés que se pagará en el préstamo de 10 años.

3 Una anciana compró bonos de una empresa por valor de $100 000. Los bonos vencen en 20 años, y el interés simple se calcula semestralmente a una tasa de 6% durante un periodo de 6 meses. Los cheques con el interés se envían por correo a los tenedores de los bonos cada 6 meses. Calcule el interés que recibirá la anciana cada 6 meses. ¿Cuánto recibirá por concepto de intereses a lo largo del periodo de 20 años?

4 Una gran aerolínea está planeando comprar aviones nuevos. Desea obtener un financiamiento de $200 millones con la emisión de bonos. Éstos se emiten por un periodo de 10 años, con un interés simple calculado trimestralmente a una tasa de 3% por trimestre. El interés se pagará cada trimestre a los tenedores de bonos. ¿Cuánto pagará trimestralmente la empresa por concepto de intereses? ¿Qué interés pagará en un periodo de 10 años?

5 Un certificado de depósito de $10 000 produce intereses de 10% al año, capitalizables semestralmente. Termine la siguiente tabla en relación con la capitalización semestral. ¿Cuál será el interés total en un periodo de 2 años?

Periodo semestral	(P) Capital	(I) Interés	($S = P + I$) Monto compuesto
1	$10 000	$500	$10 500.00
2			
3			
4			

6 Se ha invertido una suma de $600 000 que rinde intereses a una tasa de 12% anual, capitalizable trimestralmente. Termine la siguiente tabla en relación con la capitalización trimestral. ¿Cuál será el interés total en un periodo de 1 año?

Trimestre	(P) Capital	(I) Interés	($S = P + I$) Monto compuesto
1	$600 000	$18 000	$618 000
2			
3			
4			

7 En relación con el ejercicio 5,

a) Calcule el monto compuesto al cabo de 2 años, si el interés se capitaliza trimestralmente y no semestralmente.

b) En qué plan de capitalización, semestral o trimestral, ¿será mayor el interés total? ¿Por cuánto?

8 En relación con el ejercicio 6,
a) Calcule el monto compuesto después de 1 año, si el interés se capitaliza semestralmente y no trimestralmente.
b) ¿En qué plan de capitalización es mayor el interés total? ¿Por cuánto?

19.2 CÁLCULOS DE UN SOLO PAGO

En la presente sección se estudia la relación existente entre una suma de dinero en el momento actual y su valor en algún momento futuro. En esta sección y en las siguientes se supone que cualquier interés se calcula a partir de la capitalización.

Monto compuesto

Supóngase que se invierte una suma de dinero y que produce intereses capitalizables. He aquí una pregunta relacionada con la inversión: ¿cuál será el valor de ella en algún momento futuro? Es la inversión original (capital) más los intereses que haya ganado. En el ejemplo que explica los cálculos del interés compuesto dado en la sección 19.1, a esto lo llamamos ***monto compuesto***. Si un capital se invierte al comenzar un periodo, el monto compuesto al final del periodo se calculó así:

$$\boxed{S = P + iP} \qquad \textbf{(19.2)}$$

A continuación redefiniremos las variables y luego se generalizarán fórmulas con las cuales se calcula el monto compuesto. Sea

P = *capital (en dólares)*
i = *tasa de interés por periodo de capitalización*
n = *número de periodos de capitalización (número de periodos en que el capital ganó intereses)*
S = *monto compuesto*

En estas definiciones, un ***periodo*** es cualquier unidad de tiempo. Si el interés se capitaliza anualmente, un año es el periodo correspondiente. Si se capitaliza mensualmente, un mes es el periodo apropiado. También aquí conviene insistir en que *la definición de un periodo debe ser igual tanto para i como para n.*

Supóngase que se ha hecho una inversión de P dólares, la cual dará intereses a la tasa de $i\%$ por periodo de capitalización. A partir de la ecuación (19.2) se descubrió que el monto compuesto al cabo de un periodo es

$$S = P + iP$$

Al factorizar P a partir de los términos del miembro derecho de la ecuación, el monto compuesto puede reexpresarse así:

$$S = P(1 + i) \qquad \textbf{(19.3)}$$

Si queremos determinar el monto compuesto al cabo de dos periodos, puede obtenerse mediante la ecuación

$$\begin{array}{l}\text{Monto compuesto después}\\ \text{de dos periodos}\end{array} = \begin{array}{l}\text{monto compuesto después}\\ \text{de un periodo}\end{array} + \begin{array}{l}\text{interés ganado en el}\\ \text{segundo periodo}\end{array}$$

o bien

$$S = P(1 + i) + i[P(1 + i)]$$

Al factorizar P y $1 + i$ a partir de los dos términos del miembro derecho de la ecuación, se obtiene

$$S = P(1 + i)(1 + i)$$

o

$$S = P(1 + i)^2 \qquad \textbf{(19.4)}$$

De manera análoga, si queremos determinar el monto compuesto después de tres periodos, puede calcularse mediante la ecuación

$$\begin{array}{l}\text{Monto compuesto después}\\ \text{de tres periodos}\end{array} = \begin{array}{l}\text{monto compuesto después}\\ \text{de dos periodos}\end{array} + \begin{array}{l}\text{interés ganado en el}\\ \text{tercer periodo}\end{array}$$

o bien

$$S = P(1 + i)^2 + i[P(1 + i)^2]$$

La factorización de P y $(1 + i)^2$ a partir de los términos del miembro derecho de la ecuación nos da

$$S = P(1 + i)^2(1 + i)$$

o

$$S = P(1 + i)^3 \qquad \textbf{(19.5)}$$

Las fórmulas del monto compuesto que hemos desarrollado hasta ahora se resumen a continuación:

FÓRMULAS DEL MONTO COMPUESTO
Monto compuesto al cabo de un periodo = $P(1 + i)$.
Monto compuesto al cabo de dos periodos = $P(1 + i)^2$.
Monto compuesto al cabo de tres periodos = $P(1 + i)^3$.

Y el patrón continúa, de manera que es posible dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN: MONTO COMPUESTO
Si una cantidad de dinero P produce intereses capitalizables a una tasa de i% por periodo, después de n periodos alcanzará el monto compuesto S, donde

$$S = P(1 + i)^n \qquad \textbf{(19.6)}$$

La ecuación (19.6) se llama a menudo ***fórmula del monto compuesto***. Esta relación puede representarse gráficamente como en la figura 19.1.

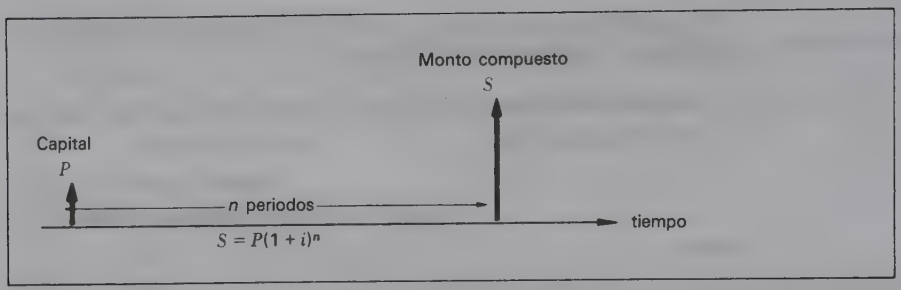


FIGURA 19.1

EJEMPLO 3

Supóngase que se invierten $1000 en un banco y que dan intereses a una tasa de 8% por año, capitalizables anualmente. Si no se retiran, ¿cuál será el saldo de la cuenta al cabo de 10 años?

SOLUCIÓN

En todos los ejemplos citados se supone que la inversión se realiza al inicio de un periodo de capitalización. Si se recurre a la ecuación (19.6), el monto compuesto después de 10 años (periodos) será

$$S = \$1\,000(1 + 0.08)^{10}$$

Ahora la pregunta que se formula es: ¿cómo se evalúa $(1 + 0.08)^{10}$? Entre las posibles opciones se cuentan las siguientes:

1 Tener a la mano un sacapuntas y un pedazo de papel para efectuar un cálculo manual primitivo.

2 Utilizar una calculadora electrónica.

3 Reescribir la ecuación obteniendo el logaritmo de ambos miembros y despejando el logaritmo de S.

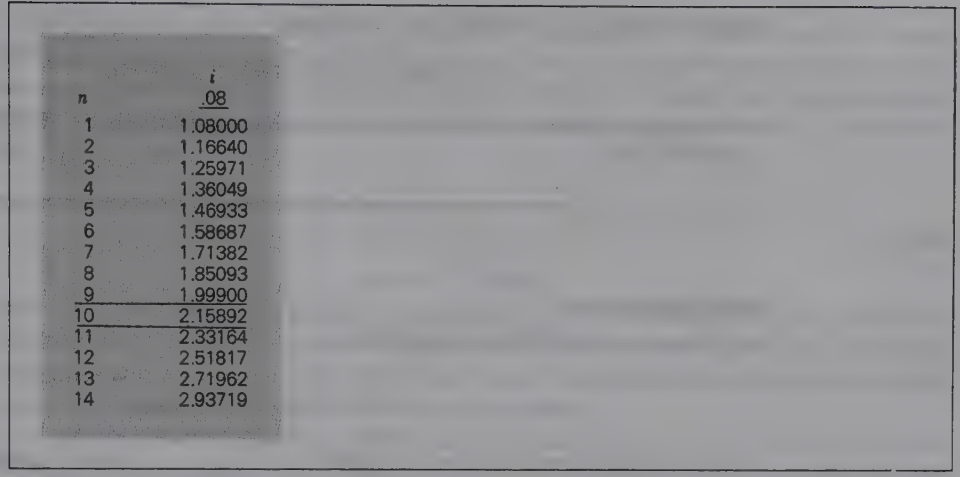
4 Usar una calculadora electrónica provista de funciones financieras (por ejemplo, Business Analyst-II de la Texas Instruments).

Puesto que estas clases de cálculo son muy frecuentes, sobre todo en las instituciones bancarias y financieras, y no todo mundo tiene una calculadora electrónica con funciones financieras, se dispone de conjuntos de tablas que contienen valores de $(1 + i)^n$ para determinados valores de i y n. Para facilitarle al lector estos cálculos, la tabla I de la página T.0 (después de la página 948) da los valores de $(1 + i)^n$ valores. La expresión $(1 + i)^n$ recibe el nombre de ***factor del monto compuesto***.

En nuestro problema simplemente encontramos la columna correspondiente a la tasa de interés por periodo de 8% y el renglón correspondiente a los 10 periodos de capitalización. La figura 19.2 es un extracto de estas tablas. El valor de $(1 + 0.08)^{10}$ es 2.15892. Por tanto,

$$\begin{aligned} S &= (\$1\,000)(2.15892) \\ &= \$2\,158.92 \end{aligned}$$

La inversión de $1000 llegará a $2158.92, lo cual significa que se ganarán intereses de $1158.92.



n	i .08
1	1.08000
2	1.16640
3	1.25971
4	1.36049
5	1.46933
6	1.58687
7	1.71382
8	1.85093
9	1.99900
10	2.15892
11	2.33164
12	2.51817
13	2.71962
14	2.93719

FIGURA 19.2
Extracto de la tabla I.

EJEMPLO 4

Una inversión a largo plazo por $250 000 ha sido efectuada por una compañía de tamaño mediano. La tasa de interés es 12% anual y los intereses se capitalizan trimestralmente. Si el interés se reinvierte íntegramente a la misma *tasa*, ¿cuál será el valor de la inversión después de 8 años?

NOTA
En casi todos los casos, la tasa de interés en un problema será reformulada como una tasa de interés anual o como la tasa por periodo de capitalización. En el segundo caso, la tasa por periodo de capitalización se calcula con la fórmula

$$i = \frac{\text{tasa de interés anual}}{\text{número de periodos de capitalización por año}}$$

SOLUCIÓN

En la fórmula del monto compuesto, la ecuación (19.6), i se define como la tasa de interés por periodo de capitalización y n como el número de periodos de capitalización. En este problema, la capitalización ocurre cada trimestre del año. La tasa de interés por trimestre es igual a la tasa de interés anual, dividida entre el número de periodos de capitalización por año, o sea

$$i = \frac{0.12}{4} = 0.03$$

El número de periodos de capitalización durante el periodo de 8 años será $8 \times 4 = 32$. Por consiguiente.

$$S = \$250\,000(1 + 0.03)^{32}$$

Según la tabla I, $(1 + 0.03)^{32} = 2.57508$ y

$$S = \$250\,000(2.57508) = \$643\,770$$

A lo largo del periodo de 8 años se espera lograr un interés de \$643 770 − \$250 000, o sea \$393 770.

Valor presente

La fórmula del monto compuesto

$$S = P(1 + i)^n$$

es una ecuación con cuatro variables: S, P, i y n. Y si se conocen los valores de tres de ellas, en la ecuación se le despejará la variable restante. Con el fin de dar un ejemplo de esto, supóngase que una persona puede invertir dinero en una cuenta de ahorros, a una tasa de 10% por año, capitalizable trimestralmente. Supóngase que esa persona desea depositar una fuerte suma al inicio del año y lograr que la suma llegue a \$20 000 en los próximos 10 años. La pregunta que se plantea es: ¿cuánto dinero deberá depositar al comienzo del año? Como se nos dan los valores de S, i y N, en la ecuación habrá que despejar P. Y al hacerlo tenemos

$$\boxed{P = \frac{S}{(1 + i)^n}} \qquad (19.7)$$

En la situación mencionada, $S = \$20\,000$, $n = 40$ (10×4 periodos de capitalización durante 10 años) e $i = 0.10/4 = 0.025$. El problema se ilustra en la figura 19.3.

Según la tabla I se tiene $(1 + 0.025)^{40} = 2.68506$ y

$$P = \frac{\$20\,000}{2.68506}$$
$$= \$7\,448.62$$

A fin de acumular \$20 000 al cabo de 10 años, habrá que depositar \$7448.62.

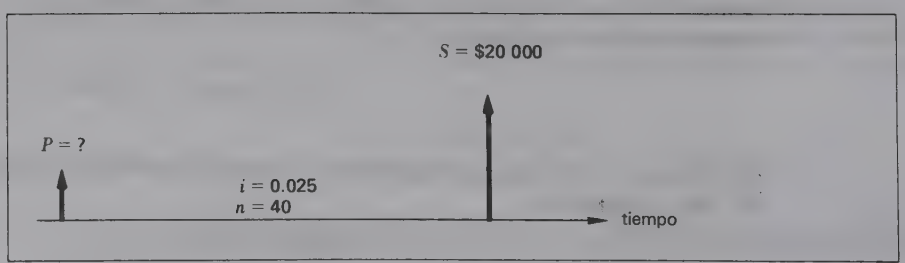


FIGURA 19.3 Problema del valor presente.

Un pobre hombre, luego de aplicar la ecuación (19.7) sin la ayuda de una calculadora electrónica, llegó a la conclusión de que la multiplicación por grandes números decimales es más fácil que la división. Cuando se reconoció que la ecuación (19.7) puede reescribirse en la forma de producto de la ecuación (19.7*a*),

$$\boxed{P = \left[\frac{1}{(1 + i)^n}\right] S} \qquad \textbf{(19.7}a\textbf{)}$$

se construyeron tablas para los valores de $1/(1 + i)^n$, o sea $(1 + i)^{-n}$. El factor dentro de corchetes se denomina ***factor del valor presente***. La tabla II (página T.4) presenta algunos valores de él. Los que se incluyen en las tablas son simplemente los valores recíprocos de los de la tabla I.

Para resolver el mismo problema mediante la tabla II, se calcula el valor correspondiente para $i + 0.025$ y $n = 40$. En esta tabla $(1 + 0.025)^{-40} = 0.37243$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P &= (0.37243)(\$20\,000) \\ &= \$7\,448.60 \end{aligned}$$

Nótese que esta respuesta no es *exactamente* la misma que se obtuvo en la tabla I: la diferencia entre ambas es de $0.02. Ello se debe a las diferencias de los valores contenidos en las dos tablas.

Si el lector quiere saber cuál usar con estos tipos de problemas, puede utilizar *cualquiera* de las dos tablas. En los siguientes ejemplos se empleará la tabla II.

EJEMPLO 5

Un joven recibió hace poco una herencia de $200 000. Quiere invertir una parte de ella para su vejez. Su meta es acumular $300 000 en 15 años. ¿Qué parte de la herencia deberá invertir si el dinero producirá 12% anual capitalizable semestralmente? ¿Cuánto recibirá por concepto de intereses en 15 años?

SOLUCIÓN

En este problema $S = \$300\,000$, $n = 30$ e $i = 0.12/2 = 0.06$. Si se aplican la ecuación (19.7*a*) y el valor correspondiente de la tabla II, se obtiene

$$\begin{aligned} P &= (0.17411)(\$300\,000) \\ &= \$52\,233 \end{aligned}$$

En un periodo de 15 años, se percibirán intereses de $300 000 − $52 233, es decir, $247 767.

En estas aplicaciones P puede considerarse el *valor presente* de S. En otras palabras, P y S pueden juzgarse equivalentes, si se tiene en cuenta el interés que dará P durante n periodos de capitalización. En el ejemplo 5, $52 233 en el momento de la herencia se consideran el valor presente de $300 000 al

cabo de 15 años. Y se consideran así porque, si se invierten en ese momento y reditúan 12% anùal capitalizable semestralmente, alcanzarán un valor de $300 000 en 15 años.

El concepto de valor presente implica que un dólar disponible en el momento presente no es equivalente al que se tenga en algún momento futuro. Esto puede entenderse en un *sentido de inversión* según lo que se ha dicho en páginas anteriores. El consumidor también captará esta idea al observar los efectos que la inflación ejerce sobre el precio a través del tiempo. Con frecuencia las empresas necesitan evaluar los proyectos propuestos que generarán flujos de efectivo en diversos periodos. Hoy, la cantidad de $20 000 de ingresos no equivale a esa misma suma si se percibe dentro de 10 años. Así pues, las compañías suelen servirse del concepto de valor presente para traducir todos los flujos de efectivo relacionados con un proyecto a dólares equivalente en un tiempo común. Esto se examinará más a fondo en la sección 19.5.

Otras aplicaciones de la fórmula del monto compuesto

En los siguientes ejemplos se ofrecen otras aplicaciones de esta fórmula. Ilustran problemas donde se desconocen los parámetros i y n.

EJEMPLO 6

Cuando se invierte dinero, quizá se desee saber cuánto tardará el capital en alcanzar determinado porcentaje. Supóngase que se desea conocer cuánto tiempo se necesita para que una inversión P se duplique, suponiendo que recibe intereses compuestos de $i\%$ por periodo de capitalización. Si una inversión se duplica, la razón del monto compuesto S al capital P es 2, esto es,

$$\frac{S}{P} = 2$$

Dada la fórmula del monto compuesto

$$S = P(1 + i)^n$$

si ambos lados se dividen entre P, se obtiene

$$\frac{S}{P} = (1 + i)^n$$

Como la razón de S/P es igual al factor del monto compuesto, una inversión se duplicará cuando

$$(1 + i)^n = 2$$

Si se conoce la tasa de interés por periodo de capitalización de la inversión, el número de periodos de capitalización que se requieren se determinarán seleccionando la columna apropiada de la tabla I y el valor de n para el cual $(1 + i)^n = 2$.

EJEMPLO 7

Se invierte una fuerte suma de dinero a una tasa de 10% anual, capitalizable trimestralmente. ¿Cuánto tardará en duplicarse? ¿Y en triplicarse? ¿En *aumentar en* 50%?

SOLUCIÓN

En esta inversión, la tasa de interés por periodo de capitalización es 0.10/4. Al consultar la columna de la tabla I correspondiente a $i = 2.5\%$, se lee hacia abajo en busca de un factor del monto compuesto igual a 2. No hay un valor de n para el cual $(1 + 0.025)^n$ sea exactamente 2. No obstante, cuando $n = 28$ el factor del monto compuesto es 1.99650 cuando $n = 29$ el factor del monto compuesto es 2.04641. Ello significa que después de 28 trimestres (es decir, 7 años), la suma casi duplicará su valor. Al cabo de 29 trimestres (7 años un trimestre) la suma inicial habrá superado ligeramente el doble de su valor inicial.

La suma se triplicará cuando $S/P = 3$ o cuando $(1 + 0.025)^n = 3$. Al examinar la misma columna en la tabla I, encontramos que la inversión será ligeramente menor que el triple de su valor transcurridos 11 años [para $n = 44$ $(1 + 0.025)^{44} = 2.96381$] y ligeramente será más del triple luego de 11.25 años [para $n = 45$ $(1 + 0.025)^{44} = 3.03790$].

Para que una inversión *aumente en* 50%

$$S = P + 0.5P$$

o

$$S = 1.5P$$

y

$$\frac{S}{P} = 1.5$$

Consulte de nuevo la tabla I. Una inversión crecerá un poco más de 50% luego de 4 años $[(1 + 0.025)^{16} = 1.48451]$ y un poco más de 50% al cabo de 4 años un trimestre $[(1. + 0.025)^{17} = 1.52162]$.

EJEMPLO 8

Inscripciones en la universidad La junta de gobierno de una universidad está planeando las futuras necesidades del nivel universitario del estado. Sus miembros han observado que el número de estudiantes que asisten a las escuelas públicas ha ido elevándose a una tasa de 7% anual. En el momento actual hay 80 000 alumnos inscritos en varias escuelas. Suponiendo que se mantenga constante esa tasa de crecimiento, ¿cuánto tardarán las inscripciones en llegar a la cifra de 200 000 estudiantes?

SOLUCIÓN

Al definir las inscripciones actuales como $P = 80\ 000$ y las futuras como $S = 200\ 000$, tenemos

$$\frac{S}{P} = \frac{200\ 000}{80\ 000}$$
$$= 2.5$$

Por consiguiente, según la tabla I con $i = 7\%$,

$$(1 + 0.07)^{13} = 2.40985 \quad \text{en } n = 13$$
$$(1 + 0.07)^{14} = 2.57853 \quad \text{en } n = 14$$

Las inscripciones rebasarán el nivel de 200 000 en un lapso de 14 años.

EJEMPLO 9

Una persona desea invertir \$10 000 y que su inversión llegue a \$20 000 durante los próximos 10 años. ¿A qué tasa de interés debería invertir para lograr el crecimiento deseado, suponiendo una capitalización anual?

SOLUCIÓN

En este problema, S, P y n están especificados y la incógnita es la tasa de interés i. La sustitución de los parámetros conocidos en la fórmula del monto compuesto nos da

$$20\,000 = 10\,000(1 + i)^{10}$$

o bien

$$\frac{20\,000}{10\,000} = (1 + i)^{10}$$

$$2 = (1 + i)^{10}$$

Para determinar la tasa de interés, retorne a la tabla I y céntrese en el renglón de valores asociados a $n = 10$. Recorra el renglón hasta encontrar un valor de 2. No existe un factor del monto compuesto que sea 2 exactamente; sin embargo,

$$(1 + 0.07)^{10} = 1.96715 \quad \text{donde } i = 7\%$$
$$(1 + 0.08)^{10} = 2.15892 \quad \text{donde } i = 8\%$$

La inversión original alcanzará los \$20 000 en un lapso de 10 años si se hace a una tasa de interés que fluctúe entre 7 y 8%. Puede recurrirse a un proceso denominado *interpolación* para aproximar la tasa exacta de interés requerida. No dedicaremos mucho espacio a este tema.

Tasas efectivas de interés

Las tasas de interés suelen darse en forma de porcentajes anuales. La tasa anual expresada generalmente recibe el nombre de ***tasa nominal***. Se ha visto que, cuando el interés se capitaliza semestral, trimestral y mensualmente, se logra un mayor interés que si se capitaliza en forma anual. Cuando la capitalización se lleva a cabo con mayor frecuencia que la anual, es posible determinar una ***tasa efectiva de interés anual***. Es la tasa de interés capitalizado anualmente que equivale a una tasa nominal capitalizable con una frecuencia mayor que la anual. Dos tasas se considerarán equivalentes si producen el mismo monto compuesto.

Sea r la tasa efectiva de interés anual, i la tasa nominal de interés anual y m el número de periodos de capitalización por año. La equivalencia entre las dos tasas revela que si un capital P se invierte durante n años, los dos montos compuestos serán iguales, es decir,

$$P(1 + r)^n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación entre P se obtiene

$$(1 + r)^n = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

Si se toma la n-ésima raíz de ambos miembros nos queda

$$1 + r = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

y al rearreglar se calcula la tasa efectiva del interés anual como sigue

$$\boxed{r = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1} \tag{19.8}$$

En el ejemplo 4, se realizó la inversión con una tasa nominal de interés de 12% por año, capitalizable trimestralmente. En esta inversión $i = 0.12$ y $m = 4$. La tasa efectiva de interés anual es

$$\begin{aligned} r &= \left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^4 - 1 \\ &= (1 + 0.03)^4 - 1 \end{aligned}$$

A partir de la tabla I puede determinarse que $(1 + 0.03)^4 = 1.12551$. Por tanto,

$$\begin{aligned} r &= 1.12551 - 1 \\ &= 0.12551 \end{aligned}$$

La tasa efectiva anual es 12.551%.

Ejercicios de seguimiento de la sección 19.2

1 Se invierte una suma de $5000 en una cuenta de ahorros que rinde intereses a una tasa de 7% por año, capitalizables anualmente. Si la cantidad se guarda en depósito 5 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuántos intereses se ganan durante ese periodo?

2 Se invierte una suma de $8000 en una cuenta de ahorros que da intereses a una tasa de 8% anual, capitalizables anualmente. Si la cantidad se deja depositada 10 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses durante los 10 años?

3 Se invierte una suma de $24 000 en una cuenta de ahorros que produce intereses a una tasa de 9% por año, capitalizables anualmente. Si la cantidad se mantiene depositada 12 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto se obtendrá por concepto de intereses durante 12 años?

4 Se invierten $50 000 en un banco cooperativo que da intereses a una tasa de 8% anual capitalizables anualmente. Si la suma se conserva en depósito 8 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Qué interés se ganará en 8 años?

5 Una compañía invierte $800 000 en un fondo de mercado de dinero que, según las previsiones, producirá intereses a una tasa de 14% anual, capitalizables trimestralmente. Si son válidas las proyeccciones de la tasa de interés, ¿a qué cantidad ascenderán los 800 000 dólares durante los próximos 10 años? ¿Qué interés se obtendrá en ese periodo?

6 El fondo permanente de una universidad invirtió $5 millones en certificados de depósito del gobierno estadounidense. Por 10 años se percibirá un interés de 9% anual, capitalizable semestralmente. ¿A qué suma llegará la inversión durante ese periodo? ¿Cuánto se ganará por concepto de intereses?

7 Un individuo invierte \$50 000 en un fondo del mercado de dinero que, según se prevé, producirá intereses a una tasa de 14% anual, capitalizables trimestralmente. Si los intereses se mantienen estables, ¿qué cantidad alcanzarán los \$50 000 durante los próximos 5 años? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses en ese lapso?

8 Una organización destina \$500 000 en una inversión que, según se prevé, producirá intereses a una tasa de 11% anual, capitalizables semestralmente. Si el dinero se invierte por 10 años, ¿a cuánto ascenderá? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses durante ese periodo?

9 El factor del monto compuesto $(1 + i)^n$ es la cantidad a que llegará \$1 tras n periodos, si se gana un interés compuesto de i% por periodo. Determine el monto compuesto y el interés ganado, si se invierte \$1 por 8 años al 12% anual *a*) capitalizable semestralmente, *b*) capitalizable trimestralmente y *c*) capitalizable bimestralmente.

10 Calcule el monto compuesto y los intereses si se invierte \$1 millón en las condiciones mencionadas en el ejercicio 9.

11 El número de estudiantes de una universidad local es de 18 000 en el momento actual. Las inscripciones han ido aumentando a una tasa de 3% anual. Si mantienen la misma tendencia de crecimiento, ¿cuál se espera que sea la población estudiantil dentro de 10 años?

12 Un representante de ventas de una división universitaria de una gran editorial consiguió vender 40 000 libros el año anterior. Sus ventas han ido incrementándose a una tasa de 14% al año Si conservan esa tendencia, ¿cuántos libros se espera que venda en un periodo de 5 años contados a partir del momento actual?

13 Los precios al consumidor se han elevado a una tasa promedio de 6% anual, capitalizable trimestralmente. El precio base de un modelo Chevrolet es \$13 500. Si los precios del modelo aumentan a la misma tasa que otros precios, ¿cuál se espera que sea el precio base de ese mismo modelo al cabo de 5 años?

14 Si los precios al consumidor están creciendo a una tasa de 8% anual capitalizable semestralmente, ¿cuánto costará al cabo de 10 años un artículo cuyo precio actual es de \$25?

15 Si una cuenta de ahorros da intereses al 6% anual capitalizables trimestralmente, ¿cuánto habrá que depositar hoy para acumular \$10 000 después de 5 años? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses en ese periodo?

16 Si un banco cooperativo da intereses de 7% anual capitalizables semestralmente, ¿qué cantidad habrá que depositar hoy a fin de acumular \$20 000 después de 10 años? ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses durante ese lapso?

17 ¿Qué suma debe depositarse hoy al 10% anual capitalizable trimestralmente, si la meta es tener en 8 años un monto capitalizable de \$60 000? ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses en ese tiempo?

18 ¿Qué suma hay que depositar hoy al 8% anual capitalizable anualmente, si se pretende tener un monto compuesto de \$100 000 al cabo de 15 años? ¿Cuánto se obtendrá por concepto de intereses durante este periodo?

19 ¿Qué suma habrá que depositar hoy al 18% anual capitalizable mensualmente, si la meta es tener en un periodo de 4 años un monto compuesto de \$200 000? ¿Cuánto se obtendrá por concepto de intereses en ese lapso?

20 ¿Qué suma debe depositarse hoy al 9% anual capitalizable semestralmente, si se pretende tener al cabo de 12 años un monto compuesto de \$100 000? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses en ese periodo?

21 Una suma de \$80 000 produce intereses a una tasa de 9% anual capitalizables semestralmente. ¿Cuánto tardará la inversión en llegar a \$150 000?

22 Una cantidad de \$25 000 produce intereses a una tasa de 9% anual capitalizables anualmente, ¿en cuánto tiempo la inversión ascenderá a \$60 000?

23 Una suma de $40 000 da intereses a una tasa del 12% anual capitalizables trimestralmente. ¿Cuánto tardará la inversión en llegar a $75 000?
24 Una cantidad de $250 000 produce intereses a una tasa de 16% anual capitalizables trimestralmente. ¿Cuánto tiempo necesita la inversión para llegar a $400 000?
25 La tasa nominal de interés en una inversión es de 16% anual. Determine la tasa efectiva de interés anual, si *a*) el interés se capitaliza semestralmente y *b*) se capitaliza trimestralmente.
26 La tasa nominal de interés en una inversión es de 14% anual. Determine la tasa efectiva de interés anual, si *a*) el interés se capitaliza semestralmente y *b*) se capitaliza trimestralmente.
27 La tasa nominal de interés en una inversión es de 6% anual. Determine la tasa efectiva de interés anual, si *a*) el interés se capitaliza semestralmente y *b*) se capitaliza trimestralmente.
28 Si se pretende que una suma de $300 000 se convierta en $750 000 al cabo de un periodo de 10 años, ¿a qué tasa anual de interés deberá invertirse en caso de que los intereses se capitalicen cada semestre?
29 Si se desea que la cantidad de $2000 llegue a $6000 en un periodo de 15 años, ¿a que tasa anual de interés habrá que invertirla en caso de que el interés se capitalice anualmente?
30 Si se quiere que $400 000 se conviertan en $700 000 en un periodo de 6 años, ¿a qué tasa anual de interés deben invertirse en caso de que los intereses se capitalicen trimestralmente?
31 Si se pretende que $60 000 lleguen a $150 000 en un periodo de 10 años, ¿a qué tasa anual de interés han de ser invertidos en caso de que los intereses se capitalicen semestralmente?
32 Si se desea que $250 000 se conviertan en $650 000 en un periodo de 8 años, ¿a qué tasa anual de interés han de invertirse en caso de que los intereses se capitalicen trimestralmente?

19.3 LAS ANUALIDADES Y SU VALOR FUTURO

La ***anualidad*** es una serie de pagos periódicos. Entre los ejemplos conviene citar los depósitos regulares en una cuenta de ahorros, el pago mensual del automóvil, las hipotecas o los pagos de pólizas y los pagos periódicos que recibe una persona del fondo de pensiones. Aunque la anualidad puede ser variable, *supondremos que incluye una serie de pagos iguales. También supondremos que éstos se realizan al final de un periodo de capitalización*. Puede señalarse que el final de un periodo coincide con el inicio del siguiente. Lo importante es que el pago no obtendrá intereses en el periodo anterior, pero los recibirá íntegramente en el siguiente. La figura 19.4 contiene varios pagos de R, cada uno de los cuales asciende a $1000. Los pagos podrían representar depósitos de fin de año en una cuenta de ahorros o pagos trimestrales hechos a la oficina de hacienda por una persona que trabaja por su cuenta.

Suma de una anualidad

Del mismo modo que hemos necesitado determinar el valor futuro de una fuerte inversión en la sección 19.2, a menudo también conviene calcular el valor futuro o la suma de una anualidad. En el ejemplo 10 se da un problema de este tipo.

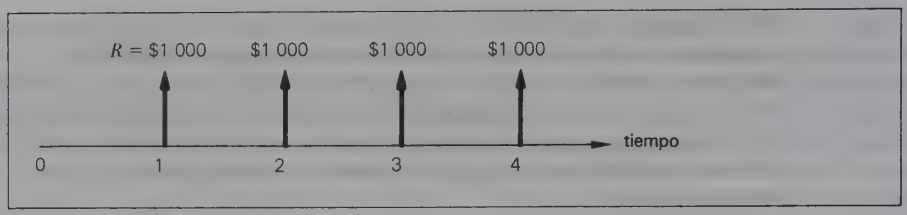


FIGURA 19.4
Anualidad.

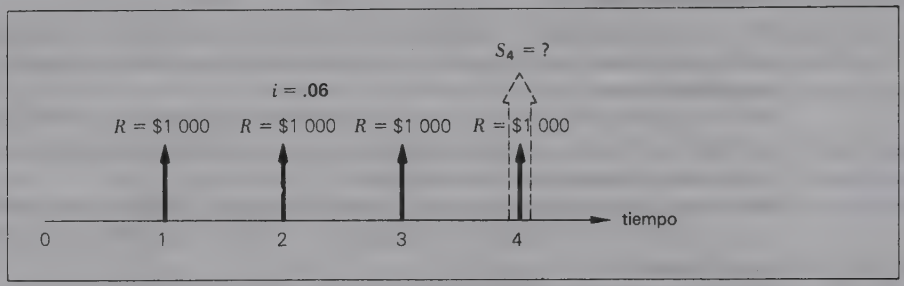


FIGURA 19.5
La anualidad y su valor futuro.

EJEMPLO 10

Una persona planea depositar, al final del año en curso, $1000 en un plan de ahorros exento de impuestos y una suma igual al final de cada año siguiente. Si se espera que se generen intereses a una tasa de 6% anual capitalizables anualmente, ¿a qué cantidad llegará la inversión al momento de efectuar el cuarto depósito?

SOLUCIÓN

La figura 19.5 muestra la anualidad y los tiempos de los depósitos. Sea S_n la suma a la cual los depósitos se convertirán *en el momento del* n-*ésimo depósito*. Podemos determinar el valor de S_n aplicando la fórmula del monto compuesto a *cada* depósito y calculando su valor en el momento del n-ésimo depósito. Estos montos compuestos pueden sumarse en los cuatro depósitos y producir así S_4. En la figura 19.6 se ofrece un resumen de esos cálculos.

Nótese que el primer depósito rinde intereses por 3 años, aunque el cuarto no produce interés alguno. De los $4374.72, el interés conseguido en los tres primeros depósitos es $374.72.

El procedimiento con que se determina S en el ejemplo 10 es manejable, aunque impráctico, cuando el número de pagos se vuelve grande. A continuación se verá si es posible idear un método más simple para calcular S_n. En el ejemplo 10 adviértase que S_4 se obtuvo mediante la suma

$$S_4 = 1\,000 + 1\,000(1 + 0.06) + 1\,000(1 + 0.06)^2 + 1\,000(1 + 0.06)^3 \qquad \textbf{(19.9)}$$

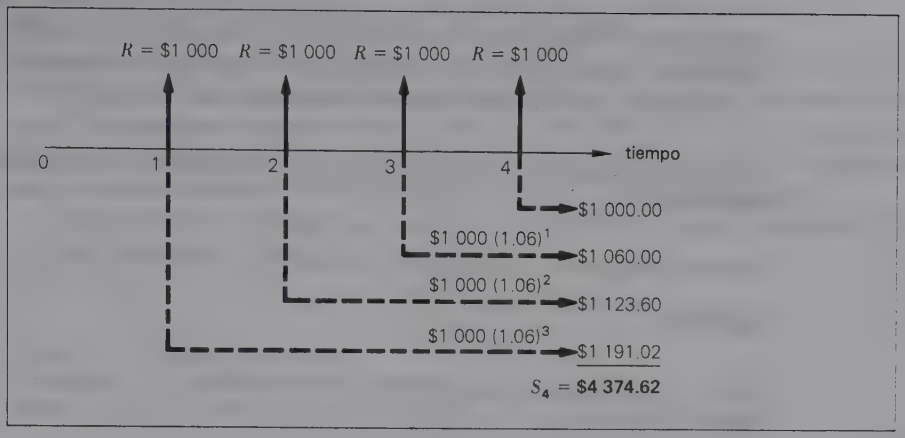


FIGURA 19.6 Cálculo del valor futuro de cada pago R.

Sea

R = *monto de una anualidad*
i = *tasa de interés por periodo*
n = *número de pagos de la anualidad (también el número de periodos de capitalización)*
S_n = *suma (valor futuro) de la anualidad después de n periodos (pagos)*

Si se desea determinar la suma S_n a que llegará una serie de depósitos R (realizados al final de cada periodo) al cabo de n periodos, primero examínese la ecuación (19.9) en el caso de cuatro periodos. La expresión correspondiente del n-ésimo periodo es

$$S_n = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1}$$

La factorización de R a partir de los términos del miembro derecho nos da

$$S_n = R[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-1}] \qquad \textbf{(19.10)}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por $(1 + i)$ se obtiene

$$(1 + i)S_n = (1 + i)R[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-1}]$$

que al simplificarse produce

$$S_n + iS_n = R[(1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \cdots + (1 + i)^n] \qquad \textbf{(19.11)}$$

El resultado de restar la ecuación (19.10) a la ecuación (19.11) es

$$iS_n = R(1 + i)^n - R$$

o bien

$$iS_n = R[(1 + i)^n - 1]$$

Y al despejar S_n se obtiene

$$\boxed{S_n = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]} \qquad \textbf{(19.12)}$$

La expresión entre corchetes se denomina ***factor del monto compuesto de una anualidad***. Como en el caso del factor del monto compuesto, se construyeron tablas que contienen valores de él para diferentes valores de i y n. En la tabla III (página T.8) se dan algunos valores de ese factor.

EJEMPLO 11

Resuelva de nuevo el ejemplo 10 empleando la ecuación (19.12).

SOLUCIÓN

Como $i = 0.06$ y $n = 4$, la entrada correspondiente de la tabla III es 4.37462. Si se sustituye este valor y $R = \$1000$ en la ecuación (19.12) se obtiene

$$S_4 = \$1\,000(4.37462)$$
$$= \$4\,374.62$$

que es la misma respuesta que la anterior.

NOTA
En esta sección se supone que los intereses se calculan en el momento de hacer cada pago. Los pagos anuales ganan intereses anualmente, los pagos trimestrales generan intereses capitalizables trimestralmente y así sucesivamente. Las diferencias entre el tiempo de los pagos y el cálculo de los intereses (por ejemplo, los depósitos anuales hechos a una cuenta que produce intereses capitalizables cada trimestre) pueden manejarse por medios distintos a los explicados en este capítulo.

EJEMPLO 12

Una persona de 12 años de edad empieza a hacer ahorros para cursar una carrera universitaria. Planea depositar \$50 en una cuenta de ahorros al final de cada trimestre durante los próximos 6 años. Se abrieron intereses a una tasa de 8% anual capitalizables trimestralmente. ¿Cuál será el saldo de su cuenta al cabo de 6 años? ¿Cuánto percibirá por concepto de intereses?

SOLUCIÓN

En este problema $R = \$50$, $i = 0.08/(4 = 0.02$ y $n =$ (6 años) (4 trimestres por año) $= 24$ periodos de capitalización. La entrada correspondiente en la tabla III es 30.42186. Al sustituir esto en la ecuación (19.12) se obtiene

$$S_{24} = \$50(30.42186)$$
$$= \$1\,521.09$$

En un periodo de 6 años la niña hará 24 depósitos de \$50 cada uno, lo cual nos da un total de \$1200. Los intereses conseguidos en el periodo serán \$1521.09 − \$1200.00 = \$321.09.

Determinación del importe de una anualidad

Igual que en la fórmula del monto compuesto, en la ecuación puede despejarse cualquiera de los cuatro parámetros si se conoce el valor de los otros tres. Así, quizá la meta sea acumular una suma determinada de dinero para algún tiempo futuro. Si se conoce la tasa de interés, se plantea la pregunta: ¿qué cantidad habría que depositar en cada periodo a fin de alcanzar la meta?

Para resolver el problema, en la ecuación (19.12) puede depejarse R, o sea

$$R = \frac{S_n}{[(1 + i)^n - 1]/i}$$

Esto puede reescribirse así:

$$\boxed{R = S_n\left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1}\right]} \qquad \textbf{(19.13)}$$

donde la expresión entre corchetes es el recíproco del factor del monto compuesto de una anualidad. A ese factor se le da a veces el nombre de ***factor de fondo de amortización***. Ello se debe a que la serie de depósitos empleados para acumular alguna cantidad futura de dinero suele denominarse ***fondo de amortización***. Los valores de dicho factor se encuentran el la tabla IV (página T.12).

EJEMPLO 13

Una empresa desea establecer un fondo de amortización a fines del presente año. Se harán depósitos anuales al final de este año y durante los próximos 9 años. Si los depósitos reditúan intereses a una tasa de 8% anual capitalizables anualmente, ¿cuánto dinero habrá que depositar cada año con el fin de acumular $12 millones en el momento de efectuar el décimo depósito? ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses?

SOLUCIÓN

La figura 19.7 contiene los flujos de efectivo (caja) aplicables a este problema. En él S_{10} = $12 millones, i = 0.08 y n = 10. El correspondiente factor de fondo de amortización en la tabla IV es 0.06903. La sustitución de esto en la ecuación (19.13) nos da

$$\begin{aligned} R &= \$12\,000\,000(0.06903) \\ &= \$828\,360 \end{aligned}$$

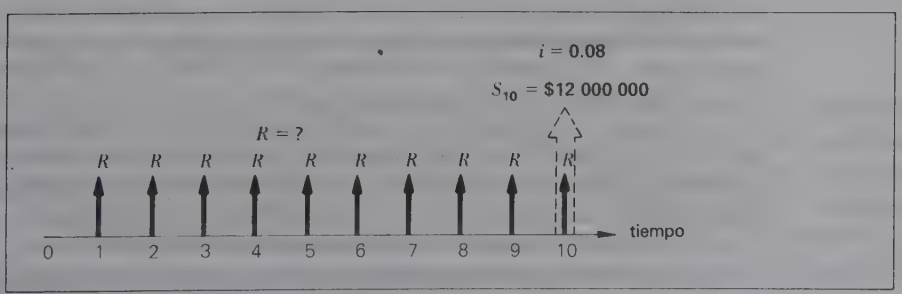


FIGURA 19.7 Determinación del importe de una anualidad.

Puesto que se efectuarán en este periodo 10 depósitos de $828 360 cada uno, el total de ellos será de $8 283 600. Como esos depósitos y los intereses acumulados ascienden a $12 millones, se ganarán intereses por $12 000 000 − $8 283 600 = $3 716 400.

EJEMPLO 14

En el último ejemplo, supóngase que la empresa va a efectuar depósitos trimestrales y que se reciben intereses a la tasa de 8% anual capitalizables trimestralmente. ¿Cuánto dinero deberá depositarse cada trimestre? ¿En cuánto disminuirá la cantidad que deberá depositar en el periodo de 10 años, en comparación con los depósitos anuales y la capitalización anual?

SOLUCIÓN

En este problema, S_{40} = $12 millones, i = 0.08/4 = 0.02 y n = 40. El correspondiente factor de fondo de amortización en la tabla IV es 0.01656. Al sustituir esto en la ecuación (19.13) se obtiene

$$\begin{aligned} R &= \$12\,000\,000(0.01656) \\ &= \$198\,720 \end{aligned}$$

Habrán 40 depósitos de $198 720 cada uno, los depósitos totales en un periodo de 10 años serán de $7 948 800. En comparación con los depósitos anuales y la capitalización anual del ejemplo 13, los depósitos totales que se requieren para acumular los $12 millones serán $8 283 600 − $7 948 800 = $334 800 menos que con el plan trimestral.

Ejercicios de seguimiento de la sección 19.3

1 Una persona desea depositar $7500 anuales en la cuenta de ahorros que produce intereses al 9% anual capitalizables cada año. Supóngase que el primer depósito se efectúa al final del año en curso y otros más al finalizar cada uno de los próximos años.

a) Cuál será el total acumulado al momento de realizar el décimo depósito?

b) ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses?

2 Una compañía quiere depositar $500 000 cada año en una inversión que produce intereses al 14% por año, capitalizables anualmente. Supóngase que el primer depósito se hace al final del año en curso y que otros más se efectúan al terminar cada uno de los siguientes años.

a) ¿Cuál será el total acumulado en el momento de realizar el octavo depósito?

b) ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses?

3 Una madre desea abrir una cuenta de ahorros para la educación de su hijo. Planea invertir $500 cuando él tenga 6 meses de edad y después depositará la misma suma cada 6 meses. La cuenta le da intereses al 9% anual, capitalizables semestralmente.

a) ¿Cuál será el total acumulado cuando su hijo cumpla 18 años de edad?

b) ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses en este periodo?

4 Una universidad local está planeando invertir $250 000 cada tres meses en una inversión que genera intereses a una tasa del 10% anual capitalizables trimestralmente. La primera inversión se hará al final del trimestre en curso.

a) ¿Cuál será la suma acumulada al cabo de 10 años?

b) ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses durante ese periodo?

5 Una persona desea depositar $5000 anuales por 5 años. Si se obtienen intereses a una tasa de 10% anual, calcule la cantidad en que se convertirán los depósitos al cabo de 5 años si:

a) Se hacen depósitos de $5000 al final de cada año, con intereses capitalizables anualmente.

b) Se efectúan depósitos de $2500 al final de cada periodo de 6 meses, con intereses capitalizables semestralmente.

c) Se realizan depósitos de $1250 al final de cada trimestre, con intereses capitalizables trimestralmente.

6 Una corporación desea invertir $5 millones anuales durante 10 años. Si se obtienen intereses a una tasa de 14% anual, calcule el total acumulado de los depósitos si:

a) Se hacen depósitos al final de cada año, con intereses capitalizables anualmente.

b) Se efectúan depósitos de $2.5 millones al final de cada periodo de 6 meses, con intereses capitalizables semestralmente.

c) Se realizan depósitos de $1.25 millones al final de cada trimestre, con intereses capitalizables trimestralmente.

7 ¿Cuánto dinero habrá que depositar al final de cada año si el objetivo es acumular $50 000 al momento de realizar el quinto depósito? Supóngase que se generan intereses a una tasa de 15% anual, capitalizables anualmente. ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses sobre los depósitos?

8 ¿Cuánto dinero debe depositarse al final de cada año si se pretende acumular $50 000 al cabo de 10 años? Supóngase que se generan intereses a una tasa de 12% anual capitalizables anualmente. ¿Qué intereses se ganarán?

9 ¿Cuánto dinero es preciso invertir al final de cada trimestre si el objetivo es acumular $600 000 al cabo de 10 años? Supóngase que se ganan intereses a una tasa de 8% anual capitalizables anualmente. ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses?

10 ¿Cuánto dinero hay que depositar al final de cada trimestre si el objetivo es acumular $400 000 al cabo de 6 años? Supóngase que se obtienen intereses a la tasa de 10% anual capitalizables trimestralmente. ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses?

11 Una familia desea empezar a ahorrar para hacer un viaje a Europa. Planea realizarlo dentro de 4 años, y quiere reunir $10 000 para su viaje. Si se efectúan 16 depósitos trimestrales en una cuenta que genera intereses a una tasa de 10% anual capitalizables trimestralmente, ¿de cuánto deberá ser cada uno? ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses sobre los depósitos?

12 Una gran ciudad desea establecer un fondo de amortización para pagar deudas de $60 millones que se vencen en 5 años. El municipio puede obtener intereses a una tasa de 11% anual capitalizables semestralmente. Si el primer depósito se realizará dentro de 6 meses, ¿qué depósito semestral se necesita para acumular $60 millones? ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses?

19.4 LAS ANUALIDADES Y SU VALOR PRESENTE

Del mismo modo que hay problemas en que se relacionan las anualidades a su valor futuro equivalente, también existen aplicaciones que establecen un nexo entre una anualidad a su equivalente de valor presente. Así, quizá se quiera determinar el importe de un depósito que generará una serie de pagos (una anualidad) destinados a la colegiatura de la universidad, la jubilación y otros usos. Asimismo, cuando se consigue un préstamo, tal vez se busque determi-

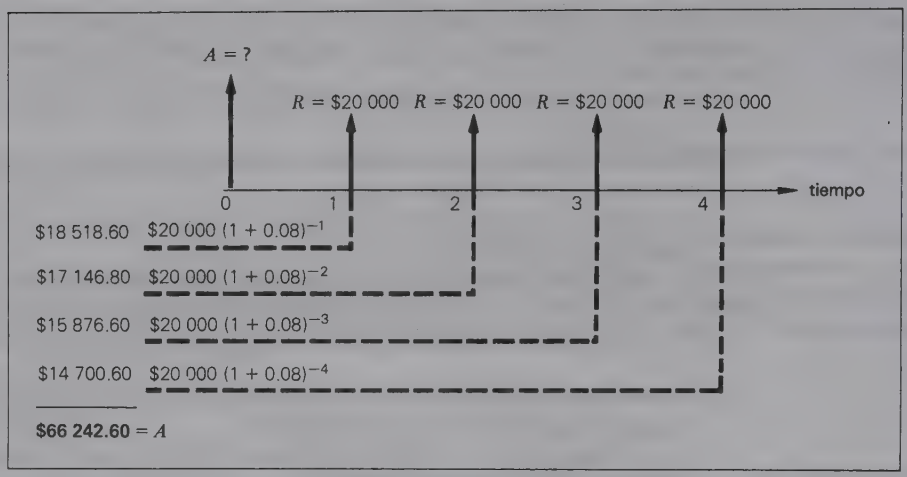


FIGURA 19.8 Cálculo del valor presente de cada pago R.

nar las serie de pagos (anualidades) necesarios para liquidarlo junto con sus intereses. En la presente sección se examina ese tipo de problemas.

Valor presente de una anualidad

El ***valor presente de una anualidad*** es una cantidad de dinero que en el momento presente equivale a una serie de pagos iguales en el futuro. Supóngase que el lector haya ganado la lotería y que los funcionarios le den dos opciones: recibir un pago global hoy o bien una serie de pagos al final de cada uno de los próximos 5 años. Las dos alternativas se considerarán equivalentes en un sentido monetario si, al invertir la suma total hoy, se generan (con los intereses acumulados) retiros anuales iguales a los cinco pagos parciales ofrecidos por los funcionarios de la lotería. *Una suposición consiste en que el último retiro agotará por completo la inversión.* Estudie atentamente el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 15

Lotería Hace poco una persona ganó la lotería. Según las condiciones, el ganador recibirá pagos anuales por $20 000 al final del año en curso y en cada uno de los próximos 3 años. Si pudiera invertir hoy esa suma a una tasa de 8% anual capitalizable anualmente, ¿cuál es el valor presente de los cuatro pagos?

SOLUCIÓN

La figura 19.8 explica la situación. Si definimos A como el valor presente de la anualidad, podríamos calcular su valor determinando el valor presente de cada pago de $20 000. Al aplicar la ecuación (19.7*a*) y usando los valores de la tabla II, se encuentra que la suma de cuatro valores presentes es $66 242.60. Llegamos a la conclusión de que un depósito de $66 242.60, hecho hoy y que produce intereses a una tasa de 8% anual capitalizables anualmente, podría generar una serie de cuatro retiros de 20 000 al final de cada uno de los próximos cuatro años.

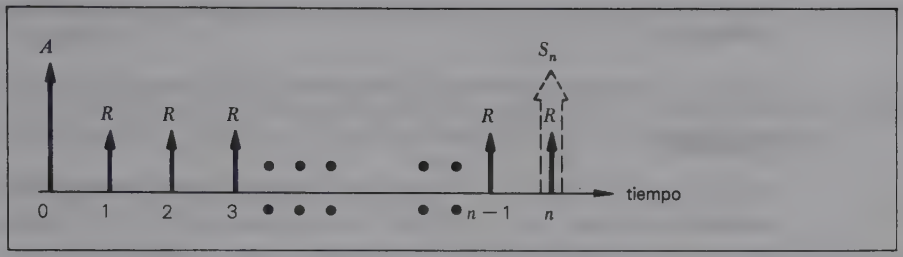


FIGURA 19.9

Como en el caso del valor futuro de una anualidad, el método congruente de sumar los valores presentes de cada pago es posible aunque impráctico. A continuación se ofrece un método más general y eficiente con el cual se determina el valor presente de una anualidad.

Sea

R = *monto de una anualidad*
i = *tasa de interés por periodo*
n = *número de pagos de la anualidad (y también, número de periodos de capitalización*
A = *valor presente de la anualidad*

La ecuación (19.12), que determina el valor o suma futuros de una anualidad, se reformula como sigue:

$$S_n = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \tag{19.12}$$

Al observar detenidamente la figura 19.9, puede concebirse S_n como el valor futuro equivalente de la anualidad. Si conocemos el valor de S_n, el valor presente de A de la anualidad sería simplemente el de S_n, o sea

$$A = S_n(1 + i)^{-n}$$

La sustitución de la expresión de S_n en la ecuación (19.12) produce

$$A = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}(1 + i)^{-n} \tag{19.13}$$

o bien

$$\boxed{A = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}\right]} \tag{19.14}$$

La ecuación (19.14) puede emplearse para calcular el valor presente de A de una anualidad integrada por n pagos iguales R, cada uno efectuado al final de n periodos. La expresión dentro de corchetes recibe el nombre de ***factor del valor presente de una anualidad*** y algunos de sus valores se incluyen en la tabla V (página T.16).

EJEMPLO 16

Vuelva a resolver el ejemplo 15 por medio de la ecuación (19.14).

SOLUCIÓN

Puesto que $i = 0.08$ y $n = 4$, el valor correspondiente de la tabla V es 3.31213. Al sustituir este valor y $R = \$20\,000$ en la ecuación (19.14) se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \$20\,000(3.31213) \\ &= \$66\,242.60 \end{aligned}$$

EJEMPLO 17

Los padres de una adolescente desean depositar una suma de dinero que reditúe intereses a una tasa de 9% anual capitalizables semestralmente. El depósito servirá para generar una serie de ocho pagos semestrales de $2500 a partir del sexto mes de efectuado el depósito. Con los pagos se financiará la educación universitaria de la adolescente. ¿Qué cantidad deberá depositarse para alcanzar esa meta? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses sobre el depósito?

SOLUCIÓN

En este problema, $R = \$2500$, $i = 0.09/2 = 0.045$ y $n = 8$. El valor correspondiente del factor del valor presente de una anualidad es 6.59589. Su sustitución en la ecuación (19.14) produce

$$\begin{aligned} A &= (\$2\,500)(6.59589) \\ &= \$16\,489.73 \end{aligned}$$

Dado que $16 489.73 generarán ocho pagos para un total de $20 000, se percibirán intereses de $20 000 − $16 489.73 o $3510.27.

Determinación del importe de una anualidad

Hay problemas en que se conoce el valor presente de una anualidad y se necesita calcular el importe de la anualidad correspondiente. Por ejemplo, en un préstamo de $10 000 que se recibe hoy, ¿qué pagos trimestrales hay que hacer para liquidarla en 5 años, si se cobran intereses a una tasa de 10% anual capitalizables trimestralmente? El proceso de liquidar un préstamo mediante pagos parciales recibe el nombre de ***amortización de un préstamo***.

En el ejemplo del préstamo, los pagos trimestrales pueden calcularse despejando R en la ecuación (19.14). Al despejar R obtenemos

$$R = \frac{A}{[(1+i)^n - 1]/[i(1+i)^n]}$$

o bien

$$\boxed{R = A\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]} \qquad \textbf{(19.15)}$$

La expresión entre corchetes se denomina a veces ***factor de recuperación de capital***. La tabla VI (en la página T.20) contiene algunos de sus valores.

EJEMPLO 18

Determine los pagos trimestrales necesarios para liquidar el préstamo de $10 000 antes mencionado. ¿Cuánto se pagará por concepto de intereses del préstamo?

SOLUCIÓN

En este problema, $A = \$10\,000$, $i = 0.10/4 = 0.025$ y $n = 20$. El factor correspondiente en la tabla VI es 0.06415. La sustitución de dicho factor en la ecuación (19.15) nos da

$$R = \$10\,000(0.06415)$$
$$= \$641.50$$

Habrá 20 pagos que dan un total de $12 820 y, por tanto, los intereses del préstamo serán de $2830.

EJEMPLO 19

Plan de jubilación Una empresa ha contribuido a la creación de un plan de jubilación con sus empleados. A la fecha de la jubilación, los beneficios totales de la jubilación ascienden a $250 000. El programa contempla la inversión de esa suma a una tasa de interés de 12% anual capitalizable semestralmente. Los pagos semestrales se harán durante 30 años a los empleados o, en caso de fallecimiento, a sus herederos. ¿Qué pago anual debería generarse? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses durante los 30 años?

SOLUCIÓN

En este problema $A = \$250\,000$, $i = 0.12/2 = 0.06$ y $n = 60$. El valor correspondiente en la tabla VI es 0.06188. Al sustituirlo en la ecuación (19.15) se obtiene

$$R = \$250\,000(0.06188)$$
$$= \$15\,470.$$

Los pagos totales durante los 30 años serán iguales a $60 \times \$15\,470$, o sea $928 200. Así pues, los intereses de $928 200 − $250 000, es decir $678 200, se ganarán durante los 30 años.

Hipotecas

Tarde o temprano todos sucumbimos ante el sueño tan legítimo de poseer una casa propia. Pero, ante el gran crecimiento de las tasas de interés, ese sueño puede ser realizado por un número cada vez menor de personas. Sin contar las enormes satisfacciones que nos procura ser dueños de nuestra casa, hay *por lo menos* un momento cada mes en que nos sentimos agobiados bajo los efectos de poseer una casa. Y ese momento es cuando firmamos un cheque o pagamos en efectivo la hipoteca mensual. Y aunque no nos demos cuenta, gastamos mucho dinero en hacer realidad nuestro sueño de tener una casa propia.

En un préstamo hipotecario, muchos propietarios de vivienda no saben cómo se calcula el pago de la hipoteca. Se determina de la misma manera que

los pagos de préstamos estudiados en la sección precedente. Dicho de otra manera, se calculan por medio de la ecuación (19.15). Los intereses suelen capitalizarse mensualmente, y la tasa de interés por periodo de capitalización puede corresponder a fracciones o respuestas decimales poco comunes. Si la tasa de interés anual es 8.5%, el valor de i será $0.085/12 = \frac{17}{24}$ de un porcentaje, es decir, 0.0070833. Es evidente que la tabla VI no puede usarse para calcular esas tasas de interés.

La tabla VII (página T.24) es una extensión de la tabla VI y se elaborará específicamente para determinar los pagos de hipotecas. Adviértase que las tasas de interés se expresan como porcentajes anuales.

EJEMPLO 20

Una persona paga \$100 000 por una casa nueva. Un anticipo de \$30 000 deja una hipoteca de \$70 000, con intereses calculados al 13.5% anual capitalizables mensualmente. Determine el pago de la hipoteca mensual, si el préstamo se va a liquidar durante *a*) 20 años, *b*) 25 años y *c*) 30 años. *d*) Calcule el interés total en tres periodos de préstamo.

SOLUCIÓN

a) Según la tabla VII, el pago mensual por dólar de hipoteca es 0.01207375 (correspondiente a $n = 20 \times 12 = 240$ pagos). Por tanto,

$$R = \$70\,000(0.01207375)$$
$$= \$845.16$$

b) Para 25 años (o 300 pagos mensuales),

$$R = \$70\,000(0.01165645)$$
$$= \$815.95$$

c) En el caso de 30 años (o sea 360 pagos mensuales),

$$R = \$70\,000(0.01145412)$$
$$= \$801.79$$

d) Los pagos totales son

$$(240)(\$845.16) = \$202\,838.40 \quad \text{durante 20 años}$$
$$(300)(\$815.95) = \$244\,785.00 \quad \text{durante 25 años}$$
$$(360)(\$801.79) = \$288\,644.40 \quad \text{durante 30 años}$$

Puesto que con estos pagos está liquidándose un préstamo de \$70 000, los intereses sobre el préstamo son

$$\$202\,838.40 - \$70\,000 = \$132\,838.40 \quad \text{durante 20 años}$$
$$\$244\,785.00 - \$70\,000 = \$174\,785.00 \quad \text{durante 25 años}$$
$$\$288\,644.40 - \$70\,000 = \$218\,644.40 \quad \text{durante 30 años}$$

EJEMPLO 21

En el problema anterior, determine los efectos de una disminución de la tasa de interés a 13% *a*) en pagos mensuales de una hipoteca de 25 años y *b*) en los intereses totales de una hipoteca de 25 años.

SOLUCIÓN

a) Cuando $i = 13.00$ y 25 años,

$$R = (0.01127835)(70\,000)$$
$$= \$789.50$$

Por consiguiente, los pagos mensuales son menores en una cantidad

$$\$815.95 - \$789.50 = \$26.40$$

b) Los pagos totales durante los 25 años serán

$$300(789.50) = \$236\,850$$

Los intereses totales son \$166 850, o sea \$7935 menos que en la hipoteca al 13.5%.

EJEMPLO 22

Préstamo máximo liquidable Un matrimonio estima que puede pagar una hipoteca mensual de \$750. Las tasas actuales de interés hipotecario son de 16.5%. Si consigue una hipoteca a 30 años, ¿cuál será el máximo préstamo hipotecario que puede pagar ese matrimonio?

SOLUCIÓN

He aquí la fórmula con que se calcula el pago de la hipoteca mensual:

$$\text{Pago mensual} = \begin{pmatrix} \text{monto del préstamo} \\ \text{hipotecario} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{pago mensual por dólar} \\ \text{del préstamo hipotecario,} \\ \text{Tabla VII} \end{pmatrix}$$

o bien

$$\boxed{R = A\begin{pmatrix} \text{Factor de} \\ \text{la tabla} \\ \text{VII} \end{pmatrix}} \qquad (19.16)$$

En este problema, A es la incógnita. Si se rearregla la ecuación (19.16),

$$A = \frac{R}{\text{Factor de la tabla VII}}$$
$$= \frac{750}{0.01385148} = \$54\,145.84$$

TABLA 19.2

Años de hipoteca	Capital restante (hipoteca mensual)	Capital restante (hipoteca quincenal)
3	$98 152	$95 035
5	96 575	90 770
10	90 939	75 533
15	81 665	50 223
20	66 407	8 847

Ventaja del pago quincenal de la hipoteca

Las variantes en la forma de liquidar las hipotecas dan origen a algunos resultados interesantes y, francamente, notables. Ya se ha aludido a los efectos ocasionados por la reducción de la vida de una de las hipotecas tradicionales a 25 o 30 años. Pongamos el caso de una hipoteca por $100 000 con intereses de 10%. Una hipoteca de 30 años requeriría un pago mensual de $877.57, pagos totales de $315 925.92 y pagos de intereses totales de $215 925.92. Una hipoteca a 15 años requeriría pagos mensuales de $1074.61, pagos totales de $193 428.90 e intereses totales de $93 428.90. Así pues, al sumar $197.04 a los pagos mensuales de un préstamo a 30 años, éste puede liquidarse en la mitad del tiempo. Los $197.04 mensuales más por mes nos dan un total de $35 467.20 durante los 15 años. Sin embargo, el resultado es una reducción de los pagos totales (y de los intereses totales) de $315 925.92 − $193 428.90, o sea $122 497.02.

Un concepto igualmente interesante es el del pago quincenal de una hipoteca. Si se liquida la mitad del pago hipotecario mensual cada 2 semanas, el dueño de una casa haría 26 pagos durante un año calendario. Un efecto de ello es el pago del equivalente de un mes adicional en los pagos de la hipoteca durante el año calendario. El otro efecto notable es que la combinación de pagos más pequeños y frecuentes con el equivalente de un pago mensual más produce una extraordinaria aceleración en la liquidación del préstamo. La tabla 19.2 contiene datos referentes a una hipoteca por $100 000 concedida a una tasa de interés de 10% durante 30 años. Se incluyen cifras muestra que indican la reducción del capital del préstamo con el tiempo.

Ejercicios de seguimiento de la sección 19.4

1 Determine el valor presente de una serie de 10 pagos anuales de $15 000 cada uno, los cuales comienzan dentro de un año a partir de hoy. Suponga que el interés es de 8% anual capitalizable anualmente.

2 Calcule el valor presente de una serie de 10 pagos anuales de $5000 cada uno, los cuales comienzan en 1 año a partir de hoy. Suponga que el interés es de 9% anual capitalizable anualmente.

3 Calcule el valor presente de una serie de 25 pagos semestrales de $5000 cada uno, los cuales comienzan en 6 meses. Suponga un interés de 8% anual capitalizable semestralmente.

4 Determine el valor presente de una serie de 20 pagos de $4000 cada uno, los cuales comienzan en 6 meses. Suponga un interés de 9% anual capitalizable semestralmente.

5 Determine el valor presente de una serie de 40 pagos trimestrales de $500 cada uno, que comienzan en 3 meses. Suponga un interés de 8% anual capitalizable trimestralmente.

6 Calcule el valor presente de una serie de 16 pagos trimestrales de $2500 cada uno, que comienzan dentro de 3 meses. Suponga un interés de 12% anual capitalizable trimestralmente.

7 Determine el valor presente de una serie de 60 pagos mensuales de $1000 cada uno, que comienzan en un mes. Suponga un interés de 12% al año, capitalizable mensualmente.

8 Calcule el valor presente de una serie de 36 pagos mensuales de $500 cada uno, que empiezan en un mes. Suponga un interés de 18% anual capitalizable mensualmente.

9 Una persona quiere comprar un seguro de vida que a los miembros de su familia les produzca una suma lo bastante grande para hacer 20 pagos anuales de $25 000. Los pagos principian un año después del momento del fallecimiento. Se supone que se recibirán intereses sobre la suma obtenida de la póliza a una tasa de 10% anual capitalizables anualmente.

a) ¿Qué importe de seguro deben tomarse para conseguir la anualidad deseada?
b) ¿Qué intereses se percibirán en los beneficios del seguro durante el periodo de 20 años?

10 En el ejercicio 9 suponga que se desean pagos semestrales de $12 500 en el periodo de 20 años y que los intereses se capitalizan cada semestre.

a) ¿Qué importe de seguro debe adquirirse?
b) ¿Qué relación tiene esa cantidad con la del ejercicio 9?
c) ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses sobre los beneficios del seguro?
d) ¿Qué relación tiene esto con los intereses mencionados en el ejercicio 9?

11 Si hoy se tienen $200 000, determine la serie equivalente de 10 pagos anuales que podrían generarse en 1 año. Suponga un interés de 12% capitalizable anualmente.

12 Si hoy se tienen $8 millones, determine la serie equivalente de 20 pagos anuales que podrían generarse en 1 año. Suponga un interés de 14% capitalizable anualmente.

13 Si se tienen hoy $2 500 000, determine la serie equivalente de 40 pagos trimestrales que podrían generarse en 3 meses. Suponga un interés de 10% anual capitalizable trimestralmente.

14 Si hoy se tienen $20 millones, determine la serie equivalente de 20 pagos semestrales que podrían generarse en 6 meses. Suponga un interés de 14% anual capitalizable semestralmente.

15 Si hoy se tienen $2 millones, determine la serie de 24 pagos trimestrales que podrían generarse en 3 meses. Suponga un interés de 14% anual capitalizable trimestralmente. mente.

16 Si hoy se tienen $500 000, determine la serie equivalente de 24 pagos semestrales que podrían generarse en 6 meses contados a partir de este día. Suponga un interés de 11% anual capitalizable semestralmente.

17 *a*) Determine el pago anual necesario para liquidar un préstamo de $500 000, si el interés se calcula al 9% anual capitalizable anualmente. Suponga que el periodo del préstamo es de 6 años. *b*) ¿Cuál será el monto de los intereses que se paguen durante ese periodo?

18 *a*) Determine el pago mensual de un automóvil con el cual se liquidará un préstamo de $10 000, si el interés se calcula al 12% anual capitalizable mensualmente. Suponga que el periodo del préstamo es de 4 años. *b*) ¿Cuánto se pagará por concepto de intereses en ese periodo?

19 *a*) Determine el pago mensual de un automóvil que se necesita para liquidar un préstamo de $8000 si los intereses se calculan al 12% anual capitalizables mensualmente. Suponga que el periodo del préstamo es de 3 años. *b*) ¿Cuánto se pagará por concepto de intereses durante ese lapso?
20 *a*) Determine el pago trimestral necesario para liquidar un préstamo de $30 000 si los intereses se calculan a una tasa del 14% anual capitalizables trimestralmente. Suponga que el préstamo se liquida en 8 años. *b*) ¿Cuánto se pagará por concepto de intereses en ese periodo?

En los ejercicios 21-28 calcule el pago mensual de una hipoteca, los pagos totales y los intereses totales.
21 Préstamo hipotecario de $80 000 al 10% anual durante 25 años
22 Préstamo hipotecario de $100 000 al 9% anual durante 30 años
23 Préstamo hipotecario de $80 000 al 9.5% anual durante 20 años
24 Préstamo hipotecario de $200 000 al 10.75% anual durante 30 años
25 Préstamo hipotecario de $90 000 al 10% anual durante 25 años
26 Préstamo hipotecario de $150 000 al 9.75% anual durante 30 años
27 Préstamo hipotecario de $120 000 al 10.5% anual durante 20 años
28 Préstamo hipotecario de $160 000 al 12% anual durante 25 años.
29 a 36 Vuelva a resolver los ejercicios 21-28, calculando la diferencia entre el importe del pago mensual de la hipoteca y los intereses *totales* pagados si la tasa de interés se incrementa en 1%.
37 Un matrimonio estima que puede pagar una hipoteca de $650 mensuales. Están en condiciones de conseguir una hipoteca a 25 años, con una tasa de interés de 10.5%. ¿Cuál es el préstamo hipotecario más grande que puede pagar?
38 Un matrimonio estima que puede pagar una hipoteca de $1000 mensuales. Puede obtener una hipoteca a 30 años, con una tasa de interés de 9.75%. ¿Cuál es la hipoteca maś grande que está en condiciones de pagar?
39 Una persona considera que puede pagar una hipoteca de $1200 mensuales. Puede conseguir una hipoteca a 25 años, con una tasa de interés de 11.5%. ¿Cuál es el préstamo hipotecario más grande que está en condiciones de pagar?
40 Una persona estima que puede pagar una hipoteca de $950 mensuales. Puede conseguir una hipoteca a 30 años, con una tasa de interés 12.5%. ¿Cuál es el préstamo hipotecario más grande que está en condiciones de pagar?

19.5 ANÂLISIS DE COSTO-BENEFICIO

Cuando las organizaciones evalúan la factibilidad financiera de sus decisiones de inversión, el valor del dinero en el tiempo es una consideración primordial. Ello se observa sobre todo cuando, en un proyecto, hay patrones de flujo de efectivo que abarcan varios años. En esta sección se estudiará un sistema en que es posible evaluar esas inversiones de periodos múltiples.

Flujo de efectivo descontado

Pongamos el caso de una decisión de inversión que se caracteriza por el patrón de flujo de efectivo de la figura 19.10. Se espera que una inversión inicial de $50 000 genere un rendimiento neto (después de gastos) de $15 000 al final de 1 año y un rendimiento igual al finalizar los 3 años siguientes. Así, se espera que una inversión de $50 000 produzca un rendimiento de $60 00 durante un periodo de 4 años. Dado que las entradas de efectivo se realizan en un periodo de 4 años, el dinero de los distintos periodos no puede considerarse equivalen-

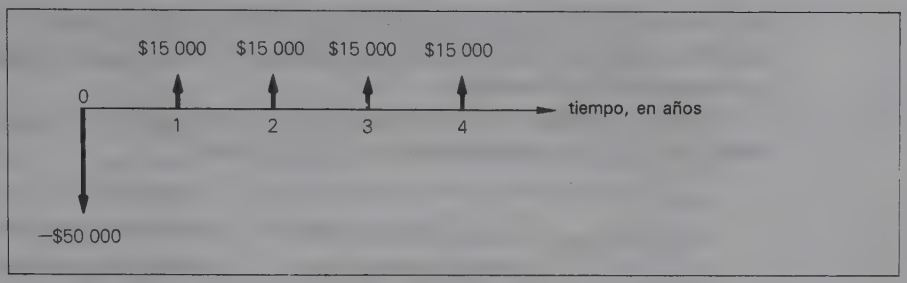


FIGURA 19.10
Flujos netos de efectivo.

te. Con el fin de evaluar correctamente este proyecto, hay que tener en cuenta el valor de los diferentes flujos de efectivo en el tiempo.

Un método con que se evalúa un proyecto de esta naturaleza consiste en traducir todos los flujos de efectivo a cantidades monetarias equivalentes durante un periodo base común. A este procedimiento se le llama ***método de flujo de efectivo descontado***. Por ejemplo, el proyecto citado podría evaluarse reformulando todos los flujos de efectivo en términos de sus valores equivalentes cuando $t = 0$, el tiempo de la inversión. Los $50 000 originales están expresados en términos de dólares en $t = 0$. Sin embargo, cada una de las entradas de efectivo de $15 000 debe expresarse de nuevo en términos de sus valores equivalentes, con $t = 0$.

A fin de descontar todos los flujos de efectivo en un periodo base común, es preciso suponer una tasa de interés para el periodo intermedio. Con frecuencia se trata de una tasa mínima supuesta del rendimiento sobre las inversiones. Así, la gerencia podría decidir que la tasa mínima deseada fuera de 10% anual. La manera en que la dirección consigue ese porcentaje es una cuestión independiente. Algunas veces es una reflexión de la tasa conocida de rendimiento que puede percibirse con otras inversiones (por ejemplo, bonos colocados en el mercado de dinero).

Supóngase que la tasa mínima deseada de rendimiento para el proyecto de la figura 19.10 sea 8% anual. Mediante el análisis del flujo de efectivo descontado se calculará el ***valor presente neto*** (NPV) de todos los flujos de efectivo relacionados con el proyecto. El valor presente neto es la suma algebraica del valor presente de todos los flujos de efectivo conexos con el proyecto; las *entradas* de efectivo se consideran flujos positivos de efectivo y las *salidas* de efectivo, flujos negativos. *Si el valor presente de todos los flujos de efectivo es* ***positivo*** *en la tasa mínima supuesta de rendimiento, la tasa real del rendimiento del proyecto rebasa la tasa mínima deseada. Si el valor presente neto de todos los flujos de efectivo es* ***negativo****, la tasa real de rendimiento del proyecto es menor que la tasa mínima deseada.*

En el ejemplo se descuentan las cifras de $15 000 al 8%. Al calcular su valor presente, estamos en realidad determinando el monto de dinero que deberíamos invertir hoy ($t = 0$) al 8%, con objeto de generar esos cuatro flujos de efectivo. Dado que los valores netos del rendimiento de efectivo son iguales, esto puede tratarse como el cálculo del valor presente de una anualidad. Si se utilizan la tabla V y la ecuación (19.14), con $n = 4$ e $i = 0.08$, se tiene

$$\begin{aligned} A &= 15\,000(3.31213) \\ &= \$49\,681.95 \end{aligned}$$

Este valor indica que una inversión de \$49 681.95 generará un pago anual de \$15 000 al final de cada uno de los próximos 4 años. En el ejemplo, se requiere una inversión de \$50 000.

El valor presente neto de este proyecto combina los valores presentes de todos los flujos de efectivo con $t = 0$, es decir,

$$\text{NPV} = \begin{matrix}\text{valor presente de las} \\ \text{entradas de efectivo}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{valor presente de las} \\ \text{salidas de efectivo}\end{matrix} \qquad \textbf{(19.17)}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{NPV} &= \$49\,681.80 - \$50\,000 \\ &= -\$318.20\end{aligned}$$

Este valor negativo indica que el proyecto producirá una tasa de rendimiento menor que el rendimiento mínimo deseado de 8% anual, capitalizable anualmente.

EJEMPLO 23

Patrones no uniformes de flujo de efectivo En el ejemplo anterior se obtuvieron entradas netas de efectivo que eran iguales durante 4 años. Los patrones de flujo de efectivo en la generalidad de las inversiones tienden a ser irregulares, tanto en relación con el monto de dinero como el tiempo de los flujos de efectivo. Examínese atentamente el patrón de flujo de efectivo que se ilustra en la figura 19.11. En este proyecto de inversión, una inversión de 1 millón no produce flujo de efectivo en el primer año. Sin embargo, al final de cada uno de los próximos 5 años genera una serie de rendimientos netos positivos. Y éstos no son iguales entre sí, alcanzando un máximo de \$450 000 al final del cuarto año y decreciendo finalmente a \$100 000 al terminar el sexto año.

Supóngase que se desea un rendimiento sobre la inversión mínimo de 12%. A fin de evaluar la conveniencia de este proyecto, hay que descontar todos los flujos de efectivo a sus valores equivalentes cuando $t = 0$. En contraste con el ejemplo precedente, cada cifra correspondiente al rendimiento neto ha de descontarse por separado. El valor presente de cada una se calcula como se observa en la tabla 19.3.

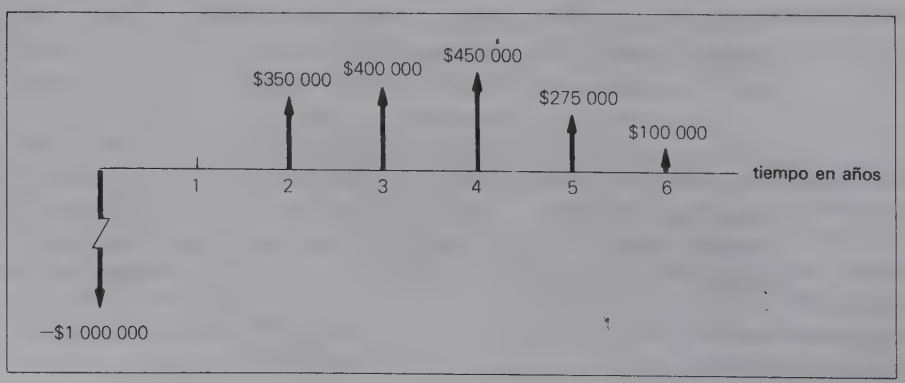


FIGURA 19.11 Flujos netos de efectivo.

TABLA 19.3

n	Rendimiento neto	Factor del valor presente $(1 + 0.12)^{-n}$	Valor presente
2	$350 000	0.79719	$ 279 016.50
3	400 000	0.71178	284 712.00
4	450 000	0.63552	285 984.00
5	275 000	0.56743	156 043.25
6	100 000	0.50663	50 663.00
			$1 056 418.75

El valor presente neto de todos los flujos de efectivo es

$$NPV = \$1\,056\,418.75 - \$1\,000\,000 = \$56\,418.75$$

Por ser positivo el valor presente neto, este proyecto producirá una tasa de rendimiento que rebasa la tasa mínima deseada de 12% anual capitalizable anualmente. Otra manera de explicar esto es decir que $1 056 418.75, invertidos al 12% anual, generarán los rendimientos netos señalados; esta inversión requiere apenas $1 000 000.

Extensiones de los análisis de flujo de efectivo descontado

El método del valor presente neto no es más que uno de los muchos con que se cuenta para evaluar las decisiones referentes a las inversiones a largo plazo. Aunque permite determinar si un proyecto cumple el criterio de la tasa mínima deseada de rendimiento, no ofrece una medida de la tasa exacta. Es conveniente conocer la tasa real, en especial si hay un conjunto de otras oportunidades de inversión, las cuales difieren respecto al importe de la inversión y el horizonte del momento en que se realiza. Los métodos para calcular la tasa real de rendimiento son meras extensiones de la técnica del valor presente neto. La tasa real de rendimiento relacionado con un proyecto es aquella que genera un valor presente neto de 0. Esto puede obtenerse mediante tanteo. El valor presente neto del proyecto se obtiene sirviéndose de diversas tasas hasta que sea (aproximadamente) 0.

Otra consideración al evaluar tal proyecto es el impacto de los impuestos. Aunque algunas organizaciones evalúan proyectos a partir de un criterio *antes de impuestos*, la mayor parte de ellas descubre que el mejor análisis es el que se funda en un criterio *después de impuestos*. Si se consideran los créditos de inversión y también varios métodos posibles de depreciación, generalmente es más recomendable el análisis después de impuestos.

Ejercicios de seguimiento de la sección 19.5

En los ejercicios 1-6, determine si el proyecto de inversión descrito en el diagrama de flujo de efectivo satisface el criterio de rendimiento mínimo deseado de la inversión. ¿Cuál es el valor presente neto con la tasa indicada de interés?

1 Flujo de efectivo descrito en la figura 19.12, con una tasa mínima de rendimiento de 10% anual

2 Flujo de efectivo descrito en la figura 19.13, con una tasa mínima de rendimiento de 8% anual

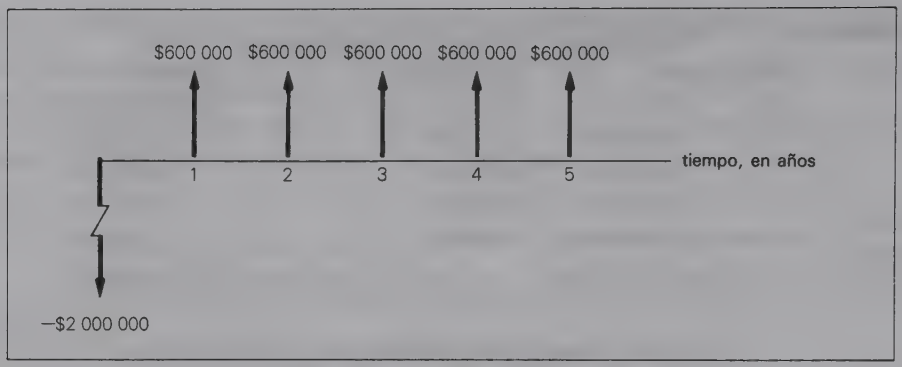


FIGURA 19.12

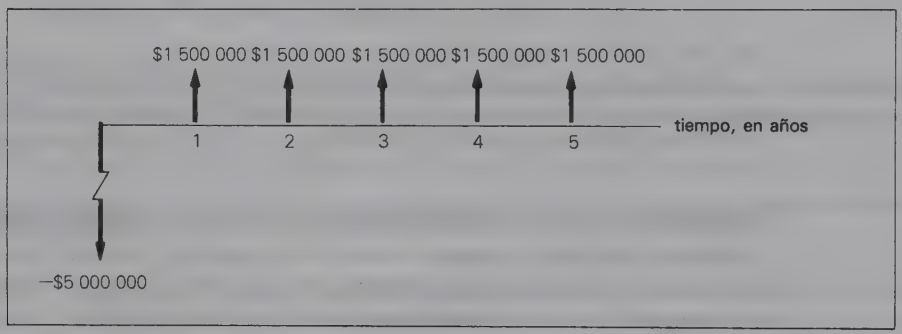


FIGURA 19.13

3 Flujo de efectivo descrito en la figura 19.14, con una tasa mínima de rendimiento de 12% anual

4 Flujo de efectivo descrito en la figura 19.15, con una tasa mínima de rendimiento de 9% anual

5 Flujo de efectivo descrito en la figura 19.16, con una tasa mínima de rendimiento de 10% anual

6 Flujo de efectivo descrito en la figura 19.17, con una tasa mínima de rendimiento de 14% anual

*7 Estime la tasa real de rendimiento generada por el proyecto descrito en la figura 19.12

*8 Estime la tasa real de rendimiento generada por el proyecto descrito en la figura 19.13

■ TÉRMINOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

análisis de costo-beneficio 934
anualidad 919
capital 904
factor de fondo de amortización 923
factor de recuperación de capital 928
factor del monto compuesto de una anualidad 922
factor del valor presente de una anualidad 927
factor del valor presente 913
flujo de efectivo descontado (método) 935

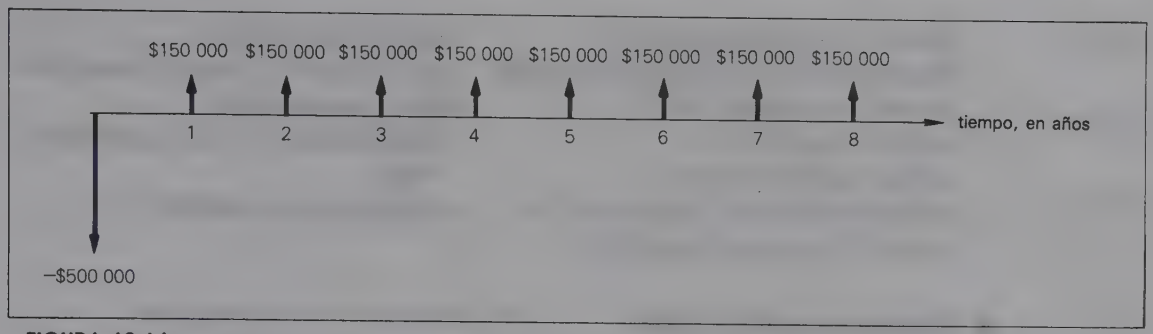


FIGURA 19.14

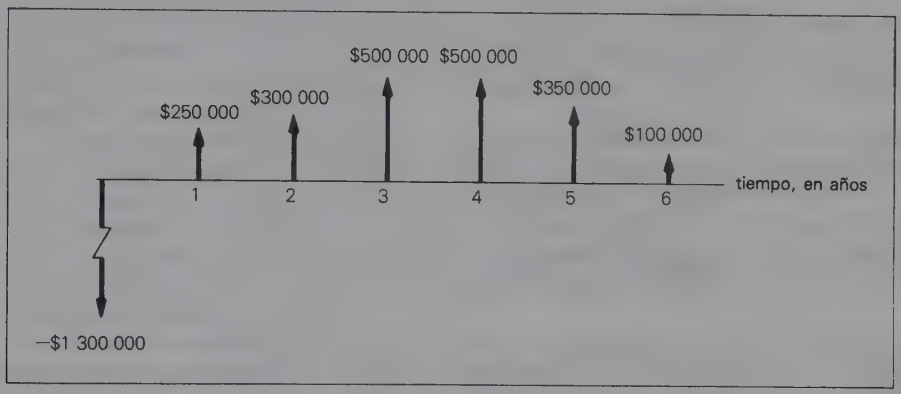


FIGURA 19.15

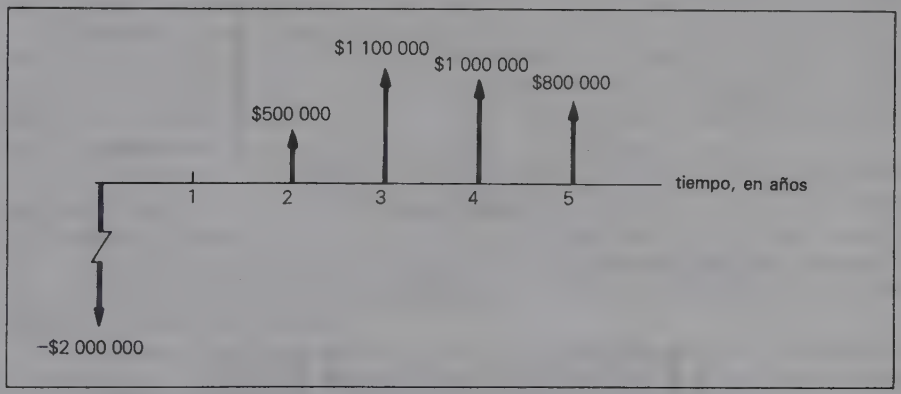


FIGURA 19.16

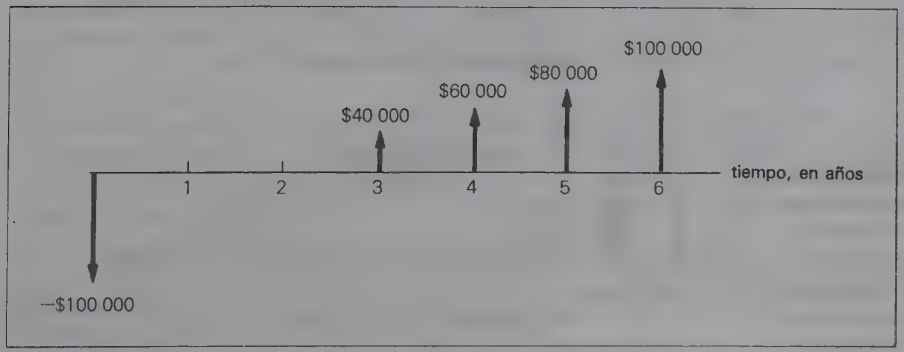


FIGURA 19.17

fondo de amortización 923
fórmula del monto compuesto 909
interés compuesto 905
interés simple 904
monto compuesto 908
préstamo máximo liquidable 931
suma de una anualidad 919
tasa de interés 904
tasa efectiva de interés anual 916
valor presente 912
valor presente de una anualidad 926
valor presente neto 935

■ FORMULAS IMPORTANTES

$$I = Pin \tag{19.1}$$

$$S = P(1 + i)^n \tag{19.6}$$

$$P = \frac{1}{(1 + i)^n} S \tag{19.7a}$$

$$r = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 \tag{19.8}$$

$$S_n = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \tag{19.12}$$

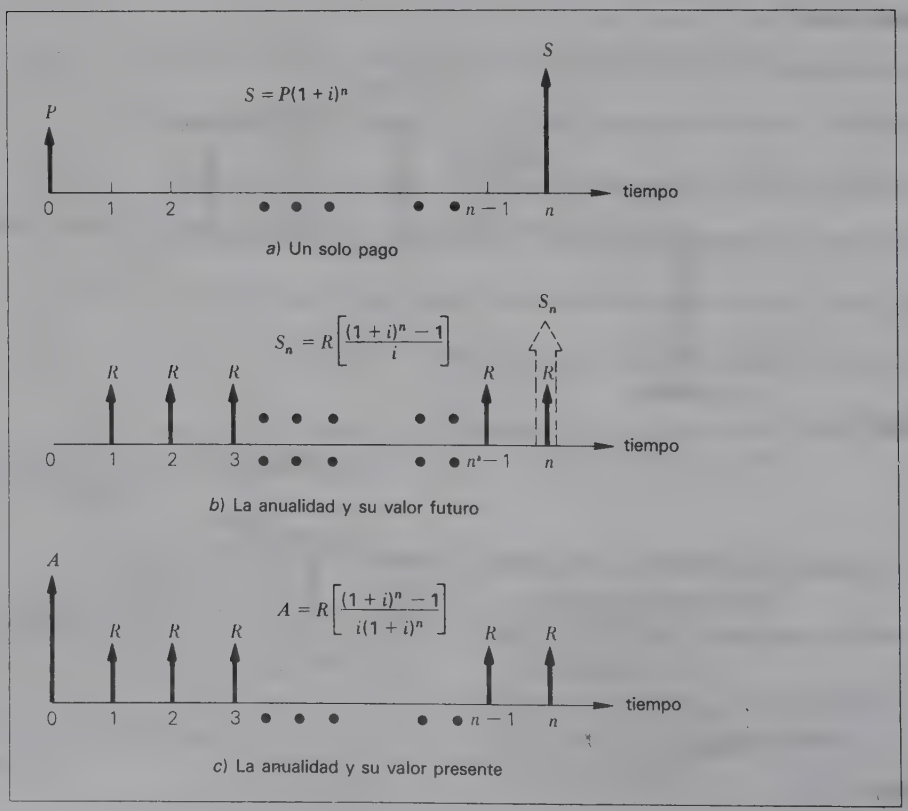


FIGURA 19.18 Resumen de un solo pago y situaciones de flujo de efectivo por concepto de anualidades.

$$R = S_n \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \tag{19.13}$$

$$A = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \tag{19.14}$$

$$R = A \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \tag{19.15}$$

■ EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios 1-18 se relacionan con la sección 19.2.

1 Una suma de $25 000 se invierte en una cuenta de ahorros que devenga intereses a una tasa de 8% anual capitalizables anualmente. Si la cantidad se mantiene en depósito durante 10 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses durante 10 años?

2 Una suma de $50 000 se invierte a una tasa de 15% anual capitalizable anualmente. Si la inversión dura un periodo de 6 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿cuánto se percibirá por concepto de intereses en ese lapso?

3 Una suma de $20 000 se invierte en un banco cooperativo que paga intereses a una tasa de 14% anual capitalizables trimestralmente. Si se invierte esa cantidad por un periodo de 10 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿cuánto se percibirá por concepto de intereses en ese lapso?

4 Las ventas de computadoras personales que cuestan menos de $1000 se estimaron en $450 millones durante 1986. Según un análisis, las ventas crecerán a una tasa de 20% anual en los próximos 8 años. Prediga las ventas anuales en el año 1992.

5 **Protección contra incendios** El número de incendios que se notifican a las autoridades cada año en una de las principales ciudades de Estados Unidos ha ido incrementándose a una tasa de 6% anual. El número de incendios denunciados en 1986 fue de 15 000. Si ese número crece a la misma tasa, ¿cuántos incendios se esperan que haya en 1996?

6 Una suma de $5 millones ha sido invertida a una tasa de 18% anual. Si la inversión dura un periodo de 10 años, determine el monto compuesto si la inversión se capitaliza *a*) anualmente, *b*) semestralmente, *c*) trimestralmente, *d*) quincenalmente.

7 Los precios de un artículo de consumo han ido incrementándose a una tasa anual de 12% capitalizable anualmente. Su precio actual es de $50. ¿Cuál fue el precio del mismo artículo hace 5 años?

8 Se deposita hoy una suma al 9% anual. La meta es lograr que esa cantidad llegue a $80 000 en 5 años. ¿Qué cantidad habrá que depositar si los intereses se capitalizan *a*) anualmente *b*) semestralmente?

9 **Bienes raíces** Los precios de los bienes raíces en un país han ido aumentando a una tasa promedio de 18% anual. ¿Cuánto tardarán en llegar a 100% si siguen elevándose a la misma tasa?

10 **Alcoholismo** Una dependencia estatal de salud ha reunido datos sobre el número de alcohólicos que hay en el estado. Su número actual es de 120 000. La información indica que esa cifra ha ido incrementándose a una tasa de 3.5% anual y se espera que siga creciendo al mismo porcentaje en el futuro. ¿Cuánto tiempo pasará antes que el número de alcohólicos en el estado llegue a 250 000?

11 Si una cuenta de ahorros produce intereses al 8% anual capitalizables trimestralmente, ¿qué cantidad hay que depositar hoy para acumular $12 000 al cabo de 8 años. ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses?

12 Si un banco cooperativo paga intereses de 9% anual capitalizables semestralmente, ¿qué cantidad debe depositar hoy para acumular $15 000 al cabo de 10 años? ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses?
13 ¿Qué suma hay que depositar hoy al 12% anual capitalizable trimestralmente, si la meta es tener un monto compuesto de $50 000 en 5 años? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses durante ese periodo?
14 ¿Qué suma debe depositarse hoy al 16% anual capitalizable trimestralmente, si se pretende tener un monto compuesto de $2 millones en 10 años. ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses durante ese periodo?
15 Servicios públicos Un servicio público de agua estima que el consumo diario promedio en cierta ciudad es de 40 millones de galones. Si ha proyectado que el consumo diario promedio será de 50 millones de galones en 5 años, ¿qué tasa anual de crecimiento ha usado el servicio público al hacer su estimación del consumo futuro.
16 Si la capitalización se realiza en forma anual, ¿a qué tasa de interés debe invertirse una suma para que duplique su valor en los próximos 8 años?
17 La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 14% anual. Determine la tasa efectiva de interés anual si éste se capitaliza *a*) semestralmente y *b*) trimestralmente.
18 La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 10% anual. Determine la tasa efectiva si los intereses se capitalizan *a*) semestralmente y *b*) trimestralmente.

Los ejercicios 19-28 se relacionan con la sección 19.3.

19 Se están haciendo depósitos trimestrales de $3 000 en una cuenta que produce intereses a una tasa de 10% anual capitalizables trimestralmente. ¿A cuánto ascenderá la inversión en el momento de hacer el cuadrágesimo depósito? ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses en ese periodo?
20 Una persona desea depositar $2000 anuales por 12 años. Si se obtiene un interés de 16% anual, calcule a cuánto ascenderán los depósitos al cabo de 12 años si:

a) Se realizan depósitos de $2000 al final de cada año, con intereses capitalizables anualmente.
b) Se efectúan depósitos de $1000 al final de cada periodo de 6 meses, con intereses capitalizables semestralmente.
c) Se hacen depósitos de $500 al final de cada trimestre, con intereses capitalizables trimestralmente.

21 Un individuo quiere depositar $6000 por año en una cuenta de ahorros que genere intereses al 12% anual capitalizables anualmente. Suponga que el primer depósito se realiza al final del año en curso y que otros más se efectúan al terminar cada uno de los años posteriores. *a*) ¿A cuánto llegará la inversión en el momento de hacer el décimo depósito? *b*) ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses?
22 Una corporación planea invertir $2 millones cada 3 meses en una inversión que produce intereses a la tasa de 12% anual capitalizables trimestralmente. La primera inversión se lleva a cabo al final del presente trimestre. *a*)¿A cuánto ascenderá la inversión al cabo de 12 años? *b*) ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses durante el periodo?
23 ¿Cuánto dinero hay que depositar al final de cada periodo de 6 meses, si el objetivo es acumular $50 000 al momento de realizar el vigésimo depósito? Suponga que se obtienen intereses a una tasa del 9% anual capitalizables semestralmente. ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses con los depósitos?
24 Una pequeña comunidad desea establecer un fondo de amortización para liquidar deudas por $20 millones asociados a la construcción de una planta de tratamiento de aguas negras. Quiere ganar intereses a una tasa de 12% anual capitalizables trimestralmente. La deuda vence a 6 años. Si el primer depósito se va a efectuar en 3 meses,

¿qué depósito trimestral se requerirá para acumular los $20 millones? ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses sobre los depósitos?

25 Pueden obtenerse intereses con una cuenta de ahorros a una tasa de 10% anual capitalizables anualmente. Una persona quiere hacer depósitos de $3000 al final de cada año. ¿Cuánto tardarán los depósitos y los intereses acumulados en llegar a una cantidad superior a los $20 000?

26 Pueden obtenerse intereses sobre una inversión a una tasa de 14% anuales capitalizables trimestralmente. Si se efectúan depósitos de $10 000 al final de cada trimestre, ¿cuánto tardarán los depósitos y los intereses acumulados en llegar a una cantidad mayor de los $500 000?

27 ¿Cuánto dinero habrá que invertir al final de cada trimestre, si se pretende acumular $750 000 al cabo de 8 años? Suponga que se ganan intereses a una tasa de 12% anual capitalizables trimestralmente. ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses?

28 ¿Cuánto dinero debe invertirse al final de cada periodo de 6 meses, si el objetivo es acumular $1.2 millones en 5 años? Suponga que se ganan intereses a una tasa de 18% anual capitalizables semestralmente. ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses?

Los ejercicios 29-50 se relacionan con la sección 19.4.

29 Determine el valor presente de una serie de 20 pagos anuales de $40 000 cada uno, los cuales empezarán en 1 año. Suponga un interés de 9% anual capitalizable anualmente.

30 Determine el valor presente de una serie de 20 pagos anuales de $2500 cada uno, los cuales empezarán en 1 año. Suponga un interés de 13% anual capitalizable anualmente.

31 Calcule el valor presente de una serie de 20 pagos trimestrales de $2500 cada uno, los cuales comienzan en 3 meses. Suponga que se obtiene un interés de 14% anual capitalizable trimestralmente.

32 Una persona ganó hace poco la lotería. Según las condiciones de la lotería, el ganador recibirá pagos anuales de $25 000 al finalizar el año en curso y en cada uno de los próximos 19 años. Si el dinero pudiera invertirse hoy a una tasa de 15% anual capitalizable anualmente, ¿cuál sería el valor presente de los 20 pagos de la lotería?

33 Si hoy se tienen $500 000, determine la serie equivalente de 24 pagos semestrales que podrían generarse comenzando en 6 meses. Suponga que pueden obtenerse intereses a una tasa de 14% anual capitalizables semestralmente.

34 *a*) Determine el pago mensual de un automóvil, necesario para liquidar un préstamo de $16 000, si los intereses se calculan al 18% anual capitalizables mensualmente. Suponga que el periodo del préstamo es de 3 años. *b*) ¿Cuánto se pagará por concepto de intereses en el periodo de 3 años?

35 Se invierte un total de $200 000 a una tasa de 16% anual capitalizable anualmente. ¿Cuántos retiros anuales de $30 000 pueden hacerse? (Suponga que el primero se realiza en un año.)

36 Una familia heredó $300 000. Si opta por invertirlos al 12% anual capitalizables trimestralmente, ¿cuántos retiros trimestrales de $15 000 pueden efectuarse? (Suponga que el primero se hace 3 meses después de la inversión.)

En los ejercicios 37-44, determine *a*) el pago mensual de la hipoteca, *b*) los pagos totales y *c*) los intereses totales durante la duración del préstamo.

37 Préstamo de $120 000, a un interés de 10.5%, 25 años

38 Préstamo de $90 000, a un interés de 9.5%, 20 años

39 Préstamo de $200 000, a un interés de 8.5%, 15 años

40 Préstamo de $150 000, a un interés de 11.5%, 30 años

41 Préstamo de $75 000, a un interés de 9.75%, 25 años

42 Préstamo de $140 000, a un interés de 12.5%, 20 años

43 Préstamo de $100 000, a un interés de 10.75%, 30 años
44 Préstamo de $125 000, a un interés de 13.5%, 15 años

En los ejercicios 45-50, calcule el préstamo máximo que puede pagarse.

45 Pago hipotecario de $900, a un interés de 10%, 25 años
46 Pago hipotecario de $1200, a un interés de 8.75%, 30 años
47 Pago hipotecario de $1050, a un interés de 9.25%, 20 años
48 Pago hipotecario de $1500, a un interés de 12.5%, 25 años
49 Pago hipotecario de $1350, a un interés de 11.5%, 20 años
50 Pago hipotecario de $2000, a un interés de 10.5%, 25 años

Los ejercicios 51-54 se relacionan con la sección 19.5.

51 Determine si el proyecto de inversión descrito en la figura 19.19 tiene una tasa de rendimiento mayor o igual que el 12% anual. ¿Cuál es el valor presente neto en esta tasa de interés?

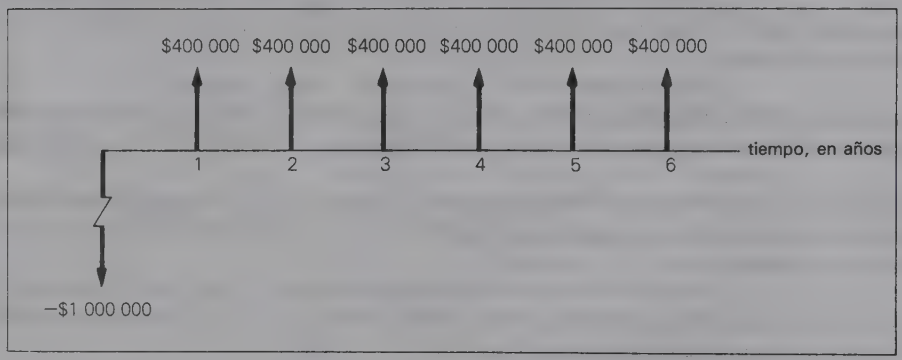


FIGURA 19.19

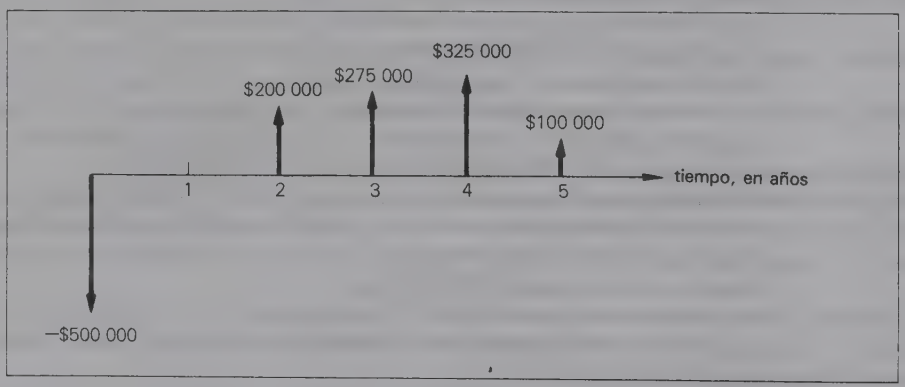


FIGURA 19.20

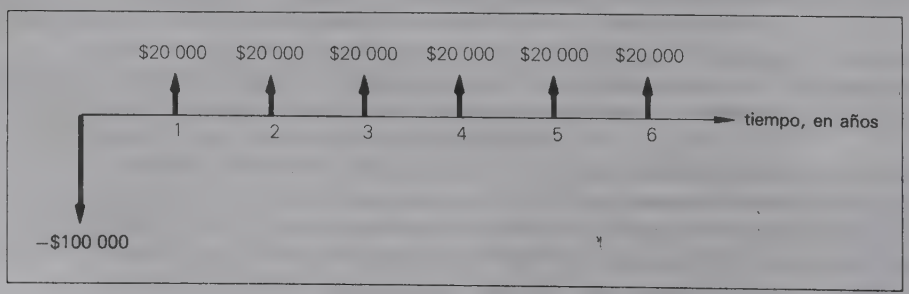


FIGURA 19.21

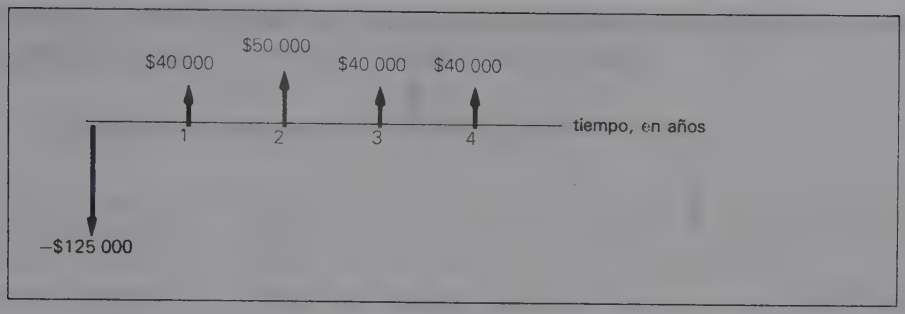


FIGURA 19.22

52 Determine si el proyecto de inversión descrito en la figura 19.20 tiene una tasa de rendimiento mayor o igual que el 14% anual. ¿Cuál es el valor presente neto en ella?

***53** Estime la tasa efectiva de rendimiento generada por el proyecto descrito en la figura 19.21.

***54** Estime la tasa efectiva de rendimiento producida por el proyecto que se describe en la figura 19.22.

PRUEBA DEL CAPÍTULO

1 Un capital de $40 000 se ha invertido a una tasa del 12% anual capitalizable semestralmente. Si se invierte durante 8 años, calcule el monto compuesto al final de ese periodo.

2 En una localidad los precios de los bienes raíces han ido incrementándose a una tasa de 18% anual capitalizables anualmente. Una casa que hoy cuesta $100 000, ¿a qué precio se hubiera vendido hace 3 años?

3 Se efectúan depósitos trimestrales de $5000 en una cuenta que produce intereses a una tasa de 12% anual capitalizables trimestralmente.

a) ¿A cuánto ascenderá la inversión en el momento de realizar el cuadragésimo depósito?

b) ¿Cuánto se recibirá por concepto de intereses durante ese periodo?

4 Se establece un fondo de amortización para liquidar deudas por un total de $80 000. Las deudas se vencen en 6 años. Si pueden obtenerse intereses a una tasa de 14% anual capitalizables semestralmente, ¿qué depósito semestral se requerirá para acumular esa cantidad? (Suponga que el primer depósito se hace en 6 meses.) ¿Cuánto se percibirá por concepto de intereses con esos depósitos?

5 Si hoy se obtienen $75 000, determine la serie equivalente de 10 pagos anuales que podrían generarse empezando en un año. Suponga un interés de 13% anual capitalizable anualmente.

6 La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 16% anual. Calcule la tasa efectiva anual si los intereses se capitalizan cada trimestre.

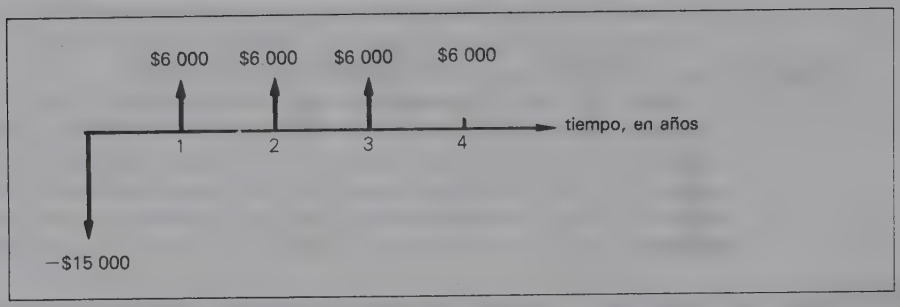


FIGURA 19.23

7 Se dispone de un préstamo hipotecario de $120 000 a una tasa anual de 10.5%. ¿Cuál es la diferencia entre los pagos mensuales de la hipoteca, si el préstamo no se concede a 30 años sino a 20?

8 ¿Tiene el proyecto de inversión descrito en la figura 19.23 una tasa de rendimiento mayor o igual que 10%? ¿Cuál es el valor presente neto con esta tasa?

MINICASO

LA CORPORACIÓN XYZ

La Corporación XYZ está estudiando tres inversiones que se caracterizan por los datos incluidos en la tabla adjunta. Obsérvese que las tres inversiones tienen la misma asignación inicial de efectivo, la misma duración e iguales rendimientos monetarios. Nótese que los patrones de estos últimos son distintos en las tres inversiones.

	Alternativa		
	1	2	3
Inversión inicial	$380 000	$380 000	$380 000
Entradas de efectivo*			
Año 1	$180 000	$220 000	$140 000
Año 2	180 000	180 000	180 000
Año 3	180 000	140 000	220 000
Entradas totales de efectivo	$540 000	$540 000	$540 000

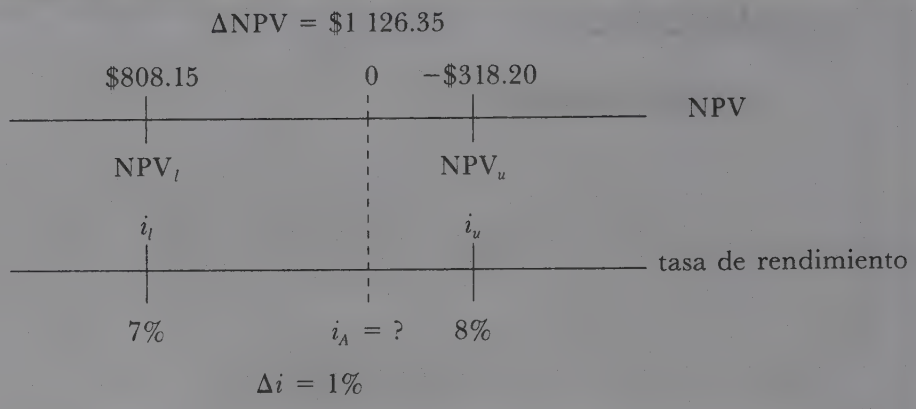
* Suponga que las entradas de efectivo ocurren al final de cada año.

Condiciones:

a) La Corporación XYZ tiene una tasa mínima deseable de rendimiento sobre la inversión de 15%. Calcule el valor presente neto de las tres inversiones y decida si cumplen con el criterio de la tasa de rendimiento.

b) Con *interpolación lineal* estime las tasas efectivas de rendimiento para las tres opciones de inversión. La interpolación lineal es un método de tanteo con el cual se calculan las tasas de rendimiento cuando son diferentes de las que se encuentran en las tablas (o calculadoras). He aquí un ejemplo: se aplicó el método de flujo de efectivo con descuento para concluir que la inversión descrita en la figura 19.10 produjo una tasa de rendimiento menor que 8% anual. Para llegar a esa conclusión nos basamos en que el valor presente neto de la inversión a un 8% anual. Para llegar a esa conclusión nos basamos en que el valor presente neto de la inversión a un 8% anual fue −$318.20.

No se olvide que la tasa real de rendimiento es la que genera un valor presente neto de 0. En la inversión descrita en la figura 19.10, la siguiente tasa más baja disponible en las tablas es 7%. Si el valor presente neto se calcula como una tasa al 7%, el lector comprobará que es igual a + $808.15. De aquí se puede extraer la conclusión de que la tasa efectiva de rendimiento fluctúa entre 7 y 8% al año. La interpolación lineal supone que las tasas de interés sean proporcionales al valor monetario del valor presente neto. En nuestro ejemplo, la tasa efectiva oscila entre 7 y 8%, en proporción con la localización de un valor presente neto de 0 (situado entre el de $808.15 al 7% y el de −318.20 al 8%).



Si se tiene la tasa menor de i_l y la tasa superior i_u que limitan la tasa efectiva y sus respectivos valores presentes netos (NPV_l y NPV_u), un método con el cual se estima la tasa efectiva del rendimiento es

$$i_A = i_l + \frac{NPV_l}{\Delta NPV}\Delta i$$

En este ejemplo, la tasa efectiva estimada del rendimiento es

$$\begin{aligned} i_A &= 0.07 + \frac{808.15}{1126.35}0.01 = 0.07 + 0.717(0.01) \\ &= 0.07 + 0.00717 \\ &= 0.07717 \end{aligned}$$

La tasa efectiva es 7.717%, aproximadamente.

TABLAS

TABLA I FACTOR DEL MONTO COMPUESTO $(1 + i)^n$

	i					
n:	0.01 (1%)	0.015 (1½%)	0.02 (2%)	0.025 (2½%)	0.03 (3%)	0.035 (3½%)
1	1.01000	1.01500	1.02000	1.02500	1.03000	1.03500
2	1.02010	1.03022	1.04040	1.05062	1.06090	1.07122
3	1.03030	1.04568	1.06121	1.07689	1.09273	1.10872
4	1.04060	1.06136	1.08243	1.10381	1.12551	1.14752
5	1.05101	1.07728	1.10408	1.13141	1.15927	1.18769
6	1.06152	1.09344	1.12616	1.15969	1.19405	1.22926
7	1.07214	1.10984	1.14869	1.18869	1.22987	1.27228
8	1.08286	1.12649	1.17166	1.21840	1.26677	1.31681
9	1.09369	1.14339	1.19509	1.24886	1.30477	1.36290
10	1.10462	1.16054	1.21899	1.28008	1.34392	1.41060
11	1.11567	1.17795	1.24337	1.31209	1.38423	1.45997
12	1.12683	1.19562	1.26824	1.34489	1.42576	1.51107
13	1.13809	1.21355	1.29361	1.37851	1.46853	1.56396
14	1.14947	1.23176	1.31948	1.41297	1.51259	1.61869
15	1.16097	1.25023	1.34587	1.44830	1.55797	1.67535
16	1.17258	1.26899	1.37279	1.48451	1.60471	1.73399
17	1.18430	1.28802	1.40024	1.52162	1.65285	1.79468
18	1.19615	1.30734	1.42825	1.55966	1.70243	1.85749
19	1.20811	1.32695	1.45681	1.59865	1.75351	1.92250
20	1.22019	1.34686	1.48595	1.63862	1.80611	1.98979
21	1.23239	1.36706	1.51567	1.67958	1.86029	2.05943
22	1.24472	1.38756	1.54598	1.72157	1.91610	2.13151
23	1.25716	1.40838	1.57690	1.76461	1.97359	2.20611
24	1.26973	1.42950	1.60844	1.80873	2.03279	2.28333
25	1.28243	1.45095	1.64061	1.85394	2.09378	2.36324
26	1.29526	1.47271	1.67342	1.90029	2.15659	2.44596
27	1.30821	1.49480	1.70689	1.94780	2.22129	2.53157
28	1.32129	1.51722	1.74102	1.99650	2.28793	2.62017
29	1.33450	1.53998	1.77584	2.04641	2.35657	2.71188
30	1.34785	1.56308	1.81136	2.09757	2.42726	2.80679
31	1.36133	1.58653	1.84759	2.15001	2.50008	2.90503
32	1.37494	1.61032	1.88454	2.20376	2.57508	3.00671
33	1.38869	1.63448	1.92223	2.25885	2.65234	3.11194
34	1.40258	1.65900	1.96068	2.31532	2.73191	3.22086
35	1.41660	1.68388	1.99989	2.37321	2.81386	3.33359
36	1.43077	1.70914	2.03989	2.43254	2.89828	3.45027
37	1.44508	1.73478	2.08069	2.49335	2.98523	3.57103
38	1.45953	1.76080	2.12230	2.55568	3.07478	3.69601
39	1.47412	1.78721	2.16474	2.61957	3.16703	3.82537
40	1.48886	1.81402	2.20804	2.68506	3.26204	3.95926
41	1.50375	1.84123	2.25220	2.75219	3.35990	4.09783
42	1.51879	1.86885	2.29724	2.82100	3.46070	4.24126
43	1.53398	1.89688	2.34319	2.89152	3.56452	4.38970
44	1.54932	1.92533	2.39005	2.96381	3.67145	4.54334
45	1.56481	1.95421	2.43785	3.03790	3.78160	4.70236
46	1.58046	1.98353	2.48661	3.11385	3.89504	4.86694
47	1.59626	2.01328	2.53634	3.19170	4.01190	5.03728
48	1.61223	2.04348	2.58707	3.27149	4.13225	5.21359
49	1.62835	2.07413	2.63881	3.35328	4.25622	5.39606
50	1.64463	2.10524	2.69159	3.43711	4.38391	5.58493
51	1.66108	2.13682	2.74542	3.52304	4.51542	5.78040
52	1.67769	2.16887	2.80033	3.61111	4.65089	5.98271
53	1.69447	2.20141	2.85633	3.70139	4.79041	6.19211
54	1.71141	2.23443	2.91346	3.79392	4.93412	6.40883
55	1.72852	2.26794	2.97173	3.88877	5.08215	6.63314
56	1.74581	2.30196	3.03117	3.98599	5.23461	6.86530
57	1.76327	2.33649	3.09179	4.08564	5.39165	7.10559
58	1.78090	2.37154	3.15362	4.18778	5.55340	7.35428
59	1.79871	2.40711	3.21670	4.29248	5.72000	7.61168
60	1.81670	2.44322	3.28103	4.39979	5.89160	7.87809

TABLA I (Continúa)

	i					
	0.04 (4%)	0.045 (4½%)	0.05 (5%)	0.06 (6%)	0.07 (7%)	0.08 (8%)
1	1.04000	1.04500	1.05000	1.06000	1.07000	1.08000
2	1.08160	1.09202	1.10250	1.12360	1.14490	1.16640
3	1.12486	1.14117	1.15762	1.19102	1.22504	1.25971
4	1.16986	1.19252	1.21551	1.26248	1.31080	1.36049
5	1.21665	1.24618	1.27628	1.33823	1.40255	1.46933
6	1.26532	1.30226	1.34010	1.41852	1.50073	1.58687
7	1.31593	1.36086	1.40710	1.50363	1.60578	1.71382
8	1.36857	1.42210	1.47746	1.59385	1.71819	1.85093
9	1.42331	1.48610	1.55133	1.68948	1.83846	1.99900
10	1.48024	1.55297	1.62889	1.79085	1.96715	2.15892
11	1.53945	1.62285	1.71034	1.89830	2.10485	2.33164
12	1.60103	1.69588	1.79586	2.01220	2.25219	2.51817
13	1.66507	1.77220	1.88565	2.13293	2.40985	2.71962
14	1.73168	1.85194	1.97993	2.26090	2.57853	2.93719
15	1.80094	1.93528	2.07893	2.39656	2.75903	3.17217
16	1.87298	2.02237	2.18287	2.54035	2.95216	3.42594
17	1.94790	2.11338	2.29202	2.69277	3.15882	3.70002
18	2.02582	2.20848	2.40662	2.85434	3.37993	3.99602
19	2.10685	2.30786	2.52695	3.02560	3.61653	4.31570
20	2.19112	2.41171	2.65330	3.20714	3.86968	4.66096
21	2.27877	2.52024	2.78596	3.39956	4.14056	5.03383
22	2.36992	2.63365	2.92526	3.60354	4.43040	5.43654
23	2.46472	2.75217	3.07152	3.81975	4.74053	5.87146
24	2.56330	2.87601	3.22510	4.04893	5.07237	6.34118
25	2.66584	3.00543	3.38635	4.29187	5.42743	6.84848
26	2.77247	3.14068	3.55567	4.54938	5.80735	7.39635
27	2.88337	3.28201	3.73346	4.82235	6.21387	7.98806
28	2.99870	3.42970	3.92013	5.11169	6.64884	8.62711
29	3.11865	3.58404	4.11614	5.41839	7.11426	9.31727
30	3.24340	3.74532	4.32194	5.74349	7.61226	10.06266
31	3.37313	3.91386	4.53804	6.08810	8.14511	10.86767
32	3.50806	4.08998	4.76494	6.45339	8.71527	11.73708
33	3.64838	4.27403	5.00319	6.84059	9.32534	12.67605
34	3.79432	4.46636	5.25335	7.25103	9.97811	13.69013
35	3.94609	4.66735	5.51602	7.68609	10.67658	14.78534
36	4.10393	4.87738	5.79182	8.14725	11.42394	15.96817
37	4.26809	5.09686	6.08141	8.63609	12.22362	17.24563
38	4.43881	5.32622	6.38548	9.15425	13.07927	18.62528
39	4.61637	5.56590	6.70475	9.70351	13.99482	20.11530
40	4.80102	5.81636	7.03999	10.28572	14.97446	21.72452
41	4.99306	6.07810	7.39199	10.90286	16.02267	23.46248
42	5.19278	6.35162	7.76159	11.55703	17.14426	25.33948
43	5.40050	6.63744	8.14967	12.25045	18.34435	27.36664
44	5.61652	6.93612	8.55715	12.98548	19.62846	29.55597
45	5.84118	7.24825	8.98501	13.76461	21.00245	31.92045
46	6.07482	7.57442	9.43426	14.59049	22.47262	34.47409
47	6.31782	7.91527	9.90597	15.46592	24.04571	37.23201
48	6.57053	8.27146	10.40127	16.39387	25.72891	40.21057
49	6.83335	8.64367	10.92133	17.37750	27.52993	43.42742
50	7.10668	9.03264	11.46740	18.42015	29.45703	46.90161
51	7.39095	9.43910	12.04077	19.52536	31.51902	50.65374
52	7.68659	9.86386	12.64281	20.69689	33.72535	54.70604
53	7.99405	10.30774	13.27495	21.93870	36.08612	59.08252
54	8.31381	10.77159	13.93870	23.25502	38.61215	63.80913
55	8.64637	11.25631	14.63563	24.65032	41.31500	68.91386
56	8.99222	11.76284	15.36741	26.12934	44.20705	74.42696
57	9.35191	12.29217	16.13578	27.69710	47.30155	80.38112
58	9.72599	12.84532	16.94257	29.35893	50.61265	86.81161
59	10.11503	13.42336	17.78970	31.12046	54.15554	93.75654
60	10.51963	14.02741	18.67919	32.98769	57.94643	101.25706

TABLA I (Continúa)

n:	0.09 (9%)	0.10 (10%)	0.11 (11%)	0.12 (12%)	0.13 (13%)	0.14 (14%)
1	1.09000	1.10000	1.11000	1.12000	1.13000	1.14000
2	1.18810	1.21000	1.23210	1.25440	1.27690	1.29960
3	1.29503	1.33100	1.36763	1.40493	1.44290	1.48154
4	1.41158	1.46410	1.51807	1.57352	1.63047	1.68896
5	1.53862	1.61051	1.68506	1.76234	1.84244	1.92541
6	1.67710	1.77156	1.87041	1.97382	2.08195	2.19497
7	1.82804	1.94872	2.07616	2.21068	2.35261	2.50227
8	1.99256	2.14359	2.30454	2.47596	2.65844	2.85259
9	2.17189	2.35795	2.55804	2.77308	3.00404	3.25195
10	2.36736	2.59374	2.83942	3.10585	3.39457	3.70722
11	2.58043	2.85312	3.15176	3.47855	3.83586	4.22623
12	2.81266	3.13843	3.49845	3.89598	4.33452	4.81790
13	3.06580	3.45227	3.88328	4.36349	4.89801	5.49241
14	3.34173	3.79750	4.31044	4.88711	5.53475	6.26135
15	3.64248	4.17725	4.78459	5.47357	6.25427	7.13794
16	3.97031	4.59497	5.31089	6.13039	7.06733	8.13725
17	4.32763	5.05447	5.89509	6.86604	7.98608	9.27646
18	4.71712	5.55992	6.54355	7.68997	9.02427	10.57517
19	5.14166	6.11591	7.26334	8.61276	10.19742	12.05569
20	5.60441	6.72750	8.06231	9.64629	11.52309	13.74349
21	6.10881	7.40025	8.94917	10.80385	13.02109	15.66758
22	6.65860	8.14027	9.93357	12.10031	14.71383	17.86104
23	7.25787	8.95430	11.02627	13.55235	16.62663	20.36158
24	7.91108	9.84973	12.23916	15.17863	18.78809	23.21221
25	8.62308	10.83471	13.58546	17.00006	21.23054	26.46192
26	9.39916	11.91818	15.07986	19.04007	23.99051	30.16658
27	10.24508	13.10999	16.73865	21.32488	27.10928	34.38991
28	11.16714	14.42099	18.57990	23.88387	30.63349	39.20449
29	12.17218	15.86309	20.62369	26.74993	34.61584	44.69312
30	13.26768	17.44940	22.89230	29.95992	39.11590	50.95016
31	14.46177	19.19434	25.41045	33.55511	44.20096	58.08318
32	15.76333	21.11378	28.20560	37.58173	49.94709	66.21483
33	17.18203	23.22515	31.30821	42.09153	56.44021	75.48490
34	18.72841	25.54767	34.75212	47.14252	63.77744	86.05279
35	20.41397	28.10244	38.57485	52.79962	72.06851	98.10018
36	22.25123	30.91268	42.81808	59.13557	81.43741	111.83420
37	24.25384	34.00395	47.52807	66.23184	92.02428	127.49099
38	26.43668	37.40434	52.75616	74.17966	103.98743	145.33973
39	28.81598	41.14478	58.55934	83.08122	117.50580	165.68729
40	31.40942	45.25926	65.00087	93.05097	132.78155	188.88351
41	34.23627	49.78518	72.15096	104.21709	150.04315	215.32721
42	37.31753	54.76370	80.08757	116.72314	169.54876	245.47301
43	40.67611	60.24007	88.89720	130.72991	191.59010	279.83924
44	44.33696	66.26408	98.67589	146.41750	216.49682	319.01673
45	48.32729	72.89048	109.53024	163.98760	244.64140	363.67907
46	52.67674	80.17953	121.57857	183.66612	276.44478	414.59414
47	57.41765	88.19749	134.95221	205.70605	312.38261	472.63732
48	62.58524	97.01723	149.79695	230.39078	352.99234	538.80655
49	68.21791	106.71896	166.27462	258.03767	398.88135	614.23946
50	74.35752	117.39085	184.56483	289.00219	450.73593	700.23299
51	81.04970	129.12994	204.86696	323.68245	509.33160	798.26561
52	88.34417	142.04293	227.40232	362.52435	575.54470	910.02279
53	96.29514	156.24723	252.41658	406.02727	650.36551	1037.42598
54	104.96171	171.87195	280.18240	454.75054	734.91303	1182.66562
55	114.40826	189.05914	311.00247	509.32061	830.45173	1348.23881
56	124.70501	207.96506	345.21274	570.43908	938.41045	1536.99224
57	135.92846	228.76156	383.18614	638.89177	1060.40381	1752.17115
58	148.16202	251.63772	425.33661	715.55878	1198.25630	1997.47512
59	161.49660	276.80149	472.12364	801.42583	1354.02962	2277.12163
60	176.03129	304.48164	524.05724	897.59693	1530.05347	2595.91866

TABLA I (Continúa)

	i					
n	0.15 (15%)	0.16 (16%)	0.17 (17%)	0.18 (18%)	0.19 (19%)	0.20 (20%)
1	1.15000	1.16000	1.17000	1.18000	1.19000	1.20000
2	1.32250	1.34560	1.36890	1.39240	1.41610	1.44000
3	1.52087	1.56090	1.60161	1.64303	1.68516	1.72800
4	1.74901	1.81064	1.87389	1.93878	2.00534	2.07360
5	2.01136	2.10034	2.19245	2.28776	2.38635	2.48832
6	2.31306	2.43640	2.56516	2.69955	2.83976	2.98598
7	2.66002	2.82622	3.00124	3.18547	3.37932	3.58318
8	3.05902	3.27841	3.51145	3.75886	4.02139	4.29982
9	3.51788	3.80296	4.10840	4.43545	4.78545	5.15978
10	4.04556	4.41144	4.80683	5.23384	5.69468	6.19174
11	4.65239	5.11726	5.62399	6.17593	6.77667	7.43008
12	5.35025	5.93603	6.58007	7.28759	8.06424	8.91610
13	6.15279	6.88579	7.69868	8.59936	9.59645	10.69932
14	7.07571	7.98752	9.00745	10.14724	11.41977	12.83918
15	8.13706	9.26552	10.53872	11.97375	13.58953	15.40702
16	9.35762	10.74800	12.33030	14.12902	16.17154	18.48843
17	10.76126	12.46768	14.42646	16.67225	19.24413	22.18611
18	12.37545	14.46251	16.87895	19.67325	22.90052	26.62333
19	14.23177	16.77652	19.74838	23.21444	27.25162	31.94800
20	16.36654	19.46076	23.10560	27.39303	32.42942	38.33760
21	18.82152	22.57448	27.03355	32.32378	38.59101	46.00512
22	21.64475	26.18640	31.62925	38.14206	45.92331	55.20614
23	24.89146	30.37622	37.00623	45.00763	54.64873	66.24737
24	28.62518	35.23642	43.29729	53.10901	65.03199	79.49685
25	32.91895	40.87424	50.65783	62.66863	77.38807	95.39622
26	37.85680	47.41412	59.26966	73.94898	92.09181	114.47546
27	43.53531	55.00038	69.34550	87.25980	109.58925	137.37055
28	50.06561	63.80044	81.13423	102.96656	130.41121	164.84466
29	57.57545	74.00851	94.92705	121.50054	155.18934	197.81359
30	66.21177	85.84988	111.06465	143.37064	184.67531	237.37631
31	76.14354	99.58586	129.94564	169.17735	219.76362	284.85158
32	87.56507	115.51959	152.03640	199.62928	261.51871	341.82189
33	100.69983	134.00273	177.88259	235.56255	311.20726	410.18627
34	115.80480	155.44317	208.12263	277.96381	370.33664	492.22352
35	133.17552	180.31407	243.50347	327.99729	440.70061	590.66823
36	153.15185	209.16432	284.89906	387.03680	524.43372	708.80187
37	176.12463	242.63062	333.33191	456.70343	624.07613	850.56225
38	202.54332	281.45151	389.99833	538.91004	742.65059	1020.67470
39	232.92482	326.48376	456.29805	635.91385	883.75421	1224.80964
40	267.86355	378.72116	533.86871	750.37834	1051.66751	1469.77157
41	308.04308	439.31654	624.62639	885.44645	1251.48433	1763.72588
42	354.24954	509.60719	730.81288	1044.82681	1489.26636	2116.47106
43	407.38697	591.14434	855.05107	1232.89563	1772.22696	2539.76527
44	468.49502	685.72744	1000.40975	1454.81685	2108.95009	3047.71832
45	538.76927	795.44383	1170.47941	1716.68388	2509.65060	3657.26199
46	619.58466	922.71484	1369.46091	2025.68698	2986.48422	4388.71439
47	712.52236	1070.34921	1602.26927	2390.31063	3553.91622	5266.45726
48	819.40071	1241.60509	1874.65504	2820.56655	4229.16030	6319.74872
49	942.31082	1440.26190	2193.34640	3328.26853	5032.70076	7583.69846
50	1083.65744	1670.70380	2566.21528	3927.35686	5988.91390	9100.43815
51	1246.20606	1938.01641	3002.47188	4634.28109	7126.80754	10920.52578
52	1433.13697	2248.09904	3512.89210	5468.45169	8480.90098	13104.63094
53	1648.10751	2607.79488	4110.08376	6452.77300	10092.27216	15725.55712
54	1895.32364	3025.04207	4808.79800	7614.27214	12009.80387	18870.66855
55	2179.62218	3509.04880	5626.29366	8984.84112	14291.66661	22644.80226
56	2506.56551	4070.49660	6582.76358	10602.11252	17007.08327	27173.76271
57	2882.55034	4721.77606	7701.83339	12510.49278	20238.42909	32608.51525
58	3314.93289	5477.26023	9011.14507	14762.38148	24083.73061	39130.21830
59	3812.17282	6353.62187	10543.03973	17419.61014	28659.63943	46956.26196
60	4383.99875	7370.20137	12335.35648	20555.13997	34104.97092	56347.51435

TABLA II FACTOR DEL VALOR PRESENTE $(1 + i)^{-n}$

	i					
n	0.01 (1%)	0.015 (1½%)	0.02 (2%)	0.025 (2½%)	0.03 (3%)	0.035 (3½%)
1	0.99010	0.98522	0.98039	0.97561	0.97087	0.96618
2	0.98030	0.97066	0.96117	0.95181	0.94260	0.93351
3	0.97059	0.95632	0.94232	0.92860	0.91514	0.90194
4	0.96098	0.94218	0.92385	0.90595	0.88849	0.87144
5	0.95147	0.92826	0.90573	0.88385	0.86261	0.84197
6	0.94205	0.91454	0.88797	0.86230	0.83748	0.81350
7	0.93272	0.90103	0.87056	0.84127	0.81309	0.78599
8	0.92348	0.88771	0.85349	0.82075	0.78941	0.75941
9	0.91434	0.87459	0.83676	0.80073	0.76642	0.73373
10	0.90529	0.86167	0.82035	0.78120	0.74409	0.70892
11	0.89632	0.84893	0.80426	0.76214	0.72242	0.68495
12	0.88745	0.83639	0.78849	0.74356	0.70138	0.66178
13	0.87866	0.82403	0.77303	0.72542	0.68095	0.63940
14	0.86996	0.81185	0.75788	0.70773	0.66112	0.61778
15	0.86135	0.79985	0.74301	0.69047	0.64186	0.59689
16	0.85282	0.78803	0.72845	0.67362	0.62317	0.57671
17	0.84438	0.77639	0.71416	0.65720	0.60502	0.55720
18	0.83602	0.76491	0.70016	0.64117	0.58739	0.53836
19	0.82774	0.75361	0.68643	0.62553	0.57029	0.52016
20	0.81954	0.74247	0.67297	0.61027	0.55368	0.50257
21	0.81143	0.73150	0.65978	0.59539	0.53755	0.48557
22	0.80340	0.72069	0.64684	0.58086	0.52189	0.46915
23	0.79544	0.71004	0.63416	0.56670	0.50669	0.45329
24	0.78757	0.69954	0.62172	0.55288	0.49193	0.43796
25	0.77977	0.68921	0.60953	0.53939	0.47761	0.42315
26	0.77205	0.67902	0.59758	0.52623	0.46369	0.40884
27	0.76440	0.66899	0.58586	0.51340	0.45019	0.39501
28	0.75684	0.65910	0.57437	0.50088	0.43708	0.38165
29	0.74934	0.64936	0.56311	0.48866	0.42435	0.36875
30	0.74192	0.63976	0.55207	0.47674	0.41199	0.35628
31	0.73458	0.63031	0.54125	0.46511	0.39999	0.34423
32	0.72730	0.62099	0.53063	0.45377	0.38834	0.33259
33	0.72010	0.61182	0.52023	0.44270	0.37703	0.32134
34	0.71297	0.60277	0.51003	0.43191	0.36604	0.31048
35	0.70591	0.59387	0.50003	0.42137	0.35538	0.29998
36	0.69892	0.58509	0.49022	0.41109	0.34503	0.28983
37	0.69200	0.57644	0.48061	0.40107	0.33498	0.28003
38	0.68515	0.56792	0.47119	0.39128	0.32523	0.27056
39	0.67837	0.55953	0.46195	0.38174	0.31575	0.26141
40	0.67165	0.55126	0.45289	0.37243	0.30656	0.25257
41	0.66500	0.54312	0.44401	0.36335	0.29763	0.24403
42	0.65842	0.53509	0.43530	0.35448	0.28896	0.23578
43	0.65190	0.52718	0.42677	0.34584	0.28054	0.22781
44	0.64545	0.51939	0.41840	0.33740	0.27237	0.22010
45	0.63905	0.51171	0.41020	0.32917	0.26444	0.21266
46	0.63273	0.50415	0.40215	0.32115	0.25674	0.20547
47	0.62646	0.49670	0.39427	0.31331	0.24926	0.19852
48	0.62026	0.48936	0.38654	0.30567	0.24200	0.19181
49	0.61412	0.48213	0.37896	0.29822	0.23495	0.18532
50	0.60804	0.47500	0.37153	0.29094	0.22811	0.17905
51	0.60202	0.46798	0.36424	0.28385	0.22146	0.17300
52	0.59606	0.46107	0.35710	0.27692	0.21501	0.16715
53	0.59016	0.45426	0.35010	0.27017	0.20875	0.16150
54	0.58431	0.44754	0.34323	0.26358	0.20267	0.15603
55	0.57853	0.44093	0.33650	0.25715	0.19677	0.15076
56	0.57280	0.43441	0.32991	0.25088	0.19104	0.14566
57	0.56713	0.42799	0.32344	0.24476	0.18547	0.14073
58	0.56151	0.42167	0.31710	0.23879	0.18007	0.13598
59	0.55595	0.41544	0.31088	0.23297	0.17483	0.13138
60	0.55045	0.40930	0.30478	0.22728	0.16973	0.12693

TABLA II (Continúa)

	i					
n	0.09 (9%)	0.10 (10%)	0.11 (11%)	0.12 (12%)	0.13 (13%)	0.14 (14%)
1	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286	0.88496	0.87719
2	0.84168	0.82645	0.81162	0.79719	0.78315	0.76947
3	0.77218	0.75131	0.73119	0.71178	0.69305	0.67497
4	0.70843	0.68301	0.65873	0.63552	0.61332	0.59208
5	0.64993	0.62092	0.59345	0.56743	0.54276	0.51937
6	0.59627	0.56447	0.53464	0.50663	0.48032	0.45559
7	0.54703	0.51316	0.48166	0.45235	0.42506	0.39964
8	0.50187	0.46651	0.43393	0.40388	0.37616	0.35056
9	0.46043	0.42410	0.39092	0.36061	0.33288	0.30751
10	0.42241	0.38554	0.35218	0.32197	0.29459	0.26974
11	0.38753	0.35049	0.31728	0.28748	0.26070	0.23662
12	0.35553	0.31863	0.28584	0.25668	0.23071	0.20756
13	0.32618	0.28966	0.25751	0.22917	0.20416	0.18207
14	0.29925	0.26333	0.23199	0.20462	0.18068	0.15971
15	0.27454	0.23939	0.20900	0.18270	0.15989	0.14010
16	0.25187	0.21763	0.18829	0.16312	0.14150	0.12289
17	0.23107	0.19784	0.16963	0.14564	0.12522	0.10780
18	0.21199	0.17986	0.15282	0.13004	0.11081	0.09456
19	0.19449	0.16351	0.13768	0.11611	0.09806	0.08295
20	0.17843	0.14864	0.12403	0.10367	0.08678	0.07276
21	0.16370	0.13513	0.11174	0.09256	0.07680	0.06383
22	0.15018	0.12285	0.10067	0.08264	0.06796	0.05599
23	0.13778	0.11168	0.09069	0.07379	0.06014	0.04911
24	0.12640	0.10153	0.08170	0.06588	0.05323	0.04308
25	0.11597	0.09230	0.07361	0.05882	0.04710	0.03779
26	0.10639	0.08391	0.06631	0.05252	0.04168	0.03315
27	0.09761	0.07628	0.05974	0.04689	0.03689	0.02908
28	0.08955	0.06934	0.05382	0.04187	0.03264	0.02551
29	0.08215	0.06304	0.04849	0.03738	0.02889	0.02237
30	0.07537	0.05731	0.04368	0.03338	0.02557	0.01963
31	0.06915	0.05210	0.03935	0.02980	0.02262	0.01722
32	0.06344	0.04736	0.03545	0.02661	0.02002	0.01510
33	0.05820	0.04306	0.03194	0.02376	0.01772	0.01325
34	0.05339	0.03914	0.02878	0.02121	0.01568	0.01162
35	0.04899	0.03558	0.02592	0.01894	0.01388	0.01019
36	0.04494	0.03235	0.02335	0.01691	0.01228	0.00894
37	0.04123	0.02941	0.02104	0.01510	0.01087	0.00784
38	0.03783	0.02673	0.01896	0.01348	0.00962	0.00688
39	0.03470	0.02430	0.01708	0.01204	0.00851	0.00604
40	0.03184	0.02209	0.01538	0.01075	0.00753	0.00529
41	0.02921	0.02009	0.01386	0.00960	0.00666	0.00464
42	0.02680	0.01826	0.01249	0.00857	0.00590	0.00407
43	0.02458	0.01660	0.01125	0.00765	0.00522	0.00357
44	0.02255	0.01509	0.01013	0.00683	0.00462	0.00313
45	0.02069	0.01372	0.00913	0.00610	0.00409	0.00275
46	0.01898	0.01247	0.00823	0.00544	0.00362	0.00241
47	0.01742	0.01134	0.00741	0.00486	0.00320	0.00212
48	0.01598	0.01031	0.00668	0.00434	0.00283	0.00186
49	0.01466	0.00937	0.00601	0.00388	0.00251	0.00163
50	0.01345	0.00852	0.00542	0.00346	0.00222	0.00143
51	0.01234	0.00774	0.00488	0.00309	0.00196	0.00125
52	0.01132	0.00704	0.00440	0.00276	0.00174	0.00110
53	0.01038	0.00640	0.00396	0.00246	0.00154	0.00096
54	0.00953	0.00582	0.00357	0.00220	0.00136	0.00085
55	0.00874	0.00529	0.00322	0.00196	0.00120	0.00074
56	0.00802	0.00481	0.00290	0.00175	0.00107	0.00065
57	0.00736	0.00437	0.00261	0.00157	0.00094	0.00057
58	0.00675	0.00397	0.00235	0.00140	0.00083	0.00050
59	0.00619	0.00361	0.00212	0.00125	0.00074	0.00044
60	0.00568	0.00328	0.00191	0.00111	0.00065	0.00039

TABLA II (Continúa)

n	0.04 (4%)	0.045 (4½%)	0.05 (5%)	0.06 (6%)	0.07 (7%)	0.08 (8%)
1	0.96154	0.95694	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593
2	0.92456	0.91573	0.90703	0.89000	0.87344	0.85734
3	0.88900	0.87630	0.86384	0.83962	0.81630	0.79383
4	0.85480	0.83856	0.82270	0.79209	0.76290	0.73503
5	0.82193	0.80245	0.78353	0.74726	0.71299	0.68058
6	0.79031	0.76790	0.74622	0.70496	0.66634	0.63017
7	0.75992	0.73483	0.71068	0.66506	0.62275	0.58349
8	0.73069	0.70319	0.67684	0.62741	0.58201	0.54027
9	0.70259	0.67290	0.64461	0.59190	0.54393	0.50025
10	0.67556	0.64393	0.61391	0.55839	0.50835	0.46319
11	0.64958	0.61620	0.58468	0.52679	0.47509	0.42888
12	0.62460	0.58966	0.55684	0.49697	0.44401	0.39711
13	0.60057	0.56427	0.53032	0.46884	0.41496	0.36770
14	0.57748	0.53997	0.50507	0.44230	0.38782	0.34046
15	0.55526	0.51672	0.48102	0.41727	0.36245	0.31524
16	0.53391	0.49447	0.45811	0.39365	0.33873	0.29189
17	0.51337	0.47318	0.43630	0.37136	0.31657	0.27027
18	0.49363	0.45280	0.41552	0.35034	0.29586	0.25025
19	0.47464	0.43330	0.39573	0.33051	0.27651	0.23171
20	0.45639	0.41464	0.37689	0.31180	0.25842	0.21455
21	0.43883	0.39679	0.35894	0.29416	0.24151	0.19866
22	0.42196	0.37970	0.34185	0.27751	0.22571	0.18394
23	0.40573	0.36335	0.32557	0.26180	0.21095	0.17032
24	0.39012	0.34770	0.31007	0.24698	0.19715	0.15770
25	0.37512	0.33273	0.29530	0.23300	0.18425	0.14602
26	0.36069	0.31840	0.28124	0.21981	0.17220	0.13520
27	0.34682	0.30469	0.26785	0.20737	0.16093	0.12519
28	0.33348	0.29157	0.25509	0.19563	0.15040	0.11591
29	0.32065	0.27902	0.24295	0.18456	0.14056	0.10733
30	0.30832	0.26700	0.23138	0.17411	0.13137	0.09938
31	0.29646	0.25550	0.22036	0.16425	0.12277	0.09202
32	0.28506	0.24450	0.20987	0.15496	0.11474	0.08520
33	0.27409	0.23397	0.19987	0.14619	0.10723	0.07889
34	0.26355	0.22390	0.19035	0.13791	0.10022	0.07305
35	0.25342	0.21425	0.18129	0.13011	0.09366	0.06763
36	0.24367	0.20503	0.17266	0.12274	0.08754	0.06262
37	0.23430	0.19620	0.16444	0.11579	0.08181	0.05799
38	0.22529	0.18775	0.15661	0.10924	0.07646	0.05369
39	0.21662	0.17967	0.14915	0.10306	0.07146	0.04971
40	0.20829	0.17193	0.14205	0.09722	0.06678	0.04603
41	0.20028	0.16453	0.13528	0.09172	0.06241	0.04262
42	0.19257	0.15744	0.12884	0.08653	0.05833	0.03946
43	0.18517	0.15066	0.12270	0.08163	0.05451	0.03654
44	0.17805	0.14417	0.11686	0.07701	0.05095	0.03383
45	0.17120	0.13796	0.11130	0.07265	0.04761	0.03133
46	0.16461	0.13202	0.10600	0.06854	0.04450	0.02901
47	0.15828	0.12634	0.10095	0.06466	0.04159	0.02686
48	0.15219	0.12090	0.09614	0.06100	0.03837	0.02487
49	0.14634	0.11569	0.09156	0.05755	0.03632	0.02303
50	0.14071	0.11071	0.08720	0.05429	0.03395	0.02132
51	0.13530	0.10594	0.08305	0.05122	0.03173	0.01974
52	0.13010	0.10138	0.07910	0.04832	0.02965	0.01828
53	0.12509	0.09701	0.07533	0.04558	0.02771	0.01693
54	0.12028	0.09284	0.07174	0.04300	0.02590	0.01567
55	0.11566	0.08884	0.06833	0.04057	0.02420	0.01451
56	0.11121	0.08501	0.06507	0.03827	0.02262	0.01344
57	0.10693	0.08135	0.06197	0.03610	0.02114	0.01244
58	0.10282	0.07785	0.05902	0.03406	0.01976	0.01152
59	0.09886	0.07450	0.05621	0.03213	0.01847	0.01067
60	0.09506	0.07129	0.05354	0.03031	0.01726	0.00988

TABLA II (Continúa)

	i					
n	0.15 (15%)	0.16 (16%)	0.17 (17%)	0.18 (18%)	0.19 (19%)	0.20 (20%)
1	0.86957	0.86207	0.85470	0.84746	0.84034	0.83333
2	0.75614	0.74316	0.73051	0.71818	0.70616	0.69444
3	0.65752	0.64066	0.62437	0.60863	0.59342	0.57870
4	0.57175	0.55229	0.53365	0.51579	0.49867	0.48225
5	0.49718	0.47611	0.45611	0.43711	0.41905	0.40188
6	0.43233	0.41044	0.38984	0.37043	0.35214	0.33490
7	0.37594	0.35383	0.33320	0.31393	0.29592	0.27908
8	0.32690	0.30503	0.28478	0.26604	0.24867	0.23257
9	0.28426	0.26295	0.24340	0.22546	0.20897	0.19381
10	0.24718	0.22668	0.20804	0.19106	0.17560	0.16151
11	0.21494	0.19542	0.17781	0.16192	0.14757	0.13459
12	0.18691	0.16846	0.15197	0.13722	0.12400	0.11216
13	0.16253	0.14523	0.12989	0.11629	0.10421	0.09346
14	0.14133	0.12520	0.11102	0.09855	0.08757	0.07789
15	0.12289	0.10793	0.09489	0.08352	0.07359	0.06491
16	0.10686	0.09304	0.08110	0.07078	0.06184	0.05409
17	0.09293	0.08021	0.06932	0.05998	0.05196	0.04507
18	0.08081	0.06914	0.05925	0.05083	0.04367	0.03756
19	0.07027	0.05961	0.05064	0.04308	0.03670	0.03130
20	0.06110	0.05139	0.04328	0.03651	0.03084	0.02608
21	0.05313	0.04430	0.03699	0.03094	0.02591	0.02174
22	0.04620	0.03819	0.03162	0.02622	0.02178	0.01811
23	0.04017	0.03292	0.02702	0.02222	0.01830	0.01509
24	0.03493	0.02838	0.02310	0.01883	0.01538	0.01258
25	0.03038	0.02447	0.01974	0.01596	0.01292	0.01048
26	0.02642	0.02109	0.01687	0.01352	0.01086	0.00874
27	0.02297	0.01818	0.01442	0.01146	0.00912	0.00728
28	0.01997	0.01567	0.01233	0.00971	0.00767	0.00607
29	0.01737	0.01351	0.01053	0.00823	0.00644	0.00506
30	0.01510	0.01165	0.00900	0.00697	0.00541	0.00421
31	0.01313	0.01004	0.00770	0.00591	0.00455	0.00351
32	0.01142	0.00866	0.00658	0.00501	0.00382	0.00293
33	0.00993	0.00746	0.00562	0.00425	0.00321	0.00244
34	0.00864	0.00643	0.00480	0.00360	0.00270	0.00203
35	0.00751	0.00555	0.00411	0.00305	0.00227	0.00169
36	0.00653	0.00478	0.00351	0.00258	0.00191	0.00141
37	0.00568	0.00412	0.00300	0.00219	0.00160	0.00118
38	0.00494	0.00355	0.00256	0.00186	0.00135	0.00098
39	0.00429	0.00306	0.00219	0.00157	0.00113	0.00082
40	0.00373	0.00264	0.00187	0.00133	0.00095	0.00068
41	0.00325	0.00228	0.00160	0.00113	0.00080	0.00057
42	0.00282	0.00196	0.00137	0.00096	0.00067	0.00047
43	0.00245	0.00169	0.00117	0.00081	0.00056	0.00039
44	0.00213	0.00146	0.00100	0.00069	0.00047	0.00033
45	0.00186	0.00126	0.00085	0.00058	0.00040	0.00027
46	0.00161	0.00108	0.00073	0.00049	0.00033	0.00023
47	0.00140	0.00093	0.00062	0.00042	0.00028	0.00019
48	0.00122	0.00081	0.00053	0.00035	0.00024	0.00016
49	0.00106	0.00069	0.00046	0.00030	0.00020	0.00013
50	0.00092	0.00060	0.00039	0.00025	0.00017	0.00011
51	0.00080	0.00052	0.00033	0.00022	0.00014	0.00009
52	0.00070	0.00044	0.00028	0.00018	0.00012	0.00008
53	0.00061	0.00038	0.00024	0.00015	0.00010	0.00006
54	0.00053	0.00033	0.00021	0.00013	0.00008	0.00005
55	0.00046	0.00028	0.00018	0.00011	0.00007	0.00004
56	0.00040	0.00025	0.00015	0.00009	0.00006	0.00004
57	0.00035	0.00021	0.00013	0.00008	0.00005	0.00003
58	0.00030	0.00018	0.00011	0.00007	0.00004	0.00003
59	0.00026	0.00016	0.00009	0.00006	0.00003	0.00002
60	0.00023	0.00014	0.00008	0.00005	0.00003	0.00002

TABLA III FACTOR DEL MONTO COMPUESTO DE UNA ANUALIDAD $\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$

	i					
n	0.01 (1%)	0.015 (1½%)	0.02 (2%)	0.025 (2½%)	0.03 (3%)	0.035 (3½%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.01000	2.01500	2.02000	2.02500	2.03000	2.03500
3	3.03010	3.04522	3.06040	3.07562	3.09090	3.10622
4	4.06040	4.09090	4.12161	4.15252	4.18363	4.21494
5	5.10101	5.15227	5.20404	5.25633	5.30914	5.36247
6	6.15202	6.22955	6.30812	6.38774	6.46841	6.55015
7	7.21354	7.32299	7.43428	7.54743	7.66246	7.77941
8	8.28567	8.43284	8.58297	8.73612	8.89234	9.05169
9	9.36853	9.55933	9.75463	9.95452	10.15911	10.36850
10	10.46221	10.70272	10.94972	11.20338	11.46388	11.73139
11	11.56683	11.86326	12.16872	12.48347	12.80780	13.14199
12	12.68250	13.04121	13.41209	13.79555	14.19203	14.60196
13	13.80933	14.23683	14.68033	15.14044	15.61779	16.11303
14	14.94742	15.45038	15.97394	16.51895	17.08632	17.67699
15	16.09690	16.68214	17.29342	17.93193	18.59891	19.29568
16	17.25786	17.93237	18.63929	19.38022	20.15688	20.97103
17	18.43044	19.20136	20.01207	20.86473	21.76159	22.70502
18	19.61475	20.48938	21.41231	22.38635	23.41444	24.49969
19	20.81090	21.79672	22.84056	23.94601	25.11687	26.35718
20	22.01900	23.12367	24.29737	25.54466	26.87037	28.27968
21	23.23919	24.47052	25.78332	27.18327	28.67649	30.26947
22	24.47159	25.83758	27.29898	28.86286	30.53678	32.32890
23	25.71630	27.22514	28.84496	30.58443	32.45288	34.46041
24	26.97346	28.63352	30.42186	32.34904	34.42647	36.66653
25	28.24320	30.06302	32.03030	34.15776	36.45926	38.94986
26	29.52563	31.51397	33.67091	36.01171	38.55304	41.31310
27	30.82089	32.98668	35.34432	37.91200	40.70963	43.75906
28	32.12910	34.48148	37.05121	39.85980	42.93092	46.29063
29	33.45039	35.99870	38.79223	41.85630	45.21885	48.91080
30	34.78489	37.53868	40.56808	43.90270	47.57542	51.62268
31	36.13274	39.10176	42.37944	46.00027	50.00268	54.42947
32	37.49407	40.68829	44.22703	48.15028	52.50276	57.33450
33	38.86901	42.29861	46.11157	50.35403	55.07784	60.34121
34	40.25770	43.93309	48.03380	52.61289	57.73018	63.45315
35	41.66028	45.59209	49.99448	54.92821	60.46208	66.67401
36	43.07688	47.27597	51.99437	57.30141	63.27594	70.00760
37	44.50765	48.98511	54.03425	59.73395	66.17422	73.45787
38	45.95272	50.71989	56.11494	62.22730	69.15945	77.02889
39	47.41225	52.48068	58.23724	64.78298	72.23423	80.72491
40	48.88637	54.26789	60.40198	67.40255	75.40126	84.55028
41	50.37524	56.08191	62.61002	70.08762	78.66330	88.50954
42	51.87899	57.92314	64.86222	72.83981	82.02320	92.60737
43	53.39778	59.79199	67.15947	75.66080	85.48389	96.84863
44	54.93176	61.68887	69.50266	78.55232	89.04841	101.23833
45	56.48107	63.61420	71.89271	81.51613	92.71986	105.78167
46	58.04589	65.56841	74.33056	84.55403	96.50146	110.48403
47	59.62634	67.55194	76.81718	87.66789	100.39650	115.35097
48	61.22261	69.56522	79.35352	90.85958	104.40840	120.38826
49	62.83483	71.60870	81.94059	94.13107	108.54065	125.60185
50	64.46318	73.68283	84.57940	97.48435	112.79687	130.99791
51	66.10781	75.78807	87.27099	100.92146	117.18077	136.58284
52	67.76889	77.92489	90.01641	104.44449	121.69620	142.36324
53	69.44658	80.09376	92.81674	108.05561	126.34708	148.34595
54	71.14105	82.29517	95.67307	111.75700	131.13749	154.53806
55	72.85246	84.52960	98.58653	115.55092	136.07162	160.94689
56	74.58098	86.79754	101.55826	119.43969	141.15377	167.58003
57	76.32679	89.09951	104.58943	123.42569	146.38838	174.44533
58	78.09006	91.43600	107.68122	127.51133	151.78003	181.55092
59	79.87096	93.80754	110.83484	131.69911	157.33343	188.90520
60	81.66967	96.21465	114.05154	135.99159	163.05344	196.51688

TABLA III (Continúa)

	i					
n	0.04 (4%)	0.045 (4½%)	0.05 (5%)	0.06 (6%)	0.07 (7%)	0.08 (8%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.04000	2.04500	2.05000	2.06000	2.07000	2.08000
3	3.12160	3.13702	3.15250	3.18360	3.21490	3.24640
4	4.24646	4.27819	4.31012	4.37462	4.43994	4.50611
5	5.41632	5.47071	5.52563	5.63709	5.75074	5.86660
6	6.63298	6.71689	6.80191	6.97532	7.15329	7.33593
7	7.89829	8.01915	8.14201	8.39384	8.65402	8.92280
8	9.21423	9.38001	9.54911	9.89747	10.25980	10.63663
9	10.58280	10.80211	11.02656	11.49132	11.97799	12.48756
10	12.00611	12.28821	12.57789	13.18079	13.81645	14.48656
11	13.48635	13.84118	14.20679	14.97164	15.78360	16.64549
12	15.02581	15.46403	15.91713	16.86994	17.88845	18.97713
13	16.62684	17.15991	17.71298	18.88214	20.14064	21.49530
14	18.29191	18.93211	19.59863	21.01507	22.55049	24.21492
15	20.02359	20.78405	21.57856	23.27597	25.12902	27.15211
16	21.82453	22.71934	23.65749	25.67253	27.88805	30.32428
17	23.69751	24.74171	25.84037	28.21288	30.84022	33.75023
18	25.64541	26.85508	28.13238	30.90565	33.99903	37.45024
19	27.67123	29.06356	30.53900	33.75999	37.37896	41.44626
20	29.77808	31.37142	33.06595	36.78559	40.99549	45.76196
21	31.96920	33.78314	35.71925	39.99273	44.86518	50.42292
22	34.24797	36.30338	38.50521	43.39229	49.00574	55.45676
23	36.61789	38.93703	41.43048	46.99583	53.43614	60.89330
24	39.08260	41.68920	44.50200	50.81558	58.17667	66.76476
25	41.64591	44.56521	47.72710	54.86451	63.24904	73.10594
26	44.31174	47.57064	51.11345	59.15638	68.67647	79.95442
27	47.08421	50.71132	54.66913	63.70577	74.48382	87.35077
28	49.96758	53.99333	58.40258	68.52811	80.69769	95.33883
29	52.96629	57.42303	62.32271	73.63980	87.34653	103.96594
30	56.08494	61.00707	66.43885	79.05819	94.46079	113.28321
31	59.32834	64.75239	70.76079	84.80168	102.07304	123.34587
32	62.70147	68.66625	75.29883	90.88978	110.21815	134.21354
33	66.20953	72.75623	80.06377	97.34316	118.93343	145.95062
34	69.85791	77.03026	85.06696	104.18375	128.25876	158.62667
35	73.65222	81.49662	90.32031	111.43478	138.23688	172.31680
36	77.59831	86.16397	95.83632	119.12087	148.91346	187.10215
37	81.70225	91.04134	101.62814	127.26812	160.33740	203.07032
38	85.97034	96.13820	107.70955	135.90421	172.56102	220.31595
39	90.40915	101.46442	114.09502	145.05846	185.64029	238.94122
40	95.02552	107.03032	120.79977	154.76197	199.63511	259.05652
41	99.82654	112.84669	127.83976	165.04768	214.60957	280.78104
42	104.81960	118.92479	135.23175	175.95054	230.63224	304.24352
43	110.01238	125.27640	142.99334	187.50758	247.77650	329.58301
44	115.41288	131.91384	151.14301	199.75803	266.12085	356.94965
45	121.02939	138.84997	159.70016	212.74351	285.74931	386.50562
46	126.87057	146.09821	168.68516	226.50812	306.75176	418.42607
47	132.94539	153.67263	178.11942	241.09861	329.22439	452.90015
48	139.26321	161.58790	188.02539	256.56453	353.27009	490.13216
49	145.83373	169.85936	198.42666	272.95840	378.99900	530.34274
50	152.66708	178.50303	209.34800	290.33590	406.52893	573.77016
51	159.77377	187.53566	220.81540	308.75606	435.98595	620.67177
52	167.16472	196.97477	232.85617	328.28142	467.50497	671.32551
53	174.85131	206.83863	245.49897	348.97831	501.23032	726.03155
54	182.84536	217.14637	258.77392	370.91701	537.31644	785.11408
55	191.15917	227.91796	272.71262	394.17203	575.92859	848.92320
56	199.80554	239.17427	287.34825	418.82235	617.24359	917.83706
57	208.79776	250.93711	302.71566	444.95169	661.45065	992.26402
58	218.14967	263.22928	318.85144	472.64879	708.75219	1072.64514
59	227.87566	276.07460	335.79402	502.00772	759.36484	1159.45676
60	237.99069	289.49795	353.58372	533.12818	813.52038	1253.21330

TABLA III (Continúa)

n	0.09 (9%)	0.10 (10%)	0.11 (11%)	0.12 (12%)	0.13 (13%)	0.14 (14%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.09000	2.10000	2.11000	2.12000	2.13000	2.14000
3	3.27810	3.31000	3.34210	3.37440	3.40690	3.43960
4	4.57313	4.64100	4.70973	4.77933	4.84980	4.92114
5	5.98471	6.10510	6.22780	6.35285	6.48027	6.61010
6	7.52333	7.71561	7.91286	8.11519	8.32271	8.53552
7	9.20043	9.48717	9.78327	10.08901	10.40466	10.73049
8	11.02847	11.43589	11.85943	12.29969	12.75726	13.23276
9	13.02104	13.57948	14.16397	14.77566	15.41571	16.08535
10	15.19293	15.93742	16.72201	17.54874	18.41975	19.33730
11	17.56029	18.53117	19.56143	20.65458	21.81432	23.04452
12	20.14072	21.38428	22.71319	24.13313	25.65018	27.27075
13	22.95338	24.52271	26.21164	28.02911	29.98470	32.08865
14	26.01919	27.97498	30.09492	32.39260	34.88271	37.58107
15	29.36092	31.77248	34.40536	37.27971	40.41746	43.84251
16	33.00340	35.94973	39.18995	42.75328	46.67173	50.98035
17	36.97370	40.54470	44.50084	48.88367	53.73906	59.11760
18	41.30134	45.59917	50.39594	55.74971	61.72514	68.39407
19	46.01846	51.15909	56.93949	63.43968	70.74941	78.96923
20	51.16012	57.27500	64.20283	72.05244	80.94683	91.02493
21	56.76453	64.00250	72.26514	81.69874	92.46992	104.76842
22	62.87334	71.40275	81.21431	92.50258	105.49101	120.43600
23	69.53194	79.54302	91.14788	104.60289	120.20484	138.29704
24	76.78981	88.49733	102.17415	118.15524	136.83147	158.65862
25	84.70090	98.34706	114.41331	133.33387	155.61956	181.87083
26	93.32398	109.18177	127.99877	150.33393	176.85010	208.33274
27	102.72313	121.09994	143.07864	169.37401	200.84061	238.49933
28	112.96822	134.20994	159.81729	190.69889	227.94989	272.88923
29	124.13536	148.63093	178.39719	214.58275	258.58338	312.09373
30	136.30754	164.49402	199.02088	241.33268	293.19922	356.78685
31	149.57522	181.94342	221.91317	271.29261	332.31511	407.73701
32	164.03699	201.13777	247.32362	304.84772	376.51608	465.82019
33	179.80032	222.25154	275.52922	342.42945	426.46317	532.03501
34	196.98234	245.47670	306.83744	384.52098	482.90338	607.51991
35	215.71075	271.02437	341.58955	431.66350	546.68082	693.57270
36	236.12472	299.12681	380.16441	484.46312	618.74933	791.67288
37	258.37595	330.03949	422.98249	543.59869	700.18674	903.50708
38	282.62978	364.04343	470.51056	609.83053	792.21101	1030.99808
39	309.06646	401.44778	523.26673	684.01020	896.19845	1176.33781
40	337.88245	442.59256	581.82607	767.09142	1013.70424	1342.02510
41	369.29187	487.85181	646.82693	860.14239	1146.48579	1530.90861
42	403.52813	537.63699	718.97790	964.35948	1296.52895	1746.23582
43	440.84566	592.40069	799.06547	1081.08262	1466.07771	1991.70883
44	481.52177	652.64076	887.96267	1211.81253	1657.66781	2271.54807
45	525.85873	718.90484	986.63856	1358.23003	1874.16463	2590.56480
46	574.18602	791.79532	1096.16880	1522.21764	2118.80603	2954.24387
47	626.86276	871.97485	1217.74737	1705.88375	2395.25082	3368.83801
48	684.28041	960.17234	1352.69958	1911.58980	2707.63342	3841.47534
49	746.86565	1057.18957	1502.49653	2141.98058	3060.62577	4380.28188
50	815.08356	1163.90853	1668.77115	2400.01825	3459.50712	4994.52135
51	889.44108	1281.29938	1853.33598	2689.02044	3910.24304	5694.75433
52	970.49077	1410.42932	2058.20294	3012.70289	4419.57464	6493.01994
53	1058.83494	1552.47225	2285.60526	3375.22724	4995.11934	7403.04273
54	1155.13009	1708.71948	2538.02184	3781.25451	5645.48485	8440.46872
55	1260.09180	1880.59142	2818.20424	4236.00505	6380.39789	9623.13434
56	1374.50006	2069.65057	3129.20671	4745.32565	7210.84961	10971.37314
57	1499.20506	2277.61562	3474.41944	5315.76473	8149.26006	12508.36538
58	1635.13352	2506.37719	3857.60558	5954.65650	9209.66387	14260.53654
59	1783.29553	2758.01490	4282.94220	6670.21528	10407.92017	16258.01165
60	1944.79213	3034.81640	4755.06584	7471.64111	11761.94979	18535.13328

TABLA III (Continúa)

n	0.15 (15%)	0.16 (16%)	0.17 (17%)	0.18 (18%)	0.19 (19%)	0.20 (20%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.15000	2.16000	2.17000	2.18000	2.19000	2.20000
3	3.47250	3.50560	3.53890	3.57240	3.60610	3.64000
4	4.99337	5.06650	5.14051	5.21543	5.29126	5.36800
5	6.74238	6.87714	7.01440	7.15421	7.29660	7.44160
6	8.75374	8.97748	9.20685	9.44197	9.68295	9.92992
7	11.06680	11.41387	11.77201	12.14152	12.52271	12.91590
8	13.72682	14.24009	14.77325	15.32700	15.90203	16.49908
9	16.78584	17.51851	18.28471	19.08585	19.92341	20.79890
10	20.30372	21.32147	22.39311	23.52131	24.70886	25.95868
11	24.34928	25.73290	27.19994	28.75514	30.40355	32.15042
12	29.00167	30.85017	32.82393	34.93107	37.18022	39.58050
13	34.35192	36.78620	39.40399	42.21866	45.24446	48.49660
14	40.50471	43.67199	47.10267	50.81802	54.84091	59.19592
15	47.58041	51.65951	56.11013	60.96527	66.26068	72.03511
16	55.71747	60.92503	66.64885	72.93901	79.85021	87.44213
17	65.07509	71.67303	78.97915	87.06804	96.02175	105.93056
18	75.83636	84.14072	93.40561	103.74028	115.26588	128.11667
19	88.21181	98.60323	110.28456	123.41353	138.16640	154.74000
20	102.44358	115.37975	130.03294	146.62797	165.41802	186.68800
21	118.81012	134.84051	153.13854	174.02100	197.84744	225.02560
22	137.63164	157.41499	180.17209	206.34479	236.43846	271.03072
23	159.27638	183.60138	211.80134	244.48685	282.36176	326.23686
24	184.16784	213.97761	248.80757	289.49448	337.01050	392.48424
25	212.79302	249.21402	292.10486	342.60349	402.04249	471.98108
26	245.71197	290.08827	342.76268	405.27211	479.43056	567.37730
27	283.56877	337.50239	402.03234	479.22109	571.52237	681.85276
28	327.10408	392.50277	471.37783	566.48089	681.11162	819.22331
29	377.16969	456.30322	552.51207	669.44745	811.52283	984.06797
30	434.74515	530.31172	647.43912	790.94799	966.71217	1181.88157
31	500.95692	616.16161	758.50377	934.31863	1151.38748	1419.25788
32	577.10046	715.74746	888.44941	1103.49598	1371.15110	1704.10946
33	664.66552	831.26706	1040.48581	1303.12526	1632.66981	2045.93136
34	765.36535	965.26979	1218.36839	1538.68781	1943.87708	2456.11762
35	881.17016	1120.71295	1426.49102	1816.65161	2314.21372	2948.34115
36	1014.34568	1301.02703	1669.99450	2144.64890	2754.91433	3539.00937
37	1167.49753	1510.19135	1954.89356	2531.68570	3279.34805	4247.81125
38	1343.62216	1752.82197	2288.22547	2988.38913	3903.42418	5098.37350
39	1546.16549	2034.27348	2678.22379	3527.29918	4646.07477	6119.04820
40	1779.09031	2360.75724	3134.52184	4163.21303	5529.82898	7343.85784
41	2046.95385	2739.47840	3668.39055	4913.59137	6581.49649	8813.62941
42	2354.99693	3178.79494	4293.01695	5799.03782	7832.98082	10577.35529
43	2709.24647	3688.40213	5023.82983	6843.86463	9322.24718	12693.82635
44	3116.63344	4279.54648	5878.88090	8076.76026	11094.47414	15233.59162
45	3585.12846	4965.27391	6879.29065	9531.57711	13203.42423	18281.30994
46	4123.89773	5760.71774	8049.77006	11248.26098	15713.07483	21938.57193
47	4743.48239	6683.43257	9419.23097	13273.94796	18699.55905	26327.28631
48	5456.00475	7753.78179	11021.50024	15664.25859	22253.47527	31593.74358
49	6275.40546	8995.38687	12896.15528	18484.82514	26482.63557	37913.49229
50	7217.71628	10435.64877	15089.50167	21813.09367	31515.33633	45497.19075
51	8301.37372	12106.35258	17655.71696	25740.45053	37504.25023	54597.62890
52	9547.57978	14044.36899	20658.18884	30374.73162	44631.05777	65518.15468
53	10980.71674	16292.46803	24171.08094	35843.18331	53111.95875	78622.78562
54	12628.82425	18900.26291	28281.16470	42295.95631	63204.23091	94348.34274
55	14524.14789	21925.30498	33089.96270	49910.22844	75214.03479	113219.01129
56	16703.77008	25434.35377	38716.25636	58895.06957	89505.70140	135863.81354
57	19210.33559	29504.85038	45299.01994	69497.18209	106512.78466	163037.57625
58	22092.88593	34226.62644	53000.85333	82007.67486	126751.21375	195646.09150
59	25407.81882	39703.88667	62011.99840	96770.05634	150834.94436	234776.30980
60	29219.99164	46057.50853	72555.03813	114189.66648	179494.58379	281723.57177

TABLA IV FACTOR DE FONDO DE AMORTIZACIÓN $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$

	i					
n	0.01 (1%)	0.015 (1½%)	0.02 (2%)	0.025 (2½%)	0.03 (3%)	0.035 (3½%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.49751	0.49628	0.49505	0.49383	0.49261	0.49140
3	0.33002	0.32838	0.32675	0.32514	0.32353	0.32193
4	0.24628	0.24444	0.24262	0.24082	0.23903	0.23725
5	0.19604	0.19409	0.19216	0.19025	0.18835	0.18648
6	0.16255	0.16053	0.15853	0.15655	0.15460	0.15267
7	0.13863	0.13656	0.13451	0.13250	0.13051	0.12854
8	0.12069	0.11858	0.11651	0.11447	0.11246	0.11048
9	0.10674	0.10461	0.10252	0.10046	0.09843	0.09645
10	0.09558	0.09343	0.09133	0.08926	0.08723	0.08524
11	0.08645	0.08429	0.08218	0.08011	0.07808	0.07609
12	0.07885	0.07668	0.07456	0.07249	0.07046	0.06848
13	0.07241	0.07024	0.06812	0.06605	0.06403	0.06206
14	0.06690	0.06472	0.06260	0.06054	0.05853	0.05657
15	0.06212	0.05994	0.05783	0.05577	0.05377	0.05183
16	0.05794	0.05577	0.05365	0.05160	0.04961	0.04768
17	0.05426	0.05208	0.04997	0.04793	0.04595	0.04404
18	0.05098	0.04881	0.04670	0.04467	0.04271	0.04082
19	0.04805	0.04588	0.04378	0.04176	0.03981	0.03794
20	0.04542	0.04325	0.04116	0.03915	0.03722	0.03536
21	0.04303	0.04087	0.03878	0.03679	0.03487	0.03304
22	0.04086	0.03870	0.03663	0.03465	0.03275	0.03093
23	0.03889	0.03673	0.03467	0.03270	0.03081	0.02902
24	0.03707	0.03492	0.03287	0.03091	0.02905	0.02727
25	0.03541	0.03326	0.03122	0.02928	0.02743	0.02567
26	0.03387	0.03173	0.02970	0.02777	0.02594	0.02421
27	0.03245	0.03032	0.02829	0.02638	0.02456	0.02285
28	0.03112	0.02900	0.02699	0.02509	0.02329	0.02160
29	0.02990	0.02778	0.02578	0.02389	0.02211	0.02045
30	0.02875	0.02664	0.02465	0.02278	0.02102	0.01937
31	0.02768	0.02557	0.02360	0.02174	0.02000	0.01837
32	0.02667	0.02458	0.02261	0.02077	0.01905	0.01744
33	0.02573	0.02364	0.02169	0.01986	0.01816	0.01657
34	0.02484	0.02276	0.02082	0.01901	0.01732	0.01576
35	0.02400	0.02193	0.02000	0.01821	0.01654	0.01500
36	0.02321	0.02115	0.01923	0.01745	0.01580	0.01428
37	0.02247	0.02041	0.01851	0.01674	0.01511	0.01361
38	0.02176	0.01972	0.01782	0.01607	0.01446	0.01298
39	0.02109	0.01905	0.01717	0.01544	0.01384	0.01239
40	0.02046	0.01843	0.01656	0.01484	0.01326	0.01183
41	0.01985	0.01783	0.01597	0.01427	0.01271	0.01130
42	0.01928	0.01726	0.01542	0.01373	0.01219	0.01080
43	0.01873	0.01672	0.01489	0.01322	0.01170	0.01033
44	0.01820	0.01621	0.01439	0.01273	0.01123	0.00988
45	0.01771	0.01572	0.01391	0.01227	0.01079	0.00945
46	0.01723	0.01525	0.01345	0.01183	0.01036	0.00905
47	0.01677	0.01480	0.01302	0.01141	0.00996	0.00867
48	0.01633	0.01437	0.01260	0.01101	0.00958	0.00831
49	0.01591	0.01396	0.01220	0.01062	0.00921	0.00796
50	0.01551	0.01357	0.01182	0.01026	0.00887	0.00763
51	0.01513	0.01319	0.01146	0.00991	0.00853	0.00732
52	0.01476	0.01283	0.01111	0.00957	0.00822	0.00702
53	0.01440	0.01249	0.01077	0.00925	0.00791	0.00674
54	0.01406	0.01215	0.01045	0.00895	0.00763	0.00647
55	0.01373	0.01183	0.01014	0.00865	0.00735	0.00621
56	0.01341	0.01152	0.00985	0.00837	0.00708	0.00597
57	0.01310	0.01122	0.00956	0.00810	0.00683	0.00573
58	0.01281	0.01094	0.00929	0.00784	0.00659	0.00551
59	0.01252	0.01066	0.00902	0.00759	0.00636	0.00529
60	0.01224	0.01039	0.00877	0.00735	0.00613	0.00509

TABLA IV (Continúa)

	i					
n	0.04 (4%)	0.045 (4½%)	0.05 (5%)	0.06 (6%)	0.07 (7%)	0.08 (8%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.49020	0.48900	0.48780	0.48544	0.48309	0.48077
3	0.32035	0.31877	0.31721	0.31411	0.31105	0.30803
4	0.23549	0.23374	0.23201	0.22859	0.22523	0.22192
5	0.18463	0.18279	0.18097	0.17740	0.17389	0.17046
6	0.15076	0.14888	0.14702	0.14336	0.13980	0.13632
7	0.12661	0.12470	0.12282	0.11914	0.11555	0.11207
8	0.10853	0.10661	0.10472	0.10104	0.09747	0.09401
9	0.09449	0.09257	0.09069	0.08702	0.08349	0.08008
10	0.08329	0.08138	0.07950	0.07587	0.07238	0.06903
11	0.07415	0.07225	0.07039	0.06679	0.06336	0.06008
12	0.06655	0.06467	0.06283	0.05928	0.05590	0.05270
13	0.06014	0.05828	0.05646	0.05296	0.04965	0.04652
14	0.05467	0.05282	0.05102	0.04758	0.04434	0.04130
15	0.04994	0.04811	0.04634	0.04296	0.03979	0.03683
16	0.04582	0.04402	0.04227	0.03895	0.03586	0.03298
17	0.04220	0.04042	0.03870	0.03544	0.03243	0.02963
18	0.03899	0.03724	0.03555	0.03236	0.02941	0.02670
19	0.03614	0.03441	0.03275	0.02962	0.02675	0.02413
20	0.03358	0.03188	0.03024	0.02718	0.02439	0.02185
21	0.03128	0.02960	0.02800	0.02500	0.02229	0.01983
22	0.02920	0.02755	0.02597	0.02305	0.02041	0.01803
23	0.02731	0.02568	0.02414	0.02128	0.01871	0.01642
24	0.02559	0.02399	0.02247	0.01968	0.01719	0.01498
25	0.02401	0.02244	0.02095	0.01823	0.01581	0.01368
26	0.02257	0.02102	0.01956	0.01690	0.01456	0.01251
27	0.02124	0.01972	0.01829	0.01570	0.01343	0.01145
28	0.02001	0.01852	0.01712	0.01459	0.01239	0.01049
29	0.01888	0.01741	0.01605	0.01358	0.01145	0.00962
30	0.01783	0.01639	0.01505	0.01265	0.01059	0.00883
31	0.01686	0.01544	0.01413	0.01179	0.00980	0.00811
32	0.01595	0.01456	0.01328	0.01100	0.00907	0.00745
33	0.01510	0.01374	0.01249	0.01027	0.00841	0.00685
34	0.01431	0.01298	0.01176	0.00960	0.00780	0.00630
35	0.01358	0.01227	0.01107	0.00897	0.00723	0.00580
36	0.01289	0.01161	0.01043	0.00839	0.00672	0.00534
37	0.01224	0.01098	0.00984	0.00786	0.00624	0.00492
38	0.01163	0.01040	0.00928	0.00736	0.00580	0.00454
39	0.01106	0.00986	0.00876	0.00689	0.00539	0.00419
40	0.01052	0.00934	0.00828	0.00646	0.00501	0.00386
41	0.01002	0.00886	0.00782	0.00606	0.00466	0.00356
42	0.00954	0.00841	0.00739	0.00568	0.00434	0.00329
43	0.00909	0.00798	0.00699	0.00533	0.00404	0.00303
44	0.00866	0.00758	0.00662	0.00501	0.00376	0.00280
45	0.00826	0.00720	0.00626	0.00470	0.00350	0.00259
46	0.00788	0.00684	0.00593	0.00441	0.00326	0.00239
47	0.00752	0.00651	0.00561	0.00415	0.00304	0.00221
48	0.00718	0.00619	0.00532	0.00390	0.00283	0.00204
49	0.00686	0.00589	0.00504	0.00366	0.00264	0.00189
50	0.00655	0.00560	0.00478	0.00344	0.00246	0.00174
51	0.00626	0.00533	0.00453	0.00324	0.00229	0.00161
52	0.00598	0.00508	0.00429	0.00305	0.00214	0.00149
53	0.00572	0.00483	0.00407	0.00287	0.00200	0.00138
54	0.00547	0.00461	0.00386	0.00270	0.00186	0.00127
55	0.00523	0.00439	0.00367	0.00254	0.00174	0.00118
56	0.00500	0.00418	0.00348	0.00239	0.00162	0.00109
57	0.00479	0.00399	0.00330	0.00225	0.00151	0.00101
58	0.00458	0.00380	0.00314	0.00212	0.00141	0.00093
59	0.00439	0.00362	0.00298	0.00199	0.00132	0.00086
60	0.00420	0.00345	0.00283	0.00188	0.00123	0.00080

TABLA IV (Continúa)

	i					
n	0.09 (9%)	0.10 (10%)	0.11 (11%)	0.12 (12%)	0.13 (13%)	0.14 (14%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.47847	0.47619	0.47393	0.47170	0.46948	0.46729
3	0.30505	0.30211	0.29921	0.29635	0.29352	0.29073
4	0.21867	0.21547	0.21233	0.20923	0.20619	0.20320
5	0.16709	0.16380	0.16057	0.15741	0.15431	0.15128
6	0.13292	0.12961	0.12638	0.12323	0.12015	0.11716
7	0.10869	0.10541	0.10222	0.09912	0.09611	0.09319
8	0.09067	0.08744	0.08432	0.08130	0.07839	0.07557
9	0.07680	0.07364	0.07060	0.06768	0.06487	0.06217
10	0.06582	0.06275	0.05980	0.05698	0.05429	0.05171
11	0.05695	0.05396	0.05112	0.04842	0.04584	0.04339
12	0.04965	0.04676	0.04403	0.04144	0.03899	0.03667
13	0.04357	0.04078	0.03815	0.03568	0.03335	0.03116
14	0.03843	0.03575	0.03323	0.03087	0 02867	0.02661
15	0.03406	0.03147	0.02907	0.02682	0.02474	0.02281
16	0.03030	0.02782	0.02552	0.02339	0.02143	0.01962
17	0.02705	0.02466	0.02247	0.02046	0.01861	0.01692
18	0.02421	0.02193	0.01984	0.01794	0.01620	0.01462
19	0.02173	0.01955	0.01756	0.01576	0.01413	0.01266
20	0.01955	0.01746	0.01558	0.01388	0.01235	0.01099
21	0.01762	0.01562	0.01384	0.01224	0.01081	0.00954
22	0.01590	0.01401	0.01231	0.01081	0.00948	0.00830
23	0.01438	0.01257	0.01097	0.00956	0.00832	0.00723
24	0.01302	0.01130	0.00979	0.00846	0.00731	0.00630
25	0.01181	0.01017	0.00874	0.00750	0.00643	0.00550
26	0.01072	0.00916	0.00781	0.00665	0.00565	0.00480
27	0.00973	0.00826	0.00699	0.00590	0.00498	0.00419
28	0.00885	0.00745	0.00626	0.00524	0.00439	0.00366
29	0.00806	0.00673	0.00561	0.00466	0.00387	0.00320
30	0.00734	0.00608	0.00502	0.00414	0.00341	0.00280
31	0.00669	0.00550	0.00451	0.00369	0.00301	0.00245
32	0.00610	0.00497	0.00404	0.00328	0.00266	0.00215
33	0.00556	0.00450	0.00363	0.00292	0.00234	0.00188
34	0.00508	0.00407	0.00326	0.00260	0.00207	0.00165
35	0.00464	0.00369	0.00293	0.00232	0.00183	0.00144
36	0.00424	0.00334	0.00263	0.00206	0.00162	0.00126
37	0.00387	0.00303	0.00236	0.00184	0.00143	0.00111
38	0.00354	0.00275	0.00213	0.00164	0.00126	0.00097
39	0.00324	0.00249	0.00191	0.00146	0.00112	0.00085
40	0.00296	0.00226	0.00172	0.00130	0.00099	0.00075
41	0.00271	0.00205	0.00155	0.00116	0.00087	0.00065
42	0.00248	0.00186	0.00139	0.00104	0.00077	0.00057
43	0.00227	0.00169	0.00125	0.00092	0.00068	0.00050
44	0.00208	0.00153	0.00113	0.00083	0.00060	0.00044
45	0.00190	0.00139	0.00101	0.00074	0.00053	0.00039
46	0.00174	0.00126	0.00091	0.00066	0.00047	0.00034
47	0.00160	0.00115	0.00082	0.00059	0.00042	0.00030
48	0.00146	0.00104	0.00074	0.00052	0.00037	0.00026
49	0.00134	0.00095	0.00067	0.00047	0.00033	0.00023
50	0.00123	0.00086	0.00060	0.00042	0.00029	0.00020
51	0.00112	0.00078	0.00054	0.00037	0.00026	0.00018
52	0.00103	0.00071	0.00049	0.00033	0.00023	0.00015
53	0.00094	0.00064	0.00044	0.00030	0.00020	0.00014
54	0.00087	0.00059	0.00039	0.00026	0.00018	0.00012
55	0.00079	0.00053	0.00035	0.00024	0.00016	0.00010
56	0.00073	0.00048	0.00032	0.00021	0.00014	0.00009
57	0.00067	0.00044	0.00029	0.00019	0.00012	0.00008
58	0.00061	0.00040	0.00026	0.00017	0.00011	0.00007
59	0.00056	0.00036	0.00023	0.00015	0.00010	0.00006
60	0.00051	0.00033	0.00021	0.00013	0.00009	0.00005

TABLA IV (Continúa)

	i					
n	0.15 (15%)	0.16 (16%)	0.17 (17%)	0.18 (18%)	0.19 (19%)	0.20 (20%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.46512	0.46296	0.46083	0.45872	0.45662	0.45455
3	0.28798	0.28526	0.28257	0.27992	0.27731	0.27473
4	0.20027	0.19738	0.19453	0.19174	0.18899	0.18629
5	0.14832	0.14541	0.14256	0.13978	0.13705	0.13438
6	0.11424	0.11139	0.10861	0.10591	0.10327	0.10071
7	0.09036	0.08761	0.08495	0.08236	0.07985	0.07742
8	0.07285	0.07022	0.06769	0.06524	0.06289	0.06061
9	0.05957	0.05708	0.05469	0.05239	0.05019	0.04808
10	0.04925	0.04690	0.04466	0.04251	0.04047	0.03852
11	0.04107	0.03886	0.03676	0.03478	0.03289	0.03110
12	0.03448	0.03241	0.03047	0.02863	0.02690	0.02526
13	0.02911	0.02718	0.02538	0.02369	0.02210	0.02062
14	0.02469	0.02290	0.02123	0.01968	0.01823	0.01689
15	0.02102	0.01936	0.01782	0.01640	0.01509	0.01388
16	0.01795	0.01641	0.01500	0.01371	0.01252	0.01144
17	0.01537	0.01395	0.01266	0.01149	0.01041	0.00944
18	0.01319	0.01188	0.01071	0.00964	0.00868	0.00781
19	0.01134	0.01014	0.00907	0.00810	0.00724	0.00646
20	0.00976	0.00867	0.00769	0.00682	0.00605	0.00536
21	0.00842	0.00742	0.00653	0.00575	0.00505	0.00444
22	0.00727	0.00635	0.00555	0.00485	0.00423	0.00369
23	0.00628	0.00545	0.00472	0.00409	0.00354	0.00307
24	0.00543	0.00467	0.00402	0.00345	0.00297	0.00255
25	0.00470	0.00401	0.00342	0.00292	0.00249	0.00212
26	0.00407	0.00345	0.00292	0.00247	0.00209	0.00176
27	0.00353	0.00296	0.00249	0.00209	0.00175	0.00147
28	0.00306	0.00255	0.00212	0.00177	0.00147	0.00122
29	0.00265	0.00219	0.00181	0.00149	0.00123	0.00102
30	0.00230	0.00189	0.00154	0.00126	0.00103	0.00085
31	0.00200	0.00162	0.00132	0.00107	0.00087	0.00070
32	0.00173	0.00140	0.00113	0.00091	0.00073	0.00059
33	0.00150	0.00120	0.00096	0.00077	0.00061	0.00049
34	0.00131	0.00104	0.00082	0.00065	0.00051	0.00041
35	0.00113	0.00089	0.00070	0.00055	0.00043	0.00034
36	0.00099	0.00077	0.00060	0.00047	0.00036	0.00028
37	0.00086	0.00066	0.00051	0.00039	0.00030	0.00024
38	0.00074	0.00057	0.00044	0.00033	0.00026	0.00020
39	0.00065	0.00049	0.00037	0.00028	0.00022	0.00016
40	0.00056	0.00042	0.00032	0.00024	0.00018	0.00014
41	0.00049	0.00037	0.00027	0.00020	0.00015	0.00011
42	0.00042	0.00031	0.00023	0.00017	0.00013	0.00009
43	0.00037	0.00027	0.00020	0.00015	0.00011	0.00008
44	0.00032	0.00023	0.00017	0.00012	0.00009	0.00007
45	0.00028	0.00020	0.00015	0.00010	0.00008	0.00005
46	0.00024	0.00017	0.00012	0.00009	0.00006	0.00005
47	0.00021	0.00015	0.00011	0.00008	0.00005	0.00004
48	0.00018	0.00013	0.00009	0.00006	0.00004	0.00003
49	0.00016	0.00011	0.00008	0.00005	0.00004	0.00003
50	0.00014	0.00010	0.00007	0.00005	0.00003	0.00002
51	0.00012	0.00008	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002
52	0.00010	0.00007	0.00005	0.00003	0.00002	0.00002
53	0.00009	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001
54	0.00008	0.00005	0.00004	0.00002	0.00002	0.00001
55	0.00007	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001
56	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001
57	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001
58	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001
59	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00000
60	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000

TABLA V FACTOR DEL VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD $\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$

n	0.01 (1%)	0.015 (1½%)	0.02 (2%)	0.025 (2½%)	0.03 (3%)	0.035 (3½%)
1	0.99010	0.98522	0.98039	0.97561	0.97087	0.96618
2	1.97040	1.95588	1.94156	1.92742	1.91347	1.89969
3	2.94099	2.91220	2.88388	2.85602	2.82861	2.80164
4	3.90197	3.85438	3.80773	3.76197	3.71710	3.67308
5	4.85343	4.78264	4.71346	4.64583	4.57971	4.51505
6	5.79548	5.69719	5.60143	5.50813	5.41719	5.32855
7	6.72819	6.59821	6.47199	6.34939	6.23028	6.11454
8	7.65168	7.48593	7.32548	7.17014	7.01969	6.87396
9	8.56602	8.36052	8.16224	7.97087	7.78611	7.60769
10	9.47130	9.22218	8.98259	8.75206	8.53020	8.31661
11	10.36763	10.07112	9.78685	9.51421	9.25262	9.00155
12	11.25508	10.90751	10.57534	10.25776	9.95400	9.66333
13	12.13374	11.73153	11.34837	10.98318	10.63496	10.30274
14	13.00370	12.54338	12.10625	11.69091	11.29607	10.92052
15	13.86505	13.34323	12.84926	12.38138	11.93794	11.51741
16	14.71787	14.13126	13.57771	13.05500	12.56110	12.09412
17	15.56225	14.90765	14.29187	13.71220	13.16612	12.65132
18	16.39827	15.67256	14.99203	14.35336	13.75351	13.18968
19	17.22601	16.42617	15.67846	14.97889	14.32380	13.70984
20	18.04555	17.16864	16.35143	15.58916	14.87747	14.21240
21	18.85698	17.90014	17.01121	16.18455	15.41502	14.69797
22	19.66038	18.62082	17.65805	16.76541	15.93692	15.16712
23	20.45582	19.33086	18.29220	17.33211	16.44361	15.62041
24	21.24339	20.03041	18.91393	17.88499	16.93554	16.05837
25	22.02316	20.71961	19.52346	18.42438	17.41315	16.48151
26	22.79520	21.39863	20.12104	18.95061	17.87684	16.89035
27	23.55961	22.06762	20.70690	19.46401	18.32703	17.28536
28	24.31644	22.72672	21.28127	19.96489	18.76411	17.66702
29	25.06579	23.37608	21.84438	20.45355	19.18845	18.03577
30	25.80771	24.01584	22.39646	20.93029	19.60044	18.39205
31	26.54229	24.64615	22.93770	21.39541	20.00043	18.73628
32	27.26959	25.26714	23.46833	21.84918	20.38877	19.06887
33	27.98969	25.87895	23.98856	22.29188	20.76579	19.39021
34	28.70267	26.48173	24.49859	22.72379	21.13184	19.70068
35	29.40858	27.07559	24.99862	23.14516	21.48722	20.00066
36	30.10751	27.66068	25.48884	23.55625	21.83225	20.29049
37	30.79951	28.23713	25.96945	23.95732	22.16724	20.57053
38	31.48466	28.80505	26.44064	24.34860	22.49246	20.84109
39	32.16303	29.36458	26.90259	24.73034	22.80822	21.10250
40	32.83469	29.91585	27.35548	25.10278	23.11477	21.35507
41	33.49969	30.45896	27.79949	25.46612	23.41240	21.59910
42	34.15811	30.99405	28.23479	25.82061	23.70136	21.83486
43	34.81001	31.52123	28.66156	26.16645	23.98190	22.06269
44	35.45545	32.04062	29.07996	26.50385	24.25427	22.28279
45	36.09451	32.55234	29.49016	26.83302	24.51871	22.49545
46	36.72724	33.05649	29.89231	27.15417	24.77545	22.70092
47	37.35370	33.55319	30.28658	27.46748	25.02471	22.89944
48	37.97396	34.04255	30.67312	27.77315	25.26671	23.09124
49	38.58808	34.52468	31.05208	28.07137	25.50166	23.27656
50	39.19612	34.99969	31.42361	28.36231	25.72976	23.45562
51	39.79814	35.46767	31.78785	28.64616	25.95123	23.62862
52	40.39419	35.92874	32.14495	28.92308	26.16624	23.79576
53	40.98435	36.38300	32.49505	29.19325	26.37499	23.95726
54	41.56866	36.83054	32.83828	29.45683	26.57766	24.11330
55	42.14719	37.27147	33.17479	29.71398	26.77443	24.26405
56	42.71999	37.70588	33.50469	29.96486	26.96546	24.40971
57	43.28712	38.13387	33.82813	30.20962	27.15094	24.55045
58	43.84863	38.55554	34.14523	30.44841	27.33101	24.68642
59	44.40459	38.97097	34.45610	30.68137	27.50583	24.81780
60	44.95504	39.38027	34.76089	30.90866	27.67556	24.94473

TABLA V (Continúa)

	i					
n	0.04 (4%)	0.045 (4½%)	0.05 (5%)	0.06 (6%)	0.07 (7%)	0.08 (8%)
1	0.96154	0.95694	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593
2	1.88609	1.87267	1.85941	1.83339	1.80802	1.78326
3	2.77509	2.74896	2.72325	2.67301	2.62432	2.57710
4	3.62990	3.58753	3.54595	3.46511	3.38721	3.31213
5	4.45182	4.38998	4.32948	4.21236	4.10020	3.99271
6	5.24214	5.15787	5.07569	4.91732	4.76654	4.62288
7	6.00205	5.89270	5.78637	5.58238	5.38929	5.20637
8	6.73274	6.59589	6.46321	6.20979	5.97130	5.74664
9	7.43533	7.26879	7.10782	6.80169	6.51523	6.24689
10	8.11090	7.91272	7.72173	7.36009	7.02358	6.71008
11	8.76048	8.52892	8.30641	7.88687	7.49867	7.13896
12	9.38507	9.11858	8.86325	8.38384	7.94269	7.53608
13	9.98565	9.68285	9.39357	8.85268	8.35765	7.90378
14	10.56312	10.22283	9.89864	9.29498	8.74547	8.24424
15	11.11839	10.73955	10.37966	9.71225	9.10791	8.55948
16	11.65230	11.23402	10.83777	10.10590	9.44665	8.85137
17	12.16567	11.70719	11.27407	10.47726	9.76322	9.12164
18	12.65930	12.15999	11.68959	10.82760	10.05909	9.37189
19	13.13394	12.59329	12.08532	11.15812	10.33560	9.60360
20	13.59033	13.00794	12.46221	11.46992	10.59401	9.81815
21	14.02916	13.40472	12.82115	11.76408	10.83553	10.01680
22	14.45112	13.78442	13.16300	12.04158	11.06124	10.20074
23	14.85684	14.14777	13.48857	12.30338	11.27219	10.37106
24	15.24696	14.49548	13.79864	12.55036	11.46933	10.52876
25	15.62208	14.82821	14.09394	12.78336	11.65358	10.67478
26	15.98277	15.14661	14.37519	13.00317	11.82578	10.80998
27	16.32959	15.45130	14.64303	13.21053	11.98671	10.93516
28	16.66306	15.74287	14.89813	13.40616	12.13711	11.05108
29	16.98371	16.02189	15.14107	13.59072	12.27767	11.15841
30	17.29203	16.28889	15.37245	13.76483	12.40904	11.25778
31	17.58849	16.54439	15.59281	13.92909	12.53181	11.34980
32	17.87355	16.78889	15.80268	14.08404	12.64656	11.43500
33	18.14765	17.02286	16.00255	14.23023	12.75379	11.51389
34	18.41120	17.24676	16.19290	14.36814	12.85401	11.58693
35	18.66461	17.46101	16.37419	14.49825	12.94767	11.65457
36	18.90828	17.66604	16.54685	14.62099	13.03521	11.71719
37	19.14258	17.86224	16.71129	14.73678	13.11702	11.77518
38	19.36786	18.04999	16.86789	14.84602	13.19347	11.82887
39	19.58448	18.22966	17.01704	14.94907	13.26493	11.87858
40	19.79277	18.40158	17.15909	15.04630	13.33171	11.92461
41	19.99305	18.56611	17.29437	15.13802	13.39412	11.96723
42	20.18563	18.72355	17.42321	15.22454	13.45245	12.00670
43	20.37079	18.87421	17.54591	15.30617	13.50696	12.04324
44	20.54884	19.01838	17.66277	15.38318	13.55791	12.07707
45	20.72004	19.15635	17.77407	15.45583	13.60552	12.10840
46	20.88465	19.28837	17.88007	15.52437	13.65002	12.13741
47	21.04294	19.41471	17.98102	15.58903	13.69161	12.16427
48	21.19513	19.53561	18.07716	15.65003	13.73047	12.18914
49	21.34147	19.65130	18.16872	15.70757	13.76680	12.21216
50	21.48218	19.76201	18.25593	15.76186	13.80075	12.23348
51	21.61749	19.86795	18.33898	15.81308	13.83247	12.25323
52	21.74758	19.96933	18.41807	15.86139	13.86212	12.27151
53	21.87267	20.06634	18.49340	15.90697	13.88984	12.28843
54	21.99296	20.15918	18.56515	15.94998	13.91573	12.30410
55	22.10861	20.24802	18.63347	15.99054	13.93994	12.31861
56	22.21982	20.33303	18.69854	16.02881	13.96256	12.33205
57	22.32675	20.41439	18.76052	16.06492	13.98370	12.34449
58	22.42957	20.49224	18.81954	16.09898	14.00346	12.35601
59	22.52843	20.56673	18.87575	16.13111	14.02192	12.36668
60	22.62349	20.63802	18.92929	16.16143	14.03918	12.37655

TABLA V (Continúa)

	i					
n	0.09 (9%)	0.10 (10%)	0.11 (11%)	0.12 (12%)	0.13 (13%)	0.14 (14%)
1	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286	0.88496	0.87719
2	1.75911	1.73554	1.71252	1.69005	1.66810	1.64666
3	2.53129	2.48685	2.44371	2.40183	2.36115	2.32163
4	3.23972	3.16987	3.10245	3.03735	2.97447	2.91371
5	3.88965	3.79079	3.69590	3.60478	3.51723	3.43308
6	4.48592	4.35526	4.23054	4.11141	3.99755	3.88867
7	5.03295	4.86842	4.71220	4.56376	4.42261	4.28830
8	5.53482	5.33493	5.14612	4.96764	4.79877	4.63886
9	5.99525	5.75902	5.53705	5.32825	5.13166	4.94637
10	6.41766	6.14457	5.88923	5.65022	5.42624	5.21612
11	6.80519	6.49506	6.20652	5.93770	5.68694	5.45273
12	7.16073	6.81369	6.49236	6.19437	5.91765	5.66029
13	7.48690	7.10336	6.74987	6.42355	6.12181	5.84236
14	7.78615	7.36669	6.98187	6.62817	6.30249	6.00207
15	8.06069	7.60608	7.19087	6.81086	6.46238	6.14217
16	8.31256	7.82371	7.37916	6.97399	6.60388	6.26506
17	8.54363	8.02155	7.54879	7.11963	6.72909	6.37286
18	8.75563	8.20141	7.70162	7.24967	6.83991	6.46742
19	8.95011	8.36492	7.83929	7.36578	6.93797	6.55037
20	9.12855	8.51356	7.96333	7.46944	7.02475	6.62313
21	9.29224	8.64869	8.07507	7.56200	7.10155	6.68696
22	9.44243	8.77154	8.17574	7.64465	7.16951	6.74294
23	9.58021	8.88322	8.26643	7.71843	7.22966	6.79206
24	9.70661	8.98474	8.34814	7.78432	7.28288	6.83514
25	9.82258	9.07704	8.42174	7.84314	7.32998	6.87293
26	9.92897	9.16095	8.48806	7.89566	7.37167	6.90608
27	10.02658	9.23722	8.54780	7.94255	7.40856	6.93515
28	10.11613	9.30657	8.60162	7.98442	7.44120	6.96066
29	10.19828	9.36961	8.65011	8.02181	7.47009	6.98304
30	10.27365	9.42691	8.69379	8.05518	7.49565	7.00266
31	10.34280	9.47901	8.73315	8.08499	7.51828	7.01988
32	10.40624	9.52638	8.76860	8.11159	7.53830	7.03498
33	10.46444	9.56943	8.80054	8.13535	7.55602	7.04823
34	10.51784	9.60857	8.82932	8.15656	7.57170	7.05985
35	10.56682	9.64416	8.85524	8.17550	7.58557	7.07005
36	10.61176	9.67651	8.87859	8.19241	7.59785	7.07899
37	10.65299	9.70592	8.89963	8.20751	7.60872	7.08683
38	10.69082	9.73265	8.91859	8.22099	7.61833	7.09371
39	10.72552	9.75696	8.93567	8.23303	7.62684	7.09975
40	10.75736	9.77905	8.95105	8.24378	7.63438	7.10504
41	10.78657	9.79914	8.96491	8.25337	7.64104	7.10969
42	10.81337	9.81740	8.97740	8.26194	7.64694	7.11376
43	10.83795	9.83400	8.98865	8.26959	7.65216	7.11733
44	10.86051	9.84909	8.99878	8.27642	7.65678	7.12047
45	10.88120	9.86281	9.00791	8.28252	7.66086	7.12322
46	10.90018	9.87528	9.01614	8.28796	7.66448	6.12563
47	10.91760	9.88662	9.02355	8.29282	7.66768	7.12774
48	10.93358	9.89693	9.03022	8.29716	7.67052	7.12960
49	10.94823	9.90630	9.03624	8.30104	7.67302	7.13123
50	10.96168	9.91481	9.04165	8.30450	7.67524	7.13266
51	10.97402	9.92256	9.04653	8.30759	7.67720	7.13391
52	10.98534	9.92960	9.05093	8.31035	7.67894	7.13501
53	10.99573	9.93600	9.05489	8.31281	7.68048	7.13597
54	11.00525	9.94182	9.05846	9.31501	7.68184	7.13682
55	11.01399	9.94711	9.06168	8.31697	7.68304	7.13756
56	11.02201	9.95191	9.06457	8.31872	7.68411	7.13821
57	11.02937	9.95629	9.06718	8.32029	7.68505	7.13878
58	11.03612	9.96026	9.06954	8.32169	7.68589	7.13928
59	11.04231	9.96387	9.07165	8.32294	7.68663	7.13972
60	11.04799	9.96716	9.07356	8.32405	7.68728	7.14011

TABLA V (Continúa)

n	0.15 (15%)	0.16 (16%)	0.17 (17%)	0.18 (18%)	0.19 (19%)	0.20 (20%)
1	0.86957	0.86207	0.85470	0.84746	0.84034	0.83333
2	1.62571	1.60523	1.58521	1.56564	1.54650	1.52778
3	2.28323	2.24589	2.20958	2.17427	2.13992	2.10648
4	2.85498	2.79818	2.74324	2.69006	2.63859	2.58873
5	3.35216	3.27429	3.19935	3.12717	3.05763	2.99061
6	3.78448	3.68474	3.58918	3.49760	3.40978	3.32551
7	4.16042	4.03857	3.92238	3.81153	3.70570	3.60459
8	4.48732	4.34359	4.20716	4.07757	3.95437	3.83716
9	4.77158	4.60654	4.45057	4.30302	4.16333	4.03097
10	5.01877	4.83323	4.65860	4.49409	4.33893	4.19247
11	5.23371	5.02864	4.83641	4.65601	4.48650	4.32706
12	5.42062	5.19711	4.98839	4.79322	4.61050	4.43922
13	5.58315	5.34233	5.11828	4.90951	4.71471	4.53268
14	5.72448	5.46753	5.22930	5.00806	4.80228	4.61057
15	5.84737	5.57546	5.32419	5.09158	4.87586	4.67547
16	5.95423	5.66850	5.40529	5.16235	4.93770	4.72956
17	6.04716	5.74870	5.47461	5.22233	4.98966	4.77463
18	6.12797	5.81785	5.53385	5.27316	5.03333	4.81219
19	6.19823	5.87746	5.58449	5.31624	5.07003	4.84350
20	6.25933	5.92884	5.62777	5.35275	5.10086	4.86958
21	6.31246	5.97314	5.66476	5.38368	5.12677	4.89132
22	6.35866	6.01133	5.69637	5.40990	5.14855	4.90943
23	6.39884	6.04425	5.72340	5.43212	5.16685	4.92453
24	6.43377	6.07263	5.74649	5.45095	5.18223	4.93710
25	6.46415	6.09709	5.76623	5.46691	5.19515	4.94759
26	6.49056	6.11818	5.78311	5.48043	5.20601	4.95632
27	6.51353	6.13636	5.79753	5.49189	5.21513	4.96360
28	6.53351	6.15204	5.80985	5.50160	5.22280	4.96967
29	6.55088	6.16555	5.82039	5.50983	5.22924	4.97472
30	6.56598	6.17720	5.82939	5.51681	5.23466	4.97894
31	6.57911	6.18724	5.83709	5.52272	5.23921	4.98245
32	6.59053	6.19590	5.84366	5.52773	5.24303	4.98537
33	6.60046	6.20336	5.84928	5.53197	5.24625	4.98781
34	6.60910	6.20979	5.85409	5.53557	5.24895	4.98984
35	6.61661	6.21534	5.85820	5.53862	5.25122	4.99154
36	6.62314	6.22012	5.86171	5.54120	5.25312	4.99295
37	6.62881	6.22424	5.86471	5.54339	5.25472	4.99412
38	6.63375	6.22779	5.86727	5.54525	5.25607	4.99510
39	6.63805	6.23086	5.86946	5.54682	5.25720	4.99592
40	6.64178	6.23350	5.87133	5.54815	5.25815	4.99660
41	6.64502	6.23577	5.87294	5.54928	5.25895	4.99717
42	6.64785	6.23774	5.87430	5.55024	5.25962	4.99764
43	6.65030	6.23943	5.87547	5.55105	5.26019	4.99803
44	6.65244	6.24089	5.87647	5.55174	5.26066	4.99836
45	6.65429	6.24214	5.87733	5.55232	5.26106	4.99863
46	6.65591	6.24323	5.87806	5.55281	5.26140	4.99886
47	6.65731	6.24416	5.87868	5.55323	5.26168	4.99905
48	6.65853	6.24497	5.87922	5.55359	5.26191	4.99921
49	6.65959	6.24566	5.87967	5.55389	5.26211	4.99934
50	6.66051	6.24626	5.88006	5.55414	5.26228	4.99945
51	6.66132	6.24678	5.88039	5.55436	5.26242	4.99954
52	6.66201	6.24722	5.88068	5.55454	5.26254	4.99962
53	6.66262	6.24760	5.88092	5.55469	5.26264	4.99968
54	6.66315	6.24793	5.88113	5.55483	5.26272	4.99974
55	6.66361	6.24822	5.88131	5.55494	5.26279	4.99978
56	6.66401	6.24846	5.88146	5.55503	5.26285	4.99982
57	6.66435	6.24868	5.88159	5.55511	5.26290	4.99985
58	6.66466	6.24886	5.88170	5.55518	5.26294	4.99987
59	6.66492	6.24902	5.88180	5.55524	5.26297	4.99989
60	6.66515	6.24915	5.88188	5.55529	5.26300	4.99991

TABLA VI FACTOR DE RECUPERACIÓN DE CAPITAL $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$

	i					
n	0.01 (1%)	0.015 (1.5%)	0.02 (2%)	0.025 (2½%)	0.03 (3%)	0.035 (3½%)
1	1.01000	1.01500	1.02000	1.02500	1.03000	1.03500
2	0.50751	0.51128	0.51505	0.51883	0.52261	0.52640
3	0.34002	0.34338	0.34675	0.35014	0.35353	0.35693
4	0.25628	0.25944	0.26262	0.26582	0.26903	0.27225
5	0.20604	0.20909	0.21216	0.21525	0.21835	0.22148
6	0.17255	0.17553	0.17853	0.18155	0.18460	0.18767
7	0.14863	0.15156	0.15451	0.15750	0.16051	0.16354
8	0.13069	0.13358	0.13651	0.13947	0.14246	0.14548
9	0.11674	0.11961	0.12252	0.12546	0.12843	0.13145
10	0.10558	0.10843	0.11133	0.11426	0.11723	0.12024
11	0.09645	0.09929	0.10218	0.10511	0.10808	0.11109
12	0.08885	0.09168	0.09456	0.09749	0.10046	0.10348
13	0.08241	0.08524	0.08812	0.09105	0.09403	0.09706
14	0.07690	0.07972	0.08260	0.08554	0.08853	0.09157
15	0.07212	0.07494	0.07783	0.08077	0.08377	0.08683
16	0.06794	0.07077	0.07365	0.07660	0.07961	0.08268
17	0.06426	0.06708	0.06997	0.07293	0.07595	0.07904
18	0.06098	0.06381	0.06670	0.06967	0.07271	0.07582
19	0.05805	0.06088	0.06378	0.06676	0.06981	0.07294
20	0.05542	0.05825	0.06116	0.06415	0.06722	0.07036
21	0.05303	0.05587	0.05878	0.06179	0.06487	0.06804
22	0.05086	0.05370	0.05663	0.05965	0.06275	0.06593
23	0.04889	0.05173	0.05467	0.05770	0.06081	0.06402
24	0.04707	0.04992	0.05287	0.05591	0.05905	0.06227
25	0.04541	0.04826	0.05122	0.05428	0.05743	0.06067
26	0.04387	0.04673	0.04970	0.05277	0.05594	0.05921
27	0.04245	0.04532	0.04829	0.05138	0.05456	0.05785
28	0.04112	0.04400	0.04699	0.05009	0.05329	0.05660
29	0.03990	0.04278	0.04578	0.04889	0.05211	0.05545
30	0.03875	0.04164	0.04465	0.04778	0.05102	0.05437
31	0.03768	0.04057	0.04360	0.04674	0.05000	0.05337
32	0.03667	0.03958	0.04261	0.04577	0.04905	0.05244
33	0.03573	0.03864	0.04169	0.04486	0.04816	0.05157
34	0.03484	0.03776	0.04082	0.04401	0.04732	0.05076
35	0.03400	0.03693	0.04000	0.04321	0.04654	0.05000
36	0.03321	0.03615	0.03923	0.04245	0.04580	0.04928
37	0.03247	0.03541	0.03851	0.04174	0.04511	0.04861
38	0.03176	0.03472	0.03782	0.04107	0.04446	0.04798
39	0.03109	0.03405	0.03717	0.04044	0.04384	0.04739
40	0.03046	0.03343	0.03656	0.03984	0.04326	0.04683
41	0.02985	0.03283	0.03597	0.03927	0.04271	0.04630
42	0.02928	0.03226	0.03542	0.03873	0.04219	0.04580
43	0.02873	0.03172	0.03489	0.03822	0.04170	0.04533
44	0.02820	0.03121	0.03439	0.03773	0.04123	0.04488
45	0.02771	0.03072	0.03391	0.03727	0.04079	0.04445
46	0.02723	0.03025	0.03345	0.03683	0.04036	0.04405
47	0.02677	0.02980	0.03302	0.03641	0.03996	0.04367
48	0.02633	0.02937	0.03260	0.03601	0.03958	0.04331
49	0.02591	0.02896	0.03220	0.03562	0.03921	0.04296
50	0.02551	0.02857	0.03182	0.03526	0.03887	0.04263
51	0.02513	0.02819	0.03146	0.03491	0.03853	0.04232
52	0.02476	0.02783	0.03111	0.03457	0.03822	0.04202
53	0.02440	0.02749	0.03077	0.03425	0.03791	0.04174
54	0.02406	0.02715	0.03045	0.03395	0.03763	0.04147
55	0.02373	0.02683	0.03014	0.03365	0.03735	0.04121
56	0.02341	0.02652	0.02985	0.03337	0.03708	0.04097
57	0.02310	0.02622	0.02956	0.03310	0.03683	0.04073
58	0.02281	0.02594	0.02929	0.03284	0.03659	0.04051
59	0.02252	0.02566	0.02902	0.03259	0.03636	0.04029
60	0.02224	0.02539	0.02877	0.03235	0.03613	0.04009

TABLA VI (Continúa)

n	0.04 (4%)	0.045 (4½%)	0.05 (5%)	0.06 (6%)	0.07 (7%)	0.08 (8%)
1	1.04000	1.04500	1.05000	1.06000	1.07000	1.08000
2	0.53020	0.53400	0.53780	0.54544	0.55309	0.56077
3	0.36035	0.36377	0.36721	0.37411	0.38105	0.38803
4	0.27549	0.27874	0.28201	0.28859	0.29523	0.30192
5	0.22463	0.22779	0.23097	0.23740	0.24389	0.25046
6	0.19076	0.19388	0.19702	0.20336	0.20980	0.21632
7	0.16661	0.16970	0.17282	0.17914	0.18555	0.19207
8	0.14853	0.15161	0.15472	0.16104	0.16747	0.17401
9	0.13449	0.13757	0.14069	0.14702	0.15349	0.16008
10	0.12329	0.12638	0.12950	0.13587	0.14238	0.14903
11	0.11415	0.11725	0.12039	0.12679	0.13336	0.14008
12	0.10655	0.10967	0.11283	0.11928	0.12590	0.13270
13	0.10014	0.10328	0.10646	0.11296	0.11965	0.12652
14	0.09467	0.09782	0.10102	0.10758	0.11434	0.12130
15	0.08994	0.09311	0.09634	0.10296	0.10979	0.11683
16	0.08582	0.08902	0.09227	0.09895	0.10586	0.11298
17	0.08220	0.08542	0.08870	0.09544	0.10243	0.10963
18	0.07899	0.08224	0.08555	0.09236	0.09941	0.10670
19	0.07614	0.07941	0.08275	0.08962	0.09675	0.10413
20	0.07358	0.07688	0.08024	0.08718	0.09439	0.10185
21	0.07128	0.07460	0.07800	0.08500	0.09229	0.09983
22	0.06920	0.07255	0.07597	0.08305	0.09041	0.09803
23	0.06731	0.07068	0.07414	0.08128	0.08871	0.09642
24	0.06559	0.06899	0.07247	0.07968	0.08719	0.09498
25	0.06401	0.06744	0.07095	0.07823	0.08581	0.09368
26	0.06257	0.06602	0.06956	0.07690	0.08456	0.09251
27	0.06124	0.06472	0.06829	0.07570	0.08343	0.09145
28	0.06001	0.06352	0.06712	0.07459	0.08239	0.09049
29	0.05888	0.06241	0.06605	0.07358	0.08145	0.08962
30	0.05783	0.06139	0.06505	0.07265	0.08059	0.08883
31	0.05686	0.06044	0.06413	0.07179	0.07980	0.08811
32	0.05595	0.05956	0.06328	0.07100	0.07907	0.08745
33	0.05510	0.05874	0.06249	0.07027	0.07841	0.08685
34	0.05431	0.05798	0.06176	0.06960	0.07780	0.08630
35	0.05358	0.05727	0.06107	0.06897	0.07723	0.08580
36	0.05289	0.05661	0.06043	0.06839	0.07672	0.08534
37	0.05224	0.05598	0.05984	0.06786	0.07624	0.08492
38	0.05163	0.05540	0.05928	0.06736	0.07580	0.08454
39	0.05106	0.05486	0.05876	0.06689	0.07539	0.08419
40	0.05052	0.05434	0.05828	0.06646	0.07501	0.08386
41	0.05002	0.05386	0.05782	0.06606	0.07466	0.08356
42	0.04954	0.05341	0.05739	0.06568	0.07434	0.08329
43	0.04909	0.05298	0.05699	0.06533	0.07404	0.08303
44	0.04866	0.05258	0.05662	0.06501	0.07376	0.08280
45	0.04826	0.05220	0.05626	0.06470	0.07350	0.08259
46	0.04788	0.05184	0.05593	0.06441	0.07326	0.08239
47	0.04752	0.05151	0.05561	0.06415	0.07304	0.08221
48	0.04718	0.05119	0.05532	0.06390	0.07283	0.08204
49	0.04686	0.05089	0.05504	0.06366	0.07264	0.08189
50	0.04655	0.05060	0.05478	0.06344	0.07246	0.08174
51	0.04626	0.05033	0.05453	0.06324	0.07229	0.08161
52	0.04598	0.05008	0.05429	0.06305	0.07214	0.08149
53	0.04572	0.04983	0.05407	0.06287	0.07200	0.08138
54	0.04547	0.04961	0.05386	0.06270	0.07186	0.08127
55	0.04523	0.04939	0.05367	0.06254	0.07174	0.08118
56	0.04500	0.04918	0.05348	0.06239	0.07162	0.08109
57	0.04479	0.04899	0.05330	0.06225	0.07151	0.08101
58	0.04458	0.04880	0.05314	0.06212	0.07141	0.08093
59	0.04439	0.04862	0.05298	0.06199	0.07132	0.08086
60	0.04420	0.04845	0.05283	0.06188	0.07123	0.08080

TABLA VI (Continúa)

n	0.09 (9%)	0.10 (10%)	0.11 (11%)	0.12 (12%)	0.13 (13%)	0.14 (14%)
1	1.09000	1.10000	1.11000	1.12000	1.13000	1.14000
2	0.56847	0.57619	0.58393	0.59170	0.59948	0.60729
3	0.39505	0.40211	0.40921	0.41635	0.42352	0.43073
4	0.30867	0.31547	0.32233	0.32923	0.33619	0.34320
5	0.25709	0.26380	0.27057	0.27741	0.28431	0.29128
6	0.22292	0.22961	0.23638	0.24323	0.25015	0.25716
7	0.19869	0.20541	0.21222	0.21912	0.22611	0.23319
8	0.18067	0.18744	0.19432	0.20130	0.20839	0.21557
9	0.16680	0.17364	0.18060	0.18768	0.19487	0.20217
10	0.15582	0.16275	0.16980	0.17698	0.18429	0.19171
11	0.14695	0.15396	0.16112	0.16842	0.17584	0.18339
12	0.13965	0.14676	0.15403	0.16144	0.16899	0.17667
13	0.13357	0.14078	0.14815	0.15568	0.16335	0.17116
14	0.12843	0.13575	0.14323	0.15087	0.15867	0.16661
15	0.12406	0.13147	0.13907	0.14682	0.15474	0.16281
16	0.12030	0.12782	0.13552	0.14339	0.15143	0.15962
17	0.11705	0.12466	0.13247	0.14046	0.14861	0.15692
18	0.11421	0.12193	0.12984	0.13794	0.14620	0.15462
19	0.11173	0.11955	0.12756	0.13576	0.14413	0.15266
20	0.10955	0.11746	0.12558	0.13388	0.14235	0.15099
21	0.10762	0.11562	0.12384	0.13224	0.14081	0.14954
22	0.10590	0.11401	0.12231	0.13081	0.13948	0.14830
23	0.10438	0.11257	0.12097	0.12956	0.13832	0.14723
24	0.10302	0.11130	0.11979	0.12846	0.13731	0.14630
25	0.10181	0.11017	0.11874	0.12750	0.13643	0.14550
26	0.10072	0.10916	0.11781	0.12665	0.13565	0.14480
27	0.09973	0.10826	0.11699	0.12590	0.13498	0.14419
28	0.09885	0.10745	0.11626	0.12524	0.13439	0.14366
29	0.09806	0.10673	0.11561	0.12466	0.13387	0.14320
30	0.09734	0.10608	0.11502	0.12414	0.13341	0.14280
31	0.09669	0.10550	0.11451	0.12369	0.13301	0.14245
32	0.09610	0.10497	0.11404	0.12328	0.13266	0.14215
33	0.09556	0.10450	0.11363	0.12292	0.13234	0.14188
34	0.09508	0.10407	0.11326	0.12260	0.13207	0.14165
35	0.09464	0.10369	0.11293	0.12232	0.13183	0.14144
36	0.09424	0.10334	0.11263	0.12206	0.13162	0.14126
37	0.09387	0.10303	0.11236	0.12184	0.13143	0.14111
38	0.09354	0.10275	0.11213	0.12164	0.13126	0.14097
39	0.09324	0.10249	0.11191	0.12146	0.13112	0.14085
40	0.09296	0.10226	0.11172	0.12130	0.13099	0.14075
41	0.09271	0.10205	0.11155	0.12116	0.13087	0.14065
42	0.09248	0.10186	0.11139	0.12104	0.13077	0.14057
43	0.09227	0.10169	0.11125	0.12092	0.13068	0.14050
44	0.09208	0.10153	0.11113	0.12083	0.13060	0.14044
45	0.09190	0.10139	0.11101	0.12074	0.13053	0.14039
46	0.09174	0.10126	0.11091	0.12066	0.13047	0.14034
47	0.09160	0.10115	0.11082	0.12059	0.13042	0.14030
48	0.09146	0.10104	0.11074	0.12052	0.13037	0.14026
49	0.09134	0.10095	0.11067	0.12047	0.13033	0.14023
50	0.09123	0.10086	0.11060	0.12042	0.13029	0.14020
51	0.09112	0.10078	0.11054	0.12037	0.13026	0.14018
52	0.09103	0.10071	0.11049	0.12033	0.13023	0.14015
53	0.09094	0.10064	0.11044	0.12030	0.13020	0.14014
54	0.09087	0.10059	0.11039	0.12026	0.13018	0.14012
55	0.09079	0.10053	0.11035	0.12024	0.13016	0.14010
56	0.09073	0.10048	0.11032	0.12021	0.13014	0.14009
57	0.09067	0.10044	0.11029	0.12019	0.13012	0.14008
58	0.09061	0.10040	0.11026	0.12017	0.13011	0.14007
59	0.09056	0.10036	0.11023	0.12015	0.13010	0.14006
60	0.09051	0.10033	0.11021	0.12013	0.13009	0.14005

TABLA VI (Continúa)

n	0.15 (15%)	0.16 (16%)	0.17 (17%)	0.18 (18%)	0.19 (19%)	0.20 (20%)
1	1.15000	1.16000	1.17000	1.18000	1.19000	1.20000
2	0.61512	0.62296	0.63083	0.63872	0.64662	0.65455
3	0.43798	0.44526	0.45257	0.45992	0.46731	0.47473
4	0.35027	0.35738	0.36453	0.37174	0.37899	0.38629
5	0.29832	0.30541	0.31256	0.31978	0.32705	0.33438
6	0.26424	0.27139	0.27861	0.28591	0.29327	0.30071
7	0.24036	0.24761	0.25495	0.26236	0.26985	0.27742
8	0.22285	0.23022	0.23769	0.24524	0.25289	0.26061
9	0.20957	0.21708	0.22469	0.23239	0.24019	0.24808
10	0.19925	0.20690	0.21466	0.22251	0.23047	0.23852
11	0.19107	0.19886	0.20676	0.21478	0.22289	0.23110
12	0.18448	0.19241	0.20047	0.20863	0.21690	0.22526
13	0.17911	0.18718	0.19538	0.20369	0.21210	0.22062
14	0.17469	0.18290	0.19123	0.19968	0.20823	0.21689
15	0.17102	0.17936	0.18782	0.19640	0.20509	0.21388
16	0.16795	0.17641	0.18500	0.19371	0.20252	0.21144
17	0.16537	0.17395	0.18266	0.19149	0.20041	0.20944
18	0.16319	0.17188	0.18071	0.18964	0.19868	0.20781
19	0.16134	0.17014	0.17907	0.18810	0.19724	0.20646
20	0.15976	0.16867	0.17769	0.18682	0.19605	0.20536
21	0.15842	0.16742	0.17653	0.18575	0.19505	0.20444
22	0.15727	0.16635	0.17555	0.18485	0.19423	0.20369
23	0.15628	0.16545	0.17472	0.18409	0.19354	0.20307
24	0.15543	0.16467	0.17402	0.18345	0.19297	0.20255
25	0.15470	0.16401	0.17342	0.18292	0.19249	0.20212
26	0.15407	0.16345	0.17292	0.18247	0.19209	0.20176
27	0.15353	0.16296	0.17249	0.18209	0.19175	0.20147
28	0.15306	0.16255	0.17212	0.18177	0.19147	0.20122
29	0.15265	0.16219	0.17181	0.18149	0.19123	0.20102
30	0.15230	0.16189	0.17154	0.18126	0.19103	0.20085
31	0.15200	0.16162	0.17132	0.18107	0.19087	0.20070
32	0.15173	0.16140	0.17113	0.18091	0.19073	0.20059
33	0.15150	0.16120	0.17096	0.18077	0.19061	0.20049
34	0.15131	0.16104	0.17082	0.18065	0.19051	0.20041
35	0.15113	0.16089	0.17070	0.18055	0.19043	0.20034
36	0.15099	0.16077	0.17060	0.18047	0.19036	0.20028
37	0.15086	0.16066	0.17051	0.18039	0.19030	0.20024
38	0.15074	0.16057	0.17044	0.18033	0.19026	0.20020
39	0.15065	0.16049	0.17037	0.18028	0.19022	0.20016
40	0.15056	0.16042	0.17032	0.18024	0.19018	0.20014
41	0.15049	0.16037	0.17027	0.18020	0.19015	0.20011
42	0.15042	0.16031	0.17023	0.18017	0.19013	0.20009
43	0.15037	0.16027	0.17020	0.18015	0.19011	0.20008
44	0.15032	0.16023	0.17017	0.18012	0.19009	0.20007
45	0.15028	0.16020	0.17015	0.18010	0.19008	0.20005
46	0.15024	0.16017	0.17012	0.18009	0.19006	0.20005
47	0.15021	0.16015	0.17011	0.18008	0.19005	0.20004
48	0.15018	0.16013	0.17009	0.18006	0.19004	0.20003
49	0.15016	0.16011	0.17008	0.18005	0.19004	0.20003
50	0.15014	0.16010	0.17007	0.18005	0.19003	0.20002
51	0.15012	0.16008	0.17006	0.18004	0.19003	0.20002
52	0.15010	0.16007	0.17005	0.18003	0.19002	0.20002
53	0.15009	0.16006	0.17004	0.18003	0.19002	0.20001
54	0.15008	0.16005	0.17004	0.18002	0.19002	0.20001
55	0.15007	0.16005	0.17003	0.18002	0.19001	0.20001
56	0.15006	0.16004	0.17003	0.18002	0.19001	0.20001
57	0.15005	0.16003	0.17002	0.18001	0.19001	0.20001
58	0.15005	0.16003	0.17002	0.18001	0.19001	0.20001
59	0.15004	0.16003	0.17002	0.18001	0.19001	0.20000
60	0.15003	0.16002	0.17001	0.18001	0.19001	0.20000

TABLA VII PAGO MENSUAL POR DÓLAR DEL PRÉSTAMO HIPOTECARIO

TASA ANUAL DE INTERÉS	Periodo de la hipoteca 15 AÑOS (180 PAGOS)	20 AÑOS (240 PAGOS)	25 AÑOS (300 PAGOS)	30 AÑOS (360 PAGOS)
7.50	0.00927012	0.00805593	0.00738991	0.00699214
7.75	0.00941276	0.00820948	0.00755329	0.00716412
8.00	0.00955652	0.00836440	0.00771816	0.00733764
8.25	0.00970140	0.00852065	0.00788450	0.00751266
8.50	0.00984740	0.00867823	0.00805227	0.00768913
8.75	0.00999448	0.00883710	0.00822143	0.00786700
9.00	0.01014266	0.00899725	0.00839196	0.00804622
9.25	0.01029192	0.00915866	0.00856381	0.00822675
9.50	0.01044224	0.00932131	0.00873696	0.00840854
9.75	0.01059362	0.00948516	0.00891137	0.00859154
10.00	0.01074605	0.00965021	0.00908700	0.00877572
10.25	0.01089951	0.00981643	0.00926383	0.00896101
10.50	0.01105399	0.00998380	0.00944182	0.00914739
10.75	0.01120948	0.01015229	0.00962093	0.00933481
11.00	0.01136597	0.01032188	0.00980113	0.00952323
11.25	0.01152345	0.01049256	0.00998240	0.00971261
11.50	0.01168190	0.01066430	0.01016469	0.00990291
11.75	0.01184131	0.01083707	0.01034798	0.01009410
12.00	0.01200168	0.01101086	0.01053224	0.01028613
12.25	0.01216299	0.01118565	0.01071744	0.01047896
12.50	0.01232522	0.01136140	0.01090354	0.01067258
12.75	0.01248837	0.01153817	0.01109052	0.01086693
13.00	0.01265242	0.01171576	0.01127835	0.01106200
13.25	0.01281736	0.01189431	0.01146700	0.01145412
13.50	0.01298319	0.01207375	0.01165645	0.01165113
13.75	0.01314987	0.01225405	0.01184666	0.01184872
14.00	0.01331741	0.01243521	0.01203761	0.01884872
14.25	0.01348580	0.01261719	0.01222928	0.01204687
14.50	0.01365501	0.01279998	0.01242163	0.01224556
14.75	0.01382504	0.01298355	0.01261465	0.01244476
15.00	0.01399587	0.01316790	0.01280831	0.01264444
15.25	0.01416750	0.01335299	0.01300258	0.01284459
15.50	0.01433990	0.01353881	0.01319745	0.01304517
15.75	0.01451308	0.01372534	0.01339290	0.01324617
16.00	0.01468701	0.01391256	0.01358889	0.01344757
16.25	0.01486168	0.01410046	0.01378541	0.01364935
16.50	0.01503709	0.01428901	0.01398245	0.01385148
16.75	0.01521321	0.01447820	0.01417998	0.01405396
17.00	0.01539004	0.01466801	0.01437797	0.01425675
17.25	0.01556757	0.01485842	0.01457641	0.01445986
17.50	0.01574578	0.01504942	0.01477530	0.01466325
17.75	0.01592467	0.01524099	0.01497460	0.01486692
18.00	0.01610421	0.01543312	0.01517430	0.01507085
18.25	0.01628440	0.01562578	0.01537439	0.01527503
18.50	0.01646523	0.01581897	0.01557484	0.01547945
18.75	0.01664669	0.01601266	0.01577565	0.01568408
19.00	0.01682876	0.01620685	0.01597680	0.01588892
19.25	0.01701143	0.01640152	0.01617827	0.01609397
19.50	0.01719470	0.01659665	0.01638006	0.01629920
19.75	0.01737855	0.01679223	0.01658215	0.01650461
20.00	0.01756297	0.01698825	0.01678452	0.01671019

UN REPASO DE ÁLGEBRA (OPCIONAL)

A.1 SISTEMA DE NÚMEROS REALES
A.2 POLINOMIOS
A.3 FACTORIZACIÓN
A.4 FRACCIONES
A.5 EXPONENTES Y RADICALES
A.6 ECUACIONES

El álgebra es el único requisito para utilizar este libro. En este apéndice se ofrece un repaso general de álgebra. Para guiar al lector, se le recomienda realizar el siguiente examen de álgebra. Su finalidad es ayudarle a diagnosticar en qué áreas necesita un repaso ulterior. Los resultados del examen le servirán de guía al estudiar las secciones A.1 a A.6

EXAMEN EXPLORATORIO DE ÁLGEBRA

		SECCIÓN CORRESPONDIENTE DEL APÉNDICE
1	$\lvert -10 \rvert =$	A.1
2	$x^3 \cdot x^4 =$	A.2
3	$[(x^3)^2]^3 =$	A.2
4	$x^5/x^3 =$	A.2
5	$(4x - 2y + z) - (-3x + 4y - 2z) =$	A.2
6	$\dfrac{2x^2(3x^3)}{(-2x^2)^2} =$	A.2
7	Factor $2a^3b^2c + 4a^2bc^2$.	A.3
8	Factor $x^2 - 4$.	A.3
9	Factor $x^2 - 5x + 4$.	A.3
10	$\frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{1}{6} =$	A.4

11 $\dfrac{2x^2}{3} \div \dfrac{4x^3}{9} =$ A.4

12 $x^{1/2}x^{4/3} =$ A.5

13 $\sqrt[3]{a^2b}\ \sqrt[3]{ab^2} =$ A.5

14 $3\sqrt{2} - 2\sqrt{8} =$ A.5

15 $\sqrt{\dfrac{4a^2}{9}} =$ A.5

16 Exprese $x^{2/3}$ en forma de radical. A.5

17 Determine las raíces de la ecuación $x - 4 = 2x - 6$. A.6

18 Determine las raíces de la ecuación $3x = 3x + 10$. A.6

19 Determine las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$. A.6

20 Resuelva la desigualdad $5x - 21 \geq 2x$. A.6

RESPUESTAS AL EXAMEN EXPLORATORIO DE ÁLGEBRA

1 10; **2** x^7; **3** x^{18}; **4** x^2; **5** $7x - 6y + 3z$; **6** $3x/2$;
7 $2a^2bc(ab + 2c)$; **8** $(x + 2)(x - 2)$; **9** $(x - 4)(x - 1)$; **10** $\frac{1}{6}$;
11 $3/2x$; **12** $x^{11/6}$; **13** ab; **14** $-\sqrt{2}$; **15** $2a/3$; **16** $\sqrt[3]{x^2}$;
17 2; **18** sin raíces; **19** 3; **20** $x \geq 7$

A.1 SISTEMA DE NÚMEROS REALES

Números reales

En este libro nos ocuparemos de las matemáticas de los ***números reales***. Como se aprecia en la figura A.1, el sistema de números reales está constituido por números racionales e irracionales. Los ***números racionales*** son aquellos que pueden expresarse como la ***razón***, o cociente, de dos enteros, siendo el divisor un entero no cero. En consecuencia, un número racional es aquel que puede expresarse en la forma a/b donde a y b son enteros y b no es 0 (formulado $b \neq 0$). Los números $\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{7}$, $\frac{23}{455}$, y $137/(-750)$ son ejemplos de este tipo de números.

Dado que cualquier entero a puede escribirse en forma de cociente $a/1$, todos los enteros son además números racionales. He aquí algunos ejemplos: $-5 = -5/1$ y $54 = 54/1$. Se considera que el cero es un entero (ni negativo ni positivo), y puede escribirse en forma de cociente $0/b = 0$, $b \neq 0$.

Los ***números irracionales*** son números reales que no pueden expresarse como la razón de dos enteros. Números como $\pi = 3.14159265\ldots$ (que es la razón de la circunferencia de un círculo con su diámetro), $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, $\sqrt{3} = 1.7321\ldots$ y $\sqrt{5} = 2.2361\ldots$ son ejemplos de números irracionales.

El conjunto de los números reales puede representarse por medio de una ***recta numérica*** (véase la figura A.2.). La recta tiene un punto cero, denominado ***origen***, que sirve para representar el número real 0. A cada punto de la recta numérica corresponde un número real. La correspondencia estriba en que el

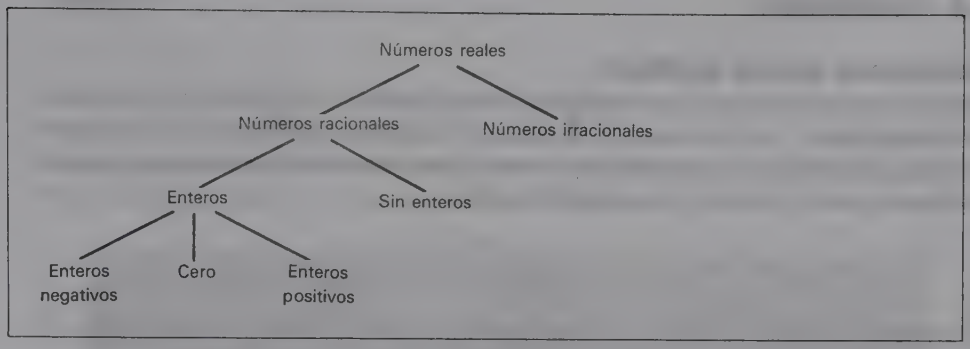


FIGURA A.1
Sistema de números reales.

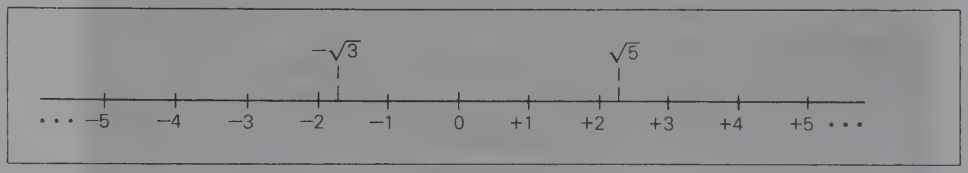


FIGURA A.2
Recta numérica.

número real representado por un punto es igual a la ***distancia dirigida*** que se recorre al pasar del origen a ese punto. Se considera que los movimientos de la izquierda a la derecha a lo largo de la recta numérica se hallan en una dirección positiva. Así, los puntos situados a la derecha del origen corresponden a números reales positivos, y los situados a la izquierda corresponden a números reales negativos. Obsérvese que a cada número real corresponde un solo punto en la recta numérica.

Los ***símbolos de desigualdad*** $>$ o $<$ sirven para indicar que dos números no son iguales, pero que pueden comparase. Cuando uno de ellos se coloca entre dos números, se ''abre'' en dirección del más gande. Cuando se tienen dos números reales a y b, la notación $a > b$ se lee ''a es mayor que b''. La proposición $a > b$ implica que en la recta numérica a está situada a la derecha de b.

Valor absoluto

El ***valor absoluto*** de un número real es la magnitud o tamaño del número sin signo. La notación $|a|$ expresa el valor absoluto de a.

DEFINICIÓN: VALOR ABSOLUTO
Para cualquier número real a,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es positiva o cero} \\ -a & \text{si } a \text{ es negativa} \end{cases}$$

EJEMPLO 1

El valor absoluto del número $+5$ es $|+5| = 5$. El valor absoluto de -20 es $|-20| = 20$. El valor absoluto de 0 es $|0| = 0$.

A.2 POLINOMIOS

Exponentes enteros positivos

Cuando un número real a se multiplica por sí mismo, a ese producto lo denotamos mediante $a \cdot a$ o bien aa. Si el mismo número se multiplica por sí mismo 5 veces, el producto se expresa con $aaaaa$. Una notación abreviada que puede utilizarse para expresar estos productos es

$$aa = a^2$$

y

$$aaaaa = a^5$$

El número escrito arriba y a la derecha de a recibe el nombre de *exponente*. El exponente indica el número de veces que a se repite como factor.

DEFINICIÓN
Si n es un entero positivo y s es un número real cualquiera,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}$$

El término a^n puede expresarse con palabras como "a elevada a la n-ésima potencia", donde se considera que a es la ***base*** y que n es el exponente o ***potencia***.

EJEMPLO 2

(*a*) $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = (-2)^6$
(*b*) $(5)(5)(5) = (5)^3$
(*c*) $aaaabbb = a^4b^3$
(*d*) $aa/(bbbb) = a^2/b^4$

DEFINICIÓN
Si n es un entero positivo y $a \neq 0$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EJEMPLO 3

(*a*) $a^{-2} = 1/a^2$
(*b*) $(2)^{-3} = 1/(2)^3 = \frac{1}{8}$

DEFINICIÓN
Si a es número real y no es igual a 0, $a^0 = 1$.

EJEMPLO 4

(*a*) $(10)^0 = 1$
(*b*) $(4x)^0 = 1, x \neq 0$
(*c*) $-5y^0 = -5(1) = -5, y \neq 0$

Las siguientes leyes de los exponentes son aplicables cuando a y b son números reales cualesquiera y m y n son enteros positivos.

LEYES DE LOS EXPONENTES

I $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
II $(a^m)^n = a^{mn}$
III $(ab)^n = a^n b^n$
IV $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ donde $a \neq 0$
V $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ donde $b \neq 0$

EJEMPLO 5

(*a*) $(b^5)(b) = b^{5+1} = b^6$
(*b*) $(-2)^3(-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5$
(*c*) $(2)(2)^3(2)^{-2} = (2^{1+3})(2^{-2}) = (2^4)(2^{-2}) = 2^2 = 4$
(*d*) $(a^2)^3 = a^{2\cdot 3} = a^6$
(*e*) $[(3)^2]^4 = (3)^{2\cdot 4} = 3^8$
(*f*) $[(-1)^3]^5 = (-1)^{3\cdot 5} = (-1)^{15} = -1$
(*g*) $(ab)^4 = a^4 b^4$
(*h*) $(2x)^3 = (2)^3(x)^3 = 8x^3$
(*i*) $\dfrac{a^6}{a^3} = a^{6-3} = a^3$
(*j*) $\dfrac{x^2}{x^4} = x^{2-4} = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$
(*k*) $(2)^3/(2)^7 = (2)^{3-7} = (2)^{-4} = 1/(2)^4 = \frac{1}{16}$
(*l*) $(x/y)^5 = x^5/y^5$
(*m*) $(2a/5b^2)^3 = (2a)^3/(5b^2)^3 = 8a^3/125b^6$
(*n*) $x^5/x^5 = x^{5-5} = x^0 = 1$

Ejercicios de seguimiento de la sección A.2

En los ejercicios 1-12 exprese por medio de exponentes las operaciones indicadas.

1 $(5)(5)(5)(5)$
2 $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)$
3 $(3)(3)(-2)(-2)(-2)$
4 $(7)(7)(7)/[(3)(3)]$
5 $(-x)(-x)(-x)$
6 $aaa/(bb)$
7 $aabbbcc$
8 $xxyyyy/(zzz)$
9 $xxxx/yyzzzz$
10 $ppqqq/rrrrss$
11 $(xy)(xy)(xy)(xy)$
12 $(abc)(abc)(abc)/(3)(3)(3)(3)(3)$

En los ejercicios 13-32 realice las operaciones indicadas.

13 $(2)^3(2)^4$
14 $(3)^3(3)^2$
15 x^3x^5
16 yy^4y^3

17 $x^2y^3x^3y$
18 aa^3a^2a
19 $(x^2)^3$
20 $(a^2)^5$
21 $(x^3)^2(x^2)^4$
22 $a^3(a^3)^4$
23 $[(a^2)^3]^2$
24 $[(-1)^4]^3$
25 $(3x^2)^3$
26 $(5a^3)^2$
27 $(2m^3)^2$
28 $(4b^4)^3$
29 $12(a^2)^4(b)^3$
30 $2(2x^2)^3(3y^3)^2$
31 $[(2x^2)^3]^4$
32 $[2(3a^2)^3]^2$

En los ejercicios 33-40 reescriba la expresión empleando exponentes positivos.

33 a^{-4}
34 $(xy)^{-2}$
35 $(\frac{1}{2})^{-3}$
36 x^{-1}
37 $(\frac{1}{3})^{-4}$
38 $(abc)^{-3}$
39 $(xy)^{-5}$
40 $(4x)^{-2}$

En los ejercicios 41-60 efectúe la operación indicada.

41 x^3/x
42 m^7/m^4
43 $(2)^5/(2)^8$
44 x^6/x^6
45 $(3)^4/(3)^3$
46 $(2x^2)^2/2(x^2)$
47 $(xy)^0$
48 $-(25x^0)^2$
49 $(x/y)^3$
50 $(\frac{4}{5})^3$
51 $(x^2/y)^4$
52 $(xy/z)^3$
53 $(a^2b/c^3)^4$
54 $(2x^2/5yz^3)^3$
55 $(3xy^2/z^3)^3$
56 $[(x^2/y)^3]^2$
57 $-5[2(x^0)^5]^2$
58 $2a^2[a^3/4b]^2$
59 $(a^2/b^3)^2(b^2/a^3)^3$
60 $(ab/c)^3(c/ab)^3$

Expresiones polinomiales

En la presente sección se explicarán algunas definiciones y terminología de gran importancia. Primero, las ***constantes*** son cantidades o magnitudes cuyo valor no cambia. Una constante puede representarse con una letra o con el número real que equivalga a la constante. Por ejemplo, 5 es una constante, lo mismo que la letra b si $b = -20$. Las ***variables*** son cantidades cuyo valor puede cambiar. Generalmente se simbolizan por medio de letras. Así, la letra t puede servir para representar la temperatura medida cada hora en una ciudad mediante la escala Fahrenheit o Celsius. El valor de t diferirá entre una hora y la siguiente.

La ***expresión algebraica*** es un conjunto de constantes y variables unidas por una serie de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, signos radicales y paréntesis o símbolos de agrupamiento. Por ejemplo.

$$5x^2y - 10x^3 + 75$$

es una expresión algebraica. Esta expresión consta de los tres términos $5x^2y$, $10x^3$ y 75. Un ***término*** se compone de un solo número o del producto de un número y las potencias de una o más variables. El término $5x^2y$ se compone de los ***factores*** 5, x^2 y y. El factor constante 5 recibe el nombre de *coeficiente* del término. En este libro, ***coeficiente*** se referirá siempre a una constante que sea factor en un término. Por ejemplo, 10 es el coeficiente en el término $10x^3$. El término 75 de la expresión algebraica no contiene variables y se llama ***término constante*** o, simplemente, constante.

Un ***polinomio*** es la suma de uno o más términos, con las siguientes restricciones:

- Los términos de un polinomio constan de un número o del producto de un número y las potencias *enteras positivas* de una o más variables. Esta definición excluye términos que tengan variables bajo un signo de radical o los que contengan variables en el denominador.
- Un polinomio integrado por un término se denomina ***monomio.*** El que tenga dos términos recibe el nombre de ***binomio.*** Si consta de tres términos se llama ***trinomio.*** Se da el nombre de polinomio a la expresión algebraica que tenga más de tres términos.

EJEMPLO 6

a) La expresión algebraica 25 es un polinomio que tiene un término; por tanto, se le llama monomio.

b) La expresión algebraica $5x^2 - 2x + 1$ es un polinomio compuesto de tres términos; por eso se le da el nombre de trinomio.

c) La expresión algebraica $2x^2y/z$ no es un polinomio porque la variable z aparece en el denominador del término.

d) La expresión algebraica $\sqrt{x}$ no es un polinomio porque la variable aparece debajo de un radical.

e) La expresión algebraica $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 9$ es un polinomio que consta de seis términos.

El ***grado de un término*** es la suma de los exponentes de las variables contenidas en él. En el caso de uno que incluya una variable, el grado es simplemente el exponente de esta última. El grado del término $5x^3$ es 3 puesto que el exponente es 3. El grado del término $5x^2y^3z$ es 6 porque la suma de los exponentes de x, y y z es 6. El grado de un término constante no cero es 0. He aquí un ejemplo, el término -20 puede escribirse en la forma equivalente $-20x^0$. Así pues, el grado del término es 0.

Además de la clasificación de los términos por el grado, los polinomios pueden clasificarse atendiendo a su grado. El ***grado de un polinomio*** se define como el grado del término de mayor grado en él.

EJEMPLO 7

a) El polinomio $2x^3 - 4x^2 + x - 10$ tiene términos de grados 3, 2, 1 y 0, respectivamente. Por tanto, el grado del polinomio es 3.

b) El polinomio $4x^2y^3 - 6xy^5 + 2xy$ tiene términos de grados 5, 6 y 2, respectivamente. En consecuencia, el grado del polinomio es 6.

Adición y sustracción de polinomios

Al sumar y restar polinomios, combinamos términos semejantes. Los ***términos semejantes*** son aquellos que contienen las mismas variables elevadas a una misma potencia. Se considera que los términos $3x$ y $-4x$ son semejantes por contener ambos la variable x elevada (implícitamente) a su primera potencia. El he-

cho de que sus coeficientes (3 y -4) sean diferentes no influye en la semejanza de los términos. Todas las constantes reales son consideradas como términos semejantes. Las constantes -5 y 18 pueden considerarse que tienen la forma $-5x^0$ y $18x^0$ que las califica como términos semejantes.

Cuando se suman o restan polinomios, pueden combinarse términos y obtenerse una forma más simple. Así, los términos semejantes $4x$ y $3x$ se sumarán del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 4x + 3x &= (4 + 3)x \\ &= 7x \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} 5xy^2 - 2xy^2 + 6xy^2 &= [5 + (-2) + 6]xy^2 \\ &= 9xy^2 \end{aligned}$$

Los términos no semejantes no pueden combinarse en una forma más simple (el conocido problema de sumar "perros y gatos"). La suma $5x$ y $2y$ no puede escribirse en una forma más simple.

Cuando se suman o restan polinomios, se identificarán y combinarán los términos semejantes. Los términos no semejantes se suman o restan como se ha indicado. Con los siguientes ejemplos se explican este proceso.

EJEMPLO 8

$$\begin{aligned} (2x^2 - 5x + 10) + (4x^2 + 3x - 5) &= 2x^2 - 5x + 10 + 4x^2 + 3x - 5 \\ &= 2x^2 + 4x^2 - 5x + 3x + 10 - 5 \\ &= 6x^2 - 2x + 5 \end{aligned}$$

EJEMPLO 9

$$\begin{aligned} (5x^2y + 2xy^2 - 4y^3) - (-3x^2y + y^3 - 10) &= 5x^2y + 2xy^2 - 4y^3 + 3x^2y - y^3 + 10 \\ &= 5x^2y + 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3 - y^3 + 10 \\ &= 8x^2y + 2xy^2 - 5y^3 + 10 \end{aligned}$$

Multiplicación de polinomios

Todas las reglas y propiedades de la multiplicación para números reales se aplican cuando se multiplican polinomios. Se expondrán dos casos de multiplicación: 1) multiplicación de dos monomios 2) multiplicación de dos polinomios.

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS
Para multiplicar dos monomios, se multiplican sus coeficientes y luego los términos variables usando las reglas de los exponentes.

EJEMPLO 10

(*a*) $(2x)(3x) = (2)(3)xx = 6x^2$
(*b*) $(5x^2)(-2x^3) = (5)(-2)x^2x^3 = -10x^5$
(*c*) $(3ab^2)(6a^3b) = (3)(6)aa^3b^2b = 18a^4b^3$
(*d*) $(mn^2)(4m^2n^3)(-3m^3n) = -12m^6n^6$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS
Para multiplicar dos polinomios, se multiplica *cada* uno de sus términos por *todos* los del otro polinomio.

EJEMPLO 11

$$(a)\quad (2)(4x - 2y) = (2)(4x) + (2)(-2y) = 8x - 4y$$

$$(b)\quad 4x^2y(x^2 + 2x - 1) = 4x^2y(x^2) + (4x^2y)(2x) + (4x^2y)(-1)$$
$$= 4x^4y + 8x^3y - 4x^2y$$

$$(c)\quad (2x - 6)(4x + 7) = (2x)(4x + 7) + (-6)(4x + 7)$$
$$= 8x^2 + 14x - 24x - 42$$
$$= 8x^2 - 10x - 42$$

$$(d)\quad (5x^2 - 2x)(x^3 + 2x^2 - 5x) = (5x^2)(x^3 + 2x^2 - 5x) + (-2x)(x^3 + 2x^2 - 5x)$$
$$= 5x^5 + 10x^4 - 25x^3 - 2x^4 - 4x^3 + 10x^2$$
$$= 5x^5 + 8x^4 - 29x^3 + 10x^2$$

División de polinomios

El único tipo de división de polinomios requerido *explícitamente* en este libro será la división de un polinomio entre un monomio. Cuando se necesita dividir dos polinomios, el cociente puede obtenerse con sólo simplificar las formas factorizadas de ambos. La factorización de polinomios se repasa en la siguiente sección.

DIVISIÓN DE MONOMIOS
Para dividir un monomio entre otro, se dividen los coeficientes de cada monomio y las variables por medio de la regla o reglas correspondientes de los exponentes.

EJEMPLO 12

$$(a)\quad \frac{12x^5}{3x^2} = \left(\frac{12}{3}\right)\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = 4x^{5-2} = 4x^3$$

$$(b)\quad \frac{-8x^3y^2}{2xy^2} = \left(\frac{-8}{2}\right)\left(\frac{x^3}{x}\right)\left(\frac{y^2}{y^2}\right) = -4x^{3-1}y^{2-2} = -4x^2(1) = -4x^2$$

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO ENTRE UN MONOMIO
Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término de aquél entre éste y se obtiene la suma algebraica de cada cociente.

EJEMPLO 13

$$(a)\quad \frac{4x^3 - 8x^2 + 6x}{2x} = \frac{4x^3}{2x} - \frac{8x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} = 2x^2 - 4x + 3$$

$$(b)\quad \frac{24a^4b^5 + 18a^2b^3}{-3a^2b^4} = \frac{24a^4b^5}{-3a^2b^4} + \frac{18a^2b^3}{-3a^2b^4} = -8a^2b - \frac{6}{b}$$

NOTA
Puede comprobarse la respuesta en una división con sólo multiplicar la respuesta por el divisor. Si la respuesta es correcta, esta prueba deberá ser igual al dividendo (numerador).

Ejercicios de seguimiento de la sección A.2 (continúa)

En los ejercicios 1-34 realice las operaciones indicadas.

1 $10x + 3x$
2 $5x^2 - 4x^2 + 2x^2$
3 $(5y^3 - 2y^2 + y) + (4y^2 - 5y)$
4 $(2m^2 - 3m) + (4m^2 + 2m) - (m^2 + 6)$
5 $(40x^3y^2 - 25xy^3) - (15x^3y^2)$
6 $abc - cab - 4bac$
7 $(x - 2y) - (2x - 3y) + (x - y)$
8 $(-5x)(4x^2)$
9 $(7x^3)(3xy^2)$
10 $(3x^2)(2x)(-4x^3)$
11 $(a^2)(4a^5)(-2a^3)$
12 $5x(x - 10)$
13 $(-2x^2)(x^2 - y)$
14 $2a(a^2 - 2a + 5)$
15 $x^2y(x^2 - 2xy + y^2)$
16 $(x - 5)(x + 6)$
17 $(a + b)(a + b)$
18 $(2x - 3)(2x - 3)$
19 $(a - b)(a - b)$
20 $(x + 4)(x - 4)$
21 $(x - 2)(x^2 - 4x + 4)$
22 $21x^5/(3x)$
23 $16x^2y^3/(4xy^2)$
24 $10a^4b^2/(5ab^2)$
25 $-9xy^2/(3xy^3)$
26 $25a^2bc^3/(5ab^2c^4)$
27 $(15x^2 - 24x)/(3x)$
28 $(4x^3y - 2x^2y + 8xy)/(2x)$
29 $(12a^3 - 9a^2 + 6a)/(-3a)$
30 $(3x^2yz^3 - 4xy^2z)/(-xyz)$
31 $(4x^6 + 6x^3 - 8x^2)/(2x)$
32 $(8a^3b^2c - 4a^2b^3c^2)/4a^2bc$
33 $(48x^3y^2 - 16x^2y^4 + 24xy^3)/-4xy^2$
34 $(-12x^8y^6z^2 + 28x^5y^4z^5)/(-4x^3y)$

A.3 FACTORIZACIÓN

En la presente sección se tratará de la ***factorización de polinomios.*** Factorizar un polinomio significa expresarlo como el producto de dos o más polinomios. He aquí la ***ley distributiva de la multiplicación.***

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

El binomio de la derecha del signo de igualdad puede expresarse como el producto de los polinomios a y $b + c$. Estos dos polinomios se consideran los factores de la expresión $a \cdot b + a \cdot c$. En la multiplicación de polinomios, se nos dan los factores y hay que encontrar el producto. En la factorización se conoce el producto y debemos obtener los polinomios que, al ser multiplicados, darán el producto.

Factores de monomios

La ley distributiva constituye un ejemplo de ***factores monomiales.*** es decir,

$$ab + ac = a(b + c)$$

indica que los dos términos del miembro izquierdo del signo de igualdad contienen un factor común a. Éste puede representar a cualquier monomio. Por ejemplo, el polinomio $2x + 2y$ puede reescribirse en la *forma factorizada* $2(x + y)$, puesto que cada término posee un factor común de 2.

EJEMPLO 14

a) Los términos del polinomio $x^3 - x^2 + x$ tienen un factor común x. Puede reescribirse así:

$$x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$$

b) Los términos del polinomio $6x^2y^3 - 10xy^2$ tienen un factor común $2xy^2$. Al factorizarlo en cada términos se obtiene

$$6x^2y^3 - 10xy^2 = 2xy^2(3xy - 5)$$

Generalmente nos interesa factorizar polinomios *íntegramente*. Ello significa que los factores no puedan factorizarse más. El miembro derecho de la ecuación

$$x^3y^2 + x^4y^3 = xy(x^2y + x^3y^2)$$

no está factorizada por completo. El término x^2y puede factorizarse en todos los términos dentro del paréntesis. El polinomio estará totalmente factorizado cuando se describa $x^3y^2(2 + xy)$.

La meta en la factorización de un monomio suele ser identificar el *mayor* factor común monomial. Y ese factor es el que contiene el máximo factor numérico común y las potencias más altas de las variables comunes a todos los términos.

Polinomios cuadráticos

A un polinomio de segundo grado se le llama a menudo polinomio *cuadrático*. Veremos con frecuencia este tipo de polinomios y su factorización será muy importante. En concreto, queremos expresar los polinomios cuadráticos, de ser posible, como el producto de dos polinomios de primer grado. El proceso de factorización incluye a menudo el tanteo. Algunas veces resulta fácil, otras es desalentador en extremo. Los siguientes casos le ayudarán al lector a entender mejor esto.

CASO 1

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Considérese el producto $(x + a)(x + b)$. La multiplicación de los dos binomios nos da

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x^2 + (a + b)x + ab\end{aligned}$$

El resultado de la multiplicación es un trinomio con un término x^2, un término x y un término constante. Nótense los coeficientes de los términos del trinomio. El término x^2 tiene un coeficiente igual a 1; el término x tiene un coeficiente $a + b$, que es igual a la suma de las constantes contenidas en los ***factores bino-***

miales; y el término constante ab es el producto de las dos constantes contenidas en los factores binomiales. Al factorizar un trinomio que tenga esta forma, el objetivo será calcular los valores de a y b que generen el coeficiente de x, o sea el término medio del polinomio, y el término constante.

EJEMPLO 15

Para obtener los factores $x^2 - 5x + 6$, se buscan los valores de a y b tales que

$$(x + a)(x + b) = x^2 - 5x + 6$$

El coeficiente del término intermedio es -5. De acuerdo con lo que acabamos de explicar, los valores de a y b han de ser tales que $a + b = -5$. Y el tercer término del trinomio es 6, lo cual indica que $ab = 6$. Al aplicar un procedimiento de tanteo, debería llegarse a la conclusión de que los valores que cumplen con las dos condiciones son -2 y -3. No importa cuál de ellos sea asignado a a y b. Los factores binomiales son $(x - 2)(x - 3)$ o $(x - 3)(x - 2)$.

EJEMPLO 16

Para obtener los factores de $m^2 + 6m - 21$, se buscan valores de a y b tales que

$$(m + a)(m + b) = m^2 + 6m - 21$$

Según lo que hemos dicho antes, las relaciones entre a y b son

$$a + b = 6$$

y

$$ab = -21$$

Verifique que no haya valores (enteros) de a y b que satisfagan las ecuaciones anteriores. Así pues, no es posible factorizar esta expresión cuadrática.

CASO 2

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

Considérese el producto

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Suponiendo que a y c sean enteros, ninguno de los cuales es 1, el producto será un trinomio que difiere del caso 1 en que el coeficiente del término x^2 es un entero diferente de 1. Cuando un trinomio contiene un coeficiente entero de ese tipo en el término x^2, los factores binomiales incluyen cuatro constantes que es preciso identificar. El coeficiente del término x^2 es el producto de a y c, el coeficiente del término x es $ad + bc$ y el término constante es igual al producto bd. Puede ser difícil identificar los valores de las cuatro constantes que cumplan con estas condiciones. Compruebe que, cuando $a = 1$ y $c = 1$, el caso 2 corresponde al caso 1.

EJEMPLO 17

Para encontrar los factores $6x^2 - 25x + 25$, se buscan los valores de a, b, c y d tales que

$$6x^2 - 25x + 25 = (ax + b)(cx + d)$$

Las condiciones que han de cumplirse son

$$ac = 6$$
$$ad + bc = -25$$
y
$$bd = 25$$

Verifique que los valores $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$ y $d = -5$ satisfacen las condiciones. Y,

$$(3x - 5)(2x - 5) = 6x^2 - 25x + 25$$

EJEMPLO 18

El primer paso en la factorización es buscar factores monomiales comunes. En el trinomio $12x^2 - 27x + 6$, puede factorizarse 3 en cada término, o sea

$$12x^2 - 27x + 6 = 3(4x^2 - 9x + 2)$$

El siguiente paso será determinar si el factor *trinomial* puede factorizarse. De ser así,

$$ac = 4$$
$$ad + bc = -9$$
y
$$bd = 2$$

Los valores que cumplen las condiciones señaladas son $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$ y $d = -1$. Por consiguiente,

$$12x^2 - 27x + 6 = 3(x - 2)(4x - 1)$$

CASO 3

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Este caso requiere factorizar la ***diferencia entre cuadrados perfectos***. El binomio por factorizar es la diferencia entre los cuadrados de las dos cantidades, x y a. Este binomio puede factorizarse como el producto de la *suma* y *diferencia* de x y a.

EJEMPLO 19

$$x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2$$
$$= (x + 3)(x - 3)$$

EJEMPLO 20

$$16x^4 - 81 = (4x^2)^2 - (9)^2$$
$$= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9)$$

Sin embargo, el binomio $4x^2 - 9$ es la diferencia entre dos cuadrados. En consecuencia,

$$16x^4 - 81 = (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$$

Otras formas especiales

Las siguientes reglas de factorización se aplican con menor frecuencia en el libro.

CASO 4

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Este caso requiere factorizar la ***diferencia entre dos cubos.***

EJEMPLO 21

(*a*) $x^3 - 1 = (x)^3 - (1)^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
(*b*) $8x^3 - 64 = (2x)^3 - (4)^3 = (2x - 4)(4x^2 + 8x + 16)$
(*c*) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$

CASO 5

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Este caso incluye la factorización de la ***suma de dos cubos.***

EJEMPLO 22

(*a*) $x^3 + 8 = (x)^3 + (2)^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
(*b*) $27y^3 + 64 = (3y)^3 + (4)^3 = (3y + 4)(9y^2 - 12y + 16)$

Ejercicios de seguimiento de la sección A.3

Factorice por completo (de ser posible) los polinomios en los siguientes ejercicios. No olvide verificar sus respuestas.

1 $2ax - 8a^3$
2 $21m^2 - 7mn$
3 $4x^3y - 6xy^3 + 8x^2y^2$
4 $65a^3b^2 - 13a^2b^3$
5 $9a^3 - 15a^2 - 27a$
6 $x^2 - 8x + 12$

7 $x^2 + x + 3$
8 $x^2 + 7x + 12$
9 $p^2 + 9p - 36$
10 $x^2 - 2x - 15$
11 $r^2 - 21r - 22$
12 $x^2 - 16x + 48$
13 $x^5 + y^5$
14 $9x^2 + 12x + 4$
15 $6m^2 - 19m + 3$
16 $2x^2 - 7x - 4$
17 $8x^2 - 2x - 3$
18 $2x^3 + 4x^2 - 42x$
19 $x^4 - 81$
20 $100x^2 - 225$
21 $81x^4 - 625$
22 $10x^2 + 13x - 3$
23 $x^2 + 4$
24 $27 - 8m^3$
25 $1 + 8x^3$
26 $a^3 - 125$
27 $x^4 - x^3 - 2x^2$
28 $4x^6 - 4x^2$
29 $x^3 - 3x^2 - 40x$
30 $8 - 6x + x^2$
31 $x^5 - 4x^4 - 21x^3$
32 $x^6 - x^5$
33 $a^5b - 81ab$
34 $a^2b^3y^4 - 625a^2b^3$
35 $162uv - 2u^5v$
36 $6x^4y^3 + x^3y^3 - 5x^2y^3$

A.4 FRACCIONES

Las *fracciones*, o *números racionales*, constituyen una parte importante del sistema de números reales. En la presente sección se describen algunas reglas muy útiles para efectuar cálculos con fracciones.

Adición y sustracción de fracciones

REGLA 1: DENOMINADORES COMUNES
Si dos fracciones tienen el mismo denominador, su suma (diferencia) se obtiene sumando (restando) sus numeradores y poniendo el resultado sobre el común denominador.

EJEMPLO 23

(*a*) $\dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{3+2}{7} = \dfrac{5}{7}$

(*b*) $\dfrac{7}{8} - \dfrac{4}{8} = \dfrac{7-4}{8} = \dfrac{3}{8}$

REGLA 2: DENOMINADORES DIFERENTES
Para sumar (restar) dos fracciones de diferentes denominadores, se reformulan como fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. La suma (diferencia) se calcula después aplicando para ello la regla 1.

Al aplicar la regla 2, *cualquier* denominador común pueden identificarse cuando se obtengan las fracciones equivalentes. Sin embargo, se acostumbra

identificar el ***mínimo común múltiplo*** (mcm) o el ***mínimo común denominador*** (mcd).

El procedimiento con que se obtiene el mínimo común denominador se explica en seguida:

1 Escriba cada denominador en una forma completamente factorizada.
2 El mínimo común denominador es un producto de los factores. Para obtenerlo, cada factor distinto se incluye el mayor número de veces que aparece en *cualquiera* de los denominadores.

EJEMPLO 24

Para calcular el mínimo común denominador de las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{20}$, se factoriza por completo cada denominador:

$$8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$
$$20 = 20 \cdot 1 = 10 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$

Estos denominadores se factorizan enteramente puesto que los factores pueden expresarse sólo como el producto de sí mismos y de 1 (suponiendo que estemos buscando factores de valores enteros). A ese tipo de factores se les llama ***factores primos.***

Al formar el mínimo común denominador, *cada factor primo diferente se incluye el mayor número de veces que aparece en cualquiera de los denominadores.* Esos factores son 2, 5 y 1. Por tanto,

$$\text{mcd} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 40$$

EJEMPLO 25

Determine la suma $\frac{5}{8} + \frac{3}{20}$

SOLUCIÓN

Una vez identificado el mínimo común denominador en el último ejemplo, hay que reformular cada fracción con el común denominador 40. Al expresar de nuevo las fracciones y al aplicar la regla 1, se obtiene

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{20} = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{25}{40} + \frac{6}{40} = \frac{25 + 6}{40} = \frac{31}{40}$$

EJEMPLO 26

Determine la diferencia $3/(4x) - 5/(6x^2)$.

SOLUCIÓN

Factorizando cada denominador, se obtiene

$$4x = 4 \cdot x \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 1$$
$$6x^2 = 6 \cdot x \cdot x \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot 1$$

Los factores distintos de estos denominadores son 2, 3, x (2, 3, x y 1)

$$\begin{aligned}\text{mcd} &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot 1 \\ &= 12x^2\end{aligned}$$

Las fracciones, cuando se reformulan en términos del mínimo común denominador, producen

$$\begin{aligned}\frac{3}{4x} - \frac{5}{6x^2} &= \frac{3 \cdot 3x}{4x \cdot 3x} - \frac{5 \cdot 2}{6x^2 \cdot 2} \\ &= \frac{9x}{12x^2} - \frac{10}{12x^2} \\ &= \frac{9x - 10}{12x^2}\end{aligned}$$

EJEMPLO 27

Para obtener la suma algebraica $3/(x - 1) - 5x/(x + 1) + x^2/(x^2 - 1)$, primero se determina el mínimo común denominador, o sea

$$\text{mcd} = (x + 1)(x - 1) \cdot 1 = (x^2 - 1)$$

Las tres fracciones se reformulan empleando el mínimo común denominador y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-1} - \frac{5x}{x+1} + \frac{x^2}{x^2-1} &= \frac{3 \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} - \frac{5x(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{3(x+1) - 5x(x-1) + x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{3x + 3 - 5x^2 + 5x + x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{-4x^2 + 8x + 3}{x^2-1}\end{aligned}$$

Multiplicación y división

REGLA 3: MULTIPLICACIÓN
El producto de dos o más fracciones se encuentra dividiendo el producto de sus numeradores entre el de sus denominadores. Es decir,

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

EJEMPLO 28

(*a*) $\dfrac{3}{5}\dfrac{2}{7} = \dfrac{(3)(2)}{(5)(7)} = \dfrac{6}{35}$

(*b*) $\dfrac{15}{x}\dfrac{x^2}{3} = \dfrac{15x^2}{3x} = \dfrac{5x}{1} = 5x$

(*c*) $\dfrac{x-1}{10}\dfrac{15}{x^2-1} = \dfrac{(15)(x-1)}{(10)(x-1)(x+1)} = \dfrac{3}{2(x+1)}$

REGLA 4: DIVISIÓN

El cociente de dos fracciones simples puede determinarse invirtiendo la fracción del divisor y multiplicando el cociente por la fracción del dividendo. Es decir,

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

EJEMPLO 29

(*a*) $\dfrac{-\frac{5}{12}}{\frac{3}{4}} = \left(-\dfrac{5}{12}\right)\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{20}{36} = -\dfrac{5}{9}$

(*b*) $\dfrac{\frac{4}{10}}{2} = \dfrac{\frac{4}{10}}{2/1} = \left(\dfrac{4}{10}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

(*c*) $\dfrac{3x^2/4}{9x/2} = \dfrac{3x^2}{4}\dfrac{2}{9x} = \dfrac{6x^2}{36x} = \dfrac{x}{6}$

(*d*) $\dfrac{1 - 2/x}{4/x} = \dfrac{x/x - 2/x}{4/x} = \dfrac{(x-2)/x}{4/x} = \dfrac{x-2}{x}\dfrac{x}{4} = \dfrac{x-2}{4}$

Ejercicios de seguimiento de la sección A.4

En los ejercicios 1-17 realice las operaciones indicadas.

1 $\frac{1}{5} + \frac{5}{30}$

2 $\frac{2}{7} - \frac{4}{21}$

3 $\frac{1}{3} - \frac{5}{8} + \frac{5}{12}$

4 $\frac{4}{25} - \frac{3}{10} + \frac{7}{5}$

5 $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

6 $\dfrac{5}{2a} + \dfrac{6}{a^3}$

7 $\dfrac{5x}{x^2 - 4} + \dfrac{x}{x - 2}$

8 $\dfrac{5}{1} + \dfrac{1}{x}$

9 $\dfrac{10}{1} - \dfrac{2}{x^2}$

10 $\dfrac{4}{a} + \dfrac{3}{2ab}$

11 $\dfrac{3a}{a + 1} - \dfrac{5}{a^2 + 2a + 1}$

12 $\frac{3}{11}\frac{33}{6}$

13 $(\frac{1}{5})(\frac{10}{3})(-\frac{9}{2})$

14 $\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2x^3}{3}\right)\left(\dfrac{6}{5}\right)$

15 $\left(\dfrac{ab}{c}\right)\left(\dfrac{c^2}{3a^2b}\right)\left(\dfrac{1}{abc}\right)$

16 $\left(\dfrac{5}{x - 4}\right)\left(\dfrac{x^2 - 16}{10}\right)\left(\dfrac{x + 4}{2}\right)$

17 $\frac{7}{27} \div \frac{5}{9}$

18 $3x^2/5 \div x/5$

19 $a^2b/(5c) \div 3c^2/(10ab)$

20 $abc/8 \div 3a^2b/4$

21 $\dfrac{x - 1}{x^2 - 5x - 4} \div \dfrac{x - 1}{x - 4}$

22 $\dfrac{1 - 2/(3x)}{3/x + 4}$

23 $\dfrac{x^2 - 1}{x^2} \div \dfrac{x - 1}{x^3}$

24 $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2} \div \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$

25 $\left[\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6} \div \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - x - 2}\right] \cdot \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2}$

A.5 EXPONENTES Y RADICALES

En la sección A.2 se explicaron las primeras cinco leyes de los exponentes:

$$\text{I} \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\text{II} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$
$$\text{III} \quad (ab)^n + a^n b^n$$
$$\text{IV} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a \neq 0$$
$$\text{V} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0$$

Recuérdese que los exponentes se restringieron a valores enteros.

Exponentes fraccionarios

En ocasiones tendremos que trabajar con exponentes fraccionarios. Las leyes de los exponentes son válidas para cualesquier valores reales de m y n. En el siguiente ejemplo se explica la aplicación de las leyes de los exponentes cuando éstos son fracciones.

EJEMPLO 30

(*a*) $x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x$

(*b*) $x^{3/2} \cdot x^{1/3} = x^{3/2+1/3} = x^{9/6+2/6} = x^{11/6}$

(*c*) $(x^{1/2})^4 = x^{(1/2)(4)} = x^2$

(*d*) $(x^{2/3})^{-3} = x^{(2/3)(-3)} = x^{-2} = 1/x^2$

(*e*) $(2x^{1/4})^4 = (2)^4(x^{1/4})^4 = 16x$

(*f*) $x^{3/4}/x^{1/2} = x^{3/4-1/2} = x^{3/4-2/4} = x^{1/4}$

(*g*) $x^{5/8}/x^{3/4} = x^{5/8-3/4} = x^{5/8-6/8} = x^{-1/8} = 1/x^{1/8}$

(*h*) $(x/y)^{1/2} = x^{1/2}/y^{1/2}$

Radicales

Con frecuencia se necesita determinar el valor de x que satisfaga una ecuación de la forma

$$x^n = a$$

Por ejemplo, ¿qué valores de x satisfacen las siguientes ecuaciones?

$$x^2 = 4 \qquad x^3 = 8 \qquad x^4 = 81$$

En la primera ecuación queremos determinar el valor de x que, al ser multiplicado por sí mismo, dé un producto igual a 4. El lector debería concluir que los valores de $+2$ y -2 satisfacen la ecuación, esto es, hacen iguales los miembros izquierdo y derecho de ella. De modo similar, la segunda ecuación busca el valor de x que, cuando se eleva al cubo, genera un producto de 8. Un valor de $+2$ satisface esta ecuación. Verifique que $+3$ y -3 satisfagan la tercera ecuación.

DEFINICIÓN

Si $a^n = b$, entonces a se denomina la n-ésima raíz de b.

La n-ésima raíz de b se expresa con $\sqrt[n]{b}$, donde el símbolo $\sqrt{\ }$ es el ***signo del radical***, n es el ***índice*** y b es el ***radicando***. Así pues, podemos formular

$$\boxed{\text{Si } a^n = b, \text{ entonces } a = \sqrt[n]{b}}$$

$$\text{Si } x^2 = 4 \qquad x = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$$

donde se dice que x es igual a la ***raíz cuadrada*** de 4. *Si ningún índice aparece con el signo del radical, el índice será implícitamente 2.*

En la segunda ecuación, puede formularse

$$\text{Si } x^3 = 8 \qquad x = \sqrt[3]{8}$$

donde se dice que x es la ***raíz cúbica*** de 8. Y, para la tercera ecuación.

$$\text{Si } x^4 = 81 \qquad x = \sqrt[4]{81}$$

donde se dice que x es la ***raíz cuarta*** de 81.

Como se ha visto en el caso de estas ecuaciones, puede haber más de una n-ésima raíz de un número real. Por lo regular queremos determinar sólo una de ellas: la ***principal n-ésima raíz.*** En $\sqrt[n]{b}$,

1 La principal n-ésima raíz es positiva si b es positiva.

2 La principal n-ésima raíz es negativa si b es negativa y n es impar.

Los siguientes ejemplos contienen la principal n-ésima raíz.

EJEMPLO 31

(*a*) $\sqrt{9} = 3$
(*b*) $\sqrt[3]{-27} = -3$
(*c*) $\sqrt[5]{32} = 2$
(*d*) $\sqrt[5]{-243} = -3$

Las siguientes leyes son aplicables a los cálculos cuando intervienen radicales.

LEYES DE RADICALES

I $(\sqrt[n]{a})^n = a$
II $a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a + b)\sqrt[n]{x}$
III $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

IV $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ for $b \neq 0$
V $b^{m/n} = (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m}$

EJEMPLO 32

(*a*) $(\sqrt{4})^2 = (2)^2 = 4$

(*b*) $(\sqrt[3]{36})^3 = 36$

(*c*) $(\sqrt[3]{-8})^3 = (-2)^3 = -8$

(*d*) $\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{a}$

(*e*) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ no puede simplificarse aplicando las leyes de los radicales porque los índices en dos radicales son diferentes

(*f*) $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2}$ no puede simplificarse usando las leyes de los radicales porque los radicandos no son iguales

(*g*) $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{(64)(2)} = \sqrt[3]{64}\,\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

(*h*) $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{x} = x\sqrt{x},\ x \geq 0$

(*i*) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{4}/\sqrt{9} = \frac{2}{3}$

(*j*) $\sqrt[3]{(-1)/125} = \sqrt[3]{-1}/\sqrt[3]{125} = -1/5$

(*k*) $x^{1/2} = \sqrt{x}$

(*l*) $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

(*m*) $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

(*n*) $(64)^{2/3} = \sqrt[3]{(64)^2} = (\sqrt[3]{64})^2 = 4^2 = 16$

(*o*) $(49)^{-1/2} = 1/(49)^{1/2} = 1/\sqrt{49} = \frac{1}{7}$

Ejercicios de seguimiento de la sección A.5

En los ejercicios 1-14 efectúe las operaciones indicadas.

1 $a^{3/2} \cdot a^{4/3}$

2 $b^{1/6} \cdot b^{1/4}$

3 $x^{1/3} \cdot x^{2/5} \cdot x^{3/10}$

4 $(x^{1/2})^{2/3}$

5 $(a^{3/2})^{5/6}$

6 $(2x^{3/4})^4$

7 $(-3x^{2/3})^3$

8 $x^{5/2}/x^{1/2}$

9 $a^{3/2}/a^{1/6}$

10 $(x^4y^2)^{1/2}$

11 $(x^{2/3} \cdot x^{4/5})^2$

12 $(a^6b^{15})^{1/3}$

13 $(x^{2/5} \cdot x^{1/3}) \div x^{3/5}$

14 $(2a^{2/3})^5 \div 4a^{1/3}$

En los ejercicios 15-28 determine la principal n-ésima raíz.

15 $\sqrt{625}$

16 $\sqrt[4]{625}$

17 $\sqrt[3]{-a^3}$

18 $\sqrt[5]{-1}$

19 $\sqrt[3]{-8x^6}$

20 $\sqrt[3]{27a^9}$

21 $\sqrt{144x^6}$

22 $\sqrt[3]{-64x^3y^6}$

23 $\sqrt[4]{16a^8b^4}$

24 $\sqrt[3]{x^{12}y^{21}}$

25 $\sqrt[5]{a^{15}b^5c^{30}}$

26 $\sqrt[5]{-32x^{20}y^{40}}$

27 $\sqrt[4]{1296a^8}$

28 $\sqrt{900a^2b^6c^4}$

En los ejercicios 29-44 simplifique las expresiones del radical.

29 $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

30 $5\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$

31 $\sqrt{32} + 3\sqrt{2}$

32 $2\sqrt{45} - 2\sqrt{5}$

33 $4\sqrt{x} - \sqrt{x^3}$

34 $\sqrt{20} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{45}$

35 $\sqrt{2}\,\sqrt{8}$

36 $\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{10}\,\sqrt[3]{5}$

37 $\sqrt{\frac{64}{9}}$

38 $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$

39 $\sqrt{625x^2/(49y^4)}$

40 $\sqrt[4]{1/(81a^8)}$

41 $\sqrt[3]{\dfrac{64x^6}{27y^9}}$

42 $\sqrt[4]{10}\,\sqrt[4]{100}\,\sqrt[4]{10}$

43 $\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{8}\,\sqrt{4}}{\sqrt[3]{32}\,\sqrt[3]{2}}$

44 $\dfrac{\sqrt{x^3y^5}\,\sqrt{xy^3}}{\sqrt[4]{x^7y^2}\,\sqrt[4]{xy^6}}$

En los ejercicios 45-56 exprese el término en forma de radical.

45 $x^{2/3}$ **46** $x^{1/5}$
47 $(ab)^{3/5}$ **48** $(xy)^{3/4}$
49 $x^{-1/2}$ **50** $a^{-2/3}$
51 $(8)^{-1/3}$ **52** $(32)^{-1/5}$
53 $a^{3/5}$ **54** $(x + y)^{2/3}$
55 $(100 - x)^{1/4}$ **56** $(64x^{12}y^{24})^{1/6}$

En los ejercicios 57-68 exprese el término usando exponentes fraccionales.

57 $\sqrt{45x}$ **58** $\sqrt[3]{a^2}$
59 $\sqrt[4]{x^3}$ **60** $\sqrt{xy}$
61 $\sqrt[3]{x^5}$ **62** $\sqrt[5]{(ab)^3}$
63 $\sqrt{x^4}$ **64** $\sqrt[3]{(-1)^9}$
65 $\sqrt{x + y}$ **66** $\sqrt[3]{(x - y)^2}$
67 $\sqrt[4]{(3 - x)^3}$ **68** $\sqrt[5]{(x - 2x + y)^2}$

A.6 ECUACIONES

En este libro trabajamos constantemente con ecuaciones. Es indispensable que el lector conozca el significado de las ecuaciones y sus propiedades algebraicas.

Ecuaciones y sus propiedades

La ***ecuación*** es un forma abreviada de decir que dos expresiones algebraicas son *iguales*. Se distinguen tres tipos de ecuaciones. La ***identidad*** es una ecuación que es verdadera para todos los valores de las literales o variables. Un ejemplo de identidad es la ecuación.

$$6x + 12 = \frac{12x + 24}{2}$$

He aquí otro ejemplo:

$$5(x + y) = 5x + 5y$$

En las ecuaciones anteriores, los valores que se asignan a las variables hacen iguales a ambos miembros.

La ***ecuación condicional*** es verdadera para un número limitado de valores de las variables. Por ejemplo, la ecuación

$$x + 3 = 5$$

es verdadera sólo cuando x es 2.

Una ***proposición falsa*** es una ecuación que nunca se realiza. Esto es, no hay valores de variables que hagan iguales a ambos miembros. Un ejemplo de ella es la ecuación

$$x = x + 5$$

Hemos indicado que los dos miembros no son iguales por medio del símbolo $\neq$; en este ejemplo,

$$x \neq x + 5$$

Si una ecuación contiene una variable, cualquier valor de esta última que haga verdadera la ecuación recibe el nombre de ***raíz de la ecuación***. Decimos que las raíces son valores de la variable que ***satisfacen la ecuación***. "Resolver una ecuación" es el proceso de encontrar las raíces de la ecuación, si es que existen.

Casi siempre hay que manipular o rearreglar las ecuaciones a fin de resolverlas. Las siguientes reglas indican las operaciones permisibles.

ALGUNAS REGLAS PARA MANIPULAR ECUACIONES

I Se pueden sumar a ambos miembros de una ecuación expresiones de valores reales que sean iguales.

II Ambos miembros de una ecuación pueden multiplicarse o dividirse entre cualquier constante no cero.

III Ambos miembros de una ecuación pueden multiplicarse por una cantidad que contenga variables.

IV Ambos miembros de una ecuación pueden elevarse al cuadrado.

V Ambos miembros de una ecuación pueden dividirse entre una expresión que contenga variables a condición de que la expresión no sea 0.

Las reglas I y II desembocan en la creación de ***ecuaciones equivalentes***. *Éstas son ecuaciones que tienen las mismas raíces.* Las reglas III y IV pueden dar origen a raíces que no son raíces de la ecuación original. A estas raíces se les llama ***raíces extrañas***. Al aplicar la regla V se obtienen ecuaciones que no incluyen todas las raíces contenidas en la ecuación original o bien ecuaciones que no son equivalentes de las ecuaciones originales.

Solución de las ecuaciones de primer grado

El procedimiento con que se resuelven las ecuaciones se basa en la naturaleza de la ecuación. Pongamos el caso de las ecuaciones de primer grado que contienen una variable. Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ello.

$$3x = 2x - 5$$
$$5x - 4 = 12 + x$$

Las soluciones de ecuaciones con esta forma es relativamente fácil. Si se recurre a las reglas apropiadas de manipulación, el procedimiento consiste simplemente en aislar la variable en un miembro de la ecuación y todas las constantes en el otro miembro.

EJEMPLO 33

Resuelva las dos ecuaciones de primer grado dadas previamente.

SOLUCIÓN

Para la ecuación $3x = 2x - 5$, podemos sumar $-2x$ a ambos miembros y obtener

$$3x + (-2x) = 2x - 5 + (-2x)$$

o bien

$$x = -5$$

El único valor de x que satisface esta ecuación es -5.

Para la ecuación $5x - 4 = 12 + x$, podemos sumar $-x$ y 4 a ambos miembros, obteniendo así

$$5x - 4 + 4 + (-x) = 12 + x + 4 + (-x)$$

$$5x - x = 12 + 4$$

o

$$4x = 16$$

Al dividir ambos miembros entre 4 (o multiplicando por $\frac{1}{4}$) se obtiene la raíz de la ecuación:

$$x = 4$$

Solución de ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado con la variable x tiene la forma generalizada

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son constantes con la condición adicional de que $a \neq 0$. Si a es igual a cero, el término x^2 desaparece y la ecuación ya no es de grado 2. A continuación se dan ejemplos de este tipo de ecuación:

$$6x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$2x^2 - 1 = 5x + 9$$

A las ecuaciones de segundo grado suele llamárseles ***ecuaciones cuadráticas.*** Una ecuación cuadrática (excluida una identidad) puede tener ***raíces no reales, una raíz real*** o ***dos raíces reales.*** Se usan varios procedimientos para determinar las raíces de una ecuación cuadrática. Explicaremos las dos. El primer paso, en uno y otro caso, es reescribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Método de factorización Si se factoriza el miembro izquierdo de la ecuación cuadrática, las raíces pueden identificarse con gran facilidad. Considere la ecuación cuadrática

$$x^2 - 4x = 0$$

El miembro izquierdo puede fartorizarse, lo cual nos da

$$x(x - 4) = 0$$

La forma factorizada de la ecuación indica que el producto de los dos términos es 0. El producto será 0 si uno de los dos factores también lo es. En esta ecuación, el primer factor es 0 cuando $x = 0$, y el segundo factor es 0 cuando $x = 4$. Así pues, las dos raíces son 0 y 4.

EJEMPLO 34

Determine las raíces de la ecuación

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

SOLUCIÓN

El miembro izquierdo de la ecuación puede factorizarse de modo que

$$(x + 3)(x + 3) = 0$$

Haciendo 0 a cada factor, encontramos que hay una raíz de la ecuación y que ésta ocurre cuando $x = -3$.

Fórmula cuadrática Cuando la expresión cuadrática no puede factorizarse o si usted no logra identificar los factores, puede aplicarse la ***fórmula cuadrática.*** Ésta permitirá identificar todas las raíces de una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La fórmula cuadrática es

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Los siguientes ejemplos muestran la utilización de la fórmula

---

EJEMPLO 35

En la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 48 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -2$ y $c = -48$. Al sustituir los valores anteriores en la fórmula cuadrática, las raíces de la ecuación se calculan como

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2}$$

Usando el signo de más se obtiene

$$x = \tfrac{16}{2} = 8$$

Empleando el signo de menos se obtiene

$$x = -\tfrac{12}{2} = -6$$

Así pues, éstos son los únicos valores reales de x que satisfacen la ecuación cuadrática.

La expresión bajo el radical de la fórmula cuadrática, $b^2 - 4ac$, se denomina ***discriminante.*** El valor del discriminante nos ayuda a determinar el número de raíces de la ecuación cuadrática.

INTERPRETACIONES DEL DISCRIMINANTE
En una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$,

I Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos raíces reales.
II Si $b^2 - 4ac = 0$, no hay una raíz real.
III Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay raíces reales.

Solución de desigualdades

Las ***desigualdades*** expresan la condición de que dos cantidades no son iguales. Una manera de expresar esta condición es usar los ***símbolos de desigualdad*** $<$ y $>$. A continuación se muestra el empleo e interpretación de esos símbolos:

Desigualdad	Interpretación
(*a*) $3 < 5$	"3 es menor que 5"
(*b*) $x > 100$	"el valor de x es mayor que 100"
(*c*) $0 < y < 10$	"el valor de y es mayor que 0 y menor que 10"

Estas desigualdades son ***desigualdades estrictas*** puesto que los elementos que están comparándose nunca serán iguales entre sí. El caso *a*) ilustra una ***desigualdad absoluta***, que siempre es verdadera. Una ***desigualdad condicional*** es verdadera en ciertas circunstancias. La desigualdad en el caso *b*) se cumple si la variable x tiene un valor mayor que 100. Si $x = 150$, la desigualdad es verdadera; si $x = 25$, la desigualdad no es verdadera. El caso *c*) muestra lo que se denomina ***desigualdad doble.***

Otro tipo de relación de desigualdad se expresa mediante los símbolos $\geq$ y $\leq$. Tales relaciones admiten la posibilidad de que dos cantidades sean iguales. Los siguientes casos muestran estos tipos de desigualdad.

Desigualdad	Interpretación
(*a*) $x + 3 \geq 15$	"la cantidad $(x + 3)$ es mayor *o* igual que 15"
(*b*) $y \leq x$	"el valor de y es menor *o* igual que el valor de x"

EJEMPLO 36

Para determinar los valores de x que satisfagan la desigualdad $3x + 10 \leq 5x - 4$, puede sumarse 4 a ambos miembros para formar

$$3x + 14 \leq 5x$$

Al restar $3x$ de ambos miembros se obtiene

$$14 \leq 2x$$

Por último, la división de ambos miembros entre 2 produce la definición algebraica del conjunto solución

$$7 \leq x$$

Es decir, la desigualdad original se satisface con cualesquier valores de x que sean mayores o iguales que 7.

EJEMPLO 37

Para calcular los valores de x que satisfagan la desigualdad $6x - 10 \geq 6x + 4$, la adición de 10 a ambos miembros produce

$$6x \geq 6x + 14$$

Al restar $6x$ de ambos miembros se obtiene

$$0 \geq 14$$

que es una proposición falsa. Por tanto, no hay valores de x que satisfagan la desigualdad.

EJEMPLO 38

Para determinar los valores de x que satisfagan la desigualdad $4x + 6 \geq 4x - 3$, se le resta 6 de ambos miembros para producir

$$4x \geq 4x - 9$$

y al restar $4x$ de ambos miembros se obtiene

$$0 \geq -9$$

La variable x ha desaparecido, y nos queda una desigualdad que es verdadera en todo momento. Ello indica que la *desigualdad original es verdadera en cualquiera y en todos los valores (reales) de x.*

EJEMPLO 39

Para determinar los valores de x que satisfacen la desigualdad doble $-2x + 1 \leq x \leq 6 - x$, primero se determina el conjunto solución de cada desigualdad.

Los valores de x que satisfacen la desigualdad izquierda se determinan como

$$-2x + 1 \leq x$$
$$1 \leq 3x$$

o bien

$$\tfrac{1}{3} \leq x$$

Los valores que satisfacen la desigualdad derecha son

$$x \leq 6 - x$$
$$2x \leq 6$$

o bien

$$x \leq 3$$

Los valores que satisfacen la doble desigualdad constan de los valores de x que satisfacen ambas desigualdades, o sea $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$.

NOTA
Cuando se resuelven desigualdades, si ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por o entre el mismo valor *negativo*, debe invertirse el *sentido* (dirección del signo de desigualdad). Por ejemplo, para resolver la desigualdad

$$-2x < 6$$

ambos miembros de la desigualdad se dividen entre −2 y el sentido de la desigualdad se invierte, produciendo la solución

$$x > -3$$

Ejercicios de seguimiento de la sección A.6

Encuentre (si es posible) las raíces de las siguientes ecuaciones.

1 $4x = 3x + 6$
2 $-2x + 8 = 2x - 4$
3 $5y = 10y - 30$
4 $4(y - 3) = y + 9$
5 $6x + 20 = 40 + 8x$
6 $15x - 4(2x + 14) = 0$
7 $-3y - 5(y + 4) = 4$
8 $3(x - 4) + 2(2x + 1) = 11$
9 $30x + 50(x - 6) = -20$
10 $4(5 - x) + 2x - 10 = -2x + 10$
11 $x^2 - 36 = 0$
12 $x^2 + 14x + 49 = 0$
13 $x^2 - 5x + 4 = 0$
14 $4x^2 + 2x - 30 = 0$
15 $7x^2 - 70 = 21x$
16 $2x^2 + 3x - 10 = x^2 + 6x + 30$
17 $-6x^2 + 4x - 10 = 0$
18 $-5x^2 + 10x - 20 = 0$
19 $5x^2 - 17.5x - 10 = 0$
20 $x^2 + 64 = 0$
21 $8x^2 + 2x - 15 = 0$
22 $-x^2 - 2x + 35 = 0$
23 $2a^2 + 2a - 12 = 0$
24 $5a^2 - 2a + 16 = 0$
25 $3a^2 - 3a - 18 = 0$
26 $x^2 + 2x - 48 = 0$
27 $x^2 - 2x + 10 = 0$
28 $5x^2 - 20x + 15 = 0$

Despeje algebraicamente los valores de x que satisfagan las siguientes desigualdades.

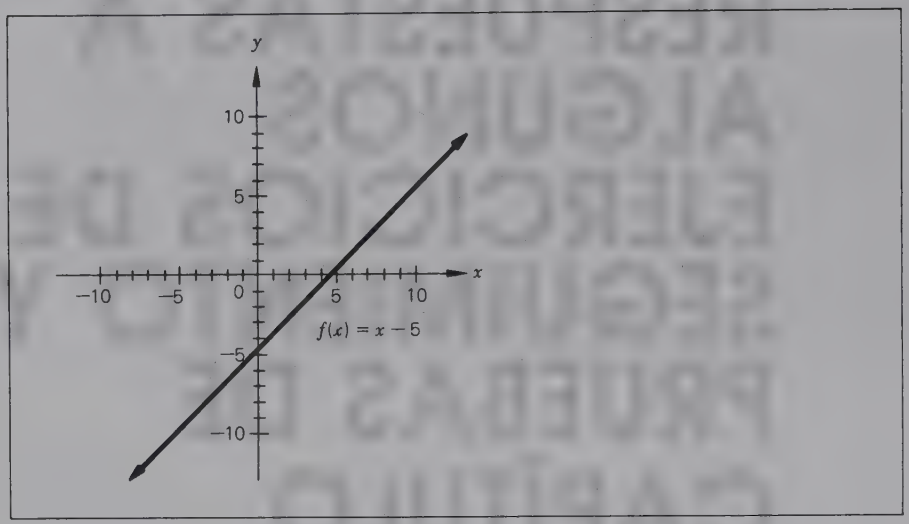
29 $3x - 2 \leq 4x + 8$
30 $x + 6 \geq 10 - x$
31 $x \geq x + 5$
32 $2x \leq 2x - 10$
33 $-4x + 10 \geq -10 + x$
34 $3x + 6 \leq 3x - 5$
35 $15x + 6 \geq 10x - 24$
36 $-4x + 10 \leq x \leq 2x + 6$
37 $12 \geq x + 16 \geq -20$
38 $35 \leq 2x + 5 \leq 80$
39 $50 \leq 4x - 6 \leq 25$
40 $6x - 9 \leq 12x + 9 \leq 6x + 81$

RESPUESTAS

RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS DE SEGUIMIENTO Y PRUEBAS DE CAPÍTULO

Capítulo 1

Sec. 1.1 **1** *a*) -5, *b*) -25, *c*) 25, *d*) $10a + 10b - 5$;
3 *a*) -1, *b*) -4, *c*) 3.5, *d*) $\dfrac{3a + 3b - 2}{2}$;
5 *a*) 1, *b*) -31, (*c*) 4, (*d*) $-3a^2 - 6ab - 3b^2 + 10a + 10b + 1$;
7 (*a*) 16, (*b*) 12, (*c*) 7, (*d*) $16 - a^2 - 2ab - b^2$; **9** (*a*) 25, (*b*) 25, (*c*) 25, (*d*) 25; **11** (*a*) 0, (*b*) -8, (*c*) 27, (*d*) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
13 (*a*) 0, (*b*) 2, (*c*) 3, (*d*) $|a + b|$;
15 (*a*) u, (*b*) $-8r + 4s - 2t + u$, (*c*) $27r + 9s + 3t + u$,
(*d*) $a^3r + 3a^2br + 3ab^2r + b^3r + a^2s + 2abs + b^2s + at + bt + u$;
17 todos los números reales; **19** todos los números reales; **21** $x \geq 4$; **23** $|x| \geq 3$; **25** $x \neq 4$; **27** $x \neq -5, 2$; **29** $x \neq -3, 0, 2$; **31** $x \geq 25$; **33** $x \geq 9$; **35** $v \leq 40$ excepto $v = -2, 2$; **37** $0 \leq x \leq 20\,000$ y $80\,000 \leq c(x) \leq 580\,000$; **39** $0 \leq p \leq 4500$ y $0 \leq q \leq 180\,000$; **41** $10 \leq x \leq 500$ y $25 \leq p \leq 760$; **43** $200 \leq k \leq 1500$ y $17 \leq C \leq 95$; **45** *a*) $C = 200\,000 + 8x$, *b*) 1 800 000, representa el costo total anual cuando se producen 200 000 unidades anuales, *c*) $0 \leq x \leq 300\,000$ y $200\,000 \leq c \leq 2\,600\,000$; **47** *a*) 0, *b*) -306, *c*) -3700, *d*) $2x^2 + 5xy - 4y^3$; **49** *a*) 9, *b*) 36, *c*) 1; **51** *a*) -5, *b*) 33; **53** *a*) 50, *b*) -4, *c*) $ab - 2cd$; **55** *a*) 110, 130, *b*) 20, 60, *c*) complementarios



Sec. 1.3, Ejercicio 1

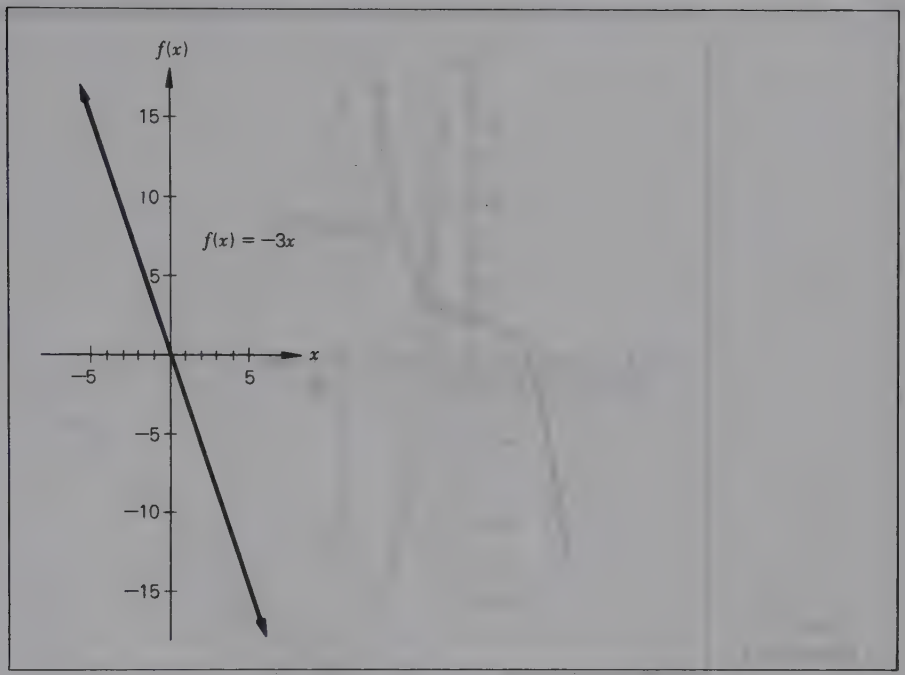
Sec. 1.2 **1** constante; **3** lineal; **5** cuadrático; **7** polinomio; **9** exponencial; **11** racional; **13** logarítmico; **15** constante; **17** racional; **19** racional; **21** todos los números reales; **23** todos los números reales excepto los valores de x que hacen $h(x) = 0$; **25** *a*) lineal, *b*) \$4000, *c*) 5 años; **27** *a*) cuadrático, *b*) 10 000, *c*) $p = 0$ o $p = 30$; **29** (*a*) $5x - 25$, (*b*) -10, (*c*) -25; **31** (*a*) $x^6 - 2x^2$, (*b*) 0, (*c*) 56; **33** $y = f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$, $x = g(y) = \frac{4}{3}y - 6$; **35** $x = g(y)$ no definida, $y = f(x) = \sqrt{\frac{20}{25x^2 - x}}$ **37** $q = f(p) = 1250 - 0.4p$, $p = h(q) = 3125 - 2.5q$

Sec. 1.3 **1, 3, 5, 7** y **9** véanse las figuras; **11** a, b y d son funciones

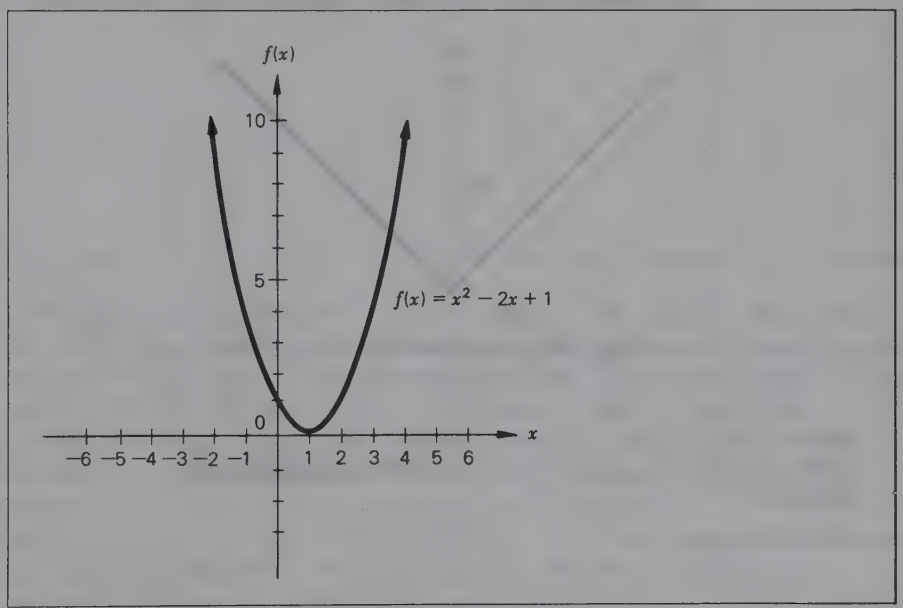
Prueba del capítulo **1** 24, $a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 9$; **2** $x \geq -2$ excepto $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$; **3** el dominio de una función es el conjunto compuesto por todos los posibles valores de entrada; el rango es el conjunto de todos los posibles valores de salida: **4** $y - 4x^2 + 3x - 1 = 0$; **5** (*a*) $(x^2 + 10x + 25)/(-2x - 9)$, (*b*) $-\frac{9}{5}$; **6** (*a*) polinomio (*b*) constante **7** véase la figura

Capítulo 2

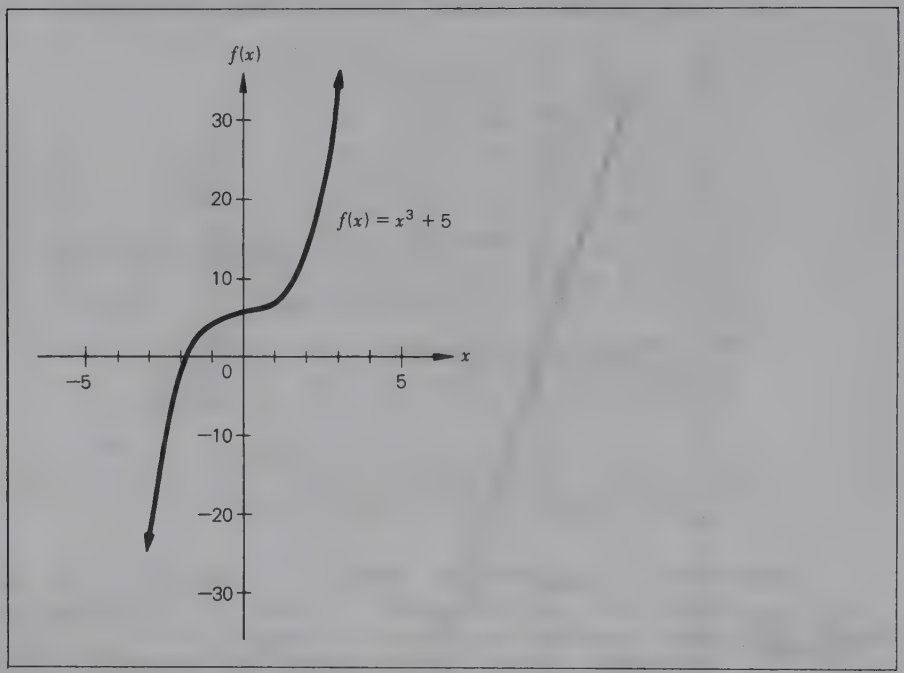
Sec. 2.1 **1** lineal; **3** lineal; **5** no lineal; **7** lineal; **9** lineal; **11** lineal; **13** no lineal; **15** lineal; **17** $S = \{(x, y) \mid 3x + 7y = 42\}$; **19** $S = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 50\}$; **21** $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 3x_2 + x_3 = 120\}$;



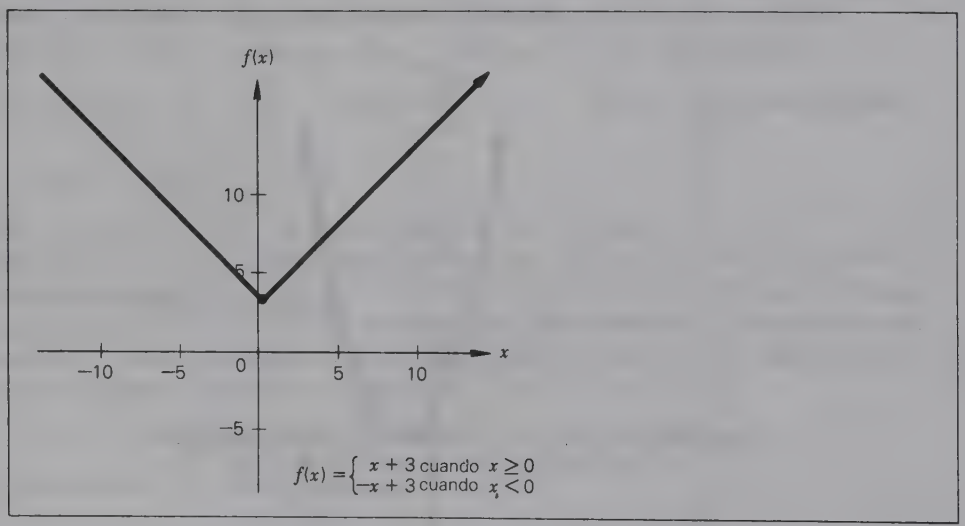
Sec. 1.3, Ejercicio 3



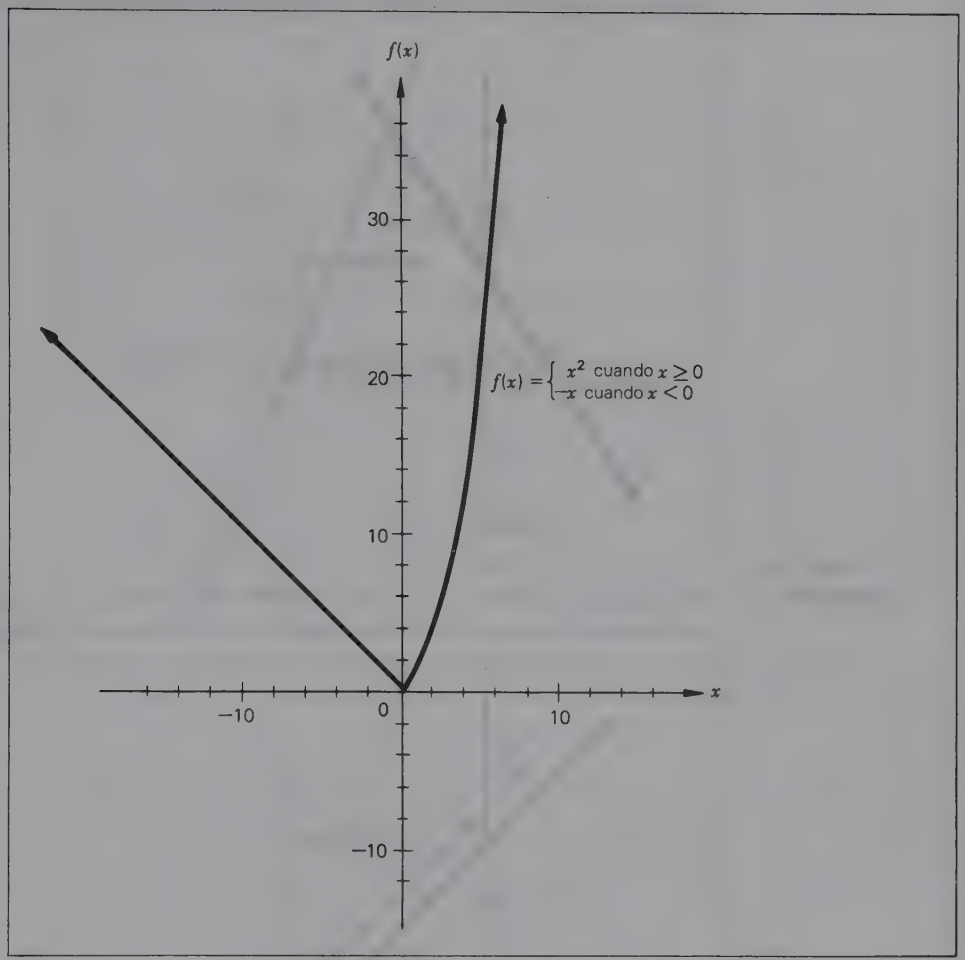
Sec. 1.3, Ejercicio 5



Sec. 1.3, Ejercicio 7



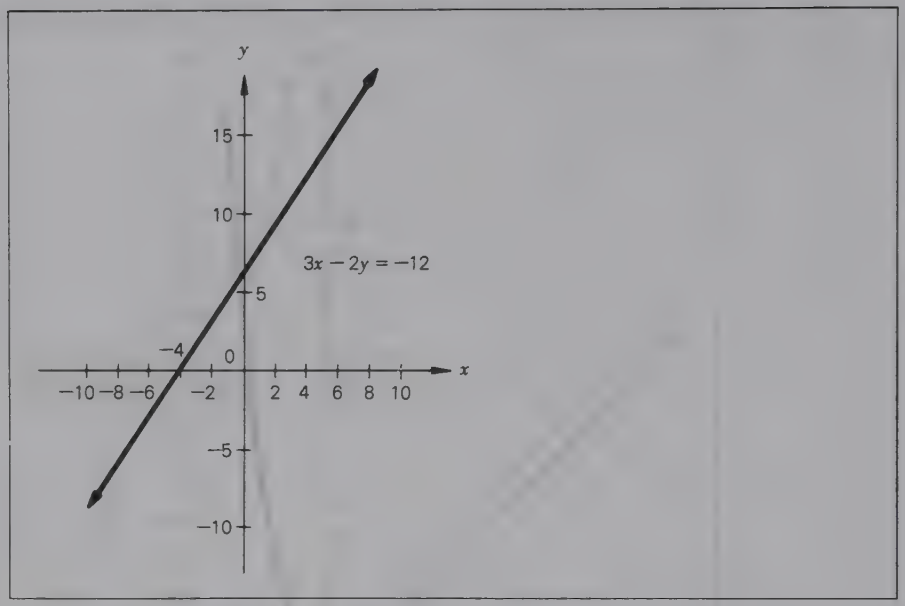
Sec. 1.3, Ejercicio 9



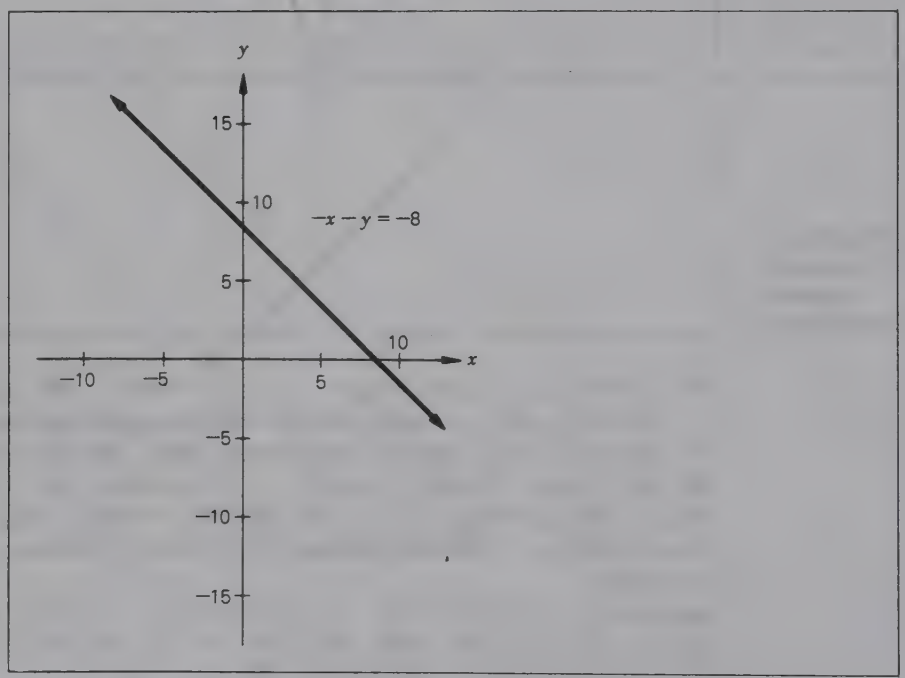
Capítulo 1, Prueba del capítulo, Problema 7

23 $S = \{(x_1, x_2 \ldots x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 500\}$; **25** (*a*) $a = 15$, $b = 0$, $c = 75$, *b*) (5, 10), *c*) ningún par de valores puede satisfacer la ecuación con $x = 20$; *d*) $S = \{(5, y) | y =$ un número real$\}$; **27** *a*) (5, 22, 4), *b*) (0, 0, 0); **29** (*a*) (4, 2, 10, 10), (*b*) (0, 0, 0, 10); **31** (*a*) $8x_1 + 6x_2 + 16x_3 = 96$, (*b*) $x_1 = 12$, $x_2 = 16$, $x_3 = 6$; **33** (*a*) $20x_1 + 40x_2 + 12x_3 + 24x_4 = 6000$, (*b*) $x_1 = 300$, $x_2 = 150$, $x_3 = 500$, $x_4 = 250$, (*c*) $x_1 = 300$, $x_2 = 150$, $x_3 = 500$, $x_4 = 250$

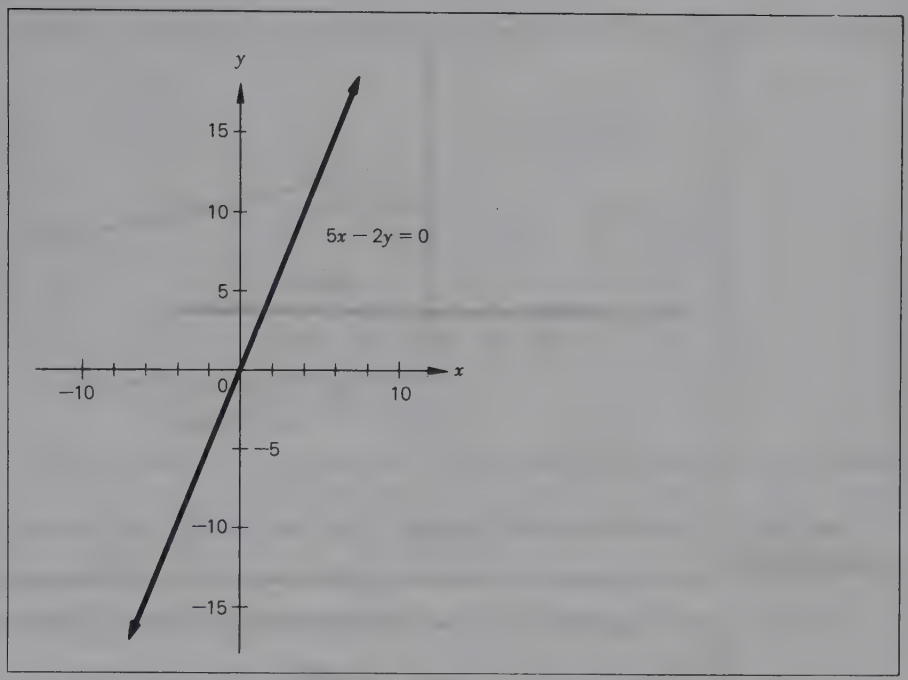
Sec. 2.2 **1** (−8, 0), (0, −6); **3** (−8, 0), (0, 2); **5** (8, 0), sin intersección con el eje y; **7** (8, 0), (0, −8); **9** (0, 0), (0, 0); **11** (14, 0), (0, 7); **13** $(10, 0), \left(0, \frac{10}{3}\right)$; **15** $\left(\frac{P}{m}, 0\right), \left(0, \frac{P}{n}\right)$; **17** sin intersección con el eje $x, \left(0, \frac{P}{n}\right)$; **19** véase la figura; **21** véase la figura; **23** véase la figura; **25** véase la figura; **27** véase la figura; **29** véase la figura; **31** $y = 0$ (ecuación del eje x), $x = 0$ (ecuación del eje y); **33** $m = 6$; por cada unidad que x aumenta, y aumenta 6 unidades; **35** $m = -6$; por cada unidad que se incrementa x, y disminuye 6 unidades;



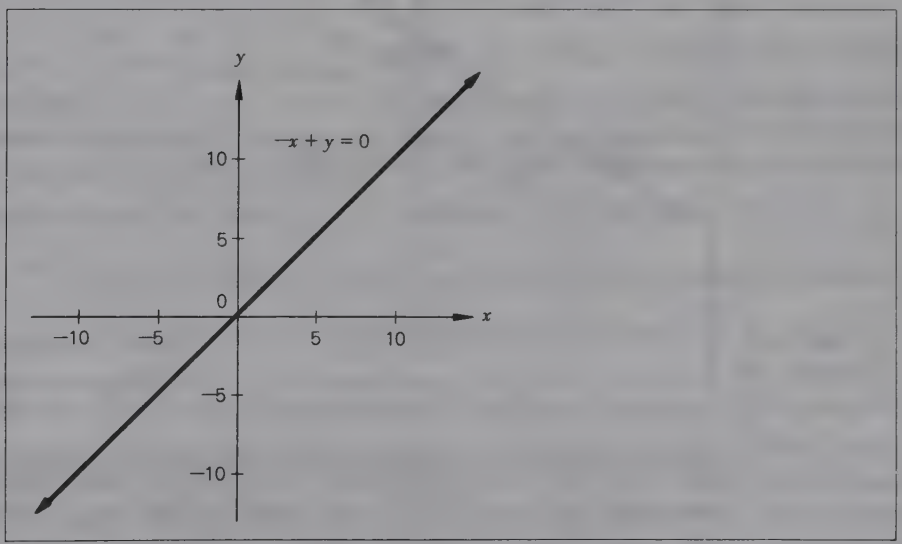
Sec. 2.2, Ejercicio 19



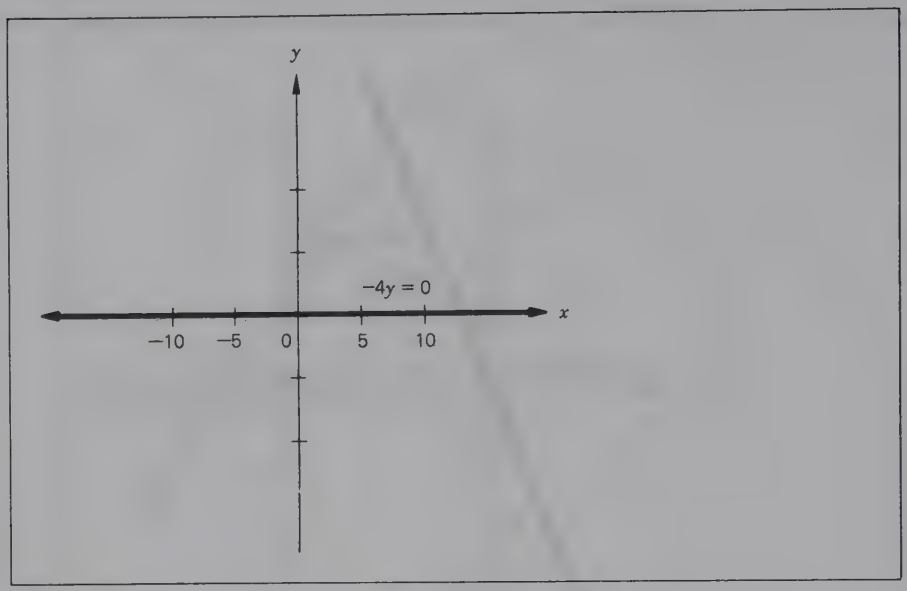
Sec. 2.2, Ejercicio 21



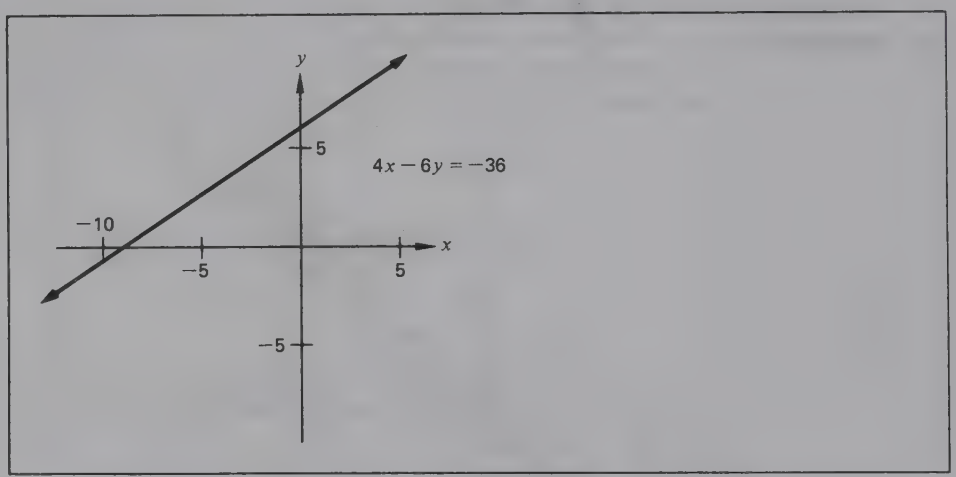
Sec. 2.2, Ejercicio 23



Sec. 2.2, Ejercicio 25

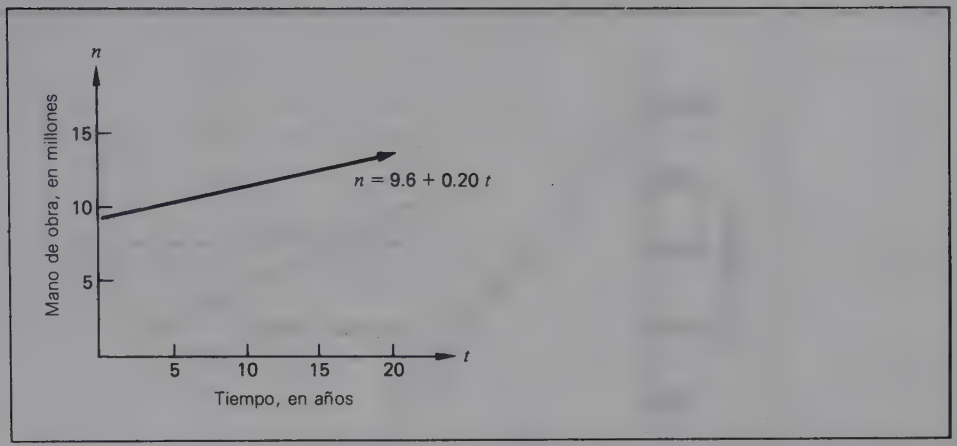


Sec. 2.2, Ejercicio 27



Sec. 2.2, Ejercicio 29

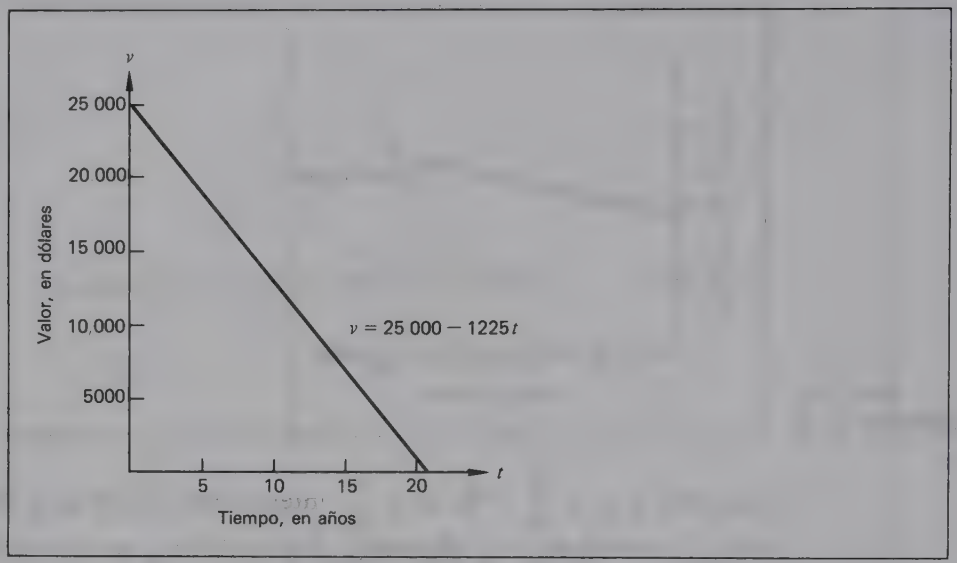
37 $m = 0$; por cada unidad que x se incremente, y permanece igual (línea horizontal); **39** $m = \dfrac{d-b}{c-a}$; por cada unidad que x aumente, y cambia en $\dfrac{d-b}{c-a}$ unidades; **41** $m = \dfrac{b}{a}$; por cada unidad que x se incrementa, y cambia en $\dfrac{b}{a}$ unidades; **43** $m = \dfrac{b}{a}$; por cada unidad que x se incremente, y cambia en $\dfrac{b}{a}$ unidades; **45** $m = -1$; por cada unidad que x aumenta, y disminuye en 1 unidad; **47** $m = -3$; por cada unidad que x se incremente, y disminuye 3 unidades; **49** $m = 1$, por cada unidad que x aumenta, y se incrementa en 1 unidad



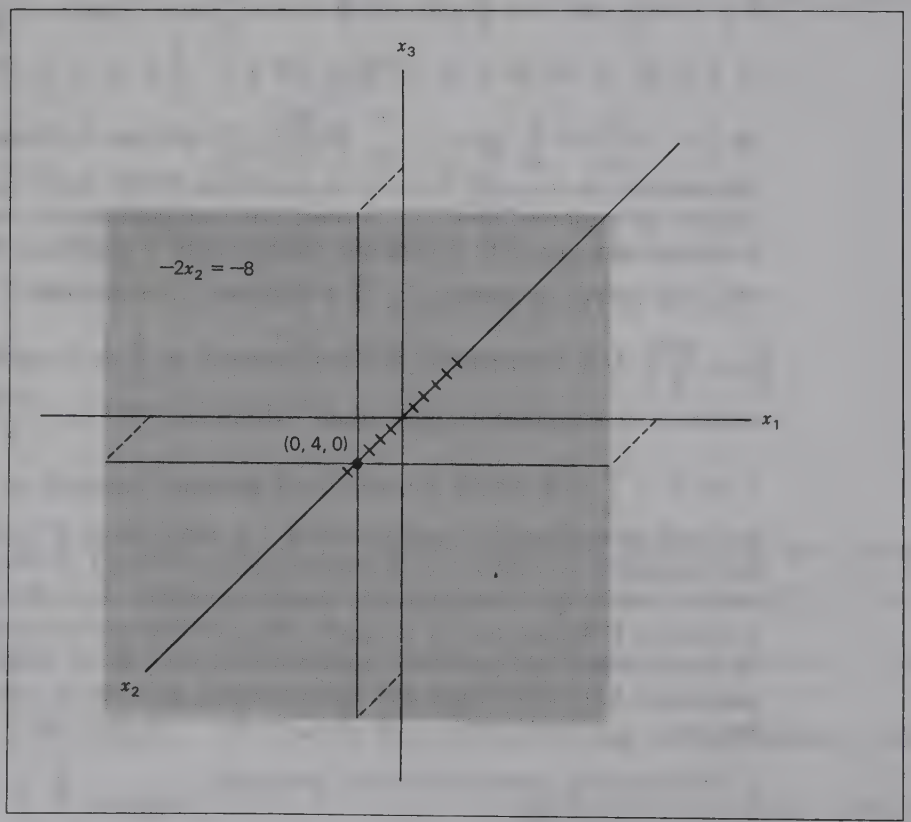
Sec. 2.3, Ejercicio 17 *a)*

Sec. 2.3 **1** $y = \frac{x}{2} - 6$, $m = \frac{1}{2}$, intersección con el eje y $(0, -6)$; **3** $y = x - 10$, $m = 1$, $(0, -10)$; **5** $y = 10 - x$, $m = -1$, $(0, 10)$; **7** $y = -\frac{x}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$, $(0, 0)$; **9** $y = -\frac{1}{2}x + 7$, $m = -\frac{1}{2}$, $(0, 7)$; **11** $y = 8x + 16$, $m = 8$, $(0, 16)$; **13** $y = \frac{1}{2}x$, $m = \frac{1}{2}$, $(0, 0)$; **15** $y = -\frac{m}{n}x + \frac{p}{n}$, $m = -\frac{m}{n}$, $\left(0, \frac{p}{n}\right)$; **17** *a)* véase la figura, *b)* $m = 0.20$, intersección en n en $(0, 9.6)$, *c)* la pendiente (0.20) indica que cada año el número de mujeres (35-44) en la fuerza de trabajo aumenta en 0.20 millones, la intersección en n (9.6) denota que en 1981 hubo 9.6 millones de mujeres (345-44) en la fuerza de trabajo, *d)* 12.4 millones, 13.4 millones; **19** *a)* $m = \frac{5}{9}$, $\left(0, -\frac{160}{9}\right)$, *b)* la temperatura Celsius aumenta en $\frac{5}{9}$ de un grado por cada incremento de temperatura en 1 grado Fahrenheit; 0° F es $-\frac{160}{9}$ °C, *(c)* $F = \frac{9}{5}C + 32$, $m = \frac{9}{5}$, $(0, 32)$, la temperatura Fahrenheit aumenta en $\frac{9}{5}$ de un grado por cada incremento de temperatura en 1 grado Celsius; 0 °C es 32 °F; **21** *a)* la intersección en t(20.41, 0), la intersección en V en (0, 25 000), *b)* la intersección en t indica que la máquina no tendrá valor después de 20.41 años, la intersección en V denota que la máquina vale \$25 000 cuando es de nueva marca (al comprarse), *c)* la pendiente indica que el valor de la máquina se deprecia (aumenta) \$1125 por cada año que envejece, *d)* véase la figura.

Sec. 2.4 **1** $y = 2x + 5$; **3** $y = x - 8$; **5** $y = 2.5x + 3$; **7** Sin forma la intersección de la pendiente, $x = 0$, **9** $y = -3x$; **11** $y = -\frac{1}{4}x - \frac{11}{2}$;

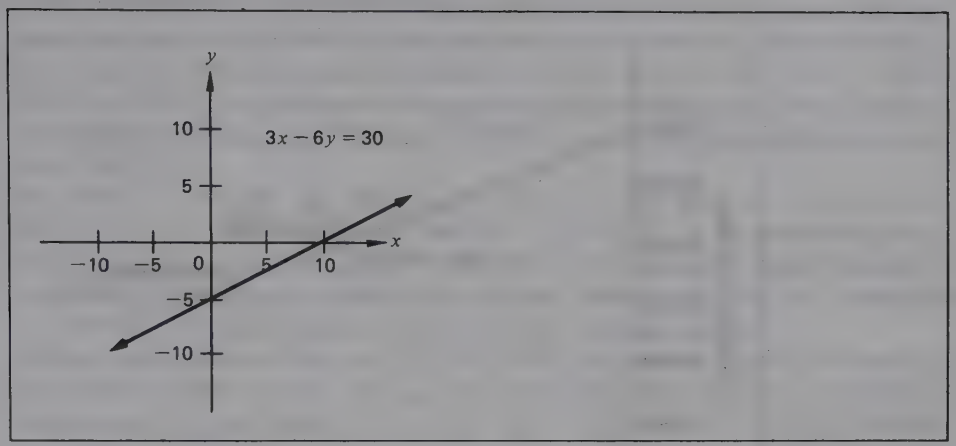


Sec. 2.3, Ejercicio 21 *d*)



Sec. 2.5, Ejercicio 5

Capítulo 2 Prueba del capítulo, Problema 1(*b*)



13 $y = -ax + 2a + 2$; **15** $y = -6x - 20$; **17** $y = -4x - 1$; **19** sin forma de intersección de la pendiente, $x = a$; **21** no colineal; **23** $y = x - 2$; **25** $F = \frac{9}{5}C + 32$

Sec. 2.5 **1** $A(0,4,0)$, $B(3,4,0)$, $C(3,0,0)$, $D(-6,0,0)$, $E(-6,0,6)$, $F(-6,-2,6)$, $G(0,-2,6)$, $H(0,0,6)$, $I(0,-2,0)$; **3** $\left(\frac{15}{2},0,0\right)$, $(0,-5,0)$, $(0,0,15)$; **5** véase la figura

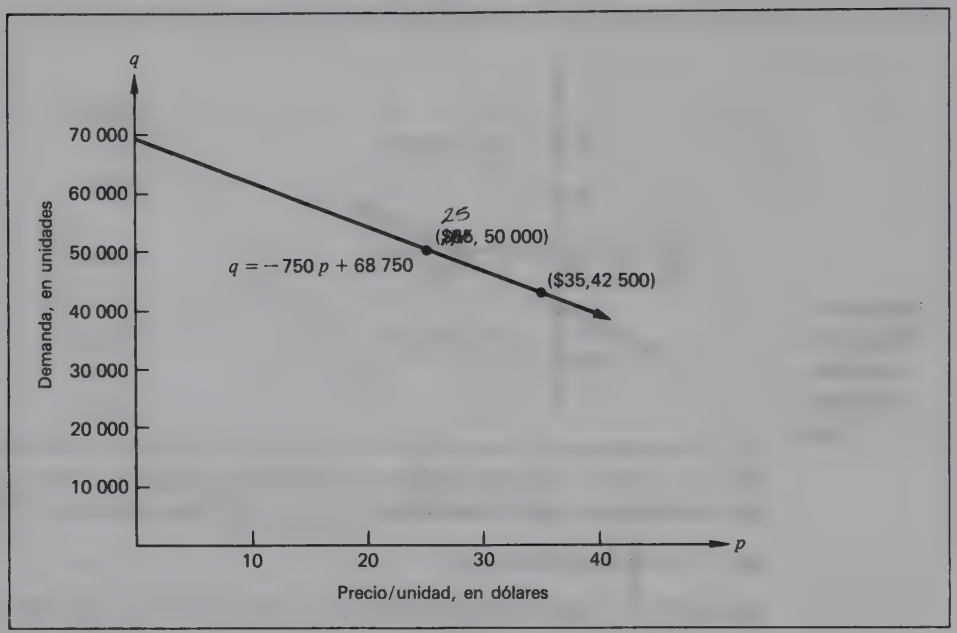
Sec. 2.6 **1** transporte aéreo de emergencia; **3** $6A + 4.5B + 7.5C = 800$; **5** si x_j se expresa en miles, $25\,000x_1 + 18\,000x_2 + 15\,000x_3 = 10\,000\,000$

Prueba del capítulo **1** *a)* $(10, 0)$, $(0, -5)$, *b)* véase la figura; **2** *a)* $y = \frac{7}{3}x - 20$, *b)* $m = \frac{7}{3}$, $(0, -20)$, *c)* y aumenta $\frac{7}{3}$ unidades por cada unidad que se incremente x. **3** *(a)* $y = 4x + 1$, *(b)* $m = 4$, $(0, 1)$; **4** $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; **5** $3000x_1 + 4000x_2 + 1000x_3 + 1500x_4 = 500\,000$

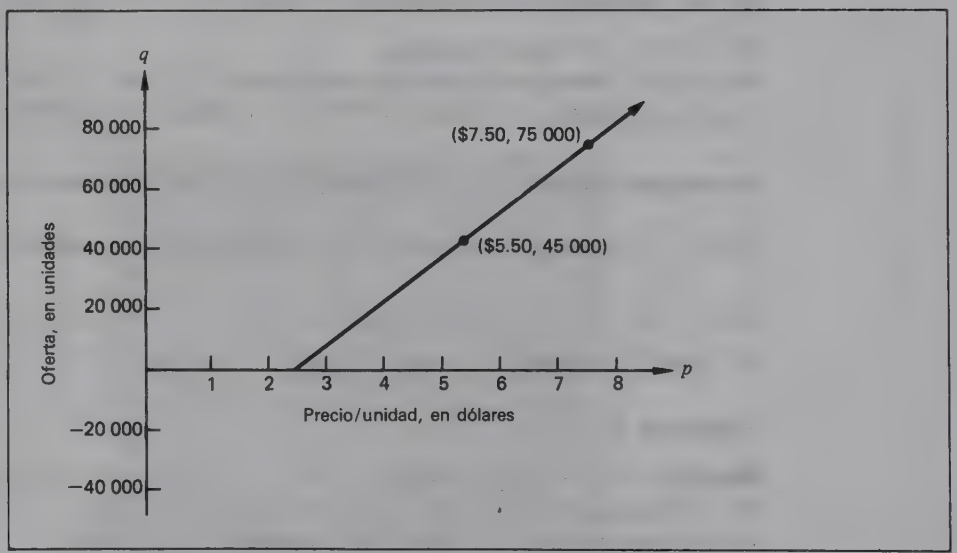
Capítulo 3

Sec. 3.1 **1** $y = f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + b$
3 $y = f(x_1,x_2) = 5x_1 + 3x_2 + 25$ cuando $x_1 + x_2 \leq 60$,
$y = f(x_1,x_2) = 8.5x_1 + 6.5x_2 - 185$ cuando $x_1 + x_2 > 60$;
5 *(a)* $R = 600x_1 + 1\,200x_2 + 1\,950x_3$,
(b) $C = 300x_1 + 600x_2 + 1020x_3 + 25\,000\,000$,
(c) $P = 300x_1 + 600x_2 + 930x_3 - 25\,000\,000$, *(d)* \$14 300 000;
7 $f_1(x) = 588.24x + 78\,528.4$, $f_2(x) = 884.62x + 40\,000$;
9 *(a)* $C = 18x + 250\,000$, *(b)* $R = 25x$, *(c)* $P = 7x - 250\,000$, *(d)* \$450 000, *(e)* 35 714.28 unidades

Sec. 3.2 **1** $V = f(t) = 60\,000 - 7500t$;
3 $V = f(t) = 400\,000 - 40\,000t$; **5** *(a)* $R = f(n) = 0.90n + 14$, *(b)* 14 es el porcentaje de arrestos cuando no se asignan oficiales en ropa de civil
7 *(a)* $q = -750p + 68{,}750$, *(b)* $p =$ \$11.67, *(c)* por cada incremento ~~en el precio~~ de un dólar, la cantidad demandada disminuye 750 unidades, *d)* véase la figura



Sec. 3.2, Ejercicio 7 *d)*



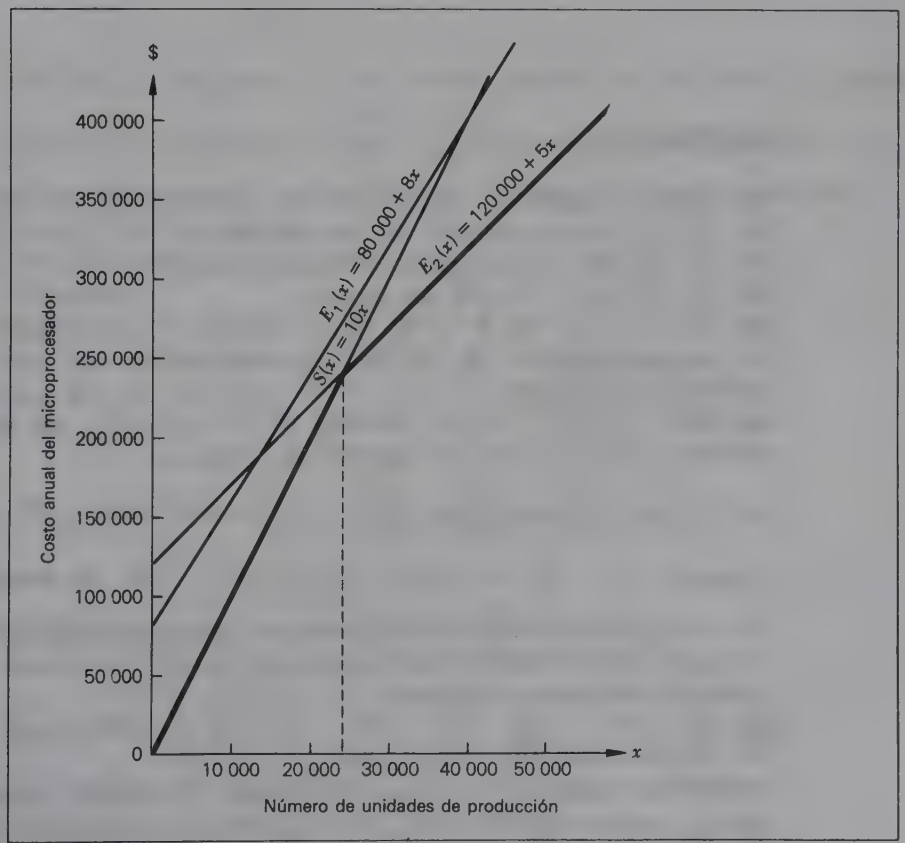
Sec. 3.2, Ejercicio 9 *e)*

9 *a)* $q = f(p) = 15\,000p - 37\,500$, *b)* \$11.50, *c)* por cada incremento de un dólar en el precio, la cantidad ofrecida aumenta 15 000 unidades, *d)* no habrá oferta a un precio de \$2.50 (intersección con el eje x), *e)* véase la figura; **11** *a)* $y = f(t) = 1\,876\,868t + 49\,250\,405$, *b)* 49 250 405, *c)* 77 403 425, *d)* tales factores como la economía, el desempleo, el ingreso real, formas alternativas de recreación, etc; **13** *a)* la intersección en p indica que en el año en

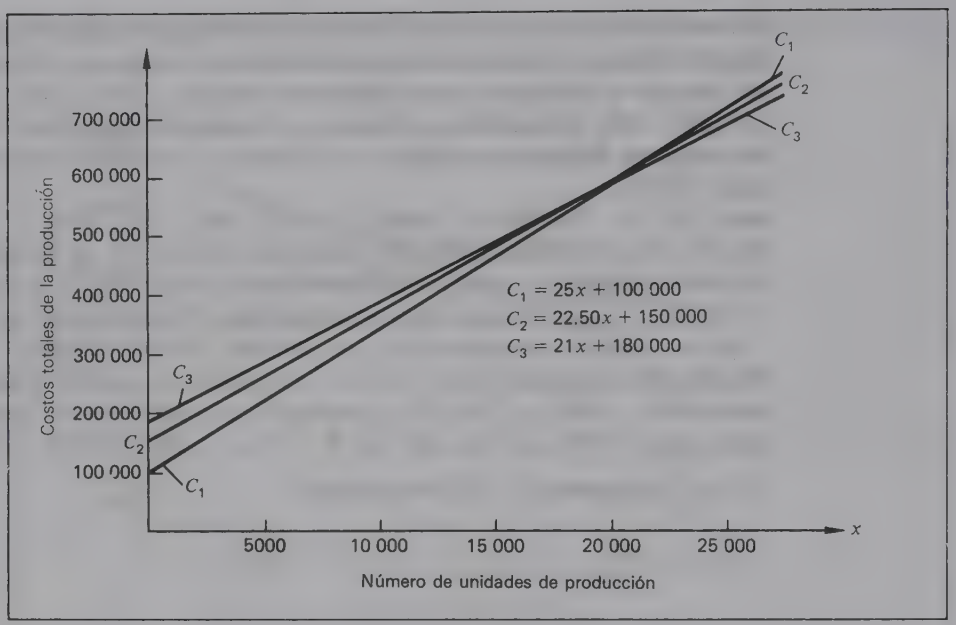
que se emite el decreto, en 92% de los casos se han realizado pagos, *b*) la pendiente indica que cada año después de emitirse el decreto, el porcentaje de casos en que se efectúan pagos disminuye en 8.5, *c*) 49.5; **15** *a*) $n = f(t) = 245\,000 - 600$, *b*) la pendiente indica que cada año después de 1981, el número de pasajeros disminuye en 6000, *c*) 131 000, *d*) $t = 10.83$ (algún momento durante 1991);

Sec. 3.3 **1** 12 500; **3** $44; **5** a) 20, *b*) − $37 500; **7** *a*) $13.33, *b*) $16.67; **9** *a*) 20 000, *b*) $52 500, $60 000, *c*) $1.5; **11** si la producción es < 24 000 unidades, se comprará al proveedor a $10/unidad; si la producción es > 24 000, compre equipo más automatizado (véase la figura); **13** máquina 1 si $x < 20\,000$, máquina 3 si $x > 20\,000$, véase la figura

Prueba del capítulo 1 *a*) $g = 2.42 + 0.06t$, *b*) $t = 9.67$ (o algún momento entre 1981 y 1983, *c*) 2.84, *d*) al promedio acumulativo de punto de grado se incrementa 0.06 por año; **2** *a*) $P = 25x - 100\,000$, *b*) 10 000 unidades; **3** $66\frac{2}{3}$ personas, *b*) 133.34 personas



Sec. 3.3, Ejercicio 11



Sec. 3.3, Ejercicio 13

Capítulo 4

Sec. 4.2 **1** único; **3** sin solución; **5** sin solución; **7** único; **9** único; **11** (2, 1); **13** sin solución, **15** sin solución; **17** (−2, 2); **19** (3, 3); **21** (3, −5); **23** número infinito de soluciones; **25** (−2, −1); **27** infinita; **29** (−1, 3); **31** (3, 1); **33** sin solución

Sec. 4.3 **1** (4, −6); **3** (−2, 1); **5** infinito; **7** sin solución; **9** (2, −3); **11** sin solución; **13** (3, −2); **15** sin solución; **17** (−2, −2); **19** número infinito de soluciones

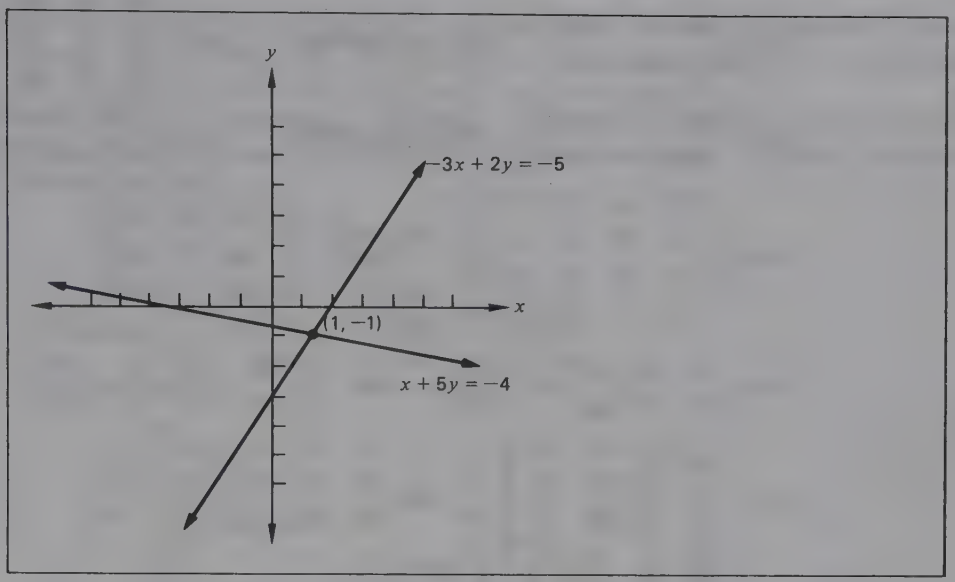
Sec. 4.4 **1** (2, −1, 1); **3** infinito; **5** (2, 1, −3); **7** sin solución; **9** sin solución; **11** (1, 2, −1); **13** infinito, x_3 arbitraria

$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{27}{2}, x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{47}{2}$; **15** sin solución; **17** infinito, x_3 arbitraria, $x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + 15, x_2 = -\frac{1}{2}x_3 + 10$; **19** sin solución

21 Los ejemplos 14 y 15 tienen números infinitos de soluciones, el ejemplo 14 consta de dos intersecciones planas a lo largo de una línea. El ejemplo 15 consta de dos planos idénticos.

Sec. 4.5 **1** $y = -2x + 90$; **3** $y = -x^2 + 2x + 10$; **5** (1000, 1000, 8000); **7** (4, 3, 6)

Prueba del capítulo **1** véase la figura; **2** (3, −5); **3** *a*) sin solución, un número infinito de soluciones, una sola solución, *b*) sin solución, un número



Capítulo 4, Prueba del capítulo, Problema 1

infinito de soluciones; **4** un número infinito de soluciones, x_3 arbitraria, $x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + 5$, $x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - \frac{10}{4}$; **5** *a)* sin solución, *b)* $(4, -2, 1, 3)$; **6** $6A + 2B + 2C = 80$, $7A + 4B + C = 60$, $5A + 5B + 3C = 100$

Capítulo 5

Sec. 5.2 **1** (1×4), $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; **3** (4×2), $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

5 (3×3), $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **7** (4×1), $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$;

9 (5×3), $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **11** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

Sec. 5.3 **1** $\begin{pmatrix} -5 & -19 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$; **3** $\begin{pmatrix} 80 & 4 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}$; **5** $\begin{pmatrix} -70 & 95 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$;

7 (-16); **9** no posible; **11** $(ax + by)$; **13** (8);

15 $(ae + bf + cg + dh)$; **17** $\begin{pmatrix} 8 & 24 \\ -11 & 44 \end{pmatrix}$; **19** $(20 \quad -8)$;

21 $\begin{pmatrix} 10 & -2 & 10 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$; **23** no posible; **25** $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 28 \\ -3 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & 29 \end{pmatrix}$;

27 $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$; **29** no posible; **31** $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -1 \end{pmatrix}$;

33 $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 & 12 & 6 \\ 14 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 24 & 8 & 4 & -8 & 0 \\ -6 & -7 & -2 & 19 & 9 \end{pmatrix}$; **35** $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 19 & 19 \\ 3 & -6 & 5 & -2 \\ -15 & 22 & 9 & 14 \end{pmatrix}$;

37 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \end{pmatrix}$; **39** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$;

41 $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$; **43** $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$;

45 $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -18 \\ 125 \end{pmatrix}$

Sec. 5.4 **1** -2; **3** 14; **5** 25; **7** 1; **9** -212; **11** 0;

13 88; **15** 0; **17** $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; **19** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **21** $\begin{pmatrix} -8 & 22 & 4 \\ 8 & 2 & 12 \\ 16 & -12 & -8 \end{pmatrix}$;

23 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **25** $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **27** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$;

29 $\begin{pmatrix} 24 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & -32 & 0 \end{pmatrix}$; **31** $\begin{pmatrix} -50 & -50 & -75 \\ 50 & -150 & -25 \\ -50 & -50 & 25 \end{pmatrix}$; **33** $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$;

35 32; **37** 1; **39** 64; **41** 0; **43** 30; **45** 45; **47** 0;
49 -1000; **51** -12; **53** -196; **55** -492

Sec. 5.5 **1** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; **3** sin inversa; **5** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

7 $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; **9** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$; **11** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & -1 \\ -8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

13 $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; **15** sin inversa; **17** $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; **19** sin inversa;

21 $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 & 3 & 4 \\ 19 & -4 & -7 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **23** (2, 3); **25** sin solución o un infinito número de soluciones; **27** (24, 35); **29** (2, 0, 1); **31** (2, 3);

33 (3, −2, 1); **35** (6, −3); **37** sin solución o un número infinito de soluciones; **39** (4, −2); **41** sin solución o un número infinito de soluciones; **43** (2, 0, −4); **45** $2x_1 + 3x_2 = 17$, $x_1 + 2x_2 = 10$

Sec. 5.6 **1** Demócrata: 96 850, republicano: 98 850, independiente: 104 300 (triunfador proyectado); **3** \$281.6 millones, \$195.14 millones, 293.06 millones,

		Usuario		
		1	2	3
	1	84.48	58.542	58.612
Proveedor	2	28.16	39.028	87.918
	3	56.32	19.514	117.224;

5 De

		A				
		A	*B*	*C*	*D*	*E*
	A	0	1	0	1	0
	B	0	0	1	0	0
	C	0	1	0	1	1
	D	1	0	1	0	0
	E	0	0	1	1	0

Matriz de adyacencia,

		A				
		A	*B*	*C*	*D*	*E*
	A	1	0	2	0	0
	B	0	1	0	1	1
	C	1	0	3	1	0
	D	0	2	0	2	1
	E	1	1	1	1	1

Servicio de una parada;

7 equilibrio, 30.81416%, 20.21276%, 48.93617%

Prueba del capítulo **1** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & -2 \\ 10 & -4 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}$; **2** $ae + bf + cg + dh$;

3 *a)* no posible *b)* $\begin{pmatrix} -11 & -84 \\ 32 & 133 \\ 2 & -105 \end{pmatrix}$; *c)* no posible, *d)* no posible;

4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$; **5** 440;

6 sin inversa; **7** $3x_1 + 7x_2 = 15$
$2x_1 + 5x_2 = 11$

Capítulo 6

Sec. 6.2 **1** *a)* sumar las restricciones $x_1 \geq 22$, $x_2 \geq 18$, $x_3 \geq 25$, $x_4 \geq 15$, $x_5 \geq 40$ (nótese que esto es redundante), $x_6 \geq 12$, *b)* $x_4 \geq x_3$ o $x_4 - x_3 \geq 0$, *c)* $x_3 + x_6 \geq 40$;

3 si x_j = núm. de onzas de alimento j,
minimice $z = 0.15x_1 + 0.10x_2 + 0.12x_3$
sujeta a
$30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 300$
$10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \geq 120$
$40x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 210$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 7.5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0;$$

5 minimice $z = 50x_{11} + 40x_{12} + 35x_{13} + 30x_{21} + 45x_{22} + 40x_{23}$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1\,000\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1\,400\\
x_{11} + x_{21} &= 800\\
x_{12} + x_{22} &= 750\\
x_{13} + x_{23} &= 650\\
x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} &\geq 0;
\end{aligned}$$

7 (*a*) $x_1 + x_2 + x_3 \geq 40$, (*b*) $x_1 \leq 2x_3$ o $x_1 - 2x_3 \leq 0$, (*c*) $x_2 = x_3$ or $x_2 - x_3 = 0$;

9 x_{ij} = núm. de libras del componente i usado en la mezcla j.

Maximice ~~Minimice~~ $z =$

$.70x_{11} + .85x_{12} + 1.25x_{13} + .55x_{21} + .70x_{22} + 1.10x_{23} + .65x_{31} + .80x_{32} + 1.20x_{33} + .45x_{41} + .60x_{42} + 1.00x_{43}$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 30\,000\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 40\,000\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 25\,000\\
x_{41} + x_{42} + x_{43} &\leq 20\,000\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &\geq 40\,000\\
-.3x_{11} + .7x_{21} - .3x_{31} - .3x_{41} &\geq 0\\
-.2x_{13} + .8x_{23} - .2x_{33} - .2x_{43} &\leq 0\\
-.2x_{13} - .2x_{23} + .8x_{33} - .2x_{43} &= 0\\
-.4x_{13} - .4x_{23} - .4x_{33} + .6x_{43} &\geq 0\\
-.1x_{11} - .1x_{21} - .1x_{31} + .9x_{41} &\leq 0
\end{aligned}$$

$x_{ij} \geq 0$ para todas las i y j;

Sec. 6.3 **1-19** (con números impares) véanse las figuras; **21** $z = 144$, $x_1 = 16$, $x_2 = 0$; **23** $z = 270$, $x_1 = 3$, $x_2 = 9$; **25** $x = 360$, $x_1 = 18$, $x_2 = 12$; **27** soluciones óptimas alternativas, $z = 240$ cuando $x_1 = 15$ y $x_2 = 0$ o $x_1 = 12$ y $x_2 = 6$; **29** soluciones óptimas alternativas, $z = 20$ cuando $x_1 = 0.8$ y $x_2 = 4$ o cuando $x_1 = 1\frac{1}{3}$ y $x_2 = 3\frac{1}{3}$; **31** sin solución factible;

33 *a)* Maximice $z = 3x_1 + 4x_2$

sujeta a

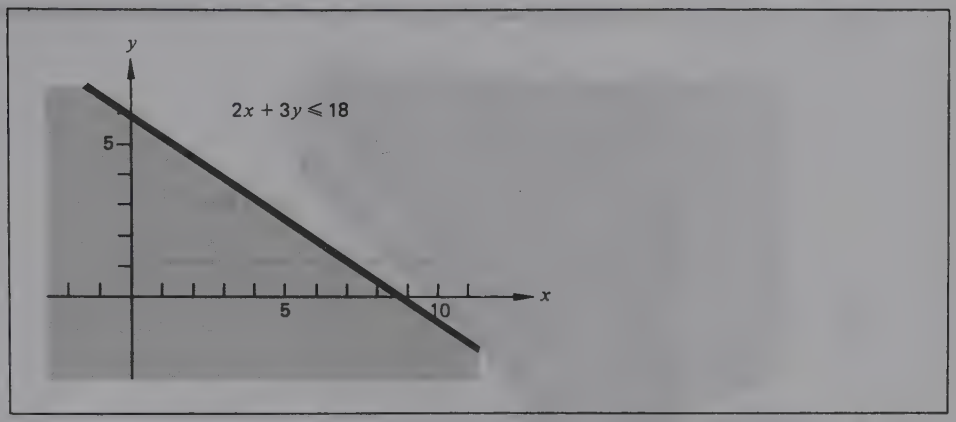
$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leq 60\\
4x_2 + 2x_2 &\leq 80\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

b) $z = 85$ cuando $x_1 = 15$ y $x_2 = 10$; deberían fabricarse *c*) 15 unidades del producto *A* y 10 unidades del producto *B*. 100% de uso de ambos departamentos.

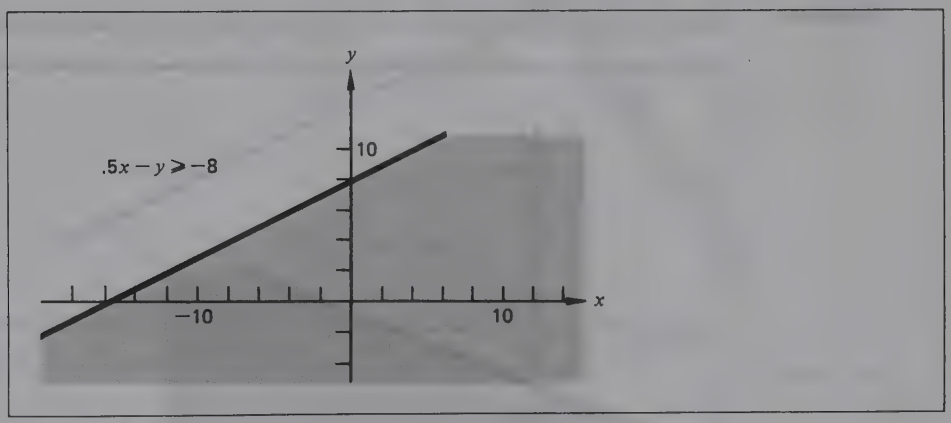
Sec. 6.4 **1** Minimice $z = 0.10x_1 + 0.15x_2 + 0.12x_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3 + MA_4$

sujeta a

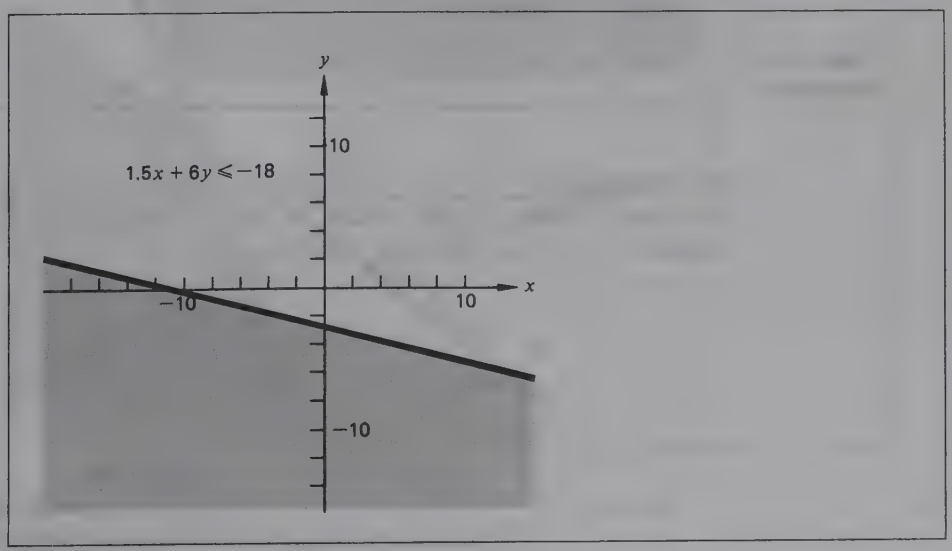
$$\begin{aligned}
50x_1 + 30x_2 + 20x_3 - E_1 + A_1 &= 290\\
20x_1 + 10x_2 + 30x_3 - E_2 + A_2 &= 200\\
10x_1 + 50x_2 + 20x_3 - E_3 + A_3 &= 210\\
x_1 + x_2 + x_3 - E_4 + A_4 &= 9\\
x_1, x_2, x_3, E_1, E_2, E_3, E_4, A_1, A_2, A_3, A_4 &\geq 0;
\end{aligned}$$



Sec. 6.3, Ejercicio 1

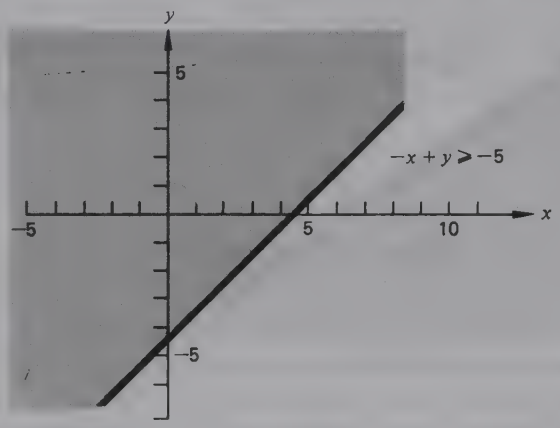


Sec. 6.3, Ejercicio 3

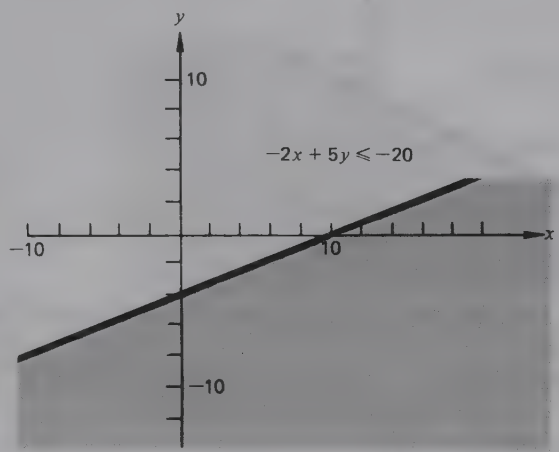


Sec. 6.3, Ejercicio 5

Sec. 6.3, Ejercicio 7



Sec. 6.3, Ejercicio 9

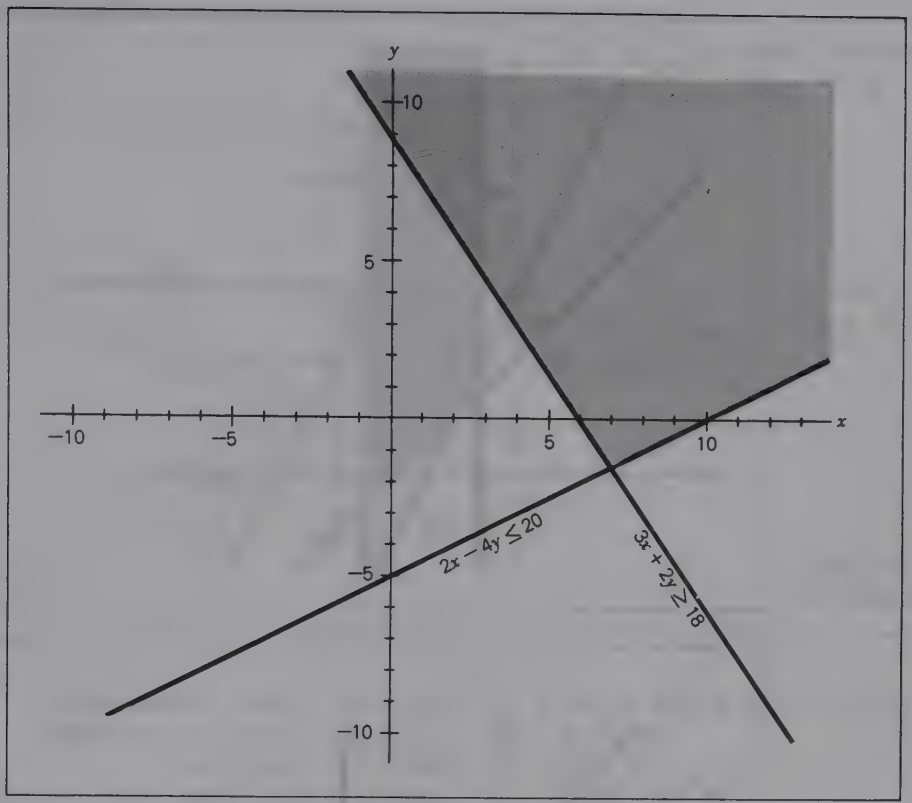


3 Maximice

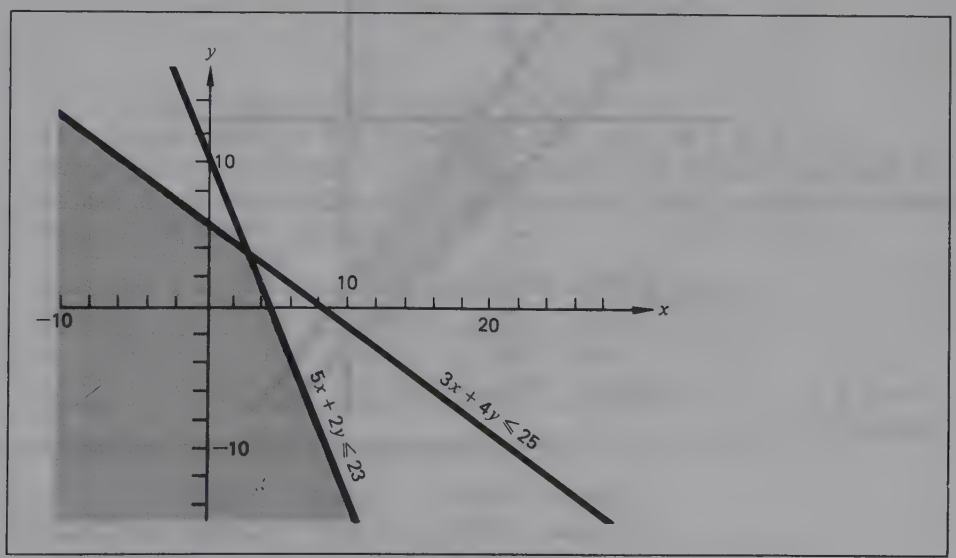
$$z = 4.4x_1 + 3.8x_2 + 4.1x_3 + 3.5x_4 + 5.1x_5 + 3.2x_6 - MA_8 - MA_9$$

sujeta a

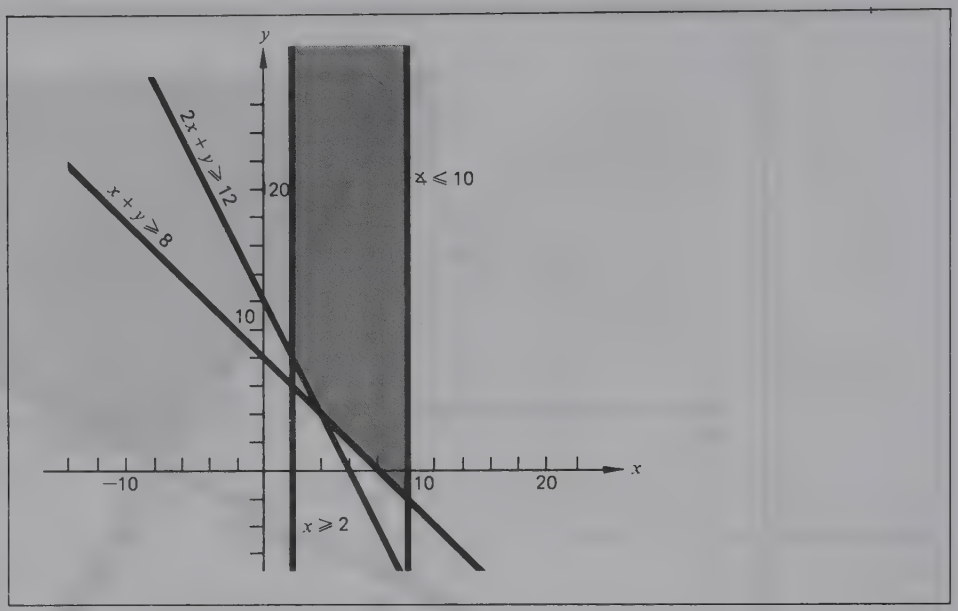
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + S_1 &= 1000\\
x_1 + S_2 &= 220\\
x_2 + S_3 &= 180\\
x_3 + S_4 &= 250\\
x_4 + S_5 &= 150\\
x_5 + S_6 &= 400\\
x_6 + S_7 &= 120\\
x_5 - E_8 + A_8 &= 200\\
x_1 + x_2 - E_9 + A_9 &= 300\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, E_8, E_9, A_8, A_9 &\geq 0
\end{aligned}$$



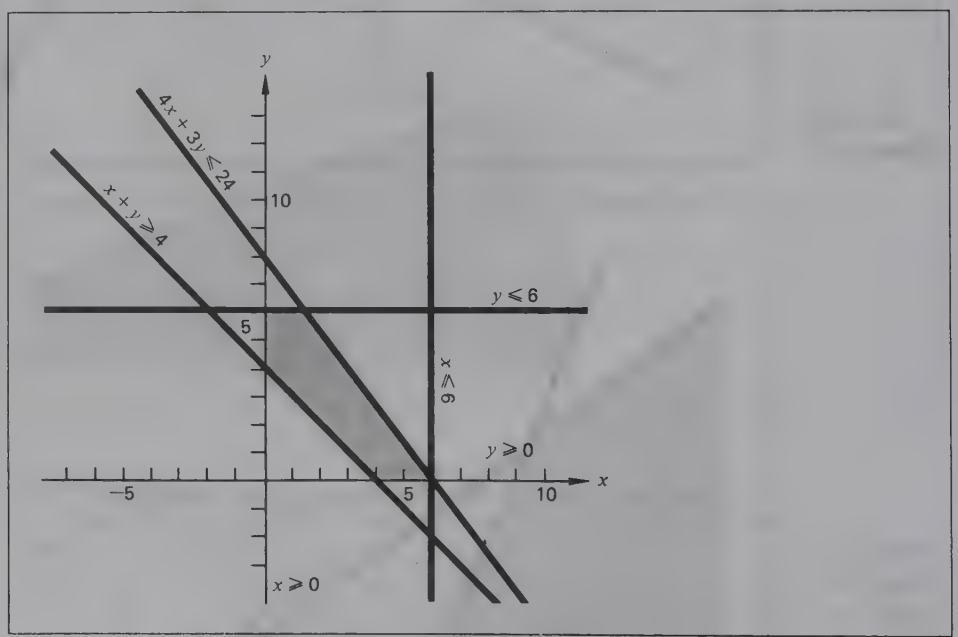
Sec. 6.3, Ejercicio 11



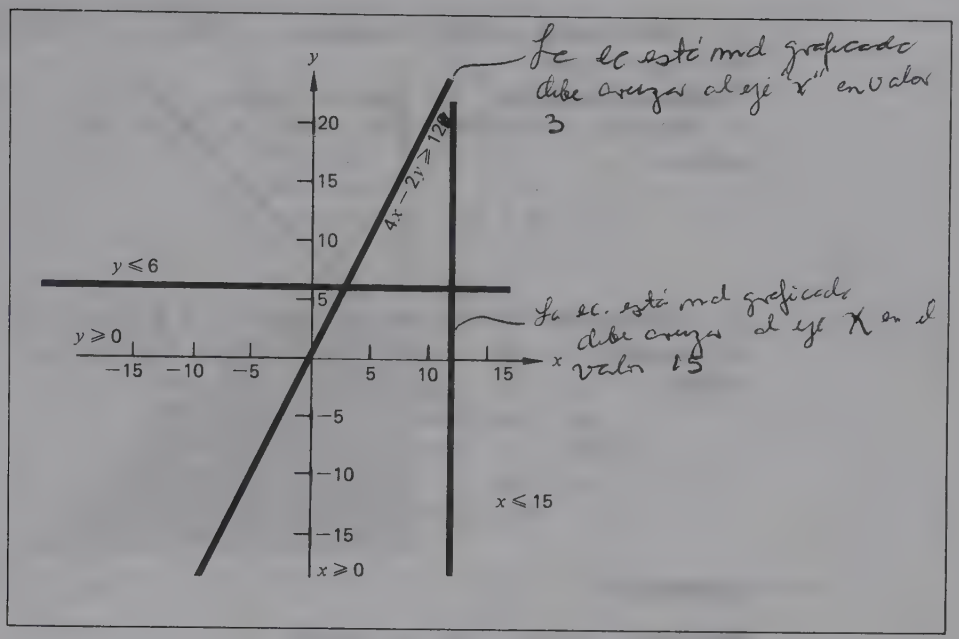
Sec. 6.3, Ejercicio 13



Sec. 6.3, Ejercicio 15



Sec. 6.3, Ejercicio 17



Sec. 6.3, Ejercicio 19

5 Minimice $z = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 + MA_1 + MA_2 + MA_3 + MA_5$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - E_1 + A_1 &= 25\\
x_1 - 3x_2 + 2x_4 - E_2 + A_2 &= 20\\
3x_1 - 4x_4 + A_3 &= 10\\
5x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 + S_4 &= 125\\
x_1 - E_5 + A_5 &= 5\\
x_3 + S_6 &= 30\\
x_1, x_2, x_3, x_4, E_1, A_1, E_2, A_2, A_3, S_4, E_5, A_5, S_6 &\geq 0;
\end{aligned}$$

11 z minimizada en 660 cuando $x_2 = 35$, $x_3 = 30$ y $S_3 = 5$.
Precios sombra: restricción 1, 6.333; restricción 2, 0.333; restricción 3, 0.
Análisis de sensibilidad en los coeficientes de la función objetivo; variable no básica c_1, delta = 11, límite superior = 13.

Variables básicas	Delta inferior	Delta superior	Límite inferior	Límite superior
c_2	−14.67	4.00	−2.67	16.00
c_3	−2.00	sin límite	6.00	sin límite

Restricciones del miembro del lado derecho:

Restricción	Delta inferior	Delta superior	Límite inferior	Límite superior
1	−84.00	1.818	16.00	101.818
2	−180.00	20.000	−100.00	100.000
3	−5.00	sin límite	295.00	sin límite

13 z minimizada en \$3925 cuando $x_{11} = 300$, $x_{12} = 100$, $x_{13} = 500$, $x_{22} = 350$ y $x_{24} = 350$

Prueba del capítulo **1** véase la figura;

2 Maximice $z = 20A + 10B + 50C + 25D + 2E$

sujeta a
$$\begin{aligned} A &\geq 20 \\ B &\geq 10 \\ A + B + C + D + E &\leq 75 \\ C - E &= 0 \\ A, B, C, D, E &\geq 0; \end{aligned}$$

3 z maximizada al valor de 30 cuando $x_1 = 8$ y $x_2 = 6$;

5 Minimice $z = 10x_1 + 5x_2 + 15x_3 + MA_2 + MA_3 + MA_4$

sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + S_1 &= 40 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 - E_2 + A_2 &= 25 \\ -2x_1 + 3x_3 - E_3 + A_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + A_4 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, E_2, A_2, E_3, A_3, A_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Capítulo 7

Sec. 7.1 **1** (*a*)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + S_1 &= 48 \\ 2x_1 + 5x_2 + S_2 &= 26 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(*b*)

Solución	Variable hecha igual a cero	Valor de otras variables	z
1	x_1, x_2	$S_1 = 48, S_2 = 26$	0
2	x_1, S_1	$S_2 = -34, x_2 = 12$	
3	x_1, S_2	$S_1 = 27.2, x_2 = 5.2$	52
4	x_2, S_1	$x_1 = 9.6, S_2 = 6.8$	134.4
5	x_2, S_2	$x_1 = 13, S_1 = -17$	
6	S_1, S_2	$x_1 = 8, x_2 = 2$	132

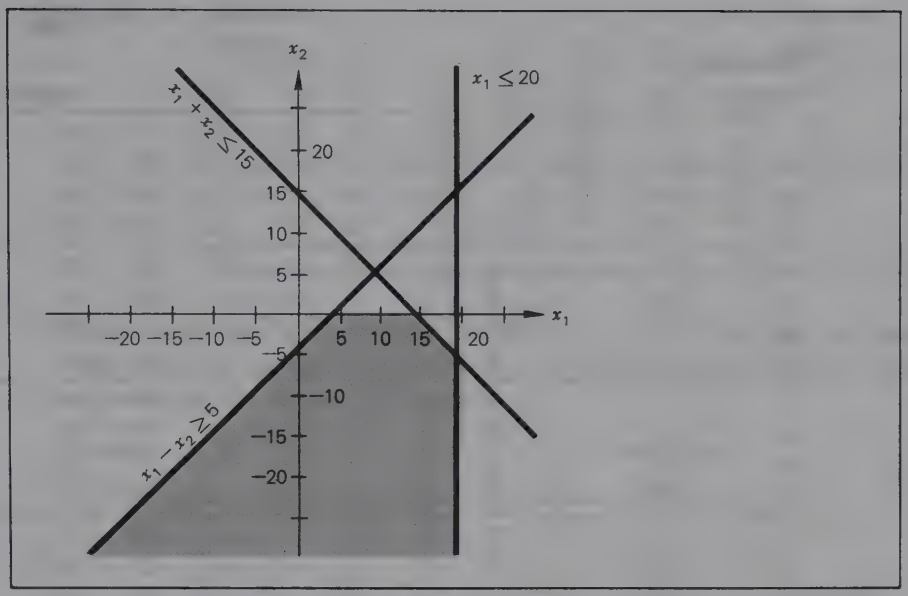
c) soluciones factibles 1, 3, 4 y 6, *e*) máximo de 134.4 alcanzado cuando $x_1 = 9.6$, $S_2 = 6.8$ y $x_2 = S_1 = 0$;

3

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Núm. de renglón	r
	1	−4	−2	0	0	0	(0)	
S_1	0	1	1	1	0	50	(1)	50
S_2	0	⑥	0	0	1	240	(2)	40*
	1	0	−2	0	$\frac{2}{3}$	160	(0)	
S_1	0	0	①	1	$-\frac{1}{6}$	10	(1)	10*
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	40	(2)	
	1	0	0	2	$\frac{1}{3}$	180	(0)	
x_2	0	0	1	1	$-\frac{1}{6}$	10	(1)	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	40	(2)	

z maximizada en el valor de 180 cuando $x_1 = 40$ y $x_2 = 10$.

Capítulo 6, Prueba del capítulo, Problema 1



5

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b_i	Número de renglón	T_i
	1	−10	−12	0	0	0	0	(0)	
S_1	0	1	1	1	0	0	150	(1)	150
S_2	0	3	⑥	0	1	0	300	(2)	50*
S_3	0	4	2	0	0	1	160	(3)	80
	1	−4	0	0	2	0	600	(0)	
S_1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	100	(1)	200
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	50	(2)	100
S_3	0	③	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	60	(3)	20*
	1	0	0	0	$\frac{14}{9}$	$\frac{4}{3}$	680	(0)	
S_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	90	(1)	
x_2	0	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{6}$	40	(2)	
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	20	(3)	

z maximizada en el valor de 680 cuando $x_1 = 20$, $x_2 = 40$ y $S_1 = 90$.

7

Variables básicas	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i	Núm. de renglón	r_i
	1	−10	−3	−4	0	0	0	0	(0)	
S_1	0	⑧	2	3	1	0	0	400	(1)	50*
S_2	0	4	3	0	0	1	0	200	(2)	50
S_3	0	0	0	1	0	0	1	40	(3)	
	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	500	(0)	
x_1	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	50	(1)	200
S_2	0	0	②	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	(2)	0*
S_3	0	0	0	1	0	0	1	40	(3)	
	1	0	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	500	(0)	
x_1	0	1	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	50	(1)	
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	(2)	
S_3	0	0	0	①	0	0	1	40	(3)	40*
	1	0	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	525	(0)	
x_1	0	1	0	0	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{9}{16}$	27.5	(1)	
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	30	(2)	
x_3	0	0	0	1	0	0	1	40	(3)	

z maximizada en el valor de 525 cuando $x_1 = 27.5$, $x_2 = 30$ y $x_3 = 40$.

9

	z	x_1	x_2	E_1	A_1	S_2	E_3	A_3	b_i	Núm. de renglón	r_i
	1	−3	−6	0	$-M$	0	0	$-M$	0	(0)	
A_1	0	4	1	−1	1	0	0	0	20	(1)	
S_2	0	1	1	0	0	1	0	0	20	(2)	
A_3	0	1	1	0	0	0	−1	−1	10	(3)	
	1	$5M - 3$	$2M - 6$	$-M$	0	0	$-M$	0	$30M$	(0)	
A_1	0	4	1	−1	1	0	0	0	20	(1)	5*
S_2	0	1	1	0	0	1	0	0	20	(2)	20
A_3	0	1	1	0	0	0	−1	1	10	(3)	20
	1	0	$\frac{3M - 21}{4}$	$\frac{M - 3}{4}$	$\frac{3 - 5M}{4}$	0	$-M$	0	$15 + 5M$	(0)	
x_1	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	5	(1)	20
S_2	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	15	(2)	20
A_3	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	−1	1	5	(3)	$\frac{20}{3}$*
	1	0	0	1	$-M - 1$	0	−7	$7 - M$	50	(0)	
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	(1)	
S_2	0	0	0	0	0	1	1	−1	10	(2)	
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{3}$	(3)	20*
	1	0	−3	0	$-M$	0	−3	$3 - M$	30	(0)	
x_1	0	1	1	0	0	0	−1	1	10	(1)	
S_2	0	0	0	0	0	1	1	−1	10	(2)	
E_1	0	0	3	1	−1	0	−4	4	20	(3)	

z minimizada en el valor de 30 cuando $x_1 = 10$, $S_2 = 10$ y $E_1 = 20$.

Sec. 7.2 **1**

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Núm. de renglón	r_i
	1	−4	−2	0	0	0	(0)	
S_1	0	1	1	1	0	15	(1)	15
S_2	0	(2)	1	0	1	20	(2)	10*
	1	0	0	0	2	40	(0)	
S_1	0	0	$(\frac{1}{2})$	1	$-\frac{1}{2}$	5	(1)	$\frac{5}{2}$*
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	10	(2)	5

Existen soluciones óptimas si $x_1 = 10$ y $S_1 = 5$, lo cual da por resultado $z = 40$. Sin embargo, el coeficiente de cero del renglón (0) para x_2 indica que hay una solución óptima alternativa.

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Núm. de renglón	r_i
	1	0	0	0	2	40	(0)	
x_2	0	0	1	2	−1	$\frac{5}{2}$	(1)	
x_1	0	1	0	−1	1	$8\frac{3}{4}$	(2)	

Se presenta una solución óptima alternativa cuando $x_1 = 8.75$, $x_2 = 2.5$ y $z = 40$; ***3*** Se presentan soluciones óptimas alternativas cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 8$ y $z = 48$ o cuando $x_1 = 8$ y $S_1 = 12$; ***5*** no existe una solución factible; ***7*** ocurre una solución óptima cuando $x_1 = 200$, $x_2 = 133.33$ y $z = 11\,666.67$

Sec. 7.3 **1** Minimice $z = 45y_1 + 30y_2 + 50y_3$

sujeta a
$$\begin{aligned} y_1 + 4y_2 - y_3 &\geq 3 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\geq 4 \\ y_1 - 3y_2 - 4y_3 &\geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3 Minimice $z = 60y_1 + 25y_2 + 35y_3$

sujeta a
$$\begin{aligned} 5y_1 + y_2 &\geq 20 \\ -3y_1 + y_2 - y_3 &\geq 15 \\ 10y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq 18 \\ 4y_1 + 7y_3 &= 10 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\text{ sin restricción} \\ y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

5 Maximice $z = 45y_1 + 24y_2 + 20y_3$

sujeta a
$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &\leq 4 \\ y_1 + 5y_2 &\leq 5 \\ y_1 + 7y_3 &= 2 \\ y_1 - 2y_2 - 5y_3 &\leq 3 \\ y_1 + 3y_3 &= 1 \\ y_1 &\text{ sin restricción} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

7 (*a*) Minimice $z = 32y_1 + 24y_2$
sujeta a $2y_1 + 3y_2 \geq 5$
$4y_1 + 2y_2 \geq 3$
$y_1, y_2 \geq 0$

(*b*)

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Núm. de renglón	r_i
	1	−5	−3	0	0	0	(0)	
S_1	0	2	4	1	0	32	(1)	16
S_2	0	(3)	2	0	1	24	(2)	8*
	1	0	$\frac{1}{3}$	[0]	[$\frac{5}{3}$]	40	(0)	
S_1	0	0	$\frac{8}{3}$	1	−2	16	(1)	
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	8	(2)	

z maximizada en el valor de 40 cuando $x_1 = 8$ y $S_1 = 16$.

c) Los dos valores dentro del casillero, debajo de S_1 y S_2 en el renglón (0) de la tabla primaria óptima, indican que en la solución óptima dual $y_1 = 0$ y $y_2 = \frac{5}{3}$. El valor mínimo de x es 40 cuando se sustituyen en la función objetivo dual.

Prueba del capítulo

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 &= 25 \\ -x_1 - 3x_2 + S_2 &= 10 \\ -2x_1 - 3x_3 + A_3 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, A_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2 El máximo se alcanza cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 8$ y $z = 272$;

3 *a*)

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	A_1	A_2	b_i	Renglón núm.
	1	$3M - 5$	−4	$-M$	0	0	$25M$	(0)
A_1	0	1	1	−1	1	0	10	(1)
A_2	0	2	−1	0	0	1	15	(2)

b) A_2 saldrá primero, *c*) x_1 entrará primero;

5 Maximice $z = 25y_1 + 10y_2 + 48y_3 + 12y_4$
sujeta a $y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 8$
$y_1 - 5y_2 - y_3 + y_4 \leq 5$
$y_1 + 2y_3 = 6$
y_1 sin restricción
$y_2 \geq 0$
$y_3, y_4 \leq 0$

Capítulo 8

Sec. 8.1 **1** $z = \$3350$

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	5	10 (55)	10	55
2	20	30 (40)	20 (40)	80
3	10 (70)	20 (5)	30	75
Demanda	70	100	40	210

3 (*a*) $z = \$2\,715$

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	8 (110)	6 (15)	10	125
2	4	9 (70)	8 (80)	150
3	7	6	5 (95)	95
Demanda	110	85	175	370

(*b*) $z = \$2\,145$

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	8	6 (85)	10 (40)	125
2	4 (110)	9	8 (40)	150
3	7	6	5 (95)	95
Demanda	110	85	175	370

5 $z = \$2\,145$

Origen	Destino 1	2	3	Oferta
1	8	6	10	
		(85)	(40)	125
2	4	9	8	
	(110)		(40)	150
3	7	6	5	
			(95)	95
Ficticio	0	0	0	
			(50)	50
Demanda	110	85	225	420

7 (*a*) Minimice $z = 30x_{11} + 45x_{12} + 26x_{13} + 28x_{14} + 32x_{21} + 40x_{22} + 28x_{23} + 24x_{24} + 27x_{31} + 38x_{32} + 30x_{33} + 32x_{34}$

sujeta a
$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 18 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 32 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 15 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 12 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 20 \\ x_{ij} &\geq 0 \text{ para todas las } i \text{ y } j; \end{aligned}$$

(*b*) $z = \$1\,640$

Ciudad con escasez	Ciudad con excedente 1	2	3	4	Ficticia	Excedente de automóviles
1	30	45	26	28	0	
			(12)	(2)	(6)	20
2	32	40	28	24	0	
				(18)		18
3	27	38	30	32	0	
	(10)	(15)			(7)	32
Núm. de automóviles faltantes	10	15	12	20	13	70

No se reasignarán 6 automóviles de la ciudad con excedente 1 ni 7 automóviles de la ciudad con excedente 3;

9 (*a*) Maximice $z = 80x_{11} + 100x_{12} + 60x_{13} + 70x_{14} + 40x_{21} + 80x_{22} + 75x_{23} + 60x_{24} + 100x_{31} + 120x_{32} + 90x_{33} + 110x_{34}$

sujeta a
$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 100 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 80 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 50 \end{aligned}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 75$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ para todas las } i \text{ y } j$$

(*b*) $z = \$20\,625$

Proyecto de construcción

Planta	1	2	3	4	Ficticio	Capacidad diaria (cargas de camión)
1	80 **(30)**	100 **(40)**	60	70	0 **(50)**	120
2	40	80	75 **(75)**	60	0 **(25)**	100
3	100 **(20)**	20	90	110 **(60)**	0	80
Demanda diaria (cargas de camión)	50	40	75	60	75	300

Solución óptima alternativa
$z = \$20\,625$

Proyecto de construcción

Planta	1	2	3	4	Ficticia	Capacidad diaria (cargas de camión)
1	80 **(50)**	100 **(20)**	60	70	0 **(50)**	120
2	40	80	75 **(75)**	60	0 **(25)**	100
3	100	120 **(20)**	90	110 **(60)**	0	80
Demanda diaria (cargas de camión)	50	40	75	60	75	300

En ambos casos, se dispone de 50 cargas de camión en la planta 1 y 25 cargas de camión en la planta 2 no serán embarcadas.

Sec. 8.2 **1** (*a*) Minimice $z = 20x_{11} + 18x_{12} + 22x_{13} + \cdots + 22x_{55}$

sujeta a
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$
$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \text{ para todas las } i \text{ y } j,$$

(*c*) $x_{12} = 1, x_{21} = 1, x_{35} = 1, x_{43} = 1, x_{54} = 1$. Días totales minimizados en 100;

3 (*a*) Maximice $z = 125x_{11} + 140x_{12} + 90x_{13} + \cdots + 310x_{55}$

sujeta a
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$
$$x_{31} + \cdots + x_{35} = 1$$
$$x_{41} + \cdots + x_{45} = 1$$
$$x_{51} + \cdots + x_{55} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$
$$x_{13} + \cdots + x_{53} = 1$$
$$x_{14} + \cdots + x_{54} = 1$$
$$x_{15} + \cdots + x_{55} = 1$$
$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \text{ para todas las } i \text{ y } j,$$

b) $x_{12} = 1, x_{21} = 1, x_{34} = 1, x_{43} = 1, x_{55} = 1$. Ventas totales maximizadas en \$1135 (en miles) o \$1 135 000

Sec. 8.3 **1** (*a*) z maximizada en un valor de 36 cuando $x_1 = 3$ y $x_2 = 3$, (*b*) $z = 37\frac{6}{7}$ cuando $x_1 = \frac{15}{7}$ y $x_2 = \frac{32}{7}$, (*c*) $1\frac{6}{7}$;

3
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 175 + My_1$$
$$2x_1 - x_2 \leq 110 + My_2$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 200 + My_3$$
$$3x_2 - x_3 \leq 180 + My_4$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 = 0 \text{ or } 1$$

5 (*a*) $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{20} = 8$, (*b*) $x_1 = 1, x_5 = 1$, (*c*) $x_7 \leq x_{13}$, (*d*) $x_9 = x_{12}$, (*e*) $x_4 + x_{15} \leq 1$;

Sec. 8.4 **1** Minimice $z = P_1d_1^- + P_2d_2^+ + P_3d_3^+ + P_4d_4^- + P_5d_5^+$

sujeta a
$$7x_1 + 5x_2 + d_1^- - d_1^+ = 200$$
$$3x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 72$$
$$4x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 102$$
$$x_1 + d_4^- - d_4^+ = 8$$
$$x_2 + d_5^- - d_5^+ = 20$$
$$x_1, x_2, d_j^-, d_j^+ \geq 0;$$

3 x_j = número de dólares invertidos en la alternativa j

Minimice $z = P_1d_1^+ + P_2d_2^- + P_3d_3^+$

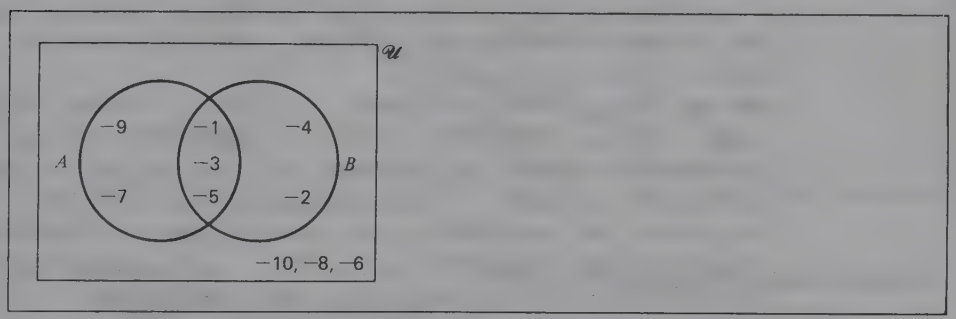
sujeta a
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 200\,000$$
$$.05x_1 + .04x_2 + .30x_3 + .10x_5 + d_1^- - d_1^+ = 10\,000$$
$$.18x_1 + .15x_2 + .25x_3 + .12x_4 + .20x_5 + d_2^- - d_2^+ = 40\,000$$
$$x_3 + x_5 + d_3^- - d_3^+ = 30\,000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, d_j^-, d_j^+ \geq 0$$

Capítulo 9

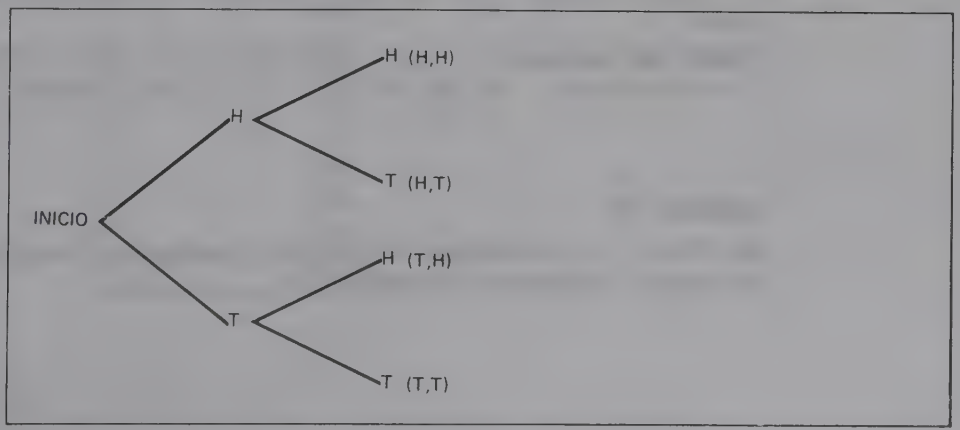
Sec. 9.1 **1** $A = \{a | a$ es no negativa aun cuando el entero sea menor que 21$\}$; **3** $V = \{v | v$ es una vocal$\}$; **5** $C = \{c | c = x^3$ donde $x = 1, 2, 3$ o $4\}$; **7** $B = \{1, 2, 3, 4\}$; **9** $B = \{-3\}$; **11** $B' = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$; **13** $S = \{6, 8, 11, 14\}$; **15** $A \subset \mathcal{U}, B \subset \mathcal{U}, C \subset \mathcal{U}, A \subset C, B \subset C$; **17** véase la figura; **19** $A = B = C = D$, cada conjunto es un subconjunto de todos los demás; **21** *a*) , *b*) $\{-10, -11\}$, *c*) $\{-2, -4, -6, -8, -10, -11\}$, (*d*) $\{-1, -3, -5, -7, -9\}$, (*e*) $\{-1, -3, -5, -7, -9, -10, -11\}$, (*f*) $\{-10, -11\}$

Sec. 9.2 **1** véase la figura; **3** véase la figura; **5** 676 000; **7** 1 680; **9** 720; **11** 3 628 000; **13** 6 720; **15** 8 064; **17** 126; **19** 1; **21** $5! = 120$; **23** 1 680; **25** 1; **27** 210; **29** $12! = 479\,001\,600$; **31** 6; **33** 120; **35** ${}_{10}C_4 = 210$; **37** ${}_5C_3 = 10$; **39** ${}_{52}C_{13} = 6.3501356 \cdot 10^{11}$; **41** 4 939 200

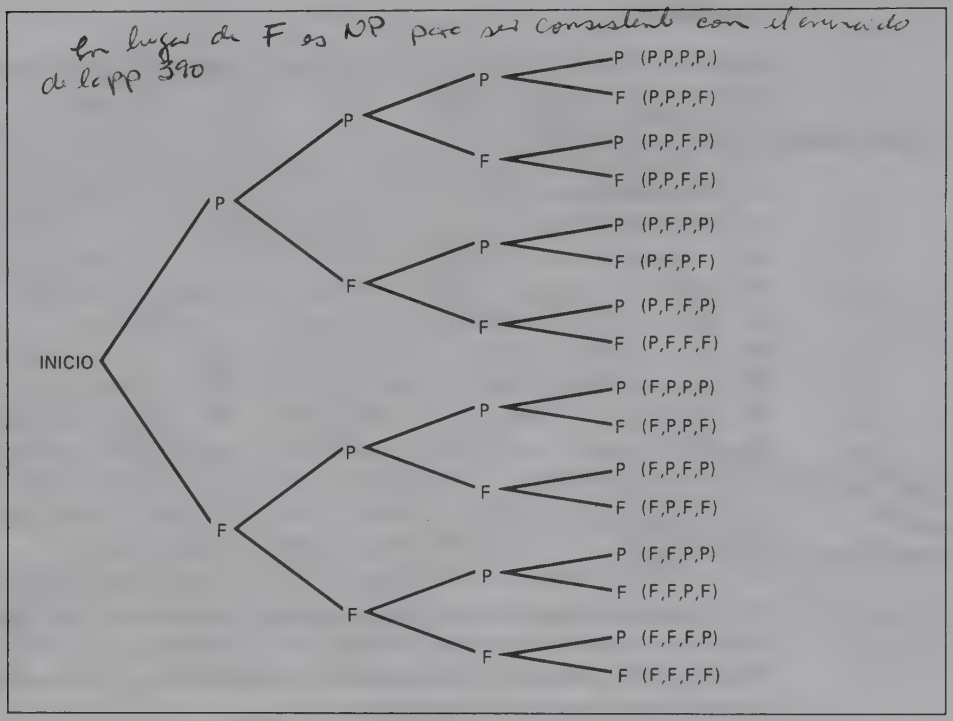
Sec. 9.3 **1** (*a*) $S = \{AAAA, AAAU, AAUA, AAUU, AUAA, AUAU, AUUA, AUUU, UAAA, UAAU, UAUA, UAUU, UUAA, UUAU, UUUA, UUUU\}$, *c*) *AAUU, AUAU, AUUA, UAAU, UAUA, UUAA*, *d*) todos los resultados menos *UUUU*; **3** *a*) {MC, MH, MN}, *b*) {MC, FC}; **5** *a*) 0.48, *b*) 0.28, *c*) 0.053, *d*) 0.3; **7** *a*) no mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos, *b*) mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos *c*) no mutuamente excluyentes; colectivamente exhaustivos, *d*) no mutuamente excluyentes, no colectivamente exhaustivos, *e*) mutuamente excluyentes, no colectivamente exhaustivos;



Sec. 9.1, Ejercicio 17



Sec. 9.2, Ejercicio 1



Sec. 9.2, Ejercicio 3

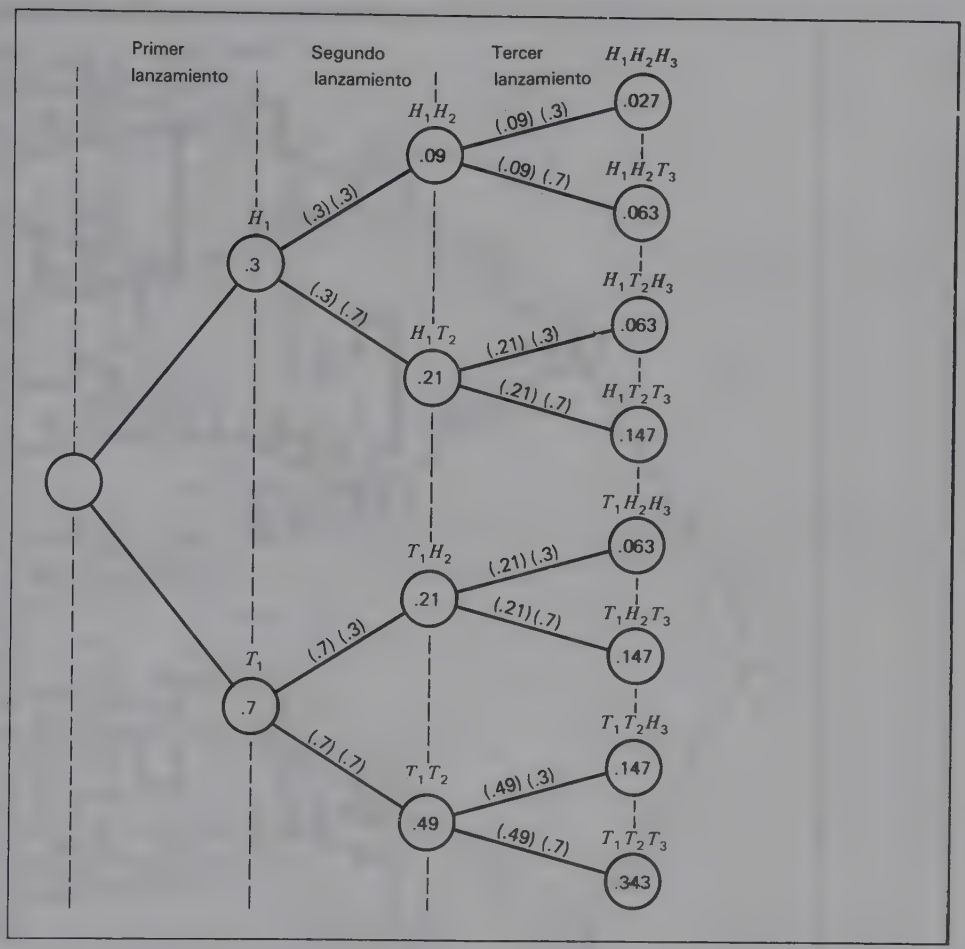
9 (*a*) 0.24, (*b*) 0.92, (*c*) 0.80; **11** (*a*) 8/52, (*b*) 12/52, (*c*) 16/52, (*d*) 32/52; **13** (*a*) 0.22, (*b*) 0.08, (*c*) 0.24, (*d*) 0.68; **15** (*a*) 0.7, (*b*) 0.3, (*c*) 0.4, (*d*) 0.9, (*e*) 0.1, (*f*)1.0, (*g*) 1.0, (*h*) 0.6

Sec. 9.4 **1** (*a*) 0.7744, (*b*) 0.0818, (*c*) 0.5277; **3** véase la figura, 0.441, 0.189; **5** (*a*) 3700/6000 = 0.6167, (*b*) 2800/6000 = 0.4667, (*c*) 550/6000 = 0.0917, (*d*) 600/6000 = 0.1, (*e*) 250/2300 = 0.1087, *f*) 1200/1800 = 0.6667; **7** véase la figura, 209/210 = 0.9952, 4/35 = 0.1143; **9** *a*) 156/2,652 = 0.05882, *b*) 28,561/6,497,400 = 0.0043858, (*c*) 24/6,497,400 = 0.0000037, (*d*) 0.6588; **11** (*a*) 500/2,000 = 0.25, (*b*) 400/2,000 = 0.20, (*c*) 460/2,000 = 0.23, (*d*) 280/400 = 0.70, (*e*) 720/800 = 0.90; **13** (*a*) 0.12, (*b*) 0.24; **15** (*a*) 0.15, (*b*) 0.333, (*c*) 0.60

Prueba del capítulo **1** (*a*) {2, 4, 6, 8}, (*b*) {2}, (*c*) {−2, 0, 1, 2, 3}; **3** (*a*) 120, (*b*) 20; **4** 24/132,600, **5** 12/26, (*b*) 18/34

Capítulo 10

Sec. 10.1 **1** *a*) continua, *b*) discreta, *c*) continua, *d*) continua, *e*) discreta, *f*) continua, *g*) discreta, *h*) continua;

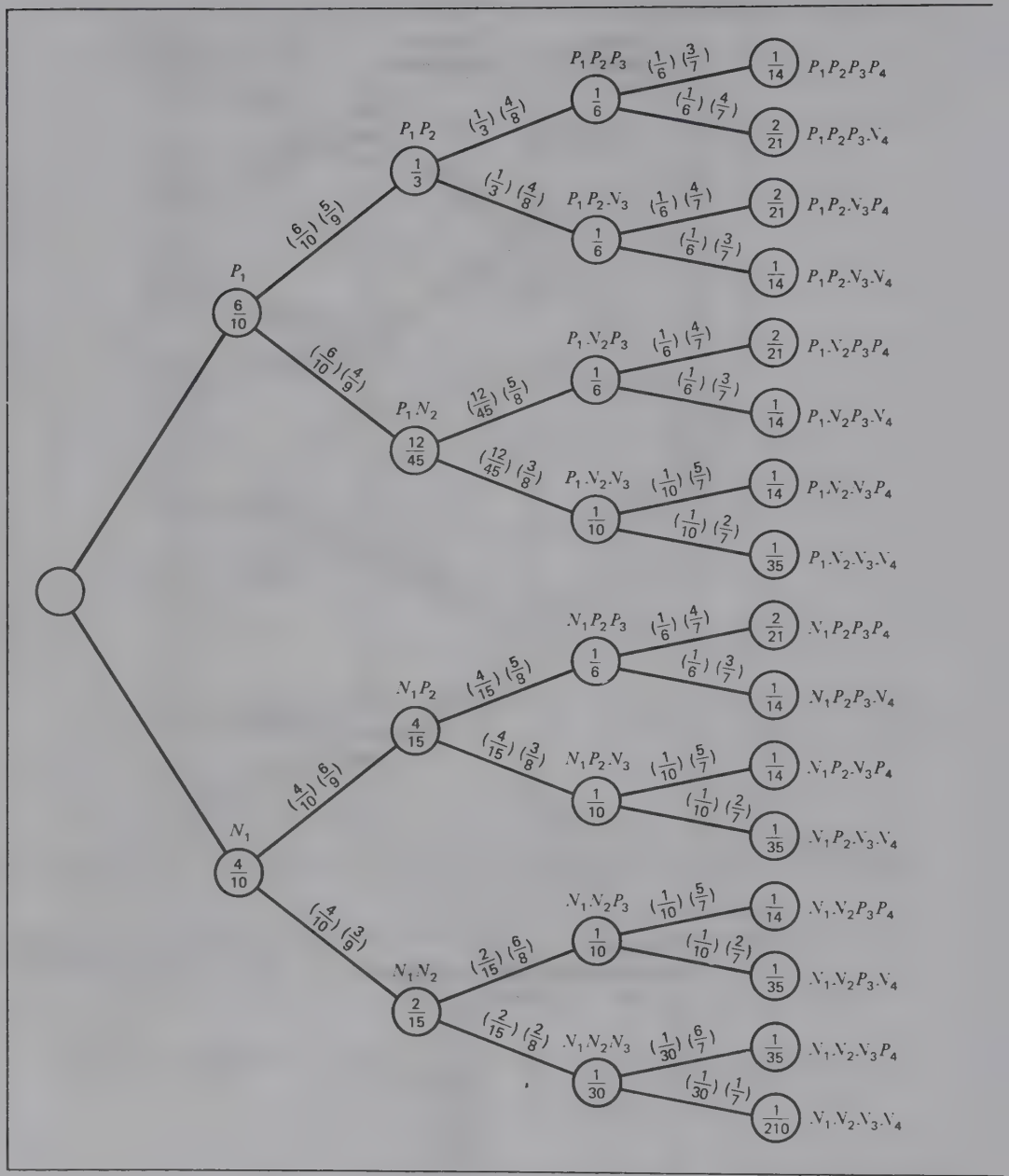


Sec. 9.4, Ejercicio 3

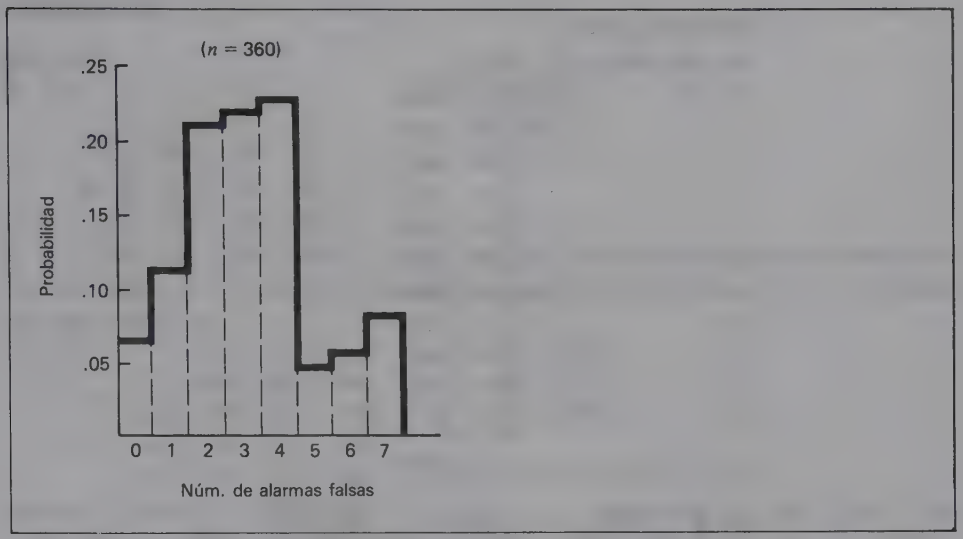
3 *a*)

Número de alarmas falsas	Probabilidad
0	.0667
1	.1111
2	.2083
3	.2139
4	.2222
5	.0444
6	.0556
7	0.778
	1.0000

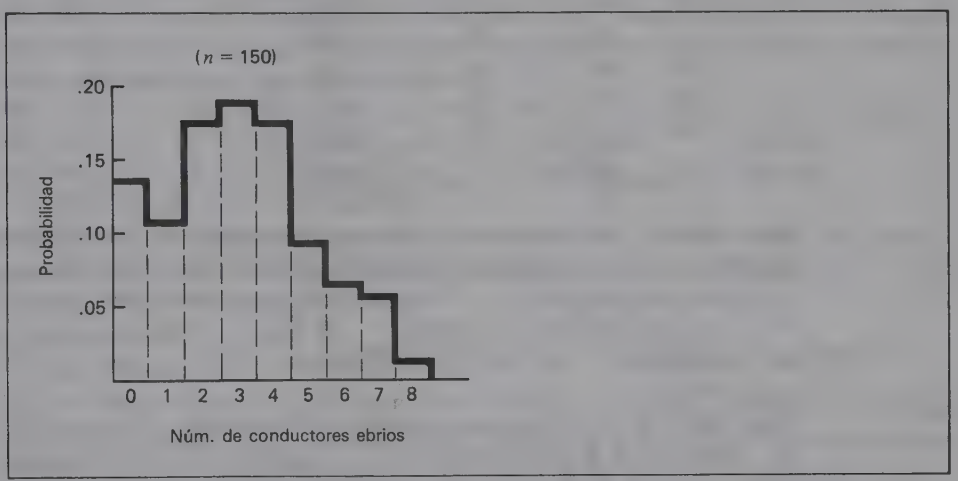
b) véase la figura, (*c*) 0.60000, 0.6139;



Sec. 9.4, Ejercicio 7



Sec. 10.1, Ejercicio 3 *b)*



Sec. 10.1, Ejercicio 5 *b)*

5 *a)*

Número de conductores ebrios	Probabilidad
0	.1333
1	.1067
2	.1733
3	.1867
4	.1733
5	.0933
6	.0667
7	.0534
8	.0133
	1.0000

b) **véase la figura** *(c)* .8667, .2267;

7

Suma de puntos en dos dados (x)	$P(x)$
2	$\frac{1}{36} = .0278$
3	$\frac{2}{36} = .0556$
4	$\frac{3}{36} = .0833$
5	$\frac{4}{36} = .1111$
6	$\frac{5}{36} = .1389$
7	$\frac{6}{36} = .1666$
8	$\frac{5}{36} = .1389$
9	$\frac{4}{36} = .1111$
10	$\frac{3}{36} = .0833$
11	$\frac{2}{36} = .0556$
12	$\frac{1}{36} = .0278$
	1.0000

9

(*a*) X^2	$P(X^2)$	(*b*) $X + 1$	$P(X + 1)$
1	.20	2	.20
4	.25	3	.25
9	.35	4	.35
16	.15	5	.15
25	.05	6	.05
	1.00		1.00

Sec. 10.2 **1** (*a*) 55, (*b*) 55, (*c*) todos ocurren con la misma frecuencia, (*d*) 90, (*e*) 28.72; **3** (*a*) 51.2, (*b*) 51.5, (*c*) 52, (*d*) 7, (*e*) 1.94; **5** (*a*) 0, (*b*) 0, (*c*) 0, (*d*) 80, (*e*) 24.15; **7** (*a*) 30, (*b*) 30, (*c*) 20; **9** (*a*) 3.77, (*b*) 4, (*c*) 3; **11** (*a*) $\mu = 33.6$, (*b*) $\sigma = 10.85$; **13** (*a*) $\mu_{x_1} = 500$, $\sigma_{x_1} = 0$, $\mu_{x_2} = 500$, $\sigma_{x_2} = 284.60$; **15** (*a*) $\mu = 3.16$, (*b*) $\sigma = 1.83$; **17** (*a*) $\mu = 3.05$, (*b*) $\sigma = 2.03$

Sec. 10.3 **1** *a*, *c*, y *g* son procesos de Bernoulli; **3** $\frac{5}{324}$, $\frac{1275}{1296}$; **5** $P(X = 0) = 0.00001$, $P(X = 1) = 0.00045$, $P(X = 2) = 0.0081$, $P(X = 3) = 0.0792$, $P(X = 4) = 0.32805$, $P(X = 5) = 0.59049$; **7** 0.64961, 0.60801 (la probabilidad de pasar no es la misma) **9** 0.0009765, 0.201326; **11** $\mu = 1.0$, $\sigma = 0.94868$

Sec. 10.4 **1** (*a*) −0.333, (*b*) −1.5, (*c*) 0.5, (*d*) −2, (*e*) 2.25; **3** (*a*) 0.0139, (*b*) 0.8413, (*c*) 0.2, (*d*) 0.9786; **5** (*a*) 0.7995, (*b*) 0.7642, (*c*) 0.8910, (*d*) 0.1817; **7** (*a*) 0.1057, (*b*) 0.7066, (*c*) 0.2204, (*d*) 0.921; **9** 0.0013, 0.1587; **11** 0.1359, 0.0668; **13** 0.0062, 0.6915; **15** (*a*) 0.9332, (*b*) 0.0668; (*c*) 0.3023, (*d*) 0.3085

Prueba de capítulo **1** *a)* $\mu = 22.63$, $\sigma = 1.45$, *b)* 0.76; **2** $P(X = 0) = .2373$, $P(X = 1) = .3955$, $P(X = 2) = .2637$, $P(X = 3) = .0879$, $P(X = 4) = .0146$, $P(X = 5)$ .001; **3** *a)* $\mu = 75$, $\sigma = 7.984$; **4** .234375; **5** *a)* 0.4207, *b)* 0.1078

Capítulo 11

Sec. 11.1

1 (*a*)

		to		
		1	2	3
de	1	.85	.10	.05
	2	.15	.80	.05
	3	.025	.10	.875

(*b*) (1) 35.7%
(2) 29.6%
(3) 34.7%

c) 1) 35.6525%, 2) 30.72%, 3) 33.6275%, *d*) La probabilidad de que una familia que selecciona la marca i esta semana también escoja la marca j en un lapso de tres semanas;

3 (*a*)

		o		
		urb	sub	rur
de	urb	.90	.06	.04
	sub	.03	.85	.12
	rur	.02	.05	.93

(*b*) urb: 63.8%
sub: 21.7%
rur: 14.5%

urb: 58.36%, sub: 23.00%, rur: 18.64%; **5** (*a*) año 1: 57.2%, 42.8%, año 2: 54.76%, 45.24%, año 3: 52.64%, 47.36%, año 4: 50.8%, 49.2%, (*b*) 38.5%, 61.5%; **7** baja: 875, promedio: 604, alta: 521; **9** *a*) no, *b*) sí, *c*) una matriz identidad no es en realidad una matriz de transición, pues la primera implica que todas las cosas permanecen iguales

Sec. 11.2 **1** (*a*) A_2, (*b*) A_3, (*c*) A_2, (*d*) A_2, (*e*) A_1; **3** (*a*) A_2, (*b*) A_2, (*c*) A_2, (*d*) A_2, (*e*) A_2; **5** (*a*) A_4, (*b*) A_4, (*c*) A_4, (*d*) A_4, (*e*) A_4; **7** (*a*) 12, (*b*) \$34.00; **9** (*a*) 13, (*b*) \$34.60; **11** \$67.80, EVPI = \$2.60; **13** \$35.70 (\$1.70 o más por día)

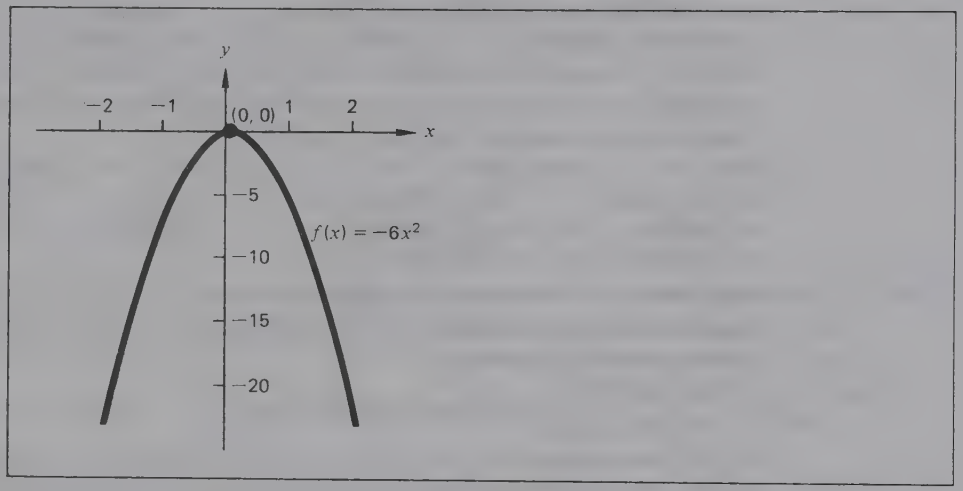
Sec. 11.3 **1** sin punto en silla de montar; **3** punto en silla de montar cuando X escoge la estrategia 3 y Y la estrategia 3, el valor del juego es 5; **5** sin punto en silla de montar;

7 $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 10 \\ 5 & 8 & -8 \end{pmatrix}$; **9** no es posible reducir; X escoge la estrategia 1 el 87.5% de las veces y la estrategia 2 el 12.5% de las veces; Y escoge la estrategia 1 el 37.5% de las veces y la estrategia 2 el 62.5% de las veces; valor resultante = 68.75; **13** X escoge la estrategia las $\frac{3}{7}$ de las veces y la estrategia 2 las $\frac{4}{7}$ de las veces Y escoge la estrategia 1 las $\frac{5}{7}$ de las veces y la estrategia 2 las $\frac{2}{7}$ de las veces; el valor del juego es $-\frac{50}{7}$; **15** X escoge la estrategia 1 el 37.5% de las veces la estrategia 2 el 12.5% de las veces y la estrategia 3 el 50% de las veces; Y escoge la estrategia 1 las $\frac{7}{26}$ de las veces, la estrategia 2 las $\frac{8}{26}$ de las veces y la estrategia 3 las $\frac{11}{26}$ de las veces; el valor de juego es = 1.

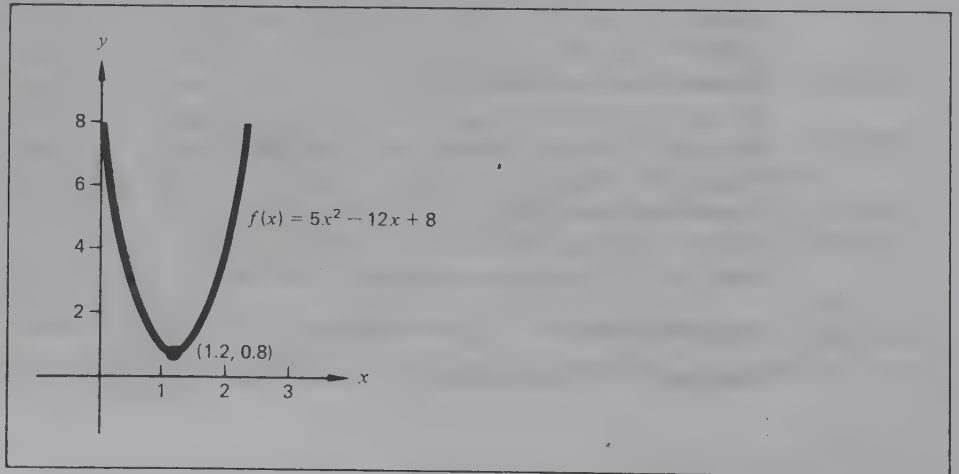
Prueba del capítulo **1** *a*) 32%, 53%, 15%, *b*) $\frac{10}{21}$ o sea 47.6%, $\frac{8}{21}$ o sea 38.1%, $\frac{3}{21}$ o sea 14.3%; **2** A_2 o A_4, A_3, A_3, A_4, A_3; **3** A_4, 154, 186; **4** *a*) X escoge la estrategia 1 las $\frac{4}{7}$ de las veces y la estrategia 2 las $\frac{5}{14}$ de las veces; valor $= -\frac{10}{7}$, *b*) punto en silla de montar, Y siempre escogerá la estrategia 2 y X la estrategia 1; lo cual da por resultado un valor de -40

Capítulo 12

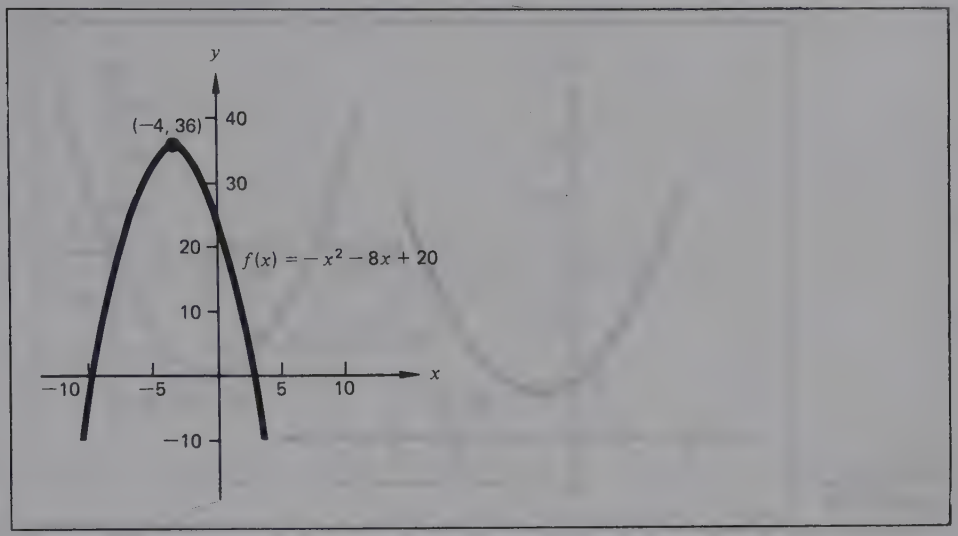
Sec. 12.2 **1** no cuadrática; **3** cuadrática, $a = \frac{1}{20}$, $b = 0$, $c = 75$; **5** cuadrática, $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = \frac{4}{5}$; **7** cuadrática $a = 4$, $b = -1$, $c = 1$; **9** cuadrática, $a = -\frac{7}{4}$, $b = 0$, $c = \frac{25}{8}$; **11** cuadrática, $a = 1$, $b = 2$, $c = -15$; **13** cuadrática, $a = 1$, $b = -10$, $c = 25$; **15** abajo, (0, 0), (0, 0), (0, 0), véase la gráfica; **17** arriba, (0, 8), sin intersección con el eje x, (1.2, 0.8), véase la gráfica; **19** abajo, (0, 20), (−10, 0) y (2, 0), (−4, 36), véase la gráfica; **21** arriba, (0, −5), (2.5, 0) y (−2, 0), (0.25, −5.0625), véase la gráfica; **23** arriba, (0, 5) sin intersección con el x, $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$, véase la gráfica; **25** abajo, (0, 36),



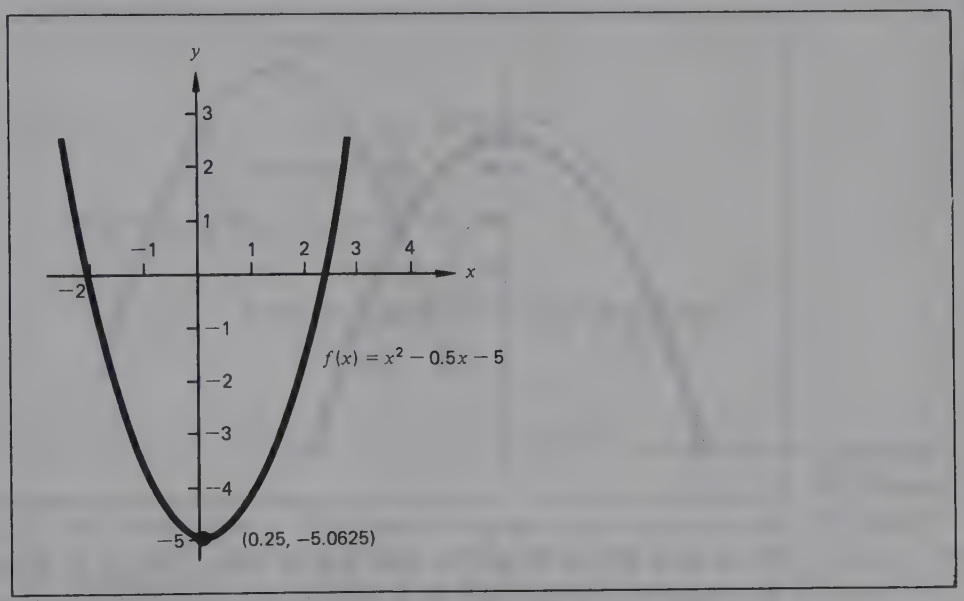
Sec. 12.2, Ejercicio 15



Sec. 12.2, Ejercicio 17



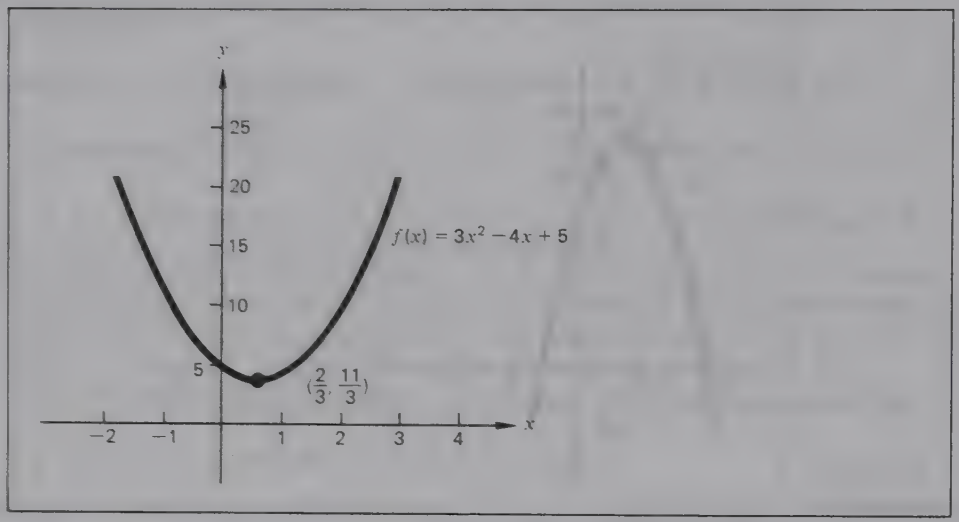
Sec. 12.2, Ejercicio 19



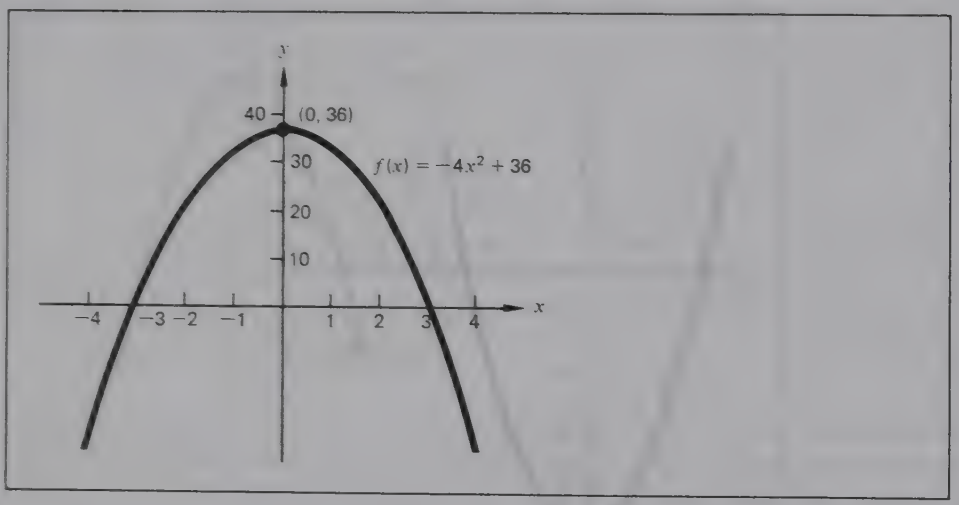
Sec. 12.2, Ejercicio 21

(−3, 0) y (3, 0), (0, 36), véase la gráfica; **27** arriba, (0, 0), (0, 0) y (20, 0), (10, −50), véase la gráfica; **29** abajo, (0, 0), (0. 0) y (−5, 0), (−2.5, 6.25), véase la gráfica; **31** cuanto más grande sea $|a|$ más inclinada será la curva; **33** $y = -3x^2 + 2x$; **35** $y = x^2 - 4$

Sec. 12.3 **1** $R = g(p) = 500\,000p - 3\,000p^2$, abajo, $(0, 0)$, $g(20) = \$8\,800\,000$, $f(20) = 440\,000$ unidades \$83.33; **3** $R = g(p) = 20\,000p - 25p^2$, abajo, $(0, 0)$, $g(60) = \$1\,110\,000$, $f(60) = 18\,500$ unidades \$400; **5** $R = h(q) = 240q - \dfrac{q^2}{7.5}$;



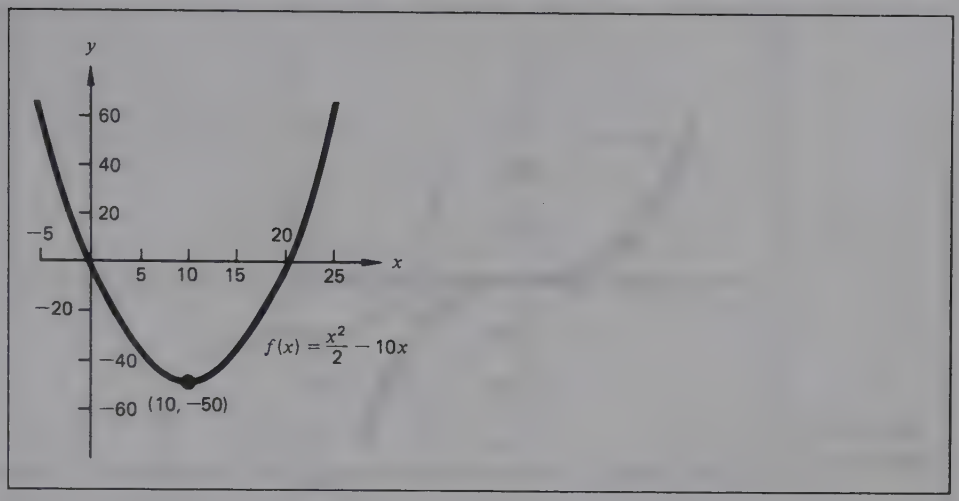
Sec. 12.2, Ejercicio 23



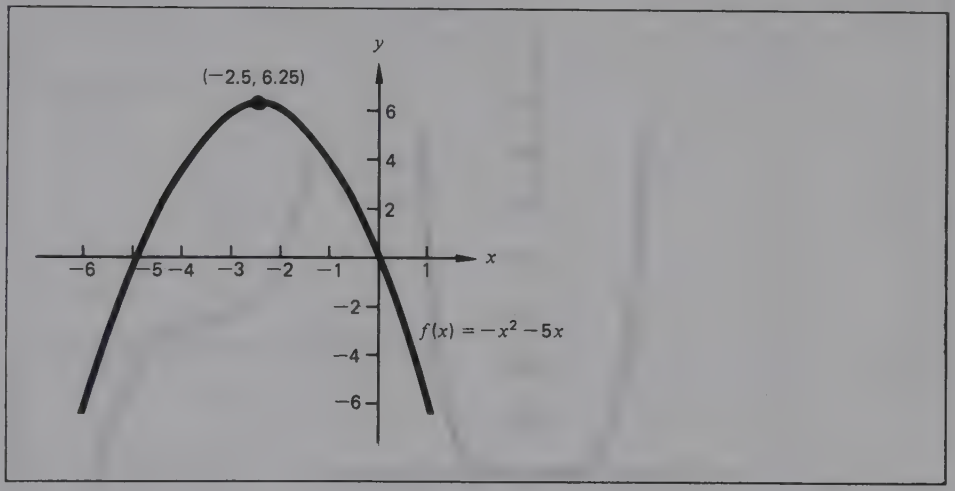
Sec. 12.2, Ejercicio 25

7 *a*) $q_s = f(p) = 2.5p^2 - 6.250$, *b*) $p \geq 50$, *c*) (50, 0), la intersección con el eje x (aquí la intersección en p) indica que, cuando el precio es \$50, no hay oferta, *d*) 7812.5 unidades; **9** $q_s = f(p) = 3p^2 - 4200$, *b*) $p \geq \$37.42$, *c*) (37.42, 0), a un precio de venta de \$37.42, no se ofrecerán unidades, *d*) $q_s =$ 25 800 unidades; **11** $q_d = f(p) = 4p^2 - 200p + 2500$, $f(15) = 400$ unidades; **13** $p = 75$, $q = 5\,225$;
15 (*a*) $S = f(x) = 3x^2 - 124x + 1.444$, (*b*) $x = 20.67$ (millas a la derecha de cero)

Sec. 12.4 **1** (*a*) tercer grado, (*b*) como $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$; como $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$;
3 (*a*) sexto grado, (*b*) como $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$; como $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$;
5 (*a*) quinto grado (*b*) como $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$; como $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$;
7 (*a*) séptimo grado, (*b*) como $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$; como $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$;



Sec. 12.2, Ejercicio 27



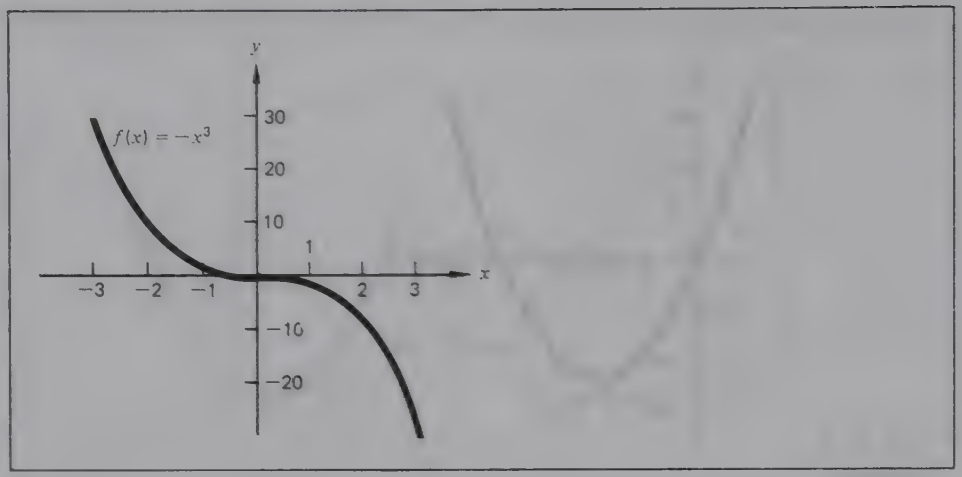
Sec. 12.2, Ejercicio 29

9 (*a*) cuarto grado, (*b*) como $x \to \infty, f(x) \to \infty$; como $x \to -\infty, f(x) \to \infty$;
11 (*a*) octavo grado, (*b*) como $x \to \infty, f(x) \to -\infty$; como $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$;
13 (*a*) tercer grado, (*b*) como $x \to \infty, f(x) \to -\infty$; como $x \to -\infty, f(x) \to \infty$;
15 (*a*) sexto grado, (*b*) como $x \to \infty, f(x) \to \infty$; como $x \to -\infty, f(x) \to \infty$;
17 véase la gráfica; **19** véase la gráfica; **21** véase la gráfica;
23 véase la gráfica; **25** véase la gráfica

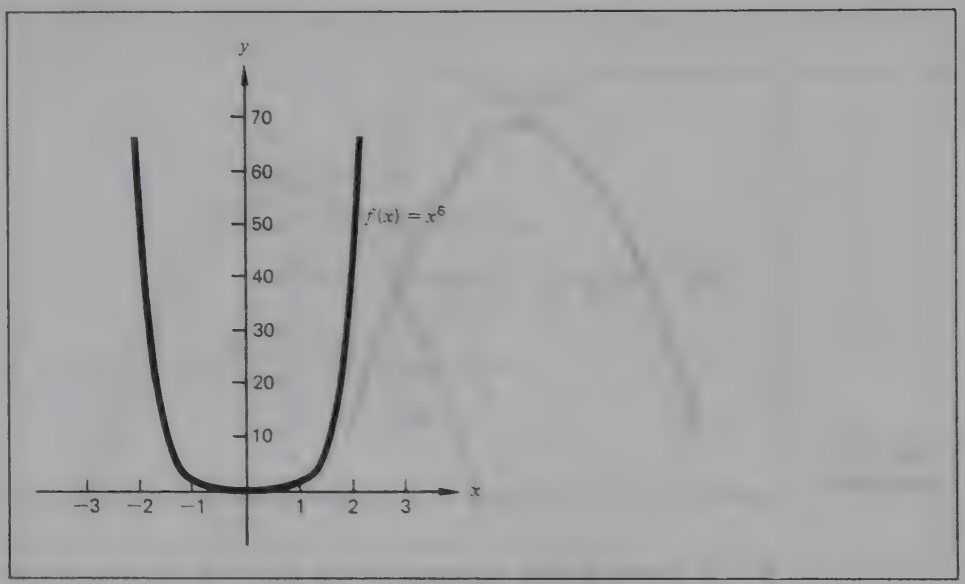
Prueba del capítulo 1 (*a*) arriba (*b*) (0, 25), (*c*) (−5, 0), (*d*) (−5, 0), (*e*) véase la gráfica; **2** $R = 450\,000p - 30p^2$;

3 $400a + 20b + c = 400$
$625a + 25b + c = 850$
$900a + 30b + c = 1\,400$

4 (*a*) noveno grado (*b*) como $x \to \infty, f(x) \to \infty$; como $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$



Sec. 12.4, Ejercicio 17

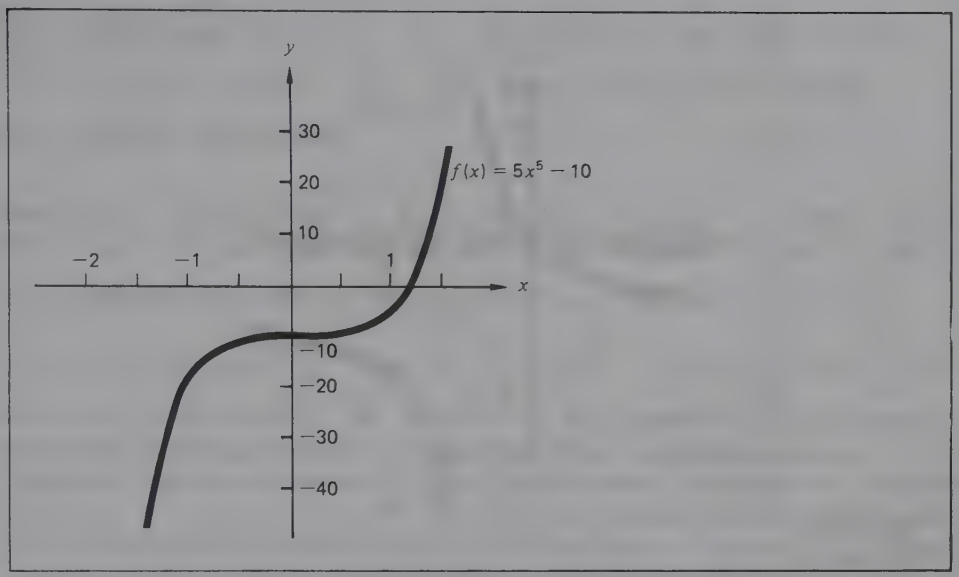


Sec. 12.4, Ejercicio 19

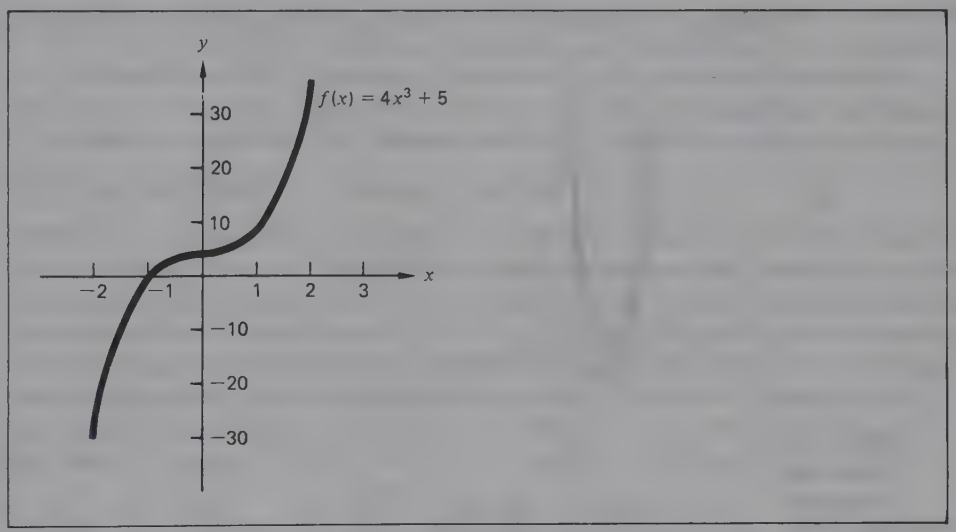
Capítulo 13

Sec. 13.1 **1** 48; **3** 10; **5** el límite no existe; **7** 2; **9** 0; **11** 16; **13** −5; **15** el límite no existe; **17** el límite no existe; **19** −14; **21** 0; **23** −3

Sec. 13.1 (continúa) **1** 3; **3** $-8\frac{1}{3}$; **5** −4; **7** 125; **9** −162; **11** −4; **13** $\frac{14}{45}$; **15** 880; **17** −6; **19** −5; **21** $4c^3 - 3c^2 + 10$; **23** 0. asíntota horizontal cuando $y = 0$,



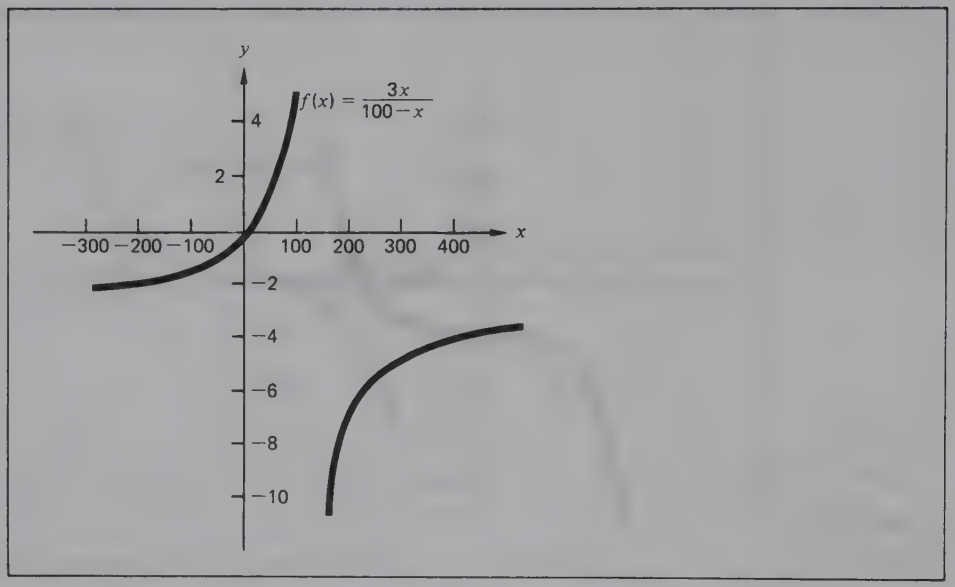
Sec. 12.4, Ejercicio 21



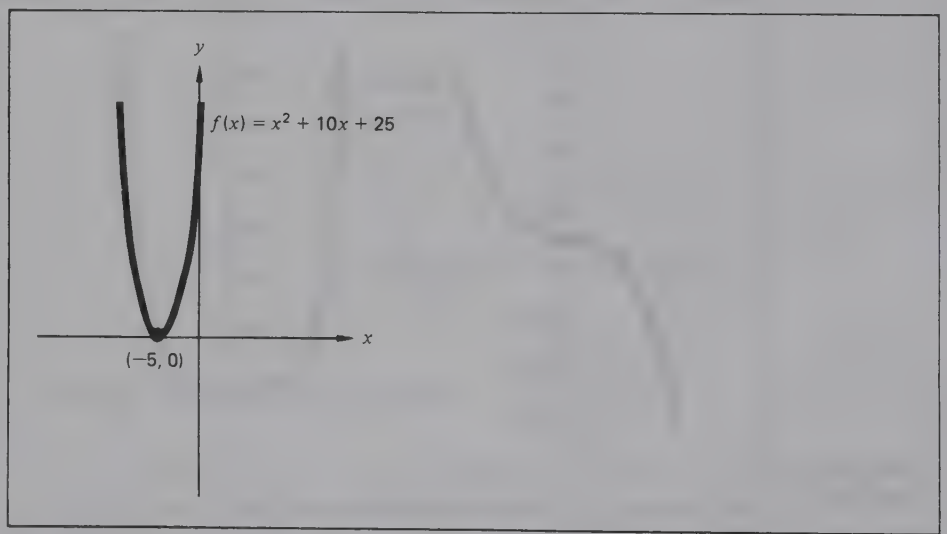
Sec. 12.4, Ejercicio 23

asíntota vertical cuando $x = 0$ **25** $\frac{2}{5}$, asíntota vertical si $y = \frac{2}{5}$, asíntota vertical cuando $x = -20$; **27** sin límite, sin asíntota; **29** $\frac{1}{2}$, asíntota horizontal si $y = \frac{1}{2}$, asíntota vertical cuando $x = -250$; **31** 3, asíntota horizontal cuando $y = 3$, asíntota vertical cuando $x = 0$; **33** continua; **35** continua; **37** discontinua si $x = -3$; **39** discontinua cuando $x = 7$ y $x = -3$; **41** discontinua si $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$;

Sec. 12.4, Ejercicio 25



Capítulo 12 Prueba del capítulo Problema 1 *e)*



43 discontinua en $x = -5$ y $x = 2$; **45** discontinua cuando $x = -2$, $x = 2$ y $x = 5$; **47** discontinua si $x = 0$ y $x = 3$

Sec. 13.2 **1** 12; **3** -1; **5** $-\frac{11}{5}$; **7** -1; **9** 4;

11 -35; **13** 20; **15** *a*) 80 pies/s, 48 pies/s, 0 pie/s, *b*) 8 s; **17** \$4.5 millones/año, \$4.6 millones/año, \$4.4 millones/año, \$5.55 millones/año, **19** 1.1 miles de millones de pies^3/año, 0.933 miles de millones de pies^3/año, 1.35 miles de millones de pies^3/año

21 (*a*) $6x + 3\Delta x$, (*b*) 12; **23** (*a*) $40x + 20\Delta x + 10$, (*b*) 90;

25 (*a*) $-8x - 4\Delta x + 3$, (*b*) -13; **27** (*a*) $x + \frac{1}{2}\Delta x - 3$, (*b*) -1;

29 (*a*) $2ax + a\Delta x - b$, (*b*) $4a - b$; **31** (*a*) $3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$, (*b*) 13; **33** (*a*) $-1/x(x + \Delta x)$, (*b*) $-\frac{1}{3}$; **35** (*a*) $6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2$, (*b*) 26; **37** (*a*) $4/x(x + \Delta x)$, (*b*) 4/3

Sec. 13.3 **1** (*a*) 3, (*b*) 3, 3; **3** (*a*) 18*x*, (*b*) 18, −36; **5** (*a*) $16x - 10$, (*b*) 6, −42; **7** (*a*) $2x - 7$, (*b*) −5, −11; **9** (*a*) $-10x + 3$, (*b*) −7, 23; **11** (*a*) 50*x*, (*b*) 50, −100; **13** (*a*) *a*, (*b*) *a*, *a*; **15** (*a*) $2/x^2$, (*b*) $2, \frac{1}{2}$; **17** (*a*) $-\frac{a}{x^2}$, (*b*) $-a, -\frac{a}{4}$; **19** (*a*) $\frac{3}{x^2}$, (*b*) $3, \frac{3}{4}$; **21** (*a*) $\frac{3}{2}x^2$, (*b*) $\frac{3}{2}$, 6; **23** *a*) $3x^2 + 6x$, *b*) 9, 0; **25** *a*) 14, −10, *b*) *y* aumenta aproximadamente en 14 unidades a medida que *x* se incrementa en 1 unidad cuando $x = 2$, *y* disminuye aproximadamente 10 unidades conforme *x* aumenta en 1 unidad cuando $x = -1$, *c*) $x = \frac{1}{4}$; **27** *a*) 20, 20, *b*) *y* se incrementa aproximadamente 20 unidades al aumentar *x* en 1 unidad cuando $x = 2$ o $x = -1$, *c*) ningún valor de *x*; **29** *a*) 0, 0, *b*) *y* no cambia en absoluto (es decir, aumenta 0) al incrementarse *x* en 1 unidad cuando $x = 2$ o $x = -1$, *c*) todos los valores de *x*; **31** *a*) 0, −15, *b*) *y* no cambia al aumentar *x* en 1 unidad si $x = 2$, *y* disminuye aproximadamente 15 unidades cuando *x* se incrementa en 1 unidad si $x = -1$, *c*) $x = 2, x = -2$; **33** *a*) 27, −21, *b*) *y* se incrementa aproximadamente 27 unidades al aumentar *x* en 1 unidad si $x = 2$, *y* disminuye aproximadamente 21 unidades cuando *x* aumenta 1 unidad si $x = -1$; *c*) $x = \frac{5}{16}$; **35** *a*) −880, 215, *b*) *y* disminuye aproximadamente 880 unidades cuando *x* se incrementa 1 unidad si $x = 2$, *y* aumenta aproximadamente 880 unidades cuando *x* se incrementa 1 unidad si $x = 2$, *y* aumenta aproximadamente 215 unidades al aumentar *x* en 1 unidad cuando $x = -1$; **37** *a*) 276, 60, *b*) *y* se incrementa aproximadamente 276 unidades cuando *x* aumenta 1 unidad si $x = 2$, *y* aumenta aproximadamente 60 unidades cuando *x* aumenta 1 unidad si $x = -1$; **39** *a*) 14, *b*) 20, 27, *c*) $f(2) = 13, f(2.5) = 21, f(3) = 31$

Sec. 13.4 **1** -1; **3** $3x^2 - 8$; **5** $3/4\sqrt[4]{x}$; **7** $6x^5$; **9** $2x^5 - 4x + 25$; **11** $\frac{-18}{x^4}$; **13** $5x^4 - 12x^3 + 18x^2$; **15** $\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$; **17** $-\frac{100}{x^5}$; **19** $50x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; **21** $-\frac{10}{x^{11}}$; **23** $2x - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$; **25** $8x^7 - 24x^5 + 40x^4 - 96x^2$; **27** $9x^5 - 4x^3 + \frac{459}{4}x^2 - 24$; **29** $\frac{7 - 7x^2}{(1 + x^2)^2}$; **31** $\frac{-12x^2 + 12x}{(4x^3 - 6x^2 + 4)^2}$; **33** $-72x^2(1 - 6x^3)^3$; **35** $\frac{-5x^2}{\sqrt[3]{(1 - 5x^3)^2}}$; **37** $\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$; **39** $5(3x^2 - 6x)(x^3 - 3x^2)^4$; **41** $\frac{6x^2 - 4}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1}}$; **43** $5(x^2 + 6)(30x^4 - 12x^2)(6x^5 - 4x^3)^4 + 2x(6x^5 - 4x^3)^5$;

45 $\dfrac{x^2 - 2x - 2}{2\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)^3}}$; **47** $\dfrac{4(3x^2+5x)^3(15x^4+50x^3+6x+5)}{(1-5x^3)^5}$

49 $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{5x-1}{x^2}\right]^{1/3}\dfrac{(5x^2-2x)}{(5x-1)^2}$;

51 $\dfrac{(9-2x^2)[-15x^5(1-x^3)^4+3x^2(1-x^3)^5]+4x^4(1-x^3)^5}{3(9-2x^2)^2\left[\dfrac{(1-x^3)^5x^3}{9-2x^2}\right]^{2/3}}$ **53** $2ax + b$;

55 $3a_3x^2 + 2a_2x^2 + a_1$; **57** (*a*) 18, (*b*) ninguna; **59** (*a*) 0, (*b*) ± 3;

61 (*a*) $6a_2 + a_1$, (*b*) $-a_1/2a_2$; **63** (*a*) $\dfrac{3}{32}$, (*b*) 0; **65** (*a*) 19, (*b*) $-\dfrac{13}{2}$;

67 (*a*) 6, (*b*) 0, 1; **69** (*a*) $-\dfrac{20}{27}$, (*b*) ninguna; **71** (*a*) 95, (*b*) ninguna;

73 (*a*) 141, (*b*) 0.7165, −1.1165; **75** (*a*) 62.5, (*b*) 187.50, 4 687.50;

77 (*a*) −80, (*b*) −64, (*c*) −128

Sec. 13.5 **1** (*a*) 0, 0, (*b*) 0, 0; **3** (*a*) $12x^2 - 2x + 5$, $24x - 2$, (*b*) 15, 22; **5** (*a*) $15x^2 - 8x$, $30x - 8$, (*b*) 7, 22; **7** (*a*) $x^3 - x^2 + 20x$, $3x^2 - 2x + 20$, (*b*) 20, 21; **9** (*a*) $-\dfrac{1}{x^2}$, $2/x^3$, (*b*) −1, 2;

11 (*a*) $50x - 10$, 50, (*b*) 40, 50; **13** (*a*) $20x^3 - 20x$, $60x^2 - 20$, (*b*) 0, 40;

15 (*a*) $\dfrac{20}{x^3}$, $-\dfrac{60}{x^4}$, (*b*) 20, −60; **17** (*a*) $-5(4-x)^4$, $20(4-x)^3$, (*b*) −405, 540; **19** (*a*) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{8+x}}$, $\dfrac{-2}{9(8+x)\sqrt[3]{8+x}}$, (*b*) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{9}}$, $\dfrac{-2}{81\sqrt[3]{9}}$;

21 (*a*) −96, −160, (*b*) −32, −32; **23** $f'(x) = 54x^2 - 8x + 6$, $f''(x) = 108x - 8$, $f'''(x) = 108$, $f^{iv}(x) = 0$; **25** $f'(x) = m$, $f''(x) = 0$;

27 $f'(x) = 6x^5 - 18x^2 - 60x$, $f''(x) = 30x^4 - 36x - 60$, $f'''(x) = 120x^3 - 36$, $f^{iv}(x) = 360x^2$, $f^{v}(x) = 720x$, $f^{vi}(x) = 720$, $f^{viii}(x) = 0$;

29 $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$, $f''(x) = 6a_3x + 2a_2$, $f'''(x) = 6a_3$, $f^{iv}(x) = 0$;

31 $f'(x) = 20x^3 - 18x^2 + 2$, $f''(x) = 60x^2 - 36x$, $f'''(x) = 120x - 36$, $f^{iv}(x) = 120$, $f^{v}(x) = 0$; **33** $f'(x) = 5(x-2)^4$, $f''(x) = 20(x-2)^3$, $f'''(x) = 60(x-2)^2$, $f^{iv}(x) = 120(x-2)$, $f^{v}(x) = 120$, $f^{vi}(x) = 0$;

35 $f'(x) = 12x^2 - 4x + 15$, $f''(x) = 24x - 4$, $f'''(x) = 24$, $f^{iv}(x) = 0$;

37 $f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x$, $f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$, $f'''(x) = 24a_4x + 6a_3$, $f^{iv}(x) = 24a_4$, $f^{v}(x) = 0$

Sec. 13.6 **1** −30; **3** $4x^3 + 14x$; **5** $-15(3x + x^2)^2(3 + 2x)$;

7 $\sqrt{2}x$: **9** $5(3x^2 - 5)(x^3 - 5x - 3)^4$; **11** $12x^{11} - 6x^5$;

13 $\dfrac{1}{15x^2 - 24x + 10}$; **15** $-\dfrac{1}{16x + 9}$, no definida cuando $x = -\dfrac{9}{16}$;

17 $\dfrac{1}{8(2x-8)^3}$, no definida cuando $x = 4$; **19** $\dfrac{1}{12x^2 - 12}$, no definida cuando $x = 1, -1$; **21** $2\sqrt{x-5}$; **23** $\dfrac{1}{8x(x^2-25)^3}$, no definida cuando $x = 0, -5, 5$; **25** $\dfrac{1}{9x^2(x^3-27)^2}$, no definida cuando $x = 0, 3$;

27 $\frac{1}{2a_2y + a_1}$; **29** $\frac{1}{15y^2 - 4y + 1}$; **31** $\frac{1}{m}$; **33** $\frac{(4 - y^2)^2}{5y^2 + 20}$;
35 $\frac{\sqrt{2y - 4y^3}}{1 - 6y^2}$; **37** $3x^2\sqrt{x^2 - 1}(1 - x^3)^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1/2}(2x)(x^3) \cdot (1 - x^3)^2 + 2(1 - x^3)(-3x^2)(x^3)\sqrt{x^2 - 1}$; **39** $5x^4(x^2 - 3x)^{1/3}(x - 5)^4 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x)^{-2/3}(2x - 3)x^5(x - 5)^4 + 4(x - 5)^3x^5(x^2 - 3x)^{1/3}$; **41** $750x^5$;
43 $24x^{23}$

Prueba del capítulo **1** *(a)* 5, *(b)* 2; **2** ninguna; **3** $-12x + 2$;
4 *(a)* $-18/(5x\sqrt[5]{x^3})$, *(b)* $12x^5 - 36x^3 - 6x$, *(c)* $(12x - 216x^3 - 10x^5)/(x^4 + 6)^4$;
5 $\frac{8}{3}$; **6** $f'(x) = 5x^2 - 3x + 6, f''(x) = 10x - 3, f'''(x) = 10$, $f^{iv}(x) = 0$; **7** $8x^7 + 240x^5 + 2400x^3 + 8006x$; **8** 1/18

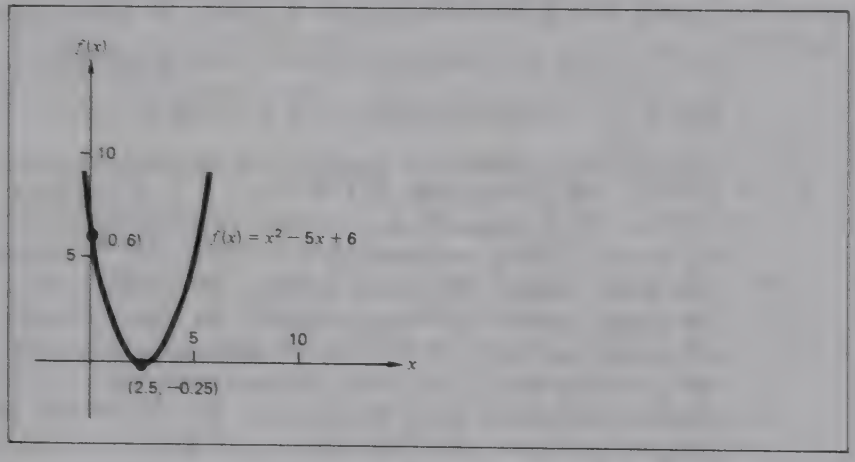
Capítulo 14

Sec. 14.1 **1** función creciente para todas las x; **3** *a)* creciente, *b)* $x > -3$, *c)* $x < -3$, *d)* $x = -3$; **5** *a)* ninguna de las dos, *b)* $x > 1$ o $x < 0$, *c)* $0 < x < 1$, *d)* $x = 0, 1$; **7** *a)* ninguna de las dos, *b)* $x > 1$ o $-1 < x < 0$, *c)* $0 < x < 1$ o $x < -1$, *d)* $x = 0, 1, -1$; **9** *a)* función no definida cuando $x = 1$, *b)* $x > 5$, *c)* ninguna, *d)* $x = 5$; **11** *a)* creciente, *b)* $x > \frac{3}{4}$, *c)* $x < \frac{3}{4}$, *d)* $x = \frac{3}{4}$; **13** *a)* decreciente, *b)* $x > 2$, *c)* $x < 2$, *d)* $x = 2$; **15** *a)* creciente, *b)* $x > -4$, *c)* ninguna, *d)* $x = -4$; **17** *a)* decreciente, *b)* $x > 5$, *c)* $x < 5$, *d)* $x = 5$; **19** *a)* creciente, *b)* $x > 5$ o $x < 5$, *c)* ninguna, *d)* $x = 5$; *b)* $x > -4$, *c)* ninguna, *d)* $x = -4$; **17** *a)* decreciente, *b)* $x > 5$, *c)* $x < 5$, *d)* $x = 5$; **19** *a)* creciente, *b)* $x > 5$ o $x < 5$, *c)* ninguna, *d)* $x = 5$; **21** abajo, abajo; **23** arriba, arriba; **25** arriba, arriba; **27** abajo, arriba; **29** abajo, arriba; **31** abajo, arriba; **33** sin conclusión, arriba; **35** arriba, arriba; **37** $f''(-1)$ no definida, abajo; **39** *a)* todos los valores de x, *b)* ninguna, *c)* y *d)* función lineal; **41** *a)* $x > -b/2a$, *b)* $x < -b/2a$, *c)* todos los valores de x, *d)* ninguna; **43** *a)* $x \neq 0$, *b)* ninguna, *c)* $x > 0$, *(d)* $x < 0$; **45** -3; **47** $5, -3$; **49** -5; **51** ninguna **53** 1; **55** $-2, 3$; **57** $1, -1$; **59** ninguna; **61** 10; **63** *(a)* $a < x < b$, $c < x < d, x > e$, *(b)* $b < x < c$, $d < x < e$, *(c)* $x = b, c, d, e$; **65** *(a)* $a_1 < x < a_2, a_3 < x < a_5, x > a_7$, *(b)* $a_2 < x < a_3, a_5 < x < a_7$, *(c)* $x = a_2, a_3, a_5, a_7$, *(d)* lo mismo que *b)*, *(e)* lo mismo que *a)*

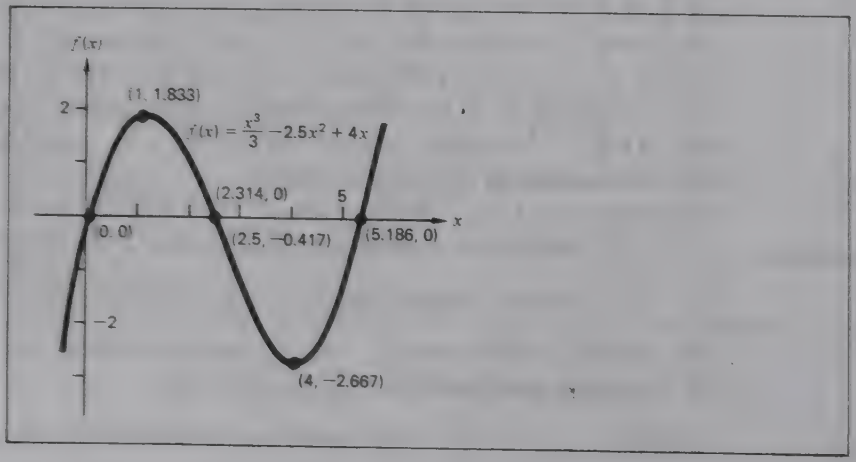
Sec. 14.2 **1** mínimo relativo en (4, 4); **3** punto de inflexión en (0, 25); **5** punto de inflexión en (0, 24); **7** máximo relativo en (0, 0), mínimo relativo en (−3, −20.25) y en (3, −20.25); **9** punto de inflexión en (0, −25); **11** mínimo relativo en (8, −177); **13** máximo relativo en (0, 0); **15** mínimo relativo en $\left(10, 133\frac{1}{3}\right)$ máximo relativo en (6, 144); **17** mínimo relativo en (2, −51.2), máximo relativo en (−2, 51.2), **19** mínimo relativo en (3, −13.5), máximo relativo en $\left(-2, 7\frac{1}{3}\right)$; **21** máximo relativo en (0, 10), mínimo relativo en

(4, −54) y en (−4, −54); **23** máximo relativo en $\left(-1, \frac{23}{60}\right)$, mínimo relativo en $\left(4, -72\frac{8}{15}\right)$, punto de inflexión en (0, 0); **25** mínimo relativo en (−4, −88), máximo relativo en $\left(0.5, 3\frac{1}{8}\right)$; **27** mínimo relativo en (0, 0), máximo relativo en $\left(-5, 83\frac{1}{3}\right)$; **29** punto de inflexión en (2, 0); **31** punto de inflexión en (2.5, 0); **33** máximo relativo en (0, 65, 53), mínimo relativo en (−4, 0) y en (4, 0); **35** mínimo relativo en (−1, −0.5), máximo relativo en (1, 0.5); **37** mínimo relativo en $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$

Sec. 14.3 **1** máximo absoluto en (8, 10), mínimo absoluto en (2, 5); **3** máximo absoluto en (2, −40), mínimo absoluto en (8, −256); **5** máximo absoluto en (8, 6520.6), mínimo absoluto en



Sec. 14.4, Ejercicio 1

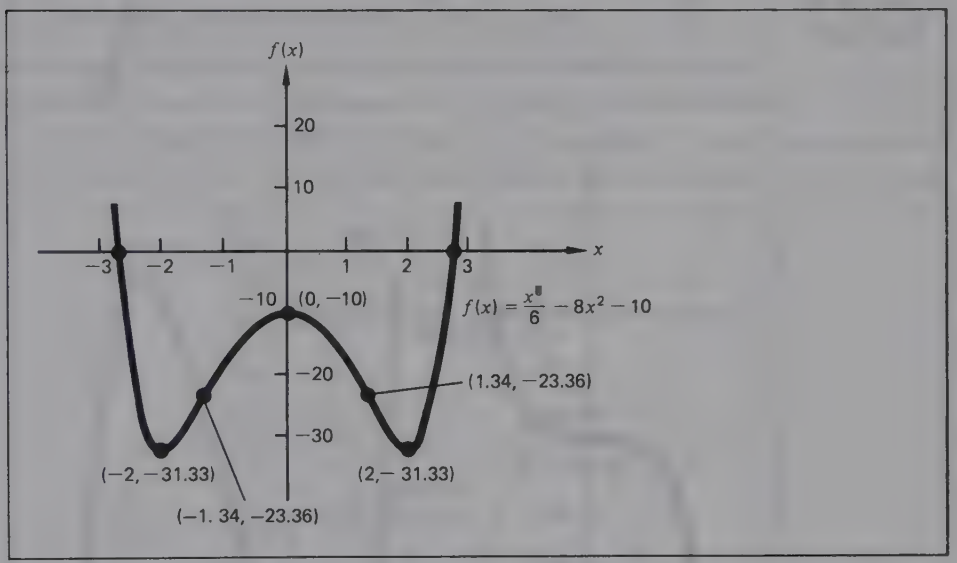


Sec. 14.4, Ejercicio 3

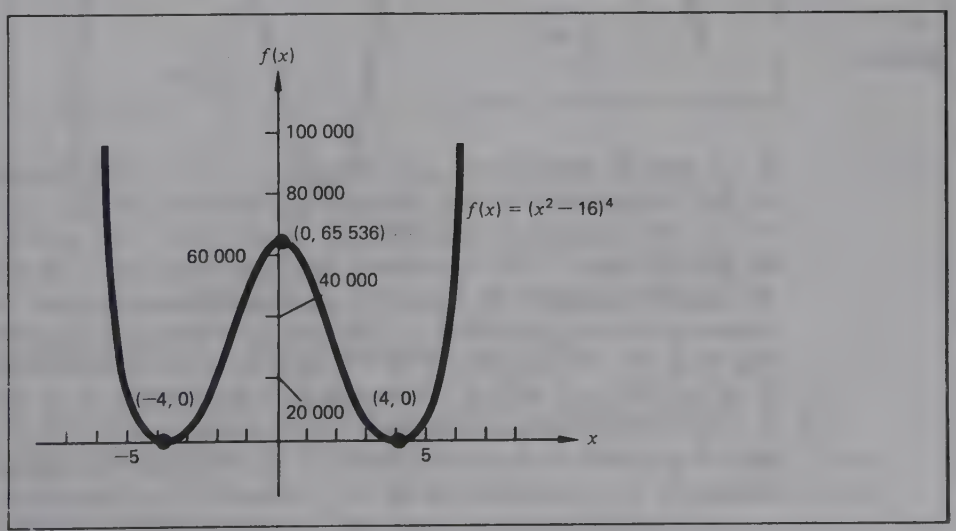
(3, 20.6); **7** máximo absoluto en $\left(4, 298\frac{2}{3}\right)$, mínimo absoluto en (0, 0); **9** máximo absoluto en (0.75, − 7.75), mínimo absoluto en (10, −350); **11** máximo absoluto en (10, 2, 116), mínimo absoluto en (5, 72.25); **13** máximo absoluto en (0, −10), mínimo absoluto en (6, −1082.8) **15** máximo absoluto en $\left(-5, 7\,291\frac{2}{3}\right)$, mínimo absoluto en (0, 0; **17** máximo absoluto en (16, 4), mínimo absoluto en (4, 2)

Sec. 14.4 **1-19** véanse las figuras

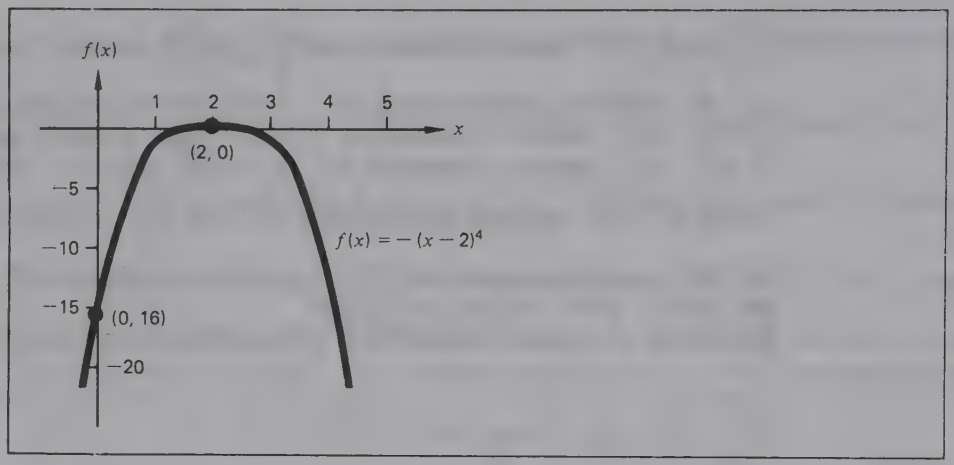
Sec. 14.5 **1** *a)* \$49, *b)* \$48 020; **3** *a)* 25 000 unidades, *b)* 50 000 000;



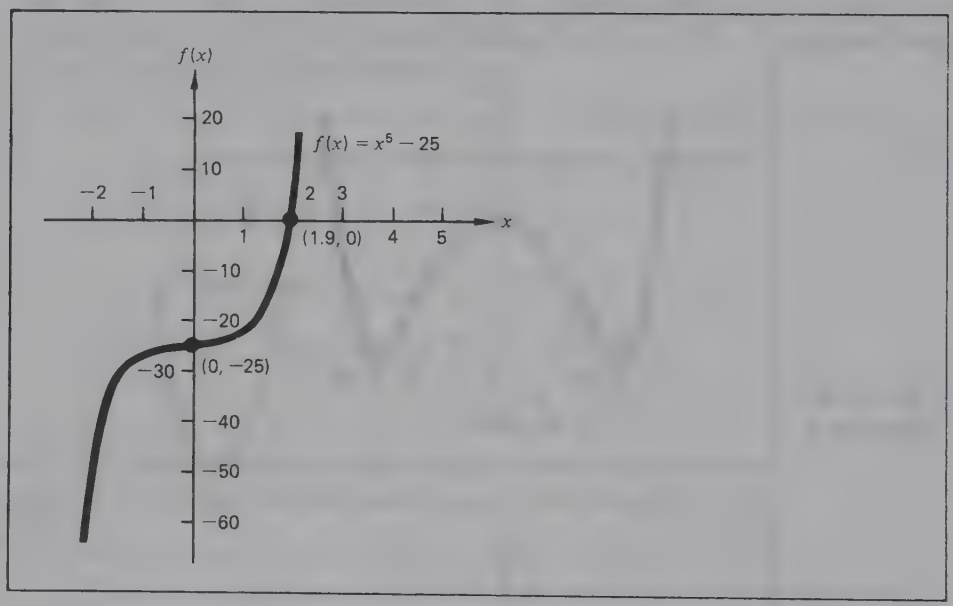
Sec. 14.4, Ejercicio 5



Sec. 14.4, Ejercicio 7



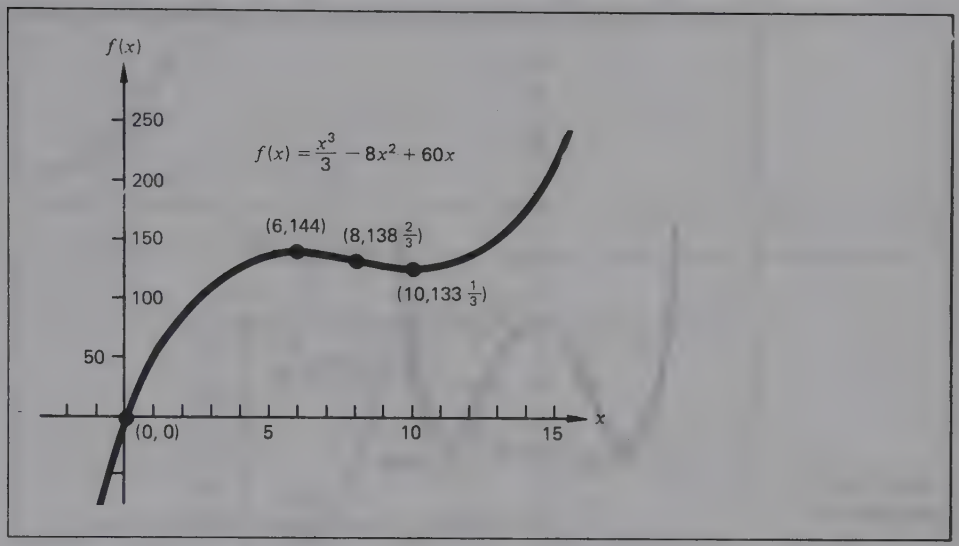
Sec. 14.4, Ejercicio 9



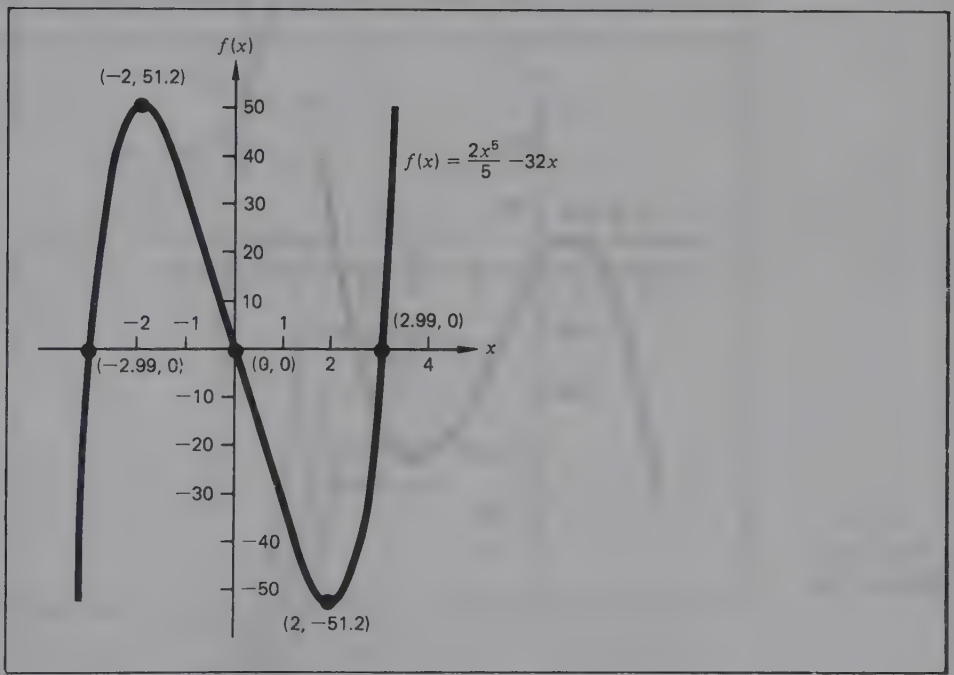
Sec. 14.4, Ejercicio 11

5 (*a*) \$20, (*b*) \$80 000 000, (*c*) 4 000 000; **7** (*a*) 225, (*b*) \$155 027.78, (*c*) \$27.78 más alto; **9** (*a*) 1 500 docenas, (*b*) \$220 833.33,(*c*) \$833.33 más alto; **11** (*a*) 2 000 unidades (*b*) \$16 000, (*c*) 32 000 000; **13** (*a*) 25, (*b*) \$26 250 000; **15** (*a*) 42 000 unidades (*b*) \$552, (*c*) \$8 470 000; **17** 40 000 unidades **19** (*a*) 4 878 unidades (*b*) \$47 561; **21** no puede usarse el enfoque marginal **23** (*a*) 2 000 units, (*b*) \$35 000;

Sec. 14.6 **1** 36′ por 36′; **3** $x = 200$, $y = 100$, $A = 20\,000$ metros cuadrados; **5** $x = 1\,200$, $y = 800$, $A = 960\,000$ pies cuadrados **7** $x = 73.33$; **9** (*a*) 70 710.68 millas (*b*) \$0.385, (*c*) \$10 514.72; **11** (*a*) $p = 100 - x$, (*b*) $0 \le x \le 100$, (*c*) $R = 5000 + 50x - x^2$, (*d*) 25, (*e*) 75, (*f*) \$5 625, (*g*) \$75, (*h*) no; **13** $x = 11.54$

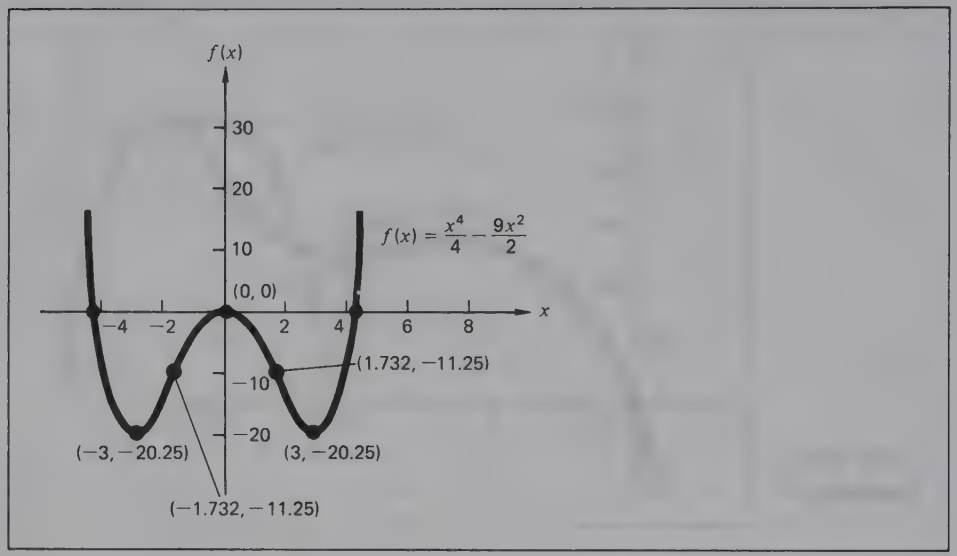


Sec. 14.4, Ejercicio 13

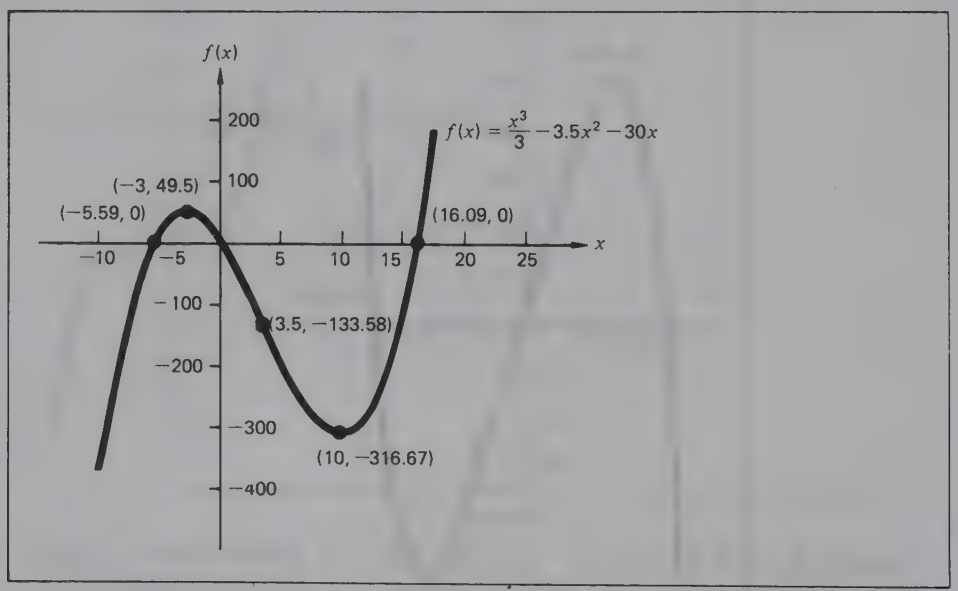


Sec. 14.4, Ejercicio 15

Prueba del capítulo **1** $x < 1.5$; **2** véase la figura; **3** mínimo en $\left(7, -129\frac{2}{3}\right)$, máximo en $(-3, 37)$; **4** $x = \pm\sqrt{2}$; **5** máximo en $\left(1, 1\frac{1}{6}\right)$, mínimo en $\left(-1, -2\frac{1}{6}\right)$; **6** véase la figura; **7** $R = 50\,000p - 7.5p^2$; **8** (*a*) $p = -5x^2 + 350x - 5\,000$, (*b*) $x = 35$ cientos, (*c*) \$1.125 cientos; **9** (*a*) 316.23′ por 316.23′, (*b*) \$12,649.20; **10** (*a*) $q = 200$, (*b*) \$50 200



Sec. 14.4, Ejercicio 17

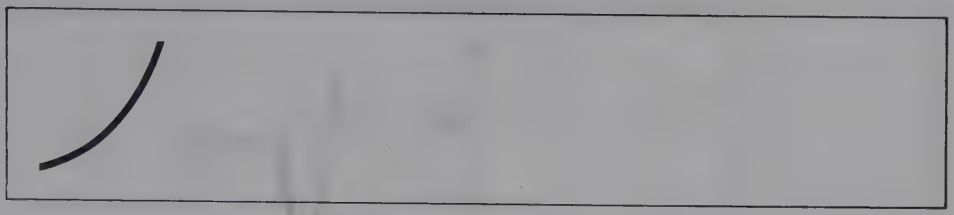


Sec. 14.4, Ejercicio 19

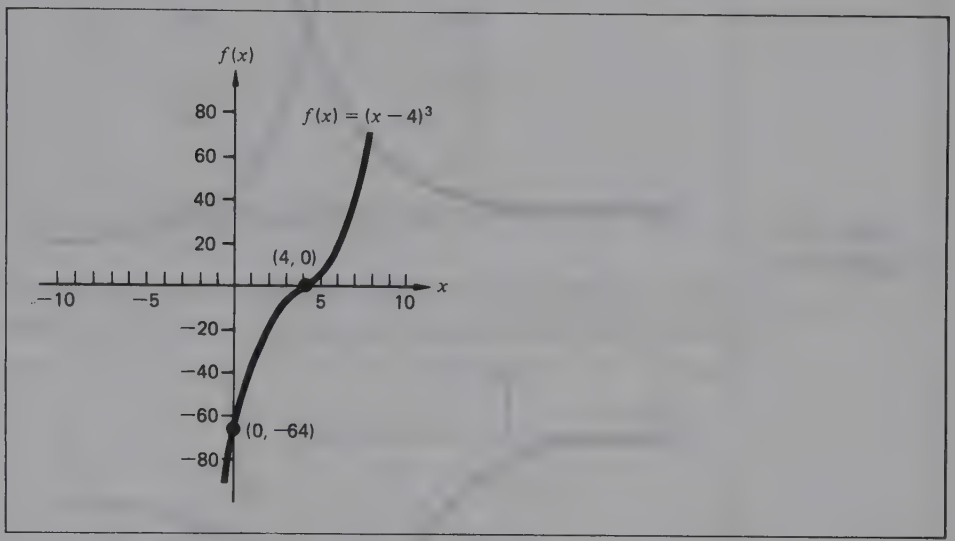
Capítulo 15

Sec. 15.1 **1** *a*), *b*), *c*), *e*), *g*) y *h*) son funciones exponenciales; **3** *a*) véase la figura, *b*) cuanto mayor sea la magnitud de a, más grande será la tasa de incremento en $f(x)$ a medida que aumenta el valor de x; **5** $f(0) = 1$, $f(-3) = 1/\sqrt{8} = 0.3535$, $f(1) = \sqrt{2} = 1.414$;
7 $f(0) = 1$, $f(-3) = \sqrt{e^3} = 4.482$, $f(1) = 1/\sqrt{e} = 0.6065$;
9 $f(0) = 1$, $f(-3) = e^{4.5} = 90.017$, $f(1) = \sqrt{e} = 1.649$;

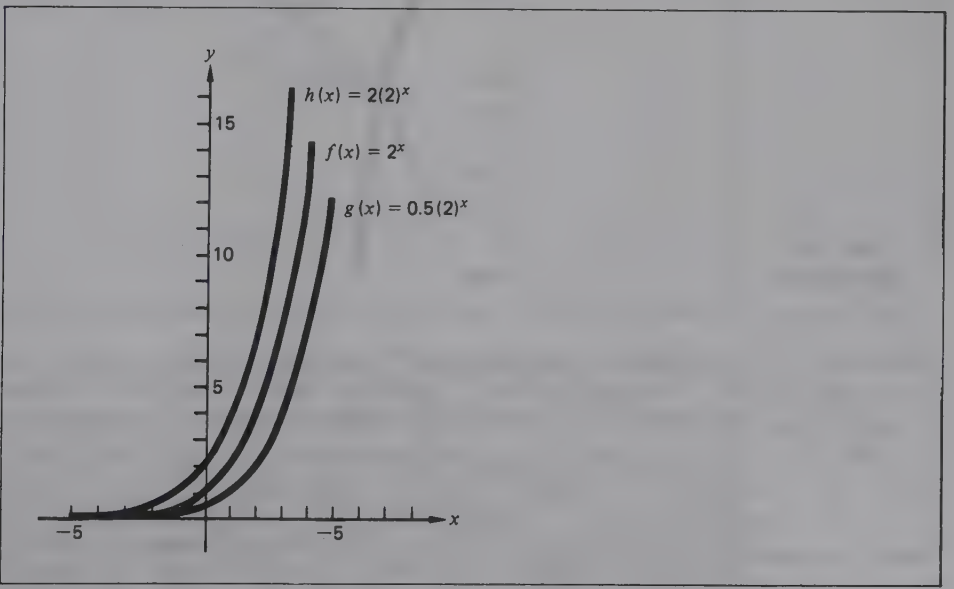
Capítulo 14, Prueba del capítulo, Problema 2

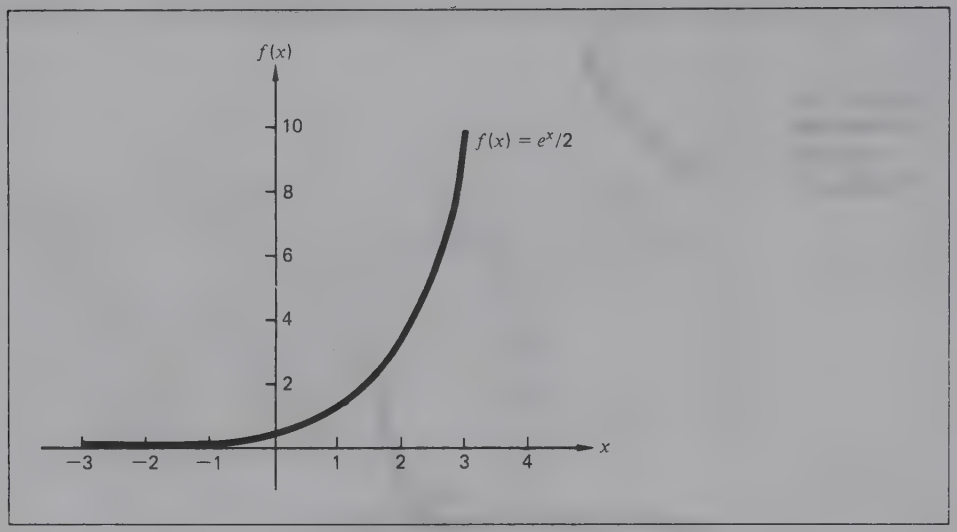


Capítulo 14, Prueba del capítulo, Problema 6

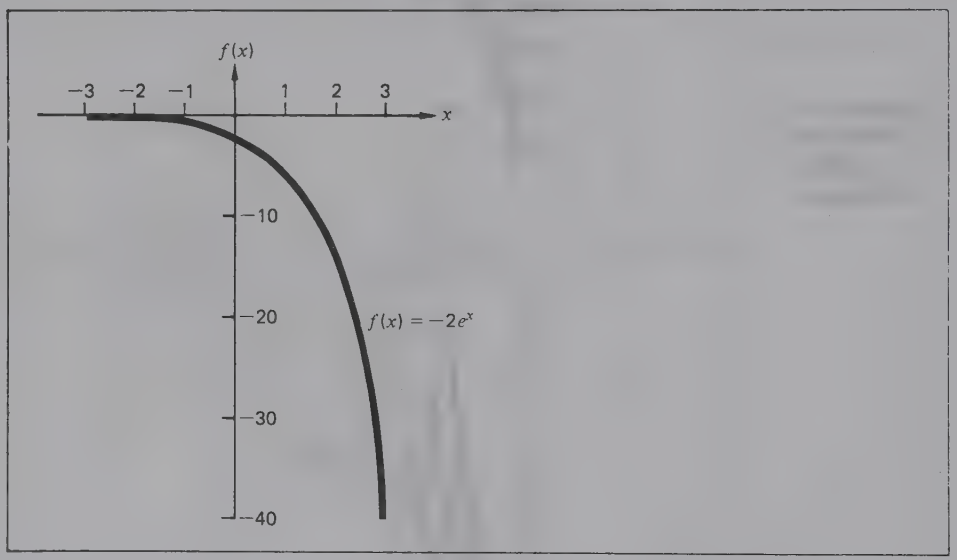


Sec. 15.1 Ejercicio 3 *a)*



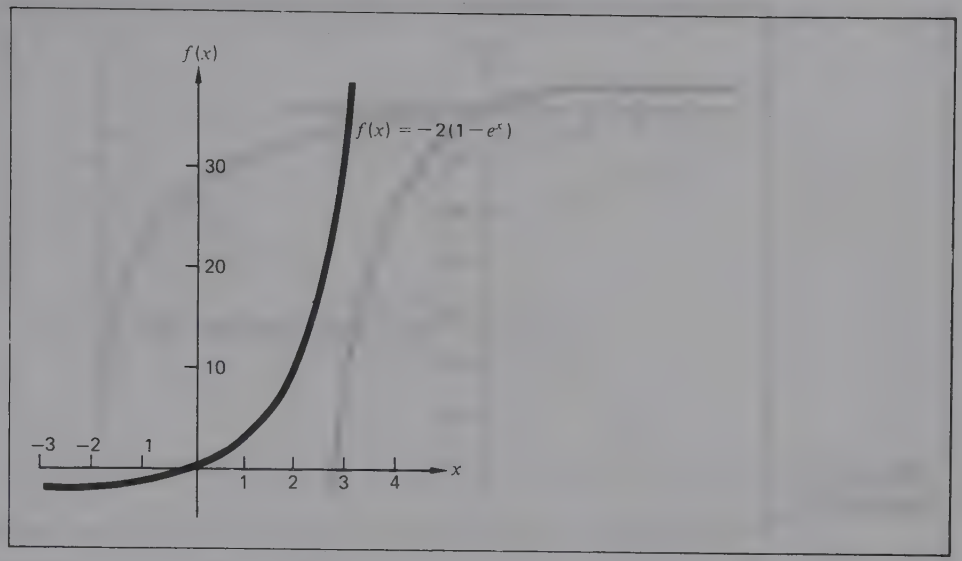


Sec. 15.1, Ejercicio 21

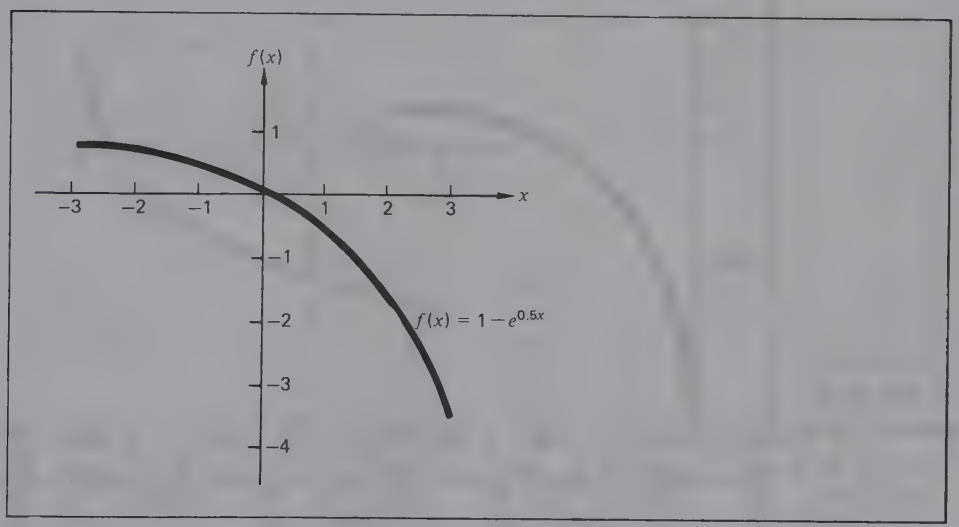


Sec. 15.1, Ejercicio 23

11 $f(0) = 0, f(-3) = 10(1 - e^{-6}) = 9.975, f(1) = 10(1 - e^{2}) = -63.89$; **13** $f(0) = 2.5, f(-3) = \dfrac{5e}{2} = 50.214$ $f(1) = \dfrac{5}{2e} = 0.9197$; **15** $f(0) = 81$, $f(-3) = 3^{-5} = 0.0041, f(1) = 27$; **17** $f(0) = 9, f(3) = 12 - 3e^{-6} = 11.99$, $f(1) = 12 - 3e^{2} = -10.167$; **19** $f(0) = -4, f(-3) = -4/e^{3} = -.199$, $f(1) = 4 - 4e = -6.873$; **21** véase la figura; **23** véase la figura; **25** véase la figura; **27** véase la figura; **29** véase la figura; **31** $f(x) = e^{0.69x^2}$; **33** $f(x) = e^{0.405x}$; **35** $f(t) = 10e^{-1.2t}$; **37** $f(t) = -2e^{4.5t}$; **39** $f(u) = 5e^{0.429u}$; **41** $f(z) = e^{3.91z}$; **43** $f(x) = e^{1.1x^2 - 0.347x}$



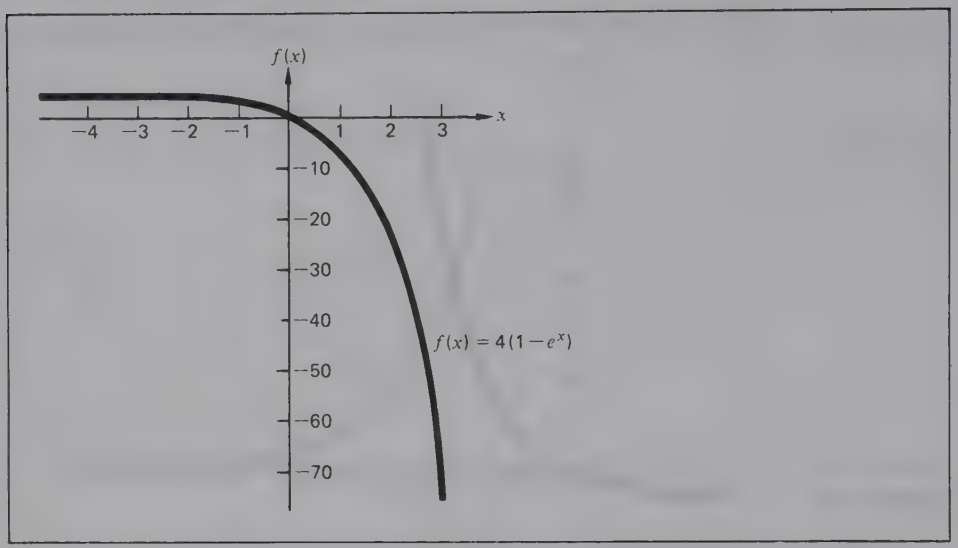
Sec. 15.1, Ejercicio 25



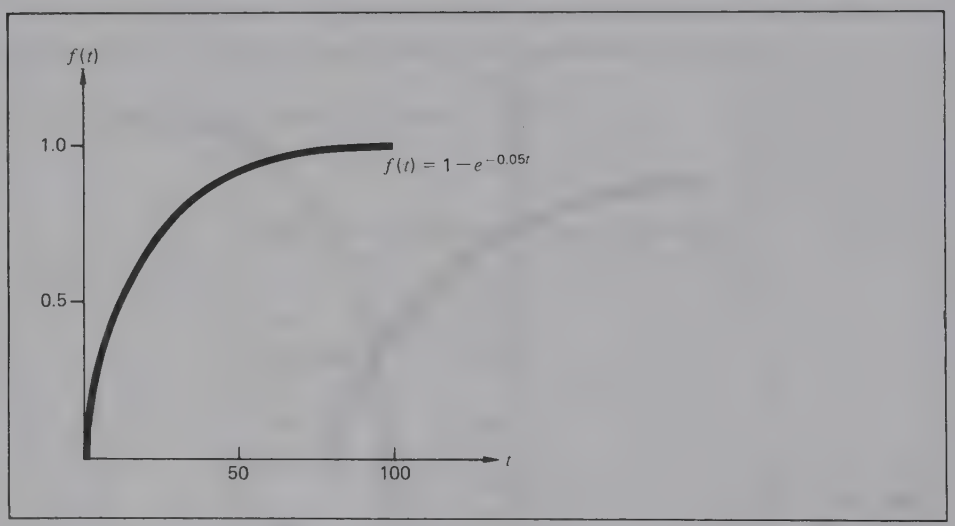
Sec. 15.1, Ejercicio 27

Sec. 15.2 **1** *a*) $S = 500\,000e^{.10t}$, *b*) \$824 360, \$1 359 140; **3** aproximadamente 6.93 años para duplicar, aproximadamente 13.86 años para cuadruplicar; **5** *a*) \$4 451 082, *b*) \$14 778 112, *c*) 5.07; **7** *a*) $P = f(t) = 50\,000\,000e^{.28t}$, donde $t = 0$ corresponde a 1 de enero de 1975, *b*) 76.098 millones, 100.687 millones; **9** *a*) 8055.01 toneladas, *b*) 5.79 años; **11** 27.73 años; **13** 11.55 30años; **15** *a*) 27.54%, 44.25%, (*b*) 70%; **17** (*a*) 4.88%, 22.12%, 39.35%, 63.21%, (*b*) véase la figura

Sec. 15.3 **1** $\frac{1}{2}e^x$; **3** $36xe^{x^2}$; **5** $2500e^{4x}$; **7** $3e^{x^2}(1 + 2x^2)$;



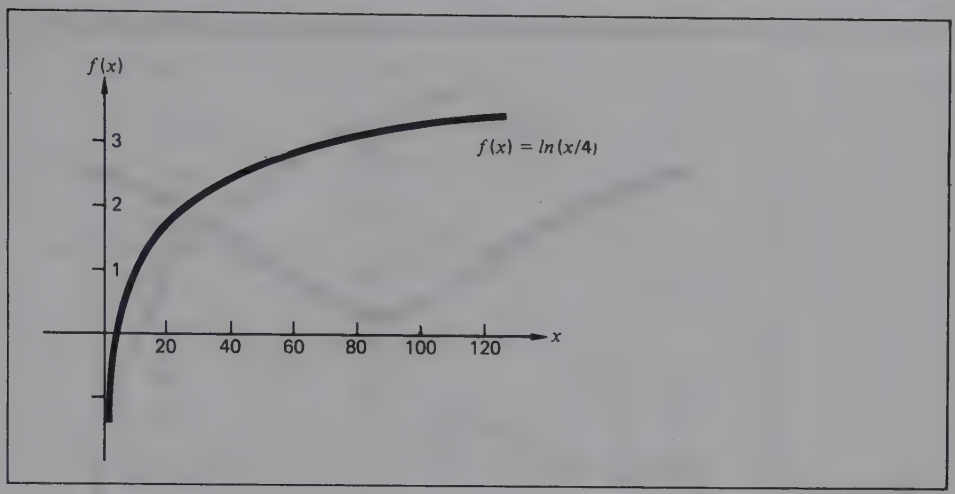
Sec. 15.1, Ejercicio 29



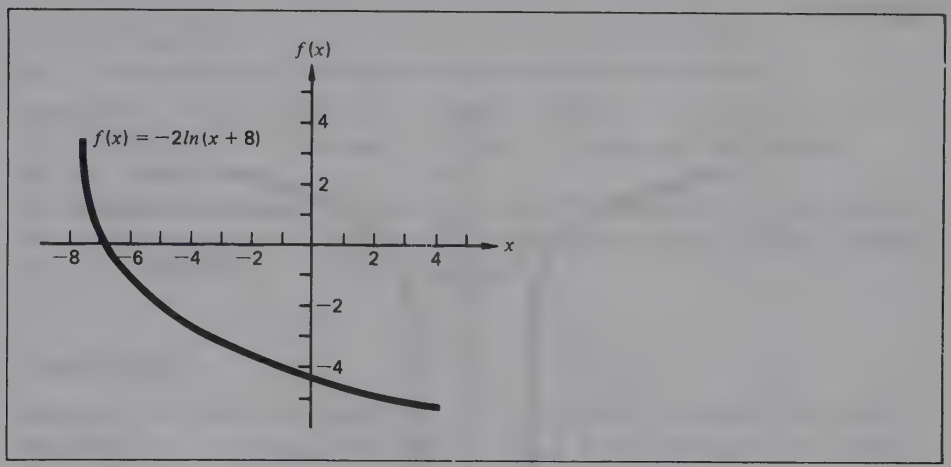
Sec. 15.2, Ejercicio 17(*b*)

9 $(xe^x - e^x)/x^2$; **11** $3e^{3x}$; **13** $(2x - 5)e^{x^2-5x}$; **15** $(2x^2 + 1) \cdot 10e^{x^2}$; **17** $-5x^3e^{1-x} + 15x^2e^{1-x}$; **19** $(2x^2e^{x^2} - 3e^{x^2})/x^4$; **21** $-5e^x(25 - e^x)^4$; **23** $0.2e^{0.05x}(1 - e^{-0.05x})^3$; **25** sin puntos críticos; **27** mínimo relativo en (0, 850); **29** sin puntos críticos; **31** máximo relativo en (−5.8, 3080.5); **33** máximo relativo en (34.66, 767.13); **35** sin puntos críticos; **37** *a*) aproximadamente 124.25 días, *b*) \$8 515 093, 91.67%; **39** 7.57, \$138 millones; **41** *a*) 500, *b*) \$7 357 590

Sec. 15.4 **1** $\log_2 32 = 5$; **3** $\log_6 1296 = 4$; **5** $\log_3 243 = 5$; **7** $\log_5 625 = 4$; **9** $\log_{10} 1\,000 = 3$; **11** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$;

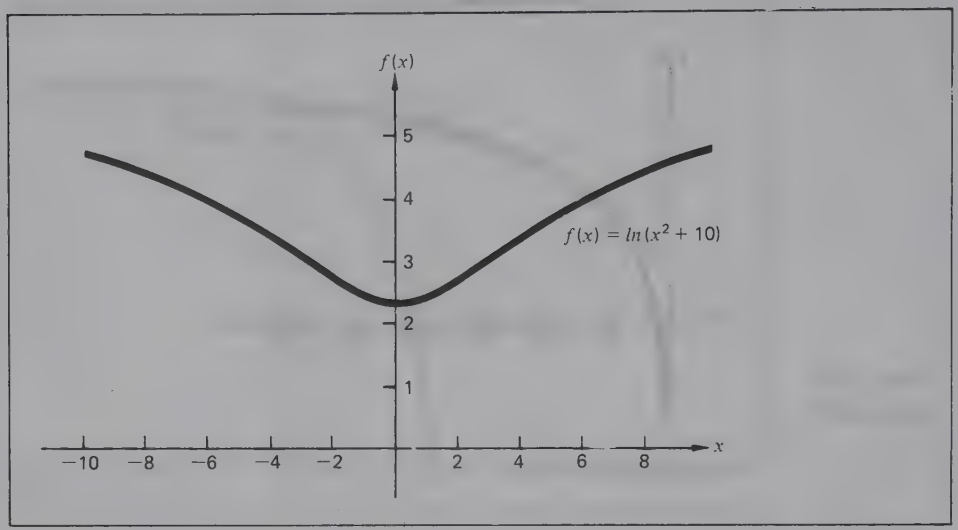


Sec. 15.4, Ejercicio 81

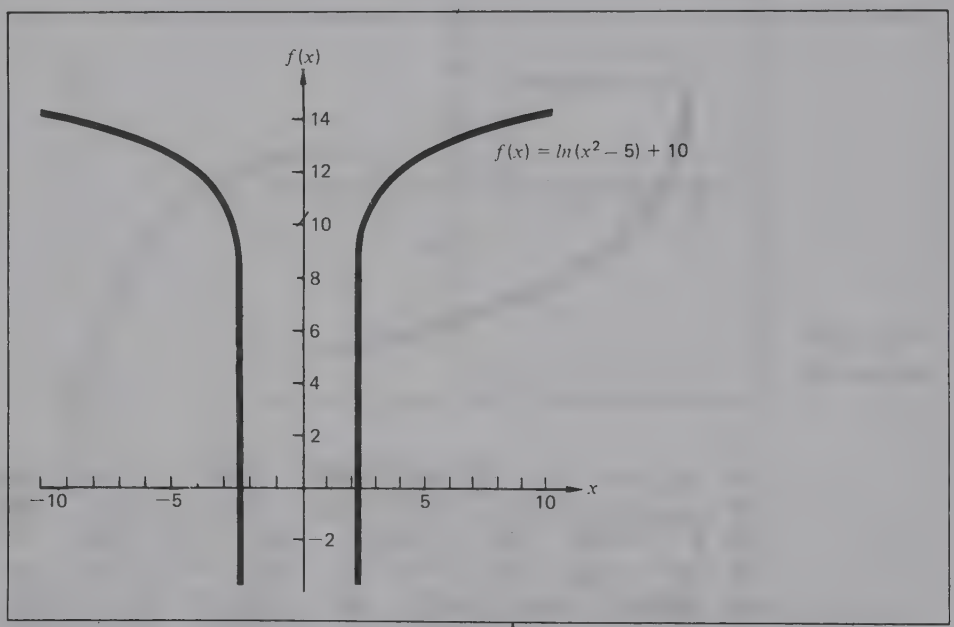


Sec. 15.4, Ejercicio 83

13 $\log_{.5} 8 = -3$; **15** $\log_{.1} 10\,000 = -4$; **17** $\log_4 .015625 = -3$;
19 $\log_{.25} 16 = -2$; **21** $2^6 = 64$; **23** $4^4 = 256$; **25** $3^4 = 81$;
27 $2^{-2} = 0.25$; **29** $5^4 = 625$; **31** $.1^{-3} = 1\,000$; **33** $.2^{-4} = 625$;
35 $.25^{-2} = 16$; **37** $e^{1.0986} = 3$; **39** $e^{2.9957} = 20$; **41** 3.6889;
43 5.2983; **45** 2.8622; **47** −.6931; **49** 5.0752; **51** 6.0521;
53 5.0106; **55** 7.3778; **57** 10.1266; **59** 6.9565;
61 $x = 2.7183$; **63** $x = 1$; **65** $x = 1.5415$; **67** $x = .9986$;
69 $x = \pm 2.0933$; **71** $x = 1.4979$; **73** $x = -2.1459$;
75 $x = 7.389, -7.389$; **77** $x = 1$; **79** $x = .18326$;
81 véase la figura; **83** véase la figura; **85** véase la figura; **87** véase la figura;
89 véase la figura **91** (*a*) $(e^{c/a} - b, 0)$, (*b*) $(a, a \ln b - c)$; **93** $\dfrac{1}{x}$;
95 $2x/(x^2 + 8)$; **97** $3x^2 \ln x + x^2$; **99** $\dfrac{28 \ln x - 28}{(\ln x)^2}$;

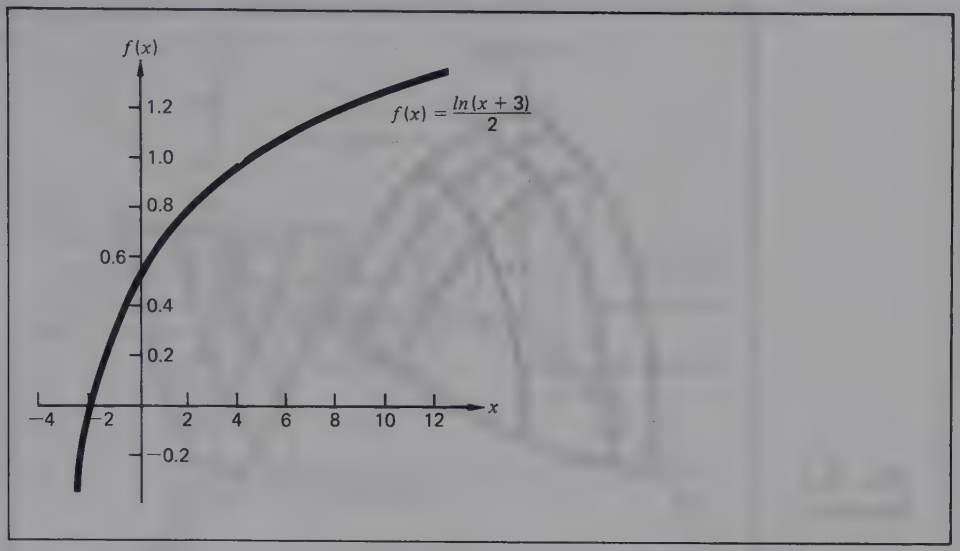


Sec. 15.4, Ejercicio 85



Sec. 15.4, Ejercicio 87

101 $\dfrac{20x - 18}{5x^2 - 6x}$; **103** $15x^2 \ln x + 5x^2$; **105** $6x \ln x^2 + 6x$; **107** $\dfrac{3[\ln(x - 5)]^2}{x - 5}$; **109** $\dfrac{-x - (15 - x)\ln(15 - x)}{x^2(15 - x)}$; **111** máximo relativo en $\left(\dfrac{1}{6}, -.6094\right)$; **113** máximo relativo $(1.414, -.1534)$; **115** mínimo relativo en (1, 4.5) y máximo relativo en 4, 6.4548); **117** mínimo relativo en (.6065, −.1839); **119** mínimo relativo en 1.6065, −.0917); **121** sin puntos críticos; **123** máximo relativo en (.7071, 2.043); **125** máximo relativo en (.6934, 2.4785)



Sec. 15.4, Ejercicio 89

Sec. 15.5 **1** (*a*) 7, (*b*) \$4.29; **3** $\eta = 5.3683$; **5** (*a*) $V_t = V_0 e^{.40t}$, (*b*) 1.73 horas; (*c*) 2.75 horas; **7** (*a*) 1.98 horas; (*b*) .822 horas; **9** $k = .0000347$

Prueba del capítulo **1** 12.13; **2** \$94 877, \$84 877; **3** $\log_3 6561 = 8$; **4** máximo relativo en $(0, e^3)$; **5** mínimo relativo en $(.3679, -.3679)$; **6** $N = 5\,000\,000(1 - e^{-.075x}) - 6000x$

Capítulo 16

Sec. 16.1 **1** véase la figura; **3** véase la figura; **5** véase la figura;

Sec. 16.2 **1** $f_x = 16x, f_y = -48y^2$; **3** $f_x = 36x + 7y, f_y = 7x + 12y$;

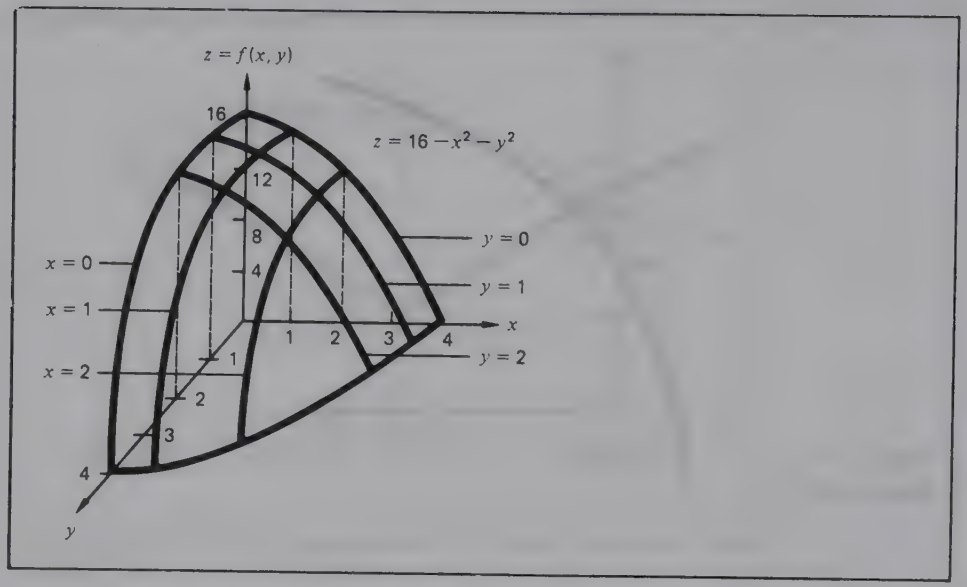
5 $f_x = 5x^4y^3, f_y = 3x^5y^2$; **7** $f_x = 10x + y, f_y = x + 60y^2$; **9** $f_x = \dfrac{1}{x^2y}$, $f_y = \dfrac{1}{xy^2}$; **11** $f_x = 15x^2 + 4xy^5 + 40y, f_y = 40x + 10x^2y^4 + 96y^5$;

13 $f_x = 5(x + y)^4, f_y = 5(x + y)^4$; **15** $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

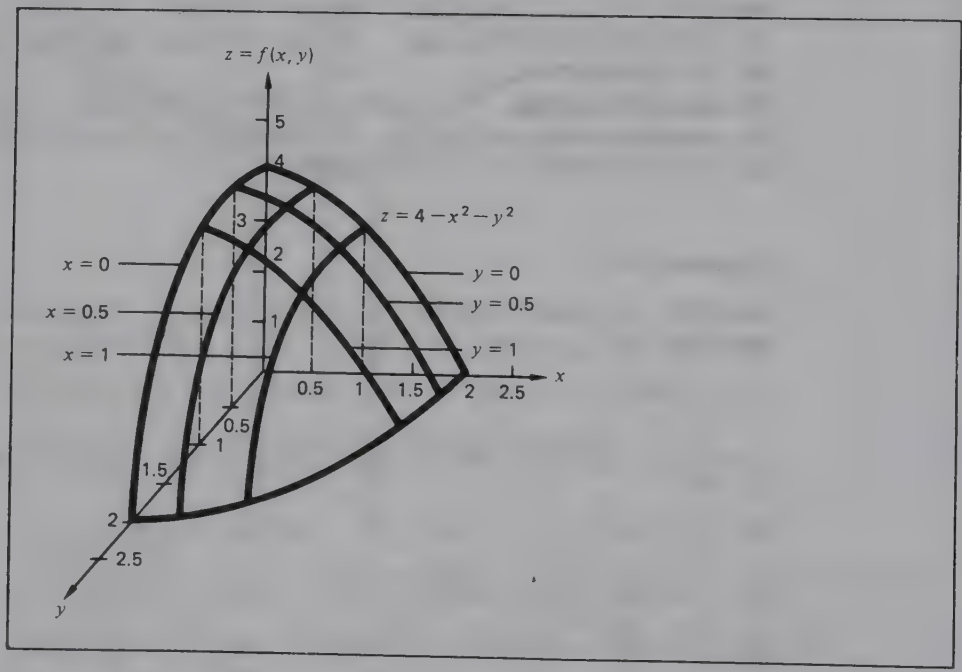
17 $f_x = \dfrac{\ln(y + 4)}{x + 15}, f_y = \dfrac{\ln(x + 15)}{y + 4}$; **19** $f_x = 15x^2e^{5x^3-2y^2}, f_y = 4ye^{5x^3-2y^2}$;

21 $f_x = 10x^4 - 15x^2y^2, f_y = -10x^3y$; **23** $f_x = -12x^2 + 6y^2$, $f_y = 12xy + 3y^2$; **25** $f_x = \dfrac{12x}{5y^3}, f_y = -\dfrac{18x^2}{5y^4}$; **27** $f_x = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3y}{x^4}$, $f_y = \dfrac{1}{x^3}$; **29** $f_x = \dfrac{-3x^2 - 6xy}{(x + y)^2}, f_y = \dfrac{3x^2}{(x + y)^2}$, **31** $f_x = 4(x + y)^3$, $f_y = 4(x + y)^3$; **33** $f_x = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2y^2)^2}}, f_y = -\dfrac{4y}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2y^2)^2}}$;

35 $f_x = \dfrac{2x}{x^2 - y^2}, f_y = \dfrac{-2y}{x^2 - y^2}$; **37** $f_x = 2xye^{x^2y}, f_y = x^2e^{x^2y}$;

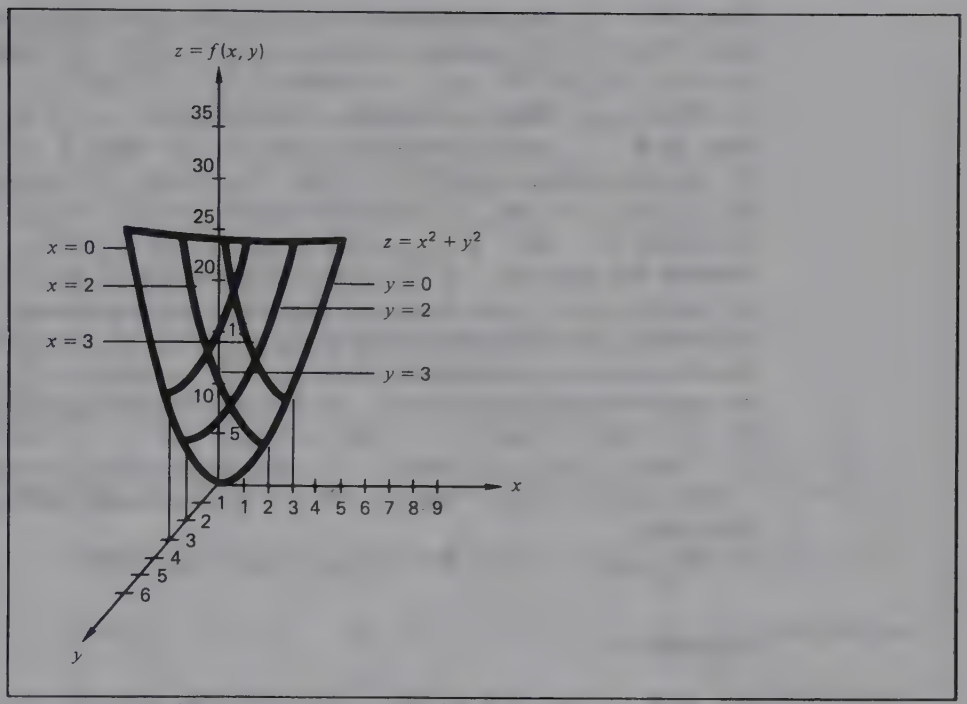


Sec. 16.1, Ejercicio 1



Sec. 16.1, Ejercicio 3

39 $f_x = e^x \ln y, f_y = \dfrac{e^x}{y}$; **41** $f_{xx} = 4, f_{yy} = 18y, f_{xy} = f_{yx} = 0$:
43 $f_{xx} = 12x, f_{yy} = 18, f_{xy} = f_{yx} = 3$; **45** $f_{xx} = 6xy^3, f_{yy} = 6x^3y$, $f_{xy} = f_{yx} = 9x^2y^2$; **47** $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx} = e^{x+y}$; **49** $f_{xx} = y^2e^{xy}$, $f_{yy} = x^2e^{xy}, f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} + xye^{xy}$; **51** $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx} = 12(x + y)^2$;
53 $f_{xx} = 12x^2y^6, f_{yy} = 30x^4y^4, f_{xy} = f_{yx} = 24x^3y^5$; **55** $f_{xx} = 0, f_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$,



Sec. 16.1, Ejercicio 5

$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{y^2}$; **57** $f_{xx} = \frac{75}{4\sqrt{5x - 10y}}, f_{yy} = \frac{75}{\sqrt{5x - 10y}}$, $f_{xy} = f_{yx} = -\frac{75}{2\sqrt{5x - 10y}}$; **59** $f_{xx} = -\frac{2}{x^2}, f_{yy} = -\frac{3}{y^2}, f_{xy} = f_{yx} = 0$; **61** *a*) 136 000, *b*) +3600, *c*) cambio real +3800, *d*) cambio proyectado +11 800, cambio real + 12 100; **63** *a*) 189 000, *b*) −900, *c*) +2400, *d*) mejor invertidos en la radio; **65** *a*) $f_{p_1} = -p_1, f_{p_2} = 2p_2, f_{p_3} = -.8p_3$, *b*) $f_{p_1} = -30, f_{p_2} = 20, f_{p_3} = -16$, *c*) los productos 1 y 3 parecen ser complementarios, mientras que el producto 2 parece ser competidor

Sec. 16.3 **1** mínimo relativo en (−20, −20, −1190); **3** punto en silla de montar en (0, −3, −54), mínimo relativo en (5, −3, −74.83); **5** mínimo relativo en (−1, 1, −3); **7** mínimo relativo en (2, −8, −70) y punto en silla de montar en (−2, −8, −38); **9** punto en silla de montar en (0, 0, 0) y mínimo relativo en (1, 1, −1); **11** punto en silla de montar en (1.414, −.707, −10.15); **13** mínimo relativo en (−2, 1.5, −7.5); **15** punto en silla de montar en (2, −6, 358) y (−1, 5, −280.5), mínimo relativo en (2, 5, −307.5), máximo relativo en (−1, −6, 385); **17** mínimo relativo en (−2.5, 3, −46.5); **19** punto en silla de montar en (0, 0, 0) y máximo relativo en $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{432}\right)$; **21** punto en silla de montar en (2, −0.5, −9.8068); **23** máximo relativo en (3, −2, 30) y punto en silla de montar en (3, 2, −2)

Sec. 16.4 **1** *a*) x = \$4000 (miles), y = \$2000 (miles), *b*) 200 000 000; **3** *a*) $p_1 = 20, p_2 = 5$, *b*) $q_1 = 90$ (miles), $q_2 = 35$ (miles), *c*) \$1 975 000; **5** $x = -8.75, y = 15$; **7** $y = -5x + 17$

Sec. 16.5 **1** sin conclusión sobre el punto crítico situada en (−.15, .25, .05, −0.075); **3** mínimo relativo en (0, 0, 0, 2); **5** máximo relativo en (0, 0, 0, 25); **7** *a*) $p_1 = \$9666.67$, $p_2 = \$7500$, $p_3 = \$9833.34$, *b*) $q_1 = 2000$, $q_2 = 3000$, $q_3 = 2500$, *c*) \$66 416 690

Sec. 16.6 **1** máximo relativo en (48, 52, 37 600), $\lambda = 752$; **3** máximo relativo en (33, 9, 1926), $\lambda = +93$; **5** máximo relativo en (9, 7, 528), $\lambda = 66$; **7** mínimo relativo en (1.6, −2.24, −1.92, 12.6976), $\lambda = .96$; **9** $q_1 = 50$, $q_2 = 150$, ($\lambda = 350$)

Prueba del capítulo **1** *a*) cambio instantáneo de $f(x, y)$, si se produce un cambio en x, y que se supone que deberían mantenerse constantes, *b*) f_x representa una expresión general de la pendiente de la tangente de la familia de trazos que son paralelos al plano xz; **2** cuando $z = f(x, y)$, un trazo es la representación gráfica de $f(x, y)$, si una variable se mantiene constante; **3** $f_x = 45x^2 - 10xy^3$, $f_y = -08y + 15x^2y^2$; **4** $f_{xx} = 160x^3 + 16y^3 + 12$, $f_{yy} = 48x^2y$, $f_{xy} = f_{yx} = 48xy^2$; **5** *a*) mínimo relativo cuando $x = 1$ y $y = 3.5$, *b*) $f(1, 3.5) = -20.75$; **6** 20 acres de soya, 200 acres de maíz. \$400 000;
7 $L(x_1, x_2, \lambda) = -4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - \lambda(x_1 - 2x_2 - 20)$

Capítulo 17

Sec. 17.1 **1** $30x + C$; **3** $\frac{1}{4}x + C$; **5** $3x^2 + C$; **7** $\frac{x^3}{3} + C$;

9 $\frac{x^4}{12} + C$; **11** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$; **13** $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + C$;

15 $x^3 + 10x + C$; **17** $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + x + C$; **19** $2x^4 - x^3 + C$;

21 $4x^4 - 2x^3 + 12x + C$; **23** $x^5 - 4x^3 - 5x + C$;

25 $2x^5 - 2x^4 + \frac{3x^2}{2} + C$; **27** $\frac{x^5}{10} + C$; **29** $2x^6 - 2x^3 + C$;

31 $f(x) = 25x - 5$; **33** $f(x) = 10x^2 - 10$; **35** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 17$;

37 $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 11$; **39** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 53$;

41 $f(x) = 4x^3 + x^2 + 48$; **43** $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3$;
45 $f(x) = 2x^4 - x^3 + 24$; **47** $f(x) = -x^4 - 5x^2 + 76$;
49 $f(x) = x^6 - 2x^3 + 16$; **51** $R = 40\,000x - x^2$;
53 $P = -2x^2 + 850x - 50\,000$

Sec. 17.2 **1** $80x + C$; **3** $\frac{1}{4}x + C$; **5** $3x^2 + C$; **7** $-\frac{5}{2}x^2 + C$;

9 $2x^2 - 6x + C$; **11** $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + C$; **13** $2x^3 - 2x^2 + 5x + C$;

15 $-x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + C$; **17** $x^4 - 2x^3 - 5x + C$;

19 $\frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + 5x + C$; **21** $\frac{4}{5}x^{5/4} + C$; **23** $-\frac{1}{3x^3} + C$;

25 $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx + C$; **27** $\frac{a}{b}\frac{x^{1-n}}{(1-n)} + C, n \neq 1$;

29 $\frac{x^{1-n}}{1-n} + C, n \neq 1$; **31** $3x^{4/3} + C$; **33** $\frac{5}{9}x^{9/5} + C$;

35 $x^{4/3} + C$; **37** $-\frac{1}{4x^4} + C$; **39** $-\frac{10}{x} + C$;

41 $2\sqrt{x} + C$; **43** $-\frac{25}{4}x^{4/5} + C$;

45 $\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^2}{2} + ex + C$; **47** $ax^4 + bx^3 + cx^2 + C$;

49 $\frac{x^{1-n}}{a(1-n)} + C, n \neq 1$

Sec. 17.3 **1** $\frac{(x+25)^4}{4} + C$; **3** $\frac{(5x-10)^5}{5} + C$; **5** $\frac{\left(\frac{x}{3} - 5\right)^4}{4} + C$;

7 no puede hacerse; **9** $\frac{1}{4}(x^2+8)^4 + C$; **11** $\frac{1}{48}(4x^3+15)^4 + C$;

13 $\frac{1}{20}(2x^2+4x)^5 + C$; **15** $4\sqrt{x^2+3} + C$; **17** no puede hacerse;

19 no puede hacerse; **21** $\frac{1}{9}(2x^3-5)^{3/2} + C$; **23** $\frac{(2x^2-8x)^7}{28} + C$;

25 no puede hacerse; **27** no puede hacerse; **29** $\frac{1}{2}e^{2x} + C$;

31 $\frac{1}{a}e^{ax} + C$; **33** $\frac{1}{2}\ln(x^2+5) + C$; **35** $2\ln(6x+5) + C$;

37 $\frac{1}{a}\ln(ax+b) + C$; **39** $\ln(ax^2+bx) + C$

Sec. 17.4 **1** ordinaria, de primer orden, primer grado; **3** ordinaria, de segundo orden, tercer grado; **5** parcial, de primer orden, primer grado; **7** parcial, de segundo orden, primer grado; **9** ordinaria, de primer orden, segundo grado;

11 ordinaria, de segundo orden, tercer grado; **13** $y = \frac{1}{5}x^5 + x^2 + 6x + C$;

15 $y = \ln x + C$; **17** $y = \frac{1}{2}\ln(5x^2+10) + C$;

19 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$;

21 $y = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + C_1x + C_2$; **23** $y = e^x + C_1x + C_2$;

25 $y = e^x + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$; **27** $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$;

29 $y = \frac{1}{4}(x^2+15)^4 + C$; **31** $y = x^2 + C, y = x^2 - 50$;

33 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x + C, y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x - \frac{7}{3}$:

35 $y = x^3 + 9x^2 + C_1x + C_2$, $y = x^3 + 9x^2 - 175x + 336$;
37 $y = e^{5x} + C_1x + C_2$, $y = e^{5x} + (4 - 5e^{40})x - 3$;
39 $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + C_1x + C_2$, $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 16x + 48$;
41 $p = 600e^{.45815t}$; **43** $p = 50\,000e^{-.04463t}$

Sec. 17.5 **1** $-xe^{-x} - e^{-x} + C$; **3** $\frac{3x(x+1)^{4/3}}{4} - \frac{9(x+1)^{7/3}}{28} + C$;
5 $\frac{x(e^{2x})}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$; **7** $\left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - 4x + C$;
9 $\frac{x(x+2)^5}{5} - \frac{(x+2)^6}{30} + C$; **11** $2x(x-3)^{1/2} - \frac{4}{3}(x-3)^{3/2} + C$;
13 $\frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$; **15** $-8\ln(x+3) + 7\ln(x+2) + C$;
17 $-2\ln(x-1) - \frac{5}{x-1} + C$; **19** $-4\ln x + 4.75\ln(x+4) +$
$4.25\ln(x-4) + C$; **21** $6\ln x - 2\ln(x-1) + C$;
23 $\frac{x^5}{5}\ln(10x) - \frac{x^5}{25} + C$; **25** $\left[\frac{\ln x}{-2} - \frac{1}{4}\right]\Big/x^2 + C$; **27** $x(\ln x)^2 -$
$2x\ln x + 2x + C$; **29** $x^5\left[\frac{\ln x}{5} - \frac{1}{25}\right] + C$; **31** $\frac{e^{2.5x}}{2.5} + C$;
33 $\frac{e^{5x}}{25}(5x-1) + C$; **35** $\frac{x}{5} - \frac{1}{10}\ln(5 + 3e^{2x}) + C$

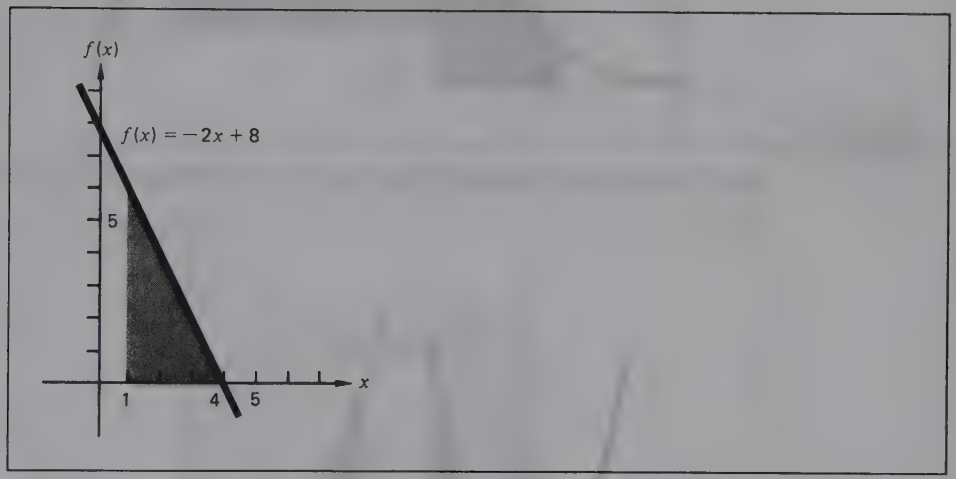
Prueba del capítulo 1 $f(x) = x^4 + x^2 - 20x - 350$; **2** (*a*) $-\frac{3}{2}x^{-2/3} + C$,
(*b*) $\frac{1}{24}(x^4 + 10)^6 + C$, (*c*) $-e^{-10x}/10 + C$; **3** $y = \frac{x^3}{6} + 3x^2 + C_1x + C_2$,
$y = \frac{x^3}{6} + 3x^2 + 10x - 56.5$; **4** $R = 220\,000x - 9x^2$;
5 $\frac{xe^{10x}}{10} - \frac{e^{10x}}{100} + C$; **6** $10\ln(x-3) + 10\ln(x+2) + C$

Capítulo 18

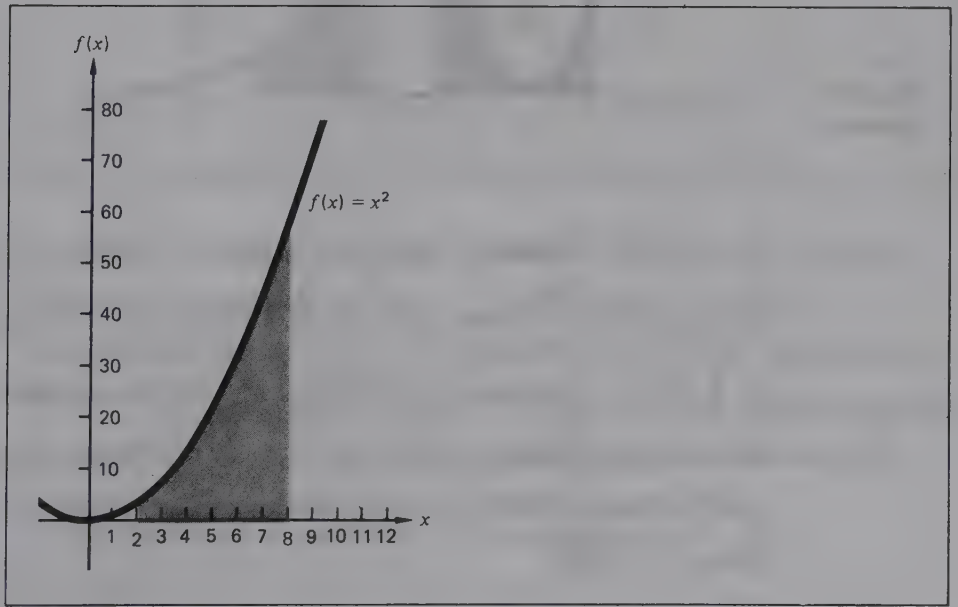
Sec. 18.1 **1** 8; **3** 3; **5** 6; **7** 22.5; **9** $341\frac{1}{3}$;
11 0.9808; **13** −8 048.49 **15** 0; **17** 0; **19** 14; **21** 50;
23 $20\frac{1}{3}$; **25** $10\frac{2}{3}$; **27** −38; **29** 19.0855; **31** 0.69315;
33 36; **35** 3 269 016.36; **37** 136; **39** 6.9315; **41** 1.4385;
43 0.7675; **45** 0.2496; **47** $2m + 2b$; **49** $24\frac{2}{3}$; **51** $-37\frac{1}{3}$;
53 $22\frac{1}{2}$; **55** 52; **57** 16.50; **59** 19.0855

Sec. 18.2 **1** (*a*) véase la figura, (*b*) 9; **3***a*) véase la figura, (*b*) 168; **5** (*a*) véase la figura, (*b*) 180; **7** (*a*) véase la figura, (*b*) $93\frac{1}{3}$; **9** (*a*) véase la figura, (*b*) $38\frac{1}{3}$; **11** (*a*) véase la figura, (*b*) 17.367; **13** (*a*) véase la figura, (*b*) $44\frac{1}{3}$; **15** (*a*) véase la figura, (*b*) $3\ 666\frac{2}{3}$; **7** (*a*) véase la figura, (*b*) 4 443,027.95; **19** (*a*) véase la figura, (*b*) 0.6931;

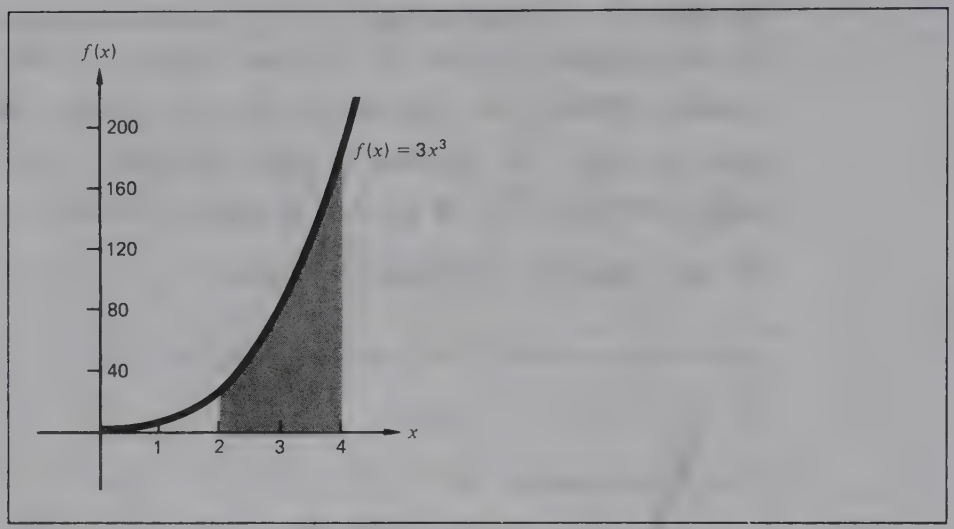
21 (*a*) $\int_0^a g(x)\,dx$, (*b*) $-\int_0^a f(x)\,dx$, (*c*) $\int_a^c f(x)\,dx$ –



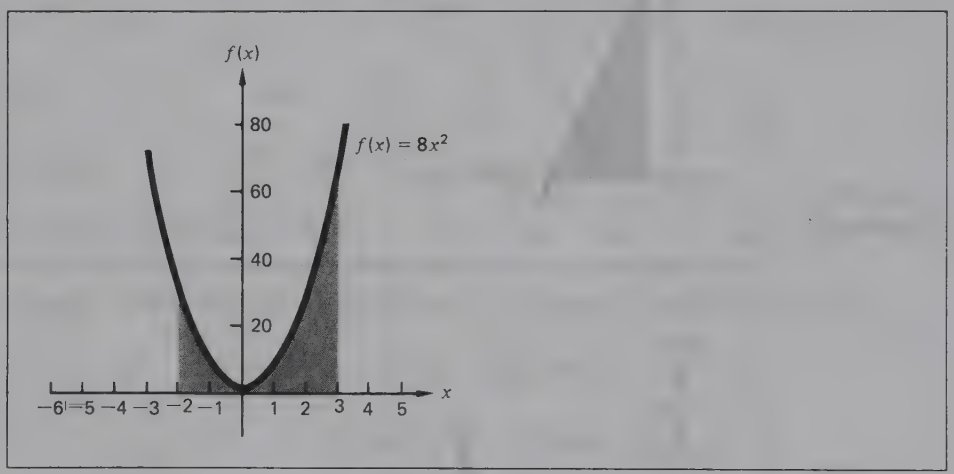
Sec. 18.2, Ejercicio 1



Sec. 18.2, Ejercicio 3

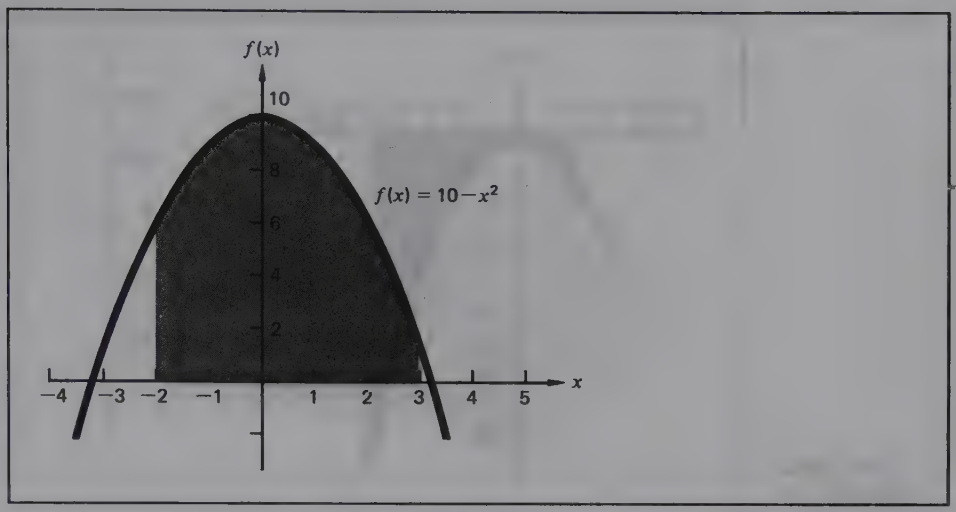


Sec. 18.2, Ejercicio 5

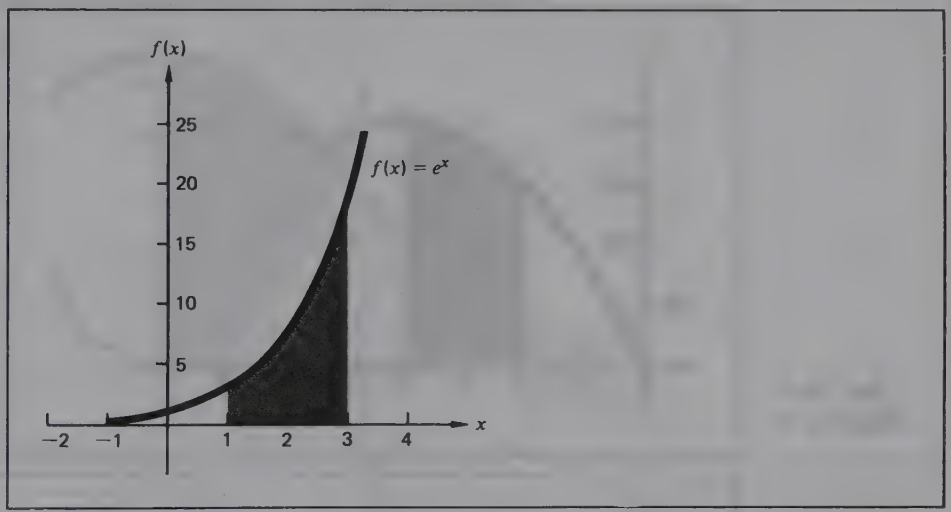


Sec. 18.2, Ejercicio 7

$\int_b^c g(x)\,dx$, (*d*) $-\int_a^b g(x)\,dx$; **23** (*a*) $\int_0^b h(x)\,dx - \int_0^a g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$, (*b*) $\int_0^a g(x)\,dx$, (*c*) $-\int_0^a f(x)\,dx$, (*d*) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c k(x)\,dx$, (*e*) $-\int_a^c g(x)\,dx$, (*f*) $\int_b^d f(x)\,dx - \int_b^c h(x)\,dx - \int_c^d g(x)\,dx$; **25** (*a*) véase la figura, (*b*) 54; **27** (*a*) véase la figura, (*b*) 24; **29** (*a*) véase la figura, (*b*) $333\frac{1}{3}$; **31** (*a*) véase la figura, (*b*) 8; **33** (*a*) véase la figura, (*b*) $21\frac{1}{3}$; **35** (*a*) véase la figura, (*b*) 85.896

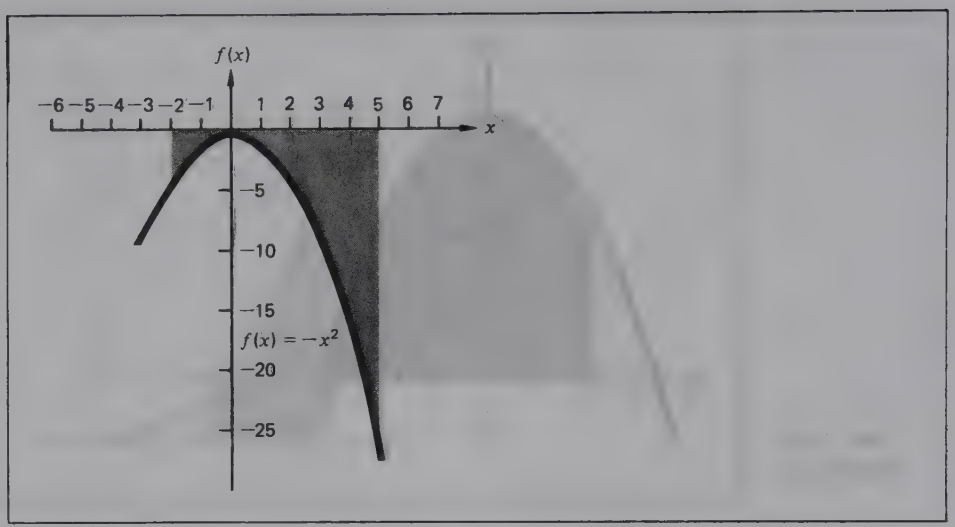


Sec. 18.2, Ejercicio 9

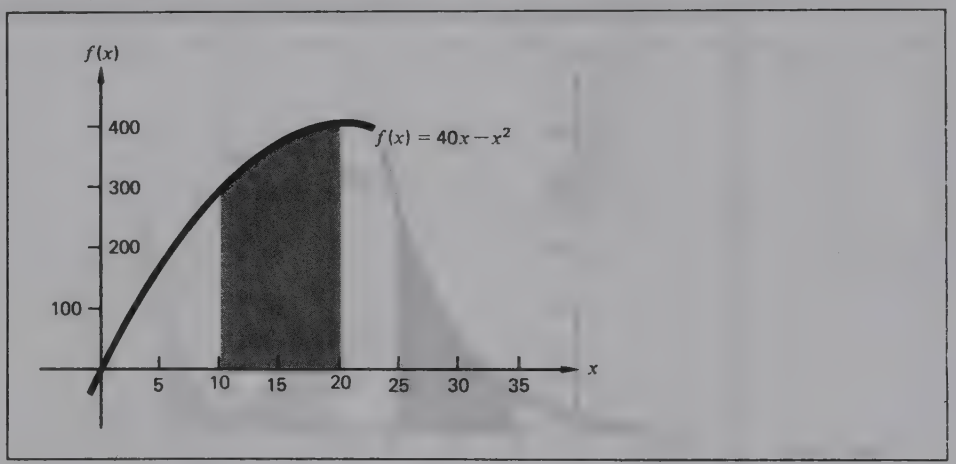


Sec. 18.2, Ejercicio 11

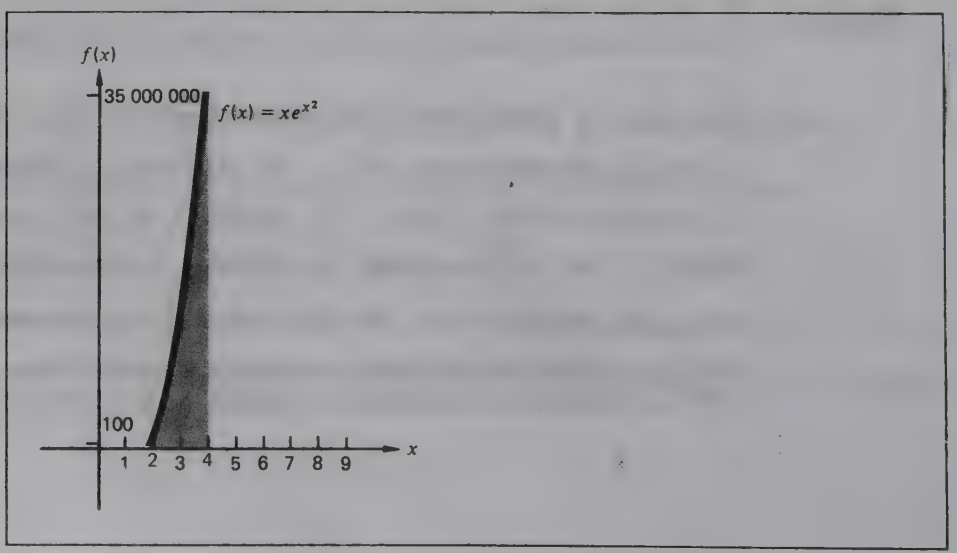
Sec. 18.3 **1** (*a*) 21, (*b*) $21\frac{1}{3}$, (*c*) sobrestimada en $\frac{1}{3}$; **3** (*a*) 15.5, (*b*) 16, (*c*) sobrestimada en 0.5; **5** (*a*) 51.428, (*b*) 53.598, (*c*) sobrestimada en 2.170; **7** (*a*) 22.375, (*b*) $22\frac{2}{3}$, (*c*) sobrestimada en 0.2917; **9** (*a*) 2 900 099.24, (*b*) 3 025 680, (*c*) 125 580.76 (sobrestimada); **11** (*a*) 52, (*b*) 52, (*c*) 0; **13** (*a*) 31, (*b*) $30\frac{2}{3}$, (*c*) sobrestimada en $\frac{1}{3}$; **15** (*a*) 115.9839, (*b*) 107.1963, (*c*) sobrestimada en 8.7876; **17** (*a*) 4 022,336, (*b*) 3 029,184, (*c*) sobrestimada en 993 152;



Sec. 18.2, Ejercicio 13

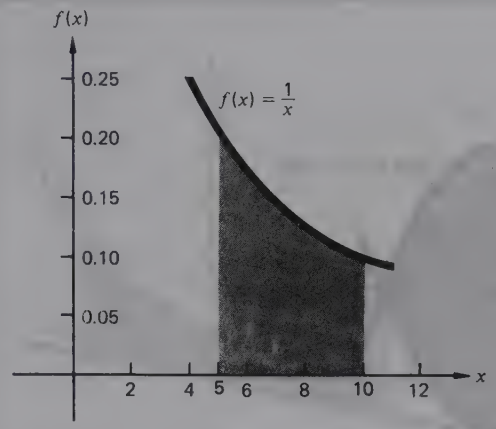


Sec. 18.2, Ejercicio 15

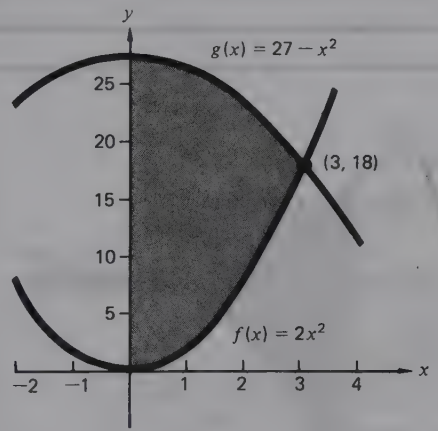


Sec. 18.2, Ejercicio 17

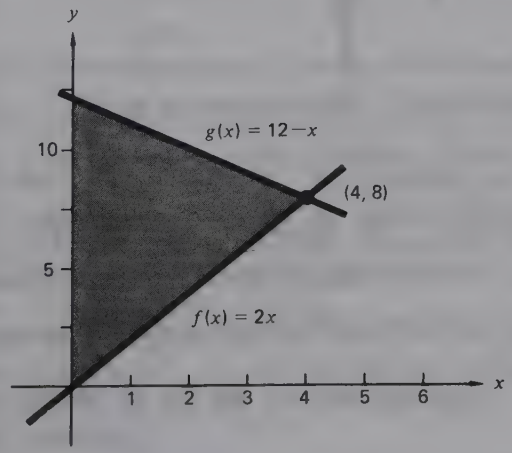
Sec. 18.2, Ejercicio 19

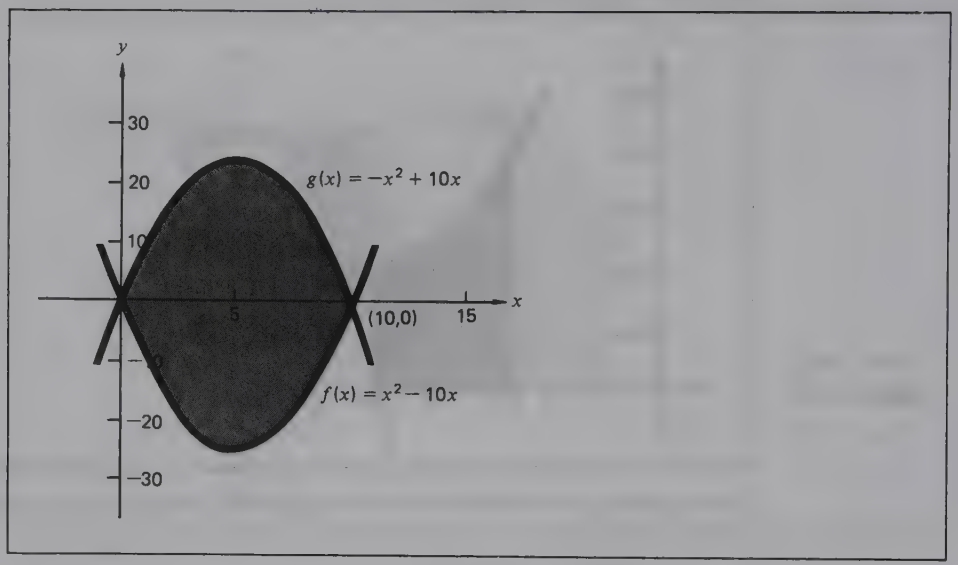


Sec. 18.2, Ejercicio 25

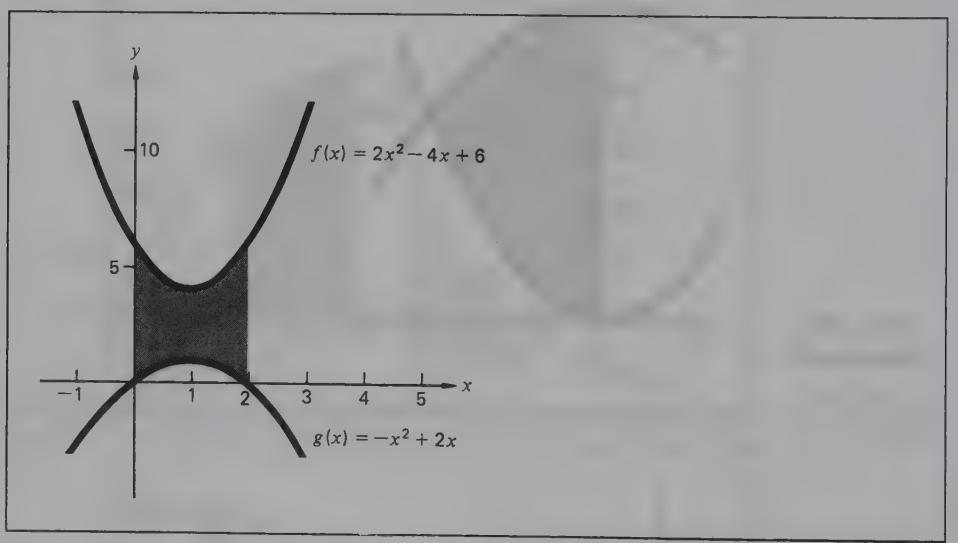


Sec. 18.2 Ejercicio 27



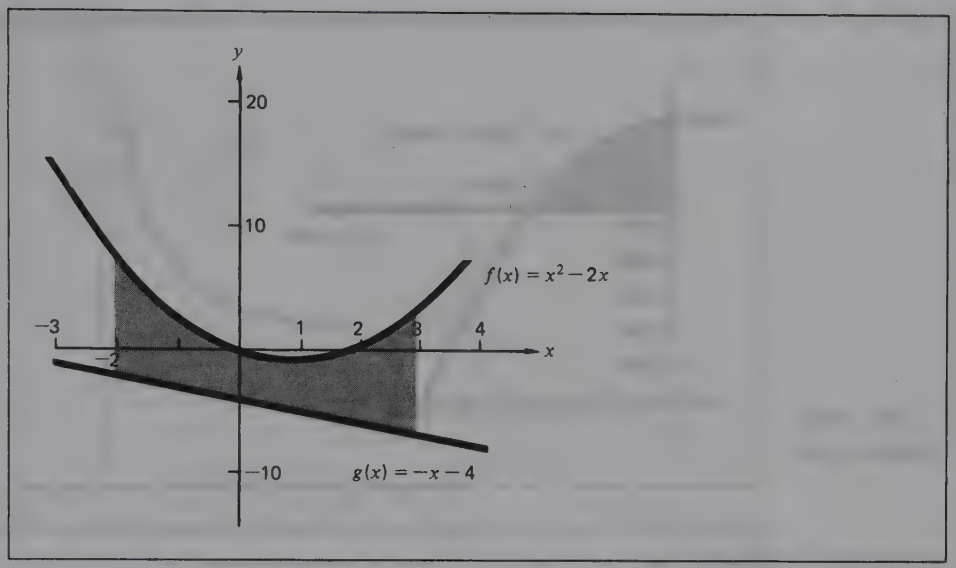


Sec. 18.2, Ejercicio 29

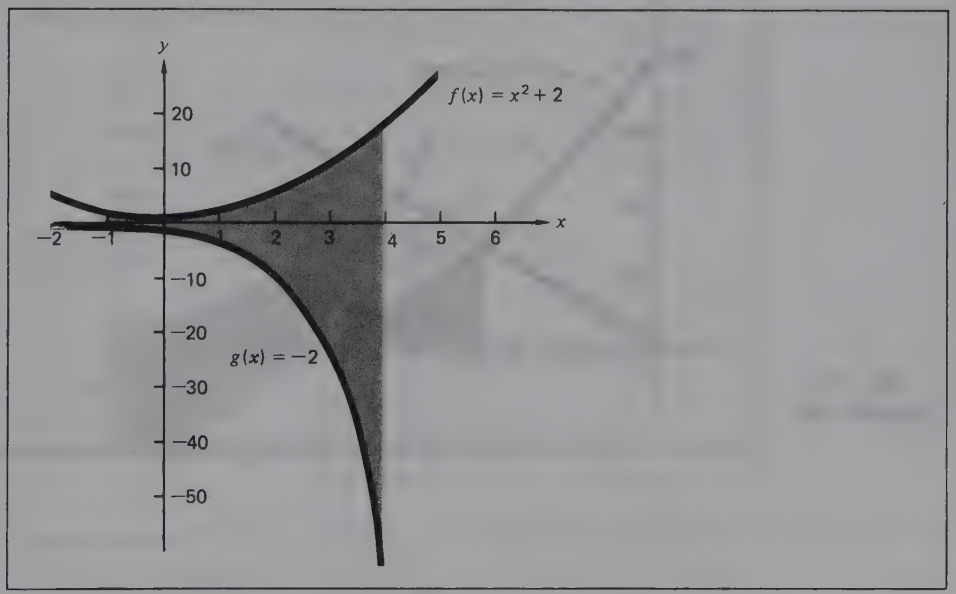


Sec. 18.2, Ejercicio 31

19 (*a*) 72.189, (*b*) 53.598, (*c*) sobrestimada en 18.591; **21** (*a*) 26, (*b*) 26, (*c*) 0; **23** (*a*) $105\frac{1}{3}$, (*b*) $105\frac{1}{3}$, (*c*) 0; **25** (*a*) $30\frac{1}{12}$, (*b*) 30, (*c*) sobrestimada en $\frac{1}{12}$; **27** (*a*) 269.3192, (*b*) 267.9907, (*c*) sobrestimada en 1.3285; **29** (*a*) 1 063 670 388, (*b*) 1 060 498 832, (*c*) sobrestimada en 3.171 556; **31** (*a*) 20, (*b*) 20, 20, 20, (*c*) todas son iguales; **33** (*a*) $49\frac{1}{3}$, (*b*) 49, 50, $49\frac{1}{3}$, (*c*) regla de Simpson; **35** (*a*) 16, (*b*) 15.5, 17, 16,



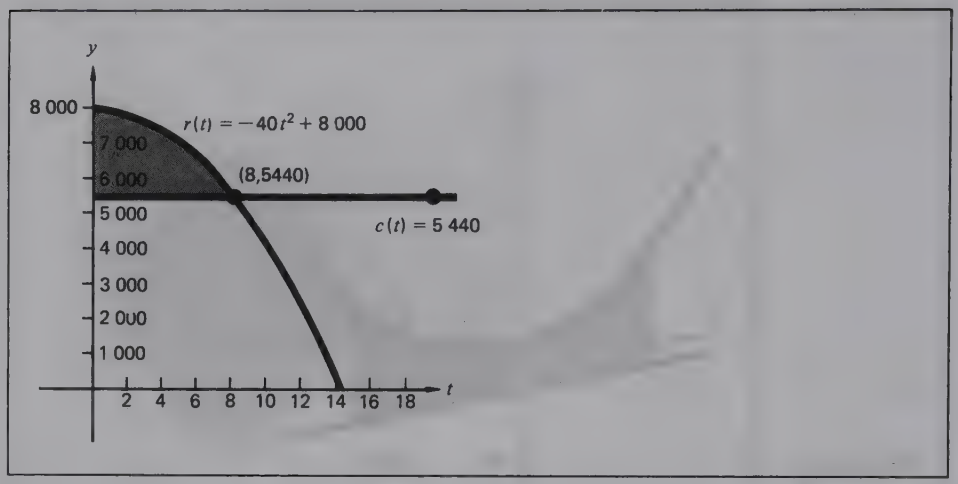
Sec. 18.2, Ejercicio 33



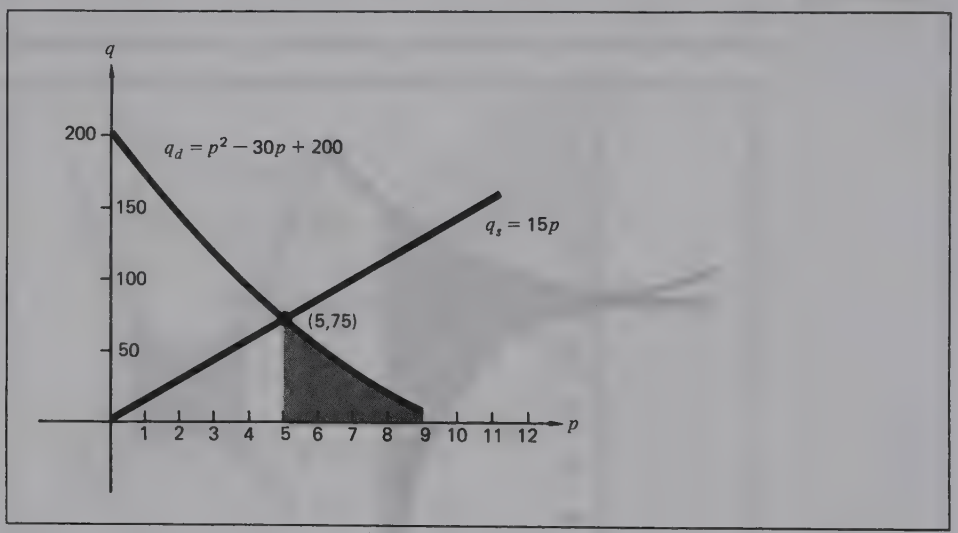
Sec. 18.2, Ejercicio 35

(*c*) regla de Simpson; **37** (*a*) 3 488.31, (*b*) 3 452.23, 3560.68, 3489.48. (*c*) regla de Simpson; **39** (*a*) 1 057 062 656, (*b*) 571 474 808.20, 2 177 820 000, 1 422 744 000, (*c*) regla de Simpson; **41** 3.48453, 3.47474, 3.44781; **43** 2.4008, 2.3090, 2.2536; **45** .1202, .1329, .1247; **47** 3.8385, 3.8982, 3.8575;

Sec. 18.4 **1** (*a*) \$2 100, (*b*) \$500; **3** (*a*) véase la figura, (*b*) 8 días; (*c*) \$43 520 (*d*) \$13 653.33; **5** (*a*) 195 082, (*b*) 9.4 horas; **7** (*a*) véase la figura, (*b*) (\$5.75), (*c*) 161.33; **9** 4.0236 días; **11** (*a*) 0.6 (miles de millones de toneladas),



Sec. 18.4, Ejercicio 3(*a*)

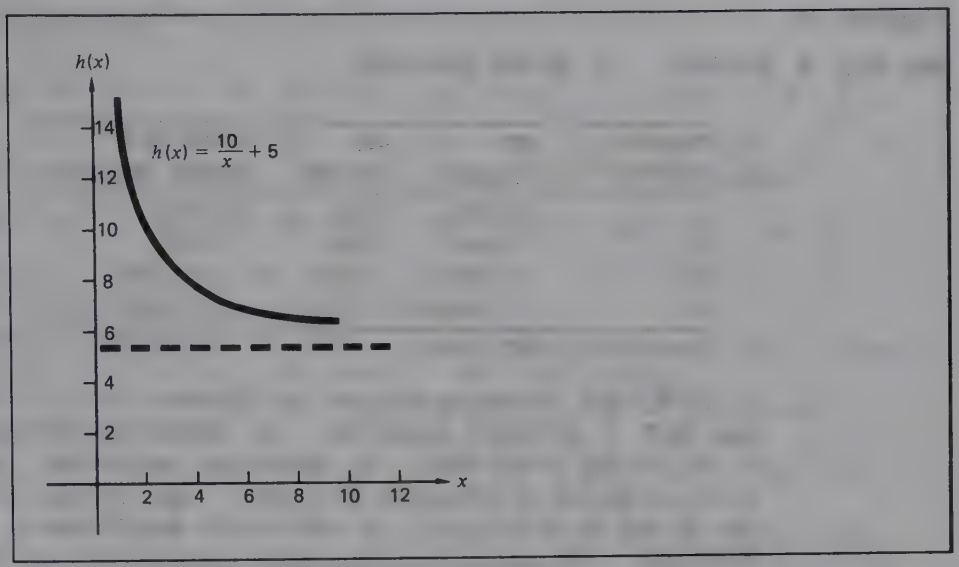


Sec. 18.4, Ejercicio 7(*a*)

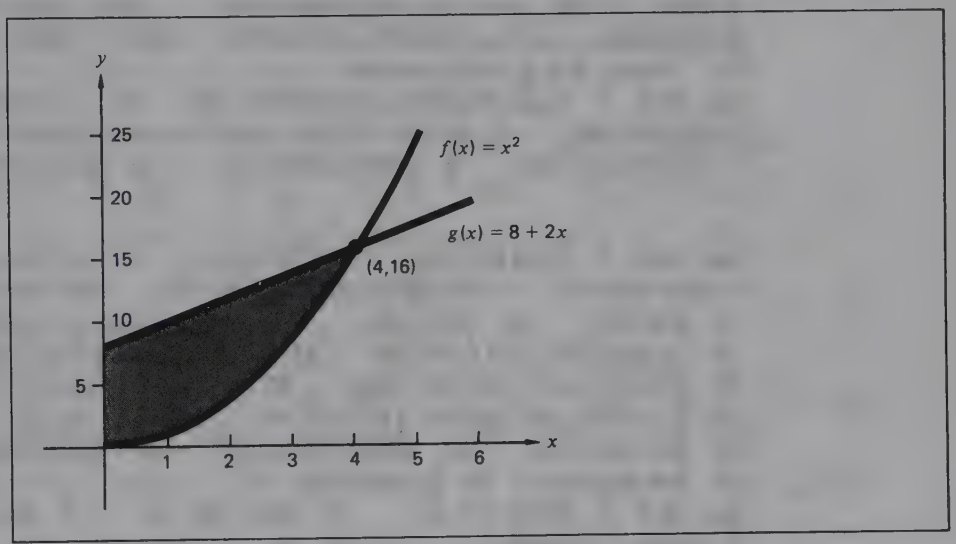
(*b*) 16.44 (miles de millones de toneladas); **13** (*a*) 7, (*b*) 68.026, (*c*) véase la figura, (*d*) como $x \to \infty$, $h(x)$ se acerca a 5 horas por unidad; **15** 1058.13π unidades

Sec. 18.5 **1** 0.444, 0.888; **3** 0.3888

Prueba del capítulo **1** (*a*) $\frac{4}{3}$, (*b*) 9.3416; **2** (*a*) véase la figura, (*b*) $26\frac{2}{3}$; **3** (*a*) \$248/año, (*b*) \$432; **4** 0.800; **5** (*a*) 512, (*b*) 504, 528, 512, (*c*) regla de Simpson



Sec. 18.4, Ejercicio 13(*c*)



Prueba del capítulo, Problema 2(*a*)

Capítulo 19

Sec. 19.1 **1** \$36 000; **3** \$6 000, \$240 000;

5

Periodo semestral	(*P*) Capital	(*I*) Interés	*S* = *P* + *I* Monto compuesto
1	\$10 000	\$500	\$10 500
2	10 500	525	11 025
3	11 025	551.25	11 576.25
4	11 576.25	578.81	12 155.06

Interés total = \$2 155.06.

7 (*a*) \$12 184, (*b*) trimestralmente, por \$28.94
Sec. 19.2 **1** \$7 012.75, \$2 012.75; **3** \$67 503.84, \$43 503.84; **5** \$3 167 408, \$2 367 408; **7** \$99 489.50, \$49 489.50; **9** (*a*) \$2.54, \$1.54, (*b*) \$2.575, \$1.575, (*c*) \$2.59, \$1.59; **11** 24,190; **13** \$18 182.61; **15** \$7 424.70, \$2 575.30; **17** \$27 226.20, \$32 773.80; **19** \$97 872, \$102 128; **21** entre 14 y 15 periodos semestrales (o sea un poco más de 7 años); **23** entre 21 y 22 trimestres, **25** (*a*) 16.64%, (*b*) 16.986%; **27** (*a*) 6.09%, (*b*) 6.136%; **29** entre 7 u y 8%; **31** entre 9 o y 10% por año
Sec. 19.3 **1** (*a*) \$113 946.98, (*b*) \$38 946.98; **3** (*a*) \$43 081.98, (*b*) \$25 081.98; **5** (*a*) \$30 525.50, (*b*) \$31 444.73, (*c*) \$31 930.83; **7** \$7416, \$12 920; **9** \$9936, \$202 560; **11** \$516, \$1744

Sec. 19.4 **1** \$100 651.20; **3** \$78 110.40; **5** \$13 677.74; **7** \$44 955.04; **9** (*a*) \$212 839, (*b*) \$287 161; **11** \$35 396; **13** \$99 600; **15** \$124 540; **17** (*a*) \$111 460, (*b*) \$168 760; **19** (*a*) \$265.68, (*b*) \$1 564.48; **21** \$726.96, \$218 088, \$138 088; **23** \$745.70, \$178 968, \$98 968; **25** \$817.83, \$245 349, \$155 349; **27** \$1 198.06, 287 534.40, \$167 534.40; **29** \$57.13, \$17 139; **31** \$53, \$12 720; **33** \$64.27, \$19 281; **35** \$81.66, \$19 598.40; **37** \$68 842.66; **39** \$118 055.74
Sec. 19.5 **1** \$274 474, sí; **3** \$245 146, sí; **5** \$419 412, sí; **7** entre 15 y 16%
Prueba del capítulo **1** \$101 614; **2** \$60 863; **3** (*a*) \$377 006.30, (*b*) \$177 006.30; **4** \$4 472, \$26,336; **5** \$13 821.72; **6** 16.986%; **7** \$100.37, **8** yes, \$4 019.19

APÉNDICE

Sec. A.2 **1** 5^4; **3** $(3)^2(-2)^3$; **5** $(-x^3)$; **7** $a^2b^3c^2$; **9** $\frac{x^4}{y^2z^4}$;
11 x^4y^4; **13** $2^7 = 128$; **15** x^8; **17** x^5y^4; **19** x^6; **21** x^{14};
23 a^{12}; **25** $27x^6$; **27** $4m^6$; **29** $12a^8b^3$; **31** $4096x^{24}$;
33 $1/a^4$; **35** 8; **37** 81; **39** $1/x^5y^5$; **41** x^2; **43** $\frac{1}{8}$;
45 3; **47** 1; **49** x^3/y^3; **51** x^8/y^4; **53** a^8b^4/c^{12};
55 $27x^3y^6/z^9$; **57** -20; **59** $1/a^5$

Sec. A.2 (continúa) **1** $13x$; **3** $5y^3 + 2y^2 - 4y$; **5** $25x^3y^2 - 25xy^3$;
7 0; **9** $21x^4y^2$; **11** $-8a^{10}$; **13** $-2x^4 + 2x^2y$;
15 $x^4y - 2x^3y^2 + x^2y^3$; **17** $a^2 + 2ab + b^2$; **19** $a^2 - 2ab + b^2$;
21 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; **23** $4xy$; **25** $-3/y$; **27** $5x - 8$;
29 $-4a^2 + 3a - 2$; **31** $2x^5 + 3x^2 - 4x$; **33** $-12x^2 + 4xy^2 - 6y$

Sec. A.3 **1** $2a(x - 4a^2)$; **3** $2xy(2x^2 - 3y^2 + 4xy)$;
5 $3a(3a^2 - 5a - 9)$; **7** no puede factorizarse; **9** $(p + 12)(p - 3)$;
11 $(r + 1)(r - 22)$; **13** no puede factorizarse; **15** $(6m - 1)(m - 3)$;
17 $(2x + 1)(4x - 3)$; **19** $(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$;
21 $(9x^2 + 25)(3x + 5)(3x - 5)$; **23** no puede factorizarse;
25 $(1 + 2x)(1 - 2x + 4x^2)$; **27** $x^2(x - 2)(x + 1)$;
29 $x(x - 8)(x + 5)$; **31** $x^3(x - 7)(x + 3)$;
33 $ab(a^2 + 9)(a + 3)(a - 3)$; **35** $2uv(9 + u^2)(3 + u)(3 - u)$

Sec. A.4 **1** $\frac{11}{30}$; **3** $\frac{1}{8}$; **5** $(x - 2)/x^2$; **7** $(x^2 + 7x)/(x^2 - 4)$;
9 $(10x^2 - 2)/x^2$; **11** $(3a^2 + 3a - 5)/(a^2 + 2a + 1)$; **13** -3;
15 $1/3a^2b$; **17** $\frac{7}{15}$; **19** $2a^3b^2/3c^2$; **21** $(x - 4)/(x^2 - 5x - 4)$;
23 $x(x + 1)$; **25** $(x^2 - 3x + 2)/(x^2 + 7x + 10)$

Sec. A.5 **1** $a^{17/6}$; **3** $x^{31/30}$; **5** $a^{5/4}$; **7** $-27x^2$; **9** $a^{4/3}$;
11 $x^{44/15}$; **13** $x^{2/15}$; **15** 25; **17** $-a$; **19** $-2x^2$; **21** $12x^3$;
23 $2a^2b$; **25** a^3bc^6; **27** $6a^2$; **29** $5\sqrt{7}$; **31** $7\sqrt{2}$;
33 $4\sqrt{x} - x\sqrt{x}$; **35** 4; **37** $\frac{8}{3}$; **39** $25x/7y^2$; **41** $4x^2/3y^3$;
43 2; **45** $\sqrt[3]{x^2}$; **47** $\sqrt[5]{(ab)^3}$; **49** $1/\sqrt{x}$; **51** $\frac{1}{2}$;
53 $\sqrt[5]{a^3}$; **55** $\sqrt[4]{(100 - x)}$; **57** $(45x)^{1/2}$; **59** $x^{3/4}$; **61** $x^{5/3}$;
63 x^2; **65** $(x + y)^{1/2}$; **67** $(3 - x)^{3/4}$

Sec. A.6 **1** 6; **3** 6; **5** -10; **7** -3; **9** 3.5; **11** ± 6;
13 4, 1; **15** 5, -2; **17** sin raíces; **19** $4, -\frac{1}{2}$; **21** $\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}$;
23 -3, 2; **25** 3, -2; **27** sin solución; **29** $x \geq -10$; **31** sin solución; **33** $x \leq 4$; **35** $x \geq -6$; **37** $-36 \leq x \leq -4$;
39 sin solución

ÍNDICE

Abscisa, 25
Algoritmo del cruce de arroyo, 325
Algoritmos de corte de plano, 352
Algoritmos de rama y frontera, 352
Análisis de costo-beneficio, 934
Análisis de equilibrio, 98
Análisis de sensibilidad, 267, 267
Análisis de utilidad marginal, 659
Análisis marginal, 659
Antiderivada, 808
Anualidad, 919
  suma de, 919
  valor actual de, 927
Aproximación por límites para hallar una derivada, 582
Árbol de probabilidad, 409
Arco:
  bidirigido, 207
  dirigido, 207
  no dirigido, 207
Arco bidirigido, 207
Área de soluciones factibles, 242
Asíntota:
  horizontal, 562
  vertical, 562
Asíntota horizontal, 562
Asíntota vertical, 566

Base, 259

Cálculo, 553
  (Véase también Cálculo integral)
Cálculo integral, 553
  aplicaciones del, 877
  teorema fundamental del, 851
  y probabilidad, 890
Capital, 904
Capitalización continua, 705, 706
Cociente de diferencia, 573
Cofactor, 184
Combinación, 382, 387
Complemento, 376
Concavidad, 527, 619
Conjunto convexo, 247
Conjunto finito, 122
Conjunto infinito, 122
Conjunto nulo, 122, 376
Conjunto solución, 122
Conjunto universal, 376
Conjuntos, 374
  diagrama de Venn para, 377
  elementos de, 375
  intersección de, 380
  método de enumeración de, 375
  método descriptivo de propiedad, 375
  universal, 376
  unión de, 378
Constante de integración, 813
Continuidad, 554, 567
Costo de indivisibilidad, 346
Costo marginal, 662
Costos excesivos de las operaciones en gran escala, A10
Criterio (de Laplace) de igualdad de probabilidades, 496
Criterio de Hurwicz, 495
Criterio de arrepentimiento, 495
Criterio de arrepentimiento, 496
Criterio maximax, 494
Criterio maximin, 495
Cuadrante, 26
Curva normal, 456

Dependencia estadística, 375
Derivada, 582
  de orden superior, 597
  parcial mixta, 758
  parcial, 747
  primera,, 597, 616
  pura, 758
  segunda, 598, 617, 758
Derivadas de orden superior, 597
Derivadas parciales, 747
  puras, 758
Derivadas parciales puras, 758
Desigualdades, A25
Destino, 228
Desviación estándar, 443
  de una distribución discreta de probabilidad, 446
Determinante, 123
  método de expansión por cofactores, 186
Diagonal principal, 168
Diagrama de árbol, 383
Diagramas de Venn, 377
Diferenciación, 553, 590
Dirección final, 544, 647
Discriminante, A24
Distribución binominal de probabilidad, 448, 449
  desviación estándar, 454
  media, 454
Distribución de frecuencia, 431
Distribución de probabilidad, 429, 433
  desviación estándar de una discreta, 446
  media de una discreta, 442
  normal, 456
  (*Véase también* Distribución de probabilidad binominal)
Distribución normal de probabilidad, 456
Dominio, 2, 6
  restringido, 7, 640
Dominio restringido, 7, 640

Ecuación diferencial, 812
condiciones de frontera, 824
ordinaria, 812
parcial, 812
soluciones generales, 824
soluciones particulares, 824
Ecuación diferencial ordinaria, 812
Ecuación diferencial parcial, 812
Ecuaciones lineales, 38
Ensayo, 392
Espacio de solución no acotado, 251, 307
Espacio muestral, 392
Estados de equilibrio, 481
Estados de la naturaleza, 491
Estrategia pura, 505
Estrategia mixta, 506, 509
Estrategias dominantes, 510
Evento, 392
colectivamente exhaustivo, 396
compuesto, 394
dependiente, 407
independiente, 407
mutuamente excluyente, 396
Evento compuesto, 394
Evento dependiente, 407
Evento independiente, 407
Eventos colectivamente exhaustivos, 396
Eventos mutuamente excluyentes, 396
Experimento:
aleatorio, 391
espacio muestral del, 392
Exponente(s), A4, A18
leyes de los, A5
Expresión algebráica, A6

Factor de fondo de amortización, 922
Factor de interés compuesto, 910
series, 921
Factor de recuperación de capital, 928
Factor de series de interés compuesto, 921
Factor de series de valor actual, 927
Factor de valor actual, 912
Factores de prioridad, 358
Factorial, 385
Factorización, A10
Fondo de amortización, 922
Forma pendiente-intercepción, 54
Fórmula cuadrática, 531, A24
Fórmula de dos puntos, 51, 60
Fórmula de integración por partes, 831
Fracciones, A14
Fracciones parciales, 833
Frecuencia relativa, 433
Función, 1
biderivada, 8, 743
creciente, 616
decreciente, 616
explícita, 20
multiderivada, 8, 743
prueba de la línea vertical, 31
racional, 15, 546
univariada, 8
Función compuesta, 8
Función constante, 11, 590
Función creciente, 616
Función cuadrática, 13, 525, 533
Función cúbica, 14, 544
Función de costo lineal, 83
Función de densidad de probabilidad, 890
Función de ingresos lineal, 85
Función de utilidad lineal, 86
Función decreciente, 616
Función estrictamente cóncava (convexa), 624
Función explícita, 20
Función exponencial, 16, 695, 696
Función implícita, 20
Función lagrangiana, 792
Función lineal, 12, 27, 81
Función logarítmica, 17, 695, 724
Función multivariada, 8, 743
Función objetivo, 224
Función polinominal, 14, 543
Función racional, 15, 546
Función univariada, 8
Funciones bivariadas, 8, 743
Funciones no lineales, 522

Grado de un término, A7

Hiperplano, 69
Hipersuperficie, 787
Hipotecas, 928
Histogramas, 434

Índice de optimismo, 496
Ingreso marginal, 661
Integración, 813
constante de, 813
integral definida, 847, 850
integrando, 813
límites de, 851
regla de Simpson, 873
regla del rectángulo, 869
regla del trapecio, 870
símbolo de integral, 813
Integral definida, 847, 850
métodos de aproximación, 869
propiedades de la, 853
Integral indefinida, 813
Integrando, 813
Interés compuesto, 905
de capitalización continua, 705, 706
Interés simple, 904
Intersecciones con los ejes, 47
Intersección de conjuntos, 380
Intervalo abierto, 568
Intervalo cerrado, 568
Intervalos:
abiertos, 568
cerrados, 568
semiabiertos, 568
Intervalos semiabiertos, 568

Juegos de dos personas, 503
Juego de n personas, 511
Juego de la suma no cero, 511

Juego de suma cero, 504
Ley distributiva de la multiplicación, A10
Logaritmo, 719
Logaritmos naturales, 719
Límite, 554
Límites de integración, 851
Línea secante, 573
Línea tangente, 580
Líneas de utilidades iguales, 245

Matriz (matrices), 165
  adición y sustracción de, 171
  cuadrada, 168
  de cofactores, 184
  de transición, 476
  determinante de una, 182
  dimensión de una, 166
  inversa de una, 191
  multiplicación de una, 173
  multiplicación de escalares, 172
  multiplicación de escalares, 172
  no singular, 183
  producto interno de una, 173
  singular, 183
  transpuesta de una, 169
  unitaria, 169
Matriz adyacente, 209
Matriz cuadrada, 168
Matriz de transición, 476
Matriz hessiana, 788
  acotada, 793
  menores principales de, 789
Matriz hessiana acotada, 793
Matriz identidad, 169
Matriz inversa, 191
Matriz regular de transición, 486
Máximo absoluto, 628
Máximo préstamo pagadero, 931
Máximo relativo, 626, 644, 761
Medida aritmética, 439
Media de una distribución discreta de probabilidad, 442
Mediana, 440
Medio espacio permisible, 239
Menores principales, 789
  acotados, 795
Método de enumeración y conjuntos, 375
Método de fracciones parciales, 834
Método de la expansión por cofactores, 186
Método de la esquina noroeste, 325
Método del cofactor inverso de la matriz, 184
Método del flujo efectivo descontado, 934
Método del punto en la esquina, 247
Método descriptivo de propiedad, 375
Método símplex, 224, 254, 285
Métodos de aproximación:
  regla del rectángulo, 869
  regla del trapecio, 870
  regla de Simpson, 873
Mínimo absoluto, 628
Mínimo relativo, 626, 644, 761

Moda, 441
Modelo de asignación, 338
Modelo de programación binaria, 344
Modelo de programación en enteros mezclada, 344
Modelo de programación entera pura, 344
Modelo de transporte, 228, 320
Modelos de equilibrio, 97
Monto compuesto, 905, 907
Multiplicación por escalares, 172
Multiplicador de Lagrange, 791

Nodos, 207
Números irracionales, A2
Nímeros racionales, A2, A14
Números reales, A2

Operaciones por renglón, 131, 290
Optimización, 615
  restringrida, 791
  no restringida, 791
Optimización no restringida, 791
Optimización restringida, 791
Ordenada, 24
Origen, 26, 228, A2

Pago esperado, 496
Parábola, 527
  eje de simetría, 527
  vértice, 527
Pendiente, 49, 52, 571
Pérdida (costo) de oportunidad, 497
Permutación, 382
Plano cartesiano, 24
Plano coordenado, 24
Poliedro rectangular, 64
Precio (cantidad) de equilibrio, 538
Precio sombra, 267
Primera derivada, 597, 616
Probabilidad:
  condicional, 410
  conjunta, 408
  frecuencia relativa, 398
  marginal, 408
  objetiva, 399
  subjetiva, 399
Probabilidad condicional, 410
Probabilidad conjunta, 408
Probabilidad marginal, 408
Probabilidad subjetiva, 399
Problema dual, 285, 296
Problema primario, 296
Procedimiento de eliminación, 125
Procedimiento de eliminación gaussiana, 131, 140
Procedimiento de reducción gaussiana, 298
Proceso aleatorio (experimentos), 391
Proceso de Bernoulli, 449
Proceso de Markov, 475
Proceso interactivo, 260
Producto interno, 173

Programación por objetivos, 355
factores de prioridad de, 358
restricción de objetivos en, 357, 359
restricción de sistema en, 357, 359
variables de desviación de, 357
Programación en enteros, 344
algoritmos de corte de plano en, 352
algoritmos de rama y frontera, 352
costo de la indivisibilidad en la, 33
programación binaria, 344
programación entera mezclada, 344
programación entera pura, 344
Programación lineal, 224
análisis de postoptimización, 267
área de soluciones factibles, 242
base, 259
función objetivo, 224
método de punto en la esquina, 247
método símplex, 224, 254, 285
precio sombra, 267
problema dual, 285, 296
problema primario, 296
restricciones estructurales, 226, 254
restricción de no negatividad, 226
soluciones óptimas alternativas, 251, 303, 305, 334
solución básica, 259, 288
solución factible básica, 258, 288
solución factible, 258
solución no acotable, 303, 307
solución no factible, 251, 303, 306
variable artificial, 256
variable de demasía, 256
variable de holgura, 255
variables básicas, 259
variables no básicas, 259, 260
Programación matemática, 224
Prueba de la derivada de orden superior, 638
Prueba de la línea vertical, 31
Prueba de la primera derivada, 630
Prueba de la segunda derivada, 634
Punto crítico, 628, 762
Punto de equilibrio, 97
Punto de inflexión, 619, 646
Punto de silla, 505, 765

Radicales, A18
radicando, A19
Rango (recorrido), 2, 6,
Rango restringido, 7
Restricciones, 224
Recta numérica, A2
Regla de la cadena, 601
Regla de Simpson, 873
Regla del rectángulo, 869
Regla del trapecio, 870
Relación inversa, A20
Restricción de objetivos, 357, 359
Restricción del sistema, 357, 359

Segunda derivada, 598, 617, 758
Solución básica, 258, 288
Solución básica factible, 258, 288
Solución no factible, 251, 303. 306
Solución primaria dual, 296
Solución(es) factible(s), 258
área de, 242
básicas, 258, 288
no factibles, 258, 288
Soluciones alternativas óptimas, 251, 303, 305, 334
Subconjunto, 377
Suma de una anualidad, 919
Símbolo de integral, 813

Tabla de pagos, 491
Tabla de utilidad condicional, 498
Tasa de cambio instantánea, 578
Tasa de interés, 904
anual efectiva, 916
Tasa de interés anual efectiva, 916
Tasa nominal, 916
Tasa promedio de cambio, 571
Teorema de Young, 759
Teorema fundamental de cálculo integral, 851
Teoría de juegos, 503
Teoría de las decisiones, 491
Toma de decisiones:
en condiciones de certidumbre, 492
en condiciones de incertidumbre, 492
en condiciones de riesgo, 492
Transpuesta de una matriz, 169
Traza, 746
Trazado de curvas, 643

Unión de conjuntos, 378

Valor actual (presente), 911
Valor absoluto, A3
Valor actual de una anualidad, 927
Valor actual neto, 935
Valor crítico, 628
Valor de juego, 510
Valor monetario esperado, 498
Valor promedio, 439
Valores de equilibrio, 484
Variable aleatoria continua, 431
Variable aleatoria discreta, A12
Variable aleatoria, 429
continua, 431
discreta, 430
Variable artificial, 256
Variable con subíndice, 8
Variable de decisión, 224, 359
Variable de demasía, 256
Variable de holgura, 245
Variable dependiente, 3
Variable independiente, 3
Variable no restringida, 312
Variables básicas, 259
Variables de desviación, 359
Variables no básicas, 259, 260
Vector columna, 168
Vector de estado, 478
Vector renglón, 167
Velocidad instantánea, 579
Vértice, 527

218

OTROS TÍTULOS McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EN ESPAÑOL CON TEMAS AFINES:

Ayres	MATEMÁTICAS FINANCIERAS (SCHAUM)
Barnett	MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y CIENCIAS SOCIALES 2ED.
Berenson	ESTADÍSTICA PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA
Chiang	MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA 3ED.
Chow	ANÁLISIS ESTADÍSTICO
Díaz/Mata	MATEMÁTICAS FINANCIERAS
Dowling	MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS (SCHAUM)
Glass	MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ECONOMISTAS
Hoffman	CÁLCULO APLICADO
Kazmier	ESTADÍSTICA APLICADA A LA ADMINISTRACIÓN Y A LA ECONOMÍA (SCHAUM)
Portus	MATEMÁTICAS FINANCIERAS 3ED.
Ullman	MÉTODOS CUANTITATIVOS EN ADMINISTRACIÓN (SCHAUM)

9 789684 225633
ISBN: 968-422-563-6

Mc Graw Hill

ISBN 968-422-563-6